PROJETO DE MÁQUINAS

UMA ABORDAGEM INTEGRADA

4ª Edição

ROBERT L. NORTON

Tradução da 2ª Edição:

Parte I:

Konstantinos Dimitriou Stavropoulos
Ph. D. em Engenharia Mecânica pela Stanford University
Professor Titular da Escola de Engenharia Mauá, IMT, São Paulo

Parte II:

João Batista de Aguiar
Ph. D. em Engenharia Mecânica pelo Massachusetts Institute of Technology
Professor de Engenharia Aeroespacial da UFABC

José Manoel de Aguiar
Ph. D. em Engenharia Mecânica pela Stanford University
Professor de Engenharia Mecânica na Fatec-SP

Tradução da 4ª Edição: Capítulos 8 e 16

Renato Machnievscz
Mestre em Engenharia Mecânica pela PUCPR
Professor da PUCPR

Outros trechos:

Jéssica Fraga de Castro e Equipe Bookman

N882p Norton, Robert L.
Projeto de máquinas [recurso eletrônico] : uma abordagem integrada / Robert L. Norton ; [tradução: Konstantinos Dimitriou Stavropoulos ... et al.]. – 4. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2013.

Tradução dos capítulos 8 e 16 da 4. ed. por Renato Machnievscz
Tradução de outros trechos da 4. ed. por Jéssica Fraga de Castro e Equipe Bookman.
Editado também como livro impresso em 2013.
ISBN 978-85-8260-023-8

1. Engenharia mecânica. 2. Máquinas. 3. Mecanismos – Projeto. I. Título.

CDU 621

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

Robert L. Norton
Worcester Polytechnic Institute
Worcester, Massachusetts

PROJETO DE MÁQUINAS

UMA ABORDAGEM INTEGRADA

4ª Edição

Versão impressa
desta obra: 2013

2013

O AUTOR

Robert L. Norton graduou-se em Engenharia Mecânica e Tecnologia Industrial na Northeastern University e possui mestrado em Projeto de Engenharia pela Tufts University. É engenheiro profissional registrado em Massachusetts e possui uma ampla experiência industrial nas áreas de engenharia de projeto e produção, além de muitos anos de experiência lecionando engenharia mecânica, engenharia de projeto, ciência da computação e outras disciplinas relacionadas na Northeastern University, na Tufts University e no Worcester Polytechnic Institute.

Na Polaroid Corporation, por 10 anos, projetou câmeras, mecanismos relacionados e máquinas automáticas de alta velocidade. Trabalhou por três anos na Jet Spray Cooler Inc. Por cinco anos, auxiliou no desenvolvimento de dispositivos de coração artificial e circulação não invasiva assistida no Tufts New England Medical Center e no Boston City Hospital. Desde que deixou a indústria pra juntar-se ao meio acadêmico, prosseguiu como consultor independente para projetos de engenharia, que variam de produtos médicos a máquinas de produção a alta velocidade. Ele possui 13 patentes norte-americanas.

Norton está no Worcester Polytechnic Institute desde 1981 e atualmente possui os títulos Milton P. Higgins II de Professor Emérito de Engenharia Mecânica, Russell P. Searle de Professor Emérito, Chefe do Grupo de Projetos em seu departamento e Diretor do Gillette Project Center no Worcester Polytechnic Institute. Ele leciona nos cursos de graduação e pós-graduação em Engenharia Mecânica com ênfase em projeto, cinemática, vibrações e dinâmica de máquinas.

Norton é autor de diversos artigos técnicos e de periódicos acerca de cinemática, dinâmica de máquinas, projeto e produção de camos, informática no ensino e ensino de engenharia, além dos livros *Design of Machinery, Machine Design: An Integrated Approach* (*Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada*) e *Cam Design and Manufacturing Handbook*. Ele é sócio da American Society of Mechanical Engineers (Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos) e membro da Society of Automotive Engineers (Sociedade de Engenheiros Automotivos). Contudo, devido ao seu grande interesse por ensino, orgulha-se sobretudo por ter sido escolhido, em 2007, Professor do Ano no Estado de Massachusetts pelo Conselho de Promoção e Apoio à Educação e pela Fundação Carnegie de Promoção à Educação, que juntos promovem os únicos prêmios de excelência em ensino dos Estados Unidos.

Dedico este livro a:

Donald N. Zwiep

Chefe de Departamento e Professor Emérito
Worcester Polytechnic Institute

Um cavalheiro e um líder,
sem cuja fé e visão
este livro nunca teria sido escrito.

PREFÁCIO

Introdução

Este texto foi planejado para as disciplinas de Dimensionamento (Projeto) de Elementos de Máquinas[§]. A proposta deste livro é apresentar a matéria de forma atualizada com uma forte ênfase no projeto para estudantes de engenharia mecânica. O objetivo básico foi escrever um texto de leitura fácil e que os alunos apreciem, apesar da aridez inerente à disciplina.

Este livro foi criado com a intenção de ser um aperfeiçoamento sobre outros que se encontram disponíveis e proporcionar métodos e técnicas que utilizam a capacidade analítica dos microcomputadores. Ele enfatiza projeto e síntese, bem como análise. Exemplos de problemas, estudos de caso e técnicas de solução são explicados detalhadamente. As ilustrações estão em duas cores. Pequenos problemas são fornecidos em cada capítulo e, quando apropriado, são propostos exercícios mais longos de projetos não estruturados.

Este livro pode ser usado com qualquer programa de computador. Os arquivos para solucionar todos os exemplos e estudos de caso em diferentes linguagens (*Mathcad*, *MATLAB*, *Excel* e *TK Solver*) encontram-se no CD-ROM. Diversos outros programas escritos pelo autor também estão no CD como arquivos executáveis. Entre eles, o gerador de círculos Mohr (MOHR.exe), calculadoras de tensão dinâmica superficial (CONTACT.exe), solucionador de matrizes (MATRIX.exe) e outros programas de projeto de elos e camos. Um índice do conteúdo do CD encontra-se no próprio CD.

Ao mesmo tempo em que este livro procura ser minucioso e completo quanto aos tópicos da engenharia mecânica de análise e teorias de falha, ele também enfatiza os aspectos da síntese e do projeto em um grau mais elevado do que a maioria dos outros textos impressos sobre o assunto. Ele aponta os métodos analíticos em comum necessários para projetar uma grande variedade de elementos e enfatiza o uso da engenharia auxiliada por computador como uma abordagem de projeto e análise dessas classes de problemas. A abordagem do autor para esta disciplina baseia-se em mais de 50 anos de experiência prática em projeto de engenharia mecânica, na indústria e como consultor. Ele também ensinou engenharia mecânica em nível universitário por mais de 30 anos.

O que há de novo na quarta edição?

- Um novo capítulo sobre o projeto de soldagens traz o que há de mais recente no tema.
- O tema da análise por elementos finitos (FEA) está agora no Capítulo 8 e recebeu soluções FEA adicionais desenvolvidas nos capítulos predecessores.
- Modelos *Solidworks* com soluções FEA para diversos estudos de caso estão no CD-ROM.
- Modelos *Solidworks* de diversos problemas de geometria estão no CD-ROM para agilizar soluções FEA para esses problemas, se o professore assim desejar.
- Uma nova técnica de cálculo para rigidez de parafuso e junta é apresentada no Capítulo 15 sobre fixadores.
- Mais de 150 problemas foram acrescentados e revisados com ênfase em unidades do sistema SI.

[§] N. de R. T.: No Brasil, essas disciplinas são comumente chamadas de Dimensionamento de Elementos de Máquinas, Elementos de Construção de Máquinas ou simplesmente Elementos de Máquinas.

Filosofia

Geralmente é a primeira disciplina de engenharia mecânica que apresenta aos alunos problemas definidos de forma incompleta em vez de problemas circunscritos. Contudo, o tipo de projeto tratado nesta disciplina é o *projeto detalhado*, que é apenas uma parte do espectro total da metodologia de projeto. No *projeto detalhado*, o conceito geral, a aplicação e até o formato geral do dispositivo desejado são geralmente conhecidos no início. Não estamos tentando inventar uma nova máquina, mas sim definir forma, dimensões e materiais de um elemento específico da máquina, de modo que ela não falhe em virtude do carregamento e das condições ambientais esperadas em operação.

A abordagem tradicional de ensino da disciplina de Elementos de Máquinas tem sido a de enfatizar o projeto das peças individuais da máquina, ou elementos, tais como engrenagens, molas, eixos, etc. Isso, por vezes, é criticado porque existe o risco de tais disciplinas (ou livros) tornarem-se uma coleção de "livros de receitas" de temas discrepantes que não preparam o aluno para resolver outros tipos de problemas não encontrados nas receitas apresentadas. É relativamente fácil para o professor (ou autor) permitir que a disciplina (ou texto) se degenere para o modo "Bem, é terça-feira, vamos projetar molas. Na sexta-feira projetaremos engrenagens". Se isso acontecer, poderá ser um desserviço ao aluno, porque não desenvolve necessariamente a compreensão fundamental da aplicação prática das teorias em que se baseiam os problemas de projeto.

Entretanto, muitos dos elementos de máquinas tipicamente descritos neste curso oferecem exemplos soberbos da teoria fundamental. Vistos por esse aspecto, e se forem apresentados em um contexto geral, eles podem ser um excelente veículo de desenvolvimento da compreensão do aluno sobre as complexas e importantes teorias da engenharia. Por exemplo, o tema parafusos com pré-carga é um modo perfeito para introduzir o conceito de pré-tensão usada como proteção contra fadiga. Na prática, o aluno talvez nunca seja solicitado a projetar um parafuso com pré-carga, mas ele poderá muito bem utilizar a compreensão de pré-tensão adquirida dessa experiência. O projeto de engrenagens helicoidais resistentes a solicitações variáveis oferece uma excelente maneira para desenvolver a compreensão do aluno sobre as tensões combinadas, tensões Hertzianas e falha por fadiga. Desse modo, a abordagem dos elementos de máquinas é válida e defensável, contanto que a abordagem do texto seja suficientemente geral – isto é, não se deve permitir que ela se degenere em uma coleção de exercícios aparentemente não relacionados, e sim proporcionar uma abordagem integrada.

Uma outra área na qual o autor acha que os textos (e disciplinas de Elementos de Máquinas) são deficientes é na falta de conexão entre a dinâmica de um sistema e a análise de tensão desse sistema. Tipicamente, esses textos apresentam seus elementos de máquina com (como em um passe de mágica) forças predefinidas neles. Mostra-se ao estudante como determinar as tensões e deflexões causadas por essas forças. No projeto de máquina real, as forças nem sempre são predefinidas, podendo, em grande parte, dever-se às acelerações das massas das peças móveis. Entretanto, as massas não podem ser determinadas com precisão até que a geometria seja definida e uma análise de tensão determine a resistência da suposta peça. Existe, assim, um impasse que se quebra apenas por meio da iteração, isto é, supor a geometria de uma peça e definir suas propriedades geométricas e de massa, calcular as forças dinâmicas devidas, em parte, ao material e à geometria da peça. Calcular, então, as tensões e deflexões resultantes dessas forças, descobrir sua falha, reprojetar e repetir.

Abordagem integrada

O texto está dividido em duas partes. A primeira apresenta os fundamentos de tensão, deformação, deflexão, propriedades de materiais, teorias de falhas, fenômeno da fadiga, mecânica da fratura, FEA, etc. Esses aspectos teóricos são apresentados de modo semelhante ao de outros textos. A segunda parte apresenta o estudo dos elementos de máquinas específicos e típicos utilizados como exemplos de aplicações da teoria, mas também tenta evitar apresentar uma sequência de tópicos discrepantes em favor de uma abordagem integrada que conecte os vários tópicos por meio de *Estudos de Caso*.

A maioria dos livros sobre Elementos de Máquinas contém muito mais tópicos e conteúdo do que poderia abranger uma disciplina de um semestre. Antes da primeira edição deste livro, um questionário foi enviado a 200 professores de Elementos em universidades dos EUA, solicitando sua opinião sobre a importância relativa e o conjunto de tópicos típicos desejáveis de um texto sobre elementos de máquinas. A cada revisão para a segunda, a terceira e a quarta edições, os leitores foram novamente ouvidos para determinar possíveis mudanças. As respostas foram analisadas e usadas para guiar a estrutura e o conteúdo de todas as edições. Um dos desejos mais fortes expressos desde o início pelos respondentes foram os *Estudos de Caso*, que apresentam problemas de projetos realistas.

Tentamos cumprir esse objetivo estruturando o texto ao redor de uma série de 10 estudos de caso. Esses estudos de caso apresentam diferentes aspectos do mesmo problema de projeto em sucessivos capítulos, por exemplo, definindo as forças estáticas ou dinâmicas do dispositivo no Capítulo 3, calculando as tensões decorrentes das forças estáticas no Capítulo 4 e aplicando uma teoria de falha apropriada para determinar seu coeficiente de segurança no Capítulo 5. Os capítulos posteriores apresentam estudos de caso mais complexos, com mais conteúdo de projeto. O estudo de caso do Capítulo 6 é um exemplo disso: um problema real, retirado da prática do autor. O Capítulo 8 apresenta a análise FEA de diversos estudos de caso e compara os resultados às soluções clássicas apresentadas em capítulos anteriores.

Os estudos de caso oferecem uma série de projetos de máquinas ao longo do livro, contendo várias combinações dos elementos de máquinas normalmente tratados neste tipo de texto. As montagens contêm alguns conjuntos de elementos, tais como conexões sujeitas a esforços axial e de flexão combinados, colunas sujeitas a flambagem, eixos em flexão e torção combinados, engrenagens sob carregamento alternado, molas de retorno, junções sob carga de fadiga, rolamentos, etc. Essa abordagem integrada apresenta várias vantagens. Ela oferece ao estudante um problema de projeto genérico inserido em um contexto em vez de uma série de entidades discrepantes e não relacionadas. O aluno consegue, então, ver as inter-relações e a racionalidade das decisões de projeto que afetam cada um dos elementos. Esses estudos de caso mais abrangentes estão na Parte II do texto. Os estudos de caso da Parte I são de alcance mais limitados e dirigidos aos tópicos de engenharia mecânica do capítulo. Além dos estudos de caso, cada capítulo tem uma seleção de exemplos resolvidos para reforçar tópicos específicos.

O Capítulo 9, Estudos de Caso de Projeto, dedica-se à organização de três estudos de caso de projetos que são usados nos capítulos seguintes para reforçar os conceitos por trás do projeto e da análise de eixos, molas, engrenagens, fixadores, etc. Nem todos os aspectos desses estudos de caso de projeto são apresentados como exemplos resolvidos, visto que uma outra finalidade é oferecer ao aluno material para trabalhos de projeto. O autor usou esses tópicos do estudo de casos como trabalhos de projeto com duração de várias semanas ou do curso todo

para alunos individuais ou em grupos com razoável sucesso. Utilizar trabalhos de projeto com definição incompleta serve para reforçar muito mais os aspectos de projeto e análise da disciplina do que solicitar a resolução de listas de exercícios completamente definidos.

Conjuntos de problemas

A maior parte dos 790 conjuntos de problemas (590 deles, ou 75%) é independente dentro do capítulo, atendendo a sugestões de leitores. Os 25% restantes são retomados em capítulos posteriores. Esses problemas que se repetem são claramente identificados em cada capítulo. Por exemplo, o Problema 3-4 pede uma força estática em um engate de reboque (*trailer*); o Problema 4-4 pede uma análise de tensão do mesmo engate baseado nas forças calculadas no Problema 3-4.; o Problema 5-4 pede o fator de segurança estática do engate usando a tensão calculada no Problema 4-4.; o Problema 6-4 pede a análise de falha por fadiga do mesmo engate, e o Problema 7-4 pede a análise de tensão superficial, etc. O mesmo engate de reboque (trailer) é usado como um estudo de caso FEA no Capítulo 8. Assim, a complexidade subjacente ao problema de design é desdobrada à medida que novos tópicos são introduzidos. Um professor que deseja usar essa abordagem pode usar o mesmo problema em capítulos subsequentes. Os professores que não desejam usar problemas interligados podem evitá-los recorrendo apenas aos problemas cuja numeração não está em negrito.

Organização do texto

O Capítulo 1 oferece uma introdução à metodologia de projetos, formulação de problemas, coeficientes de segurança e unidades. As propriedades dos materiais são revisadas no Capítulo 2, pois até mesmo o estudante que teve a primeira disciplina sobre ciência dos materiais ou metalurgia normalmente tem uma compreensão apenas superficial do amplo espectro das propriedades dos materiais de engenharia necessários para o projeto de máquinas. O Capítulo 3 apresenta uma revisão de análises de solicitações estáticas e dinâmicas, incluindo vigas, vibrações e solicitações de impacto, e constitui a base para uma série de estudos de casos usados nos capítulos posteriores para ilustrar os tópicos de análise de tensão e de deflexão com alguma continuidade.

A disciplina de Projeto de Elementos de Máquinas, em sua essência, é realmente uma disciplina de nível intermediário de análise aplicada de tensões. Consequentemente, o Capítulo 4 apresenta uma revisão dos fundamentos da análise de tensão e de deflexão. As teorias de falha estática são apresentadas em detalhes no Capítulo 5, visto que os alunos em geral ainda não digeriram completamente esses conceitos em sua primeira disciplina de análise de tensão. A análise de fratura mecânica sob solicitações estáticas também é introduzida.

A disciplina de Elementos de Máquinas normalmente é a primeira exposição do aluno à análise de fadiga, pois a maior parte das disciplinas introdutórias de análise de tensão lida somente com problemas de solicitação estática. Assim sendo, a teoria de falha por fadiga é apresentada amplamente no Capítulo 6 com ênfase na abordagem tensão *versus* vida para o dimensionamento à fadiga de alto ciclo, que é comumente utilizada no projeto de máquinas com partes girantes. A teoria da fratura mecânica é discutida posteriormente com relação à propagação da trinca sob solicitação cíclica. Os métodos baseados na deformação específica para análise de fadiga de baixo ciclo não são apresentados, mas suas aplicações e finalidades são introduzidas ao leitor e são fornecidas referências bibliográficas

para estudo posterior. As tensões residuais também são abordadas. O Capítulo 7 apresenta uma discussão completa dos fenômenos dos mecanismos de desgaste, tensões de contato e fadiga de superfície.

O Capítulo 8 é uma introdução à análise por elementos finitos (FEA). Muitos professores usam a disciplina de elementos de máquinas para apresentar aos alunos a FEA e a técnicas de projeto de máquinas. O material apresentado no Capítulo 8 não pretende substituir a parte teórica da FEA. Esse material existe em muitos livros-texto voltados para o assunto, e o aluno é estimulado a procurar conhecer a teoria da FEA. Em lugar disso, o Capítulo 8 apresenta técnicas adequadas à aplicação da FEA a problemas de projeto de máquinas. Questões sobre seleção de elementos, refino da malha e a definição das condições de limite adequados são desenvolvidas em detalhes. Esses temas não são habitualmente tratados em livros sobre a teoria de FEA. Muitos futuros engenheiros vão usar, em sua prática profissional, *software* CAD de modelagem sólida e código de análise de elemento finito. É importante que eles tenham conhecimento das limitações e do uso adequado dessas ferramentas. Esse capítulo pode ser estudado mais no começo do curso, se desejado, especialmente se os alunos tiverem de usar FEA para resolver problemas, e é relativamente independente de outros capítulos. Muitos dos vários problemas nos capítulos têm a geometria dos modelos *Solidworks* no CD-ROM.

Esses oito capítulos compreendem a Parte I do texto e deitam a fundação analítica necessária para os elementos de projeto de máquinas. Eles estão organizados para estudo na forma apresentada e com uma sequência lógica, exceção feita ao Capítulo 8, sobre FEA.

A Parte II do texto apresenta os elementos de projeto de máquinas como parte de um todo. Os capítulos da Parte II são essencialmente independentes e podem ser estudados (ou saltados) em qualquer ordem (com exceção do Capítulo 12, sobre engrenagem cilíndricas retas, que deve ser estudado antes do Capítulo 13, sobre engrenagens helicoidais, cônicas e sem-fim). Dificilmente todos os temas do livro serão estudados em um semestre. Capítulos não estudados servirão de referência para os futuros engenheiros em sua vida profissional.

O Capítulo 9 apresenta um conjunto de casos de projetos para serem usados como tarefas e exemplos de estudo de caso de capítulos posteriores, além de fornecer sugestões para tarefas de projetos em complemento aos detalhados estudos de caso descritos anteriormente. O Capítulo 10 investiga o projeto de eixos usando as técnicas de análise de fadiga desenvolvidas no Capítulo 6. O Capítulo 11 discute a teoria e a aplicação de mancais de deslizamento e de rolamento usando a teoria desenvolvida no Capítulo 7. O Capítulo 12 apresenta uma introdução minuciosa à cinemática, à análise de projeto e tensões das engrenagens cilíndricas de dentes retos usando os últimos procedimentos recomendados pela AGMA[§]. O Capítulo 13 estende o projeto de engrenagens para engrenagens helicoidais, cônicas e sem-fim. O capítulo 14 abrange o projeto de molas, incluindo molas helicoidais de compressão, tração e torção, bem como um tratamento minucioso das molas Belleville. O Capítulo 15 trata de parafusos e junções, incluindo parafusos de potência e de fixação com pré-carga. O Capítulo 16 apresenta um tratamento atualizado do projeto de soldagem para cargas estáticas e dinâmicas. O Capítulo 17 apresenta uma introdução ao projeto e à especificação dos freios e embreagens a disco e a tambor. Os apêndices contêm grande quantidade de dados de resistência de materiais, tabelas de perfis industriais e fatores de concentração de tensões, bem como as respostas para os problemas selecionados.

[§] N. de T.: AGMA (American Gear Manufacturers Association) – Associação Americana de Fabricantes de Engrenagens.

Agradecimentos

O autor expressa sua sincera gratidão a todos que revisaram a primeira edição deste texto em diversos estágios do desenvolvimento, incluindo os professores J. E. Beard, Michigan Tech; J. M. Henderson, U. California, Davis; L. R. Koval, U. Missouri, Rolla; S. N. Kramer, U. Toledo; L. D. Mitchell, Virginia Polytechnic; G. R. Pennock, Purdue; D. A. Wilson, Tennessee Tech; Mr. John Lothrop e Professor J. Ari-Gur, Western Michigan Univeristy, que inclusive lecionou com uma versão de teste do livro. Roberto Herrmann (WPI-ME '94) cedeu alguns problemas, e Charles Gillis (WPI-ME '96) resolveu a maior parte dos grupos de problemas na primeira edição.

Os professores John R. Steffen, da Valparaiso University, R. Jay Conant, da Montana State, Norman E. Dowling, da Virginia Polytechnic, e Francis E. Kennedy, da Dartmouth, fizeram muitas sugestões úteis para o aprimoramento e detectaram muitos erros. Agradecimentos especiais vão para o professor Hartley T. Grandin, do WPI, que ofereceu muito incentivo e muitas sugestões e boas ideias ao longo da elaboração do livro e também lecionou usando várias versões de teste em aula.

Três ex-editores e o atual editor da Prentice-Hall merecem menção especial pelos esforços no desenvolvimento deste livro: Doug Humphrey, que não aceitou um não como resposta ao me persuadir a escrevê-lo, Bill Stenquist, que frequentemente disse sim às minhas solicitações e zelou habilmente pelo livro até a conclusão na primeira edição, e Eric Svendsen, que ajudou a concluir a terceira edição e agregou valor ao livro. O apoio de Tacy Quinn foi muito importante na quarta edição.

Desde a primeira impressão do livro, em 1995, vários usuários gentilmente apontaram erros e sugeriram melhorias. Meus agradecimentos aos professores R. Bourdreau, da U. Moncton, Canadá, V. Glozman, da Cal Poly Pomona, John Steele, da Colorado School of Mines, Burford J. Furman, da San Jose State University, e Michael Ward, da California State University, Chico.

Vários outros professores gentilmente apontaram erros e fizeram críticas construtivas e sugestões de melhorais nas edições mais recentes. Entre eles, os professores Cosme Furlong, do Worcester Polytechnic Institute, Joseph Rencis, da University of Arkansas, Annie Ross, da University de Moncton, Andrew Ruina, da Cornell University, Douglas Walcerz, da York College, e Thomas Dresner, de Mountain City, CA.

O Dr. Duane Miller, da Lincoln Electric Company, foi de grande ajuda no Capítulo 16 sobre soldagem e revisou diversos rascunhos. O professor Stephen Covey, da St. Cloud State University, e os engenheiros Gregory Aviza e Charles Gillis, da P&G Gillette, também ofereceram importante *feedback* sobre esse capítulo. O professor Robert Cornwell, da Seattle University, revisou a discussão no Capítulo 15 sobre seu novo método de recálculo de rigidez de parafuso e junta e seu método de calcular a concentração de tensão em molas de fio retangular, discutido no Capítulo 14.

Os professores Fabio Marcelo Peña Bustos, da Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colômbia, e Juan L. Balsevich-Prieto, da Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción, Asunción, Paraguai, foram muito gentis em apontar melhorias na tradução para o espanhol.

Agradecimentos especiais para William Jolley, da The Gillette Company, que criou os modelos FEA para os exemplos e revisou o Capítulo 8, e a Edwin Ryan, vice-presidente de engenharia aposentado da Gillette, que garantiu um valioso apoio. Donald A. Jacques, da divisão UTC Fuel Cells da United Technologies Company, também revisou o Capítulo 8, sobre análise por elementos finitos, e fez muitas sugestões importantes. O professor Eben C. Cobb, do Wor-

cester Polytechnic Institute, e seu aluno Thomas Watson criaram os modelos *Solidworks* para muitos problemas e estudos de caso e resolveram os FEA nos estudos de caso do CD-ROM.

Agradeço às muitas pessoas que responderam às pesquisas desta quarta edição e fizeram muitas boas sugestões: Kenneth R. Halliday, da Ohio State University, Mohamed B. Trabia, da University of Nevada Las Vegas, H. J. Summer III, da Penn State University, Rajeev Madhavan Nair, da Iowa State University, Ali P. Gordon, da University of Central Florida, Robert Jackson, da Auburn University, Cara Coad, da Colorado School of Mines, Burford J. Furman, da San Jose State University, Steven J. Covey, da St. Cloud State University, Nathan Crane, da University of Central Florida, César Augusto Álvarez Vargas, da Universidad Autonoma de Manizales, Caldas, Colômbia, Naser Nawayseh, da Dhofar University, Oman, Hodge E. Jenkins, da Mercer University, John Lee, da San Jose State University, Mahmoud Kadkhodaei, da Isfahan University of Technology, Steve Searcy, da Texas A&M University, Yesh P. Singh, da University of Texas em San Antonio, e Osornio C. Cuitláhuac, da Universidad Iberoamericana Santa Fé, México.

Este autor é muito grato a Thomas A. Cook, professor emérito da Mercer University, que elaborou o manual de soluções do livro, atualizou os exemplos de *Mathcad* e contribuiu com a maior parte dos novos conjuntos de problemas para esta edição. Agradeço também à Dra. Adriana Hera, do Worcester Polytechnic Institute, que atualizou os modelos em *MATLAB* e *Excel* de todos os exemplos e estudos de caso e minuciosamente atentou à correção dos mesmos.

Por fim, Nancy Norton, minha infinitamente paciente esposa nestes últimos 50 anos, merece renovado crédito por seus infalíveis apoio e estímulo durante muitos verões de "viuvez temporária". Eu não teria conseguido sem ela.

Todos os esforços foram feitos para eliminar erros deste texto. Quaisquer que permaneçam são de responsabilidade do autor. Ele apreciará muito ser informado sobre eventuais erros, para que esses possam ser corrigidos em futuras reimpressões. Um e-mail para norton@wpi.edu será o suficiente.

Robert L. Norton
Mattapoisett, Mass.

SUMÁRIO

Parte

I

FUNDAMENTOS

1

INTRODUÇÃO AO PROJETO

Aprendizado sem reflexão é trabalho perdido;
reflexão sem aprendizado é perigoso.
Confúcio, século VI a.C.

1.1 PROJETO

O que é projeto, ou *"design"*[§]? O papel de parede é criado (*"designed"*). Você pode estar usando roupas de um estilista (*"designer"*). Os automóveis são desenhados (*"designed"*) em termos de sua aparência externa. O termo projeto (*"design"*) claramente engloba uma grande variedade de significados. Nos exemplos acima, *"design"* refere-se principalmente à aparência estética do objeto. No caso do automóvel, tudo com relação a seus outros aspectos envolve projeto. Suas peças mecânicas (motor, freios, suspensão, etc.) devem ser projetadas por engenheiros, não desenhadas por artistas, muito embora o engenheiro consiga expressar sua arte quando está projetando peças mecânicas.

A palavra *"design"* provém da palavra latina ***designare***, que significa "*designar ou escolher*". O dicionário Webster oferece várias definições da palavra **design**, a mais aplicável delas é "*esboçar, traçar ou planejar como ação ou trabalho (...) para conceber, inventar, produzir*". Estamos mais preocupados aqui com o projeto de engenharia do que com o desenho artístico. **Projeto de engenharia** pode ser definido como: *"O processo de aplicação das várias técnicas e princípios científicos com o intuito de definir um dispositivo, um método ou um sistema suficientemente pormenorizado para permitir sua realização"*.

Projeto de máquinas

Este texto diz respeito a um aspecto do projeto de engenharia: o **projeto de máquinas,** que trata da criação de uma máquina que funcione bem, com segurança e confiabilidade. Uma **máquina** pode ser definida de muitas formas. O dicionário Random House[1] apresenta doze definições, entre as quais estão estas duas:

Máquina

1 Um aparato que consiste em unidades inter-relacionadas, ou
2 Um dispositivo que modifica a força ou o movimento.

[§] N. de R. T.: Em inglês, a palavra *"design"* (tanto substantivo quanto verbo) pode ter uma série de significados (projeto, desenho, etc). O autor exemplifica aqui alguns deles e define o uso do termo na área da engenharia mecânica.

Na definição, as **peças inter-relacionadas** também são chamadas, às vezes, de **elementos da máquina** neste contexto. A noção de **trabalho útil** é básica para a função de uma máquina, existindo quase sempre alguma transferência de energia envolvida. A menção a **forças** e **movimento** também é crucial ao nosso interesse, uma vez que, ao converter uma forma de energia em outra, as máquinas **criam movimento** e **desenvolvem forças.** É tarefa do engenheiro definir e calcular esses movimentos, forças e mudanças de energia de modo a determinar as dimensões, as formas e os materiais necessários para cada uma das peças que integram a máquina. Esta é a essência do **projeto de máquinas.**

Ainda que se deva, necessariamente, projetar uma peça de cada vez, é fundamental reconhecer que a função e o desempenho de cada peça (e, portanto, seu projeto) dependem de muitas outras peças inter-relacionadas de uma mesma máquina. Iremos, portanto, tentar "projetar a máquina inteira" em vez de simplesmente projetar elementos isolados. Para tanto, devemos recorrer a tópicos comuns do conhecimento de engenharia encontrados nos cursos anteriores, como, por exemplo, estática, dinâmica, resistência dos materiais (análise de tensões) e propriedades dos materiais. Estão incluídos nos capítulos iniciais deste livro revisões breves e exemplos desses tópicos.

O objetivo final do projeto de máquinas é dimensionar e dar forma às peças (elementos de máquinas) e escolher os materiais e os processos de manufatura apropriados, de modo que a máquina resultante possa desempenhar a função desejada sem falhar. Isso requer que o engenheiro seja capaz de calcular e de prever o modo e as condições de falha de cada elemento e, então, projetá-lo para prevenir tal falha, o que requer que uma **análise de tensão e deflexão** seja feita para cada peça. Uma vez que as tensões são função dos esforços aplicados e de inércia, assim como da geometria da peça, uma análise das forças, momentos, torques e dinâmica do sistema deve ser feita antes de as tensões e deflexões poderem ser completamente calculadas.

Se a "máquina" em questão não possuir peças móveis, a tarefa de projetar torna-se muito mais simples, pois requer somente uma análise estática das forças. Mas se a máquina não tiver peças móveis, não se trata exatamente de uma máquina (e não se encaixa na definição acima); é, portanto, uma **estrutura.** As estruturas também precisam ser projetadas para evitar falhas e, na verdade, grandes estruturas externas (pontes, edifícios, etc.) também estão sujeitas às forças dinâmicas do vento, de terremotos, de tráfego, etc., e, assim, também devem ser projetadas para essas condições. A dinâmica estrutural é um assunto interessante, mas não será abordado neste texto. Nos ocuparemos com problemas associados a máquinas que se movem. Se os movimentos da máquina forem muito lentos e as acelerações desprezíveis, bastará uma análise estática das forças. Mas se a máquina tiver acelerações significativas em seu interior, será necessária uma análise dinâmica das forças, e as peças com aceleração tornam-se "vítimas de suas próprias massas".

Em uma estrutura estática, como o piso de um edifício projetado para suportar um determinado peso, o coeficiente de segurança pode ser melhorado distribuindo-se mais material de forma apropriada em suas partes estruturais. Embora ela vá ser mais pesada (mais peso "morto"), se for corretamente projetada ela poderá, contudo, carregar mais peso "vivo" (carga útil) do que antes, e sem quebrar. Em uma máquina dinâmica, o acréscimo de peso (massa) às peças móveis pode apresentar o efeito oposto, reduzindo o coeficiente de segurança da máquina, sua velocidade admissível ou sua capacidade de carga útil. Isto ocorre porque parte do carregamento que cria tensões em suas partes móveis se deve às forças de inércia previstas na **segunda lei de Newton,** $F = ma$. Uma vez que as acelerações das partes móveis na máquina são determinadas pelo projeto cinemático e

A foto da página capitular é cortesia da Boeing Airplane Co. Inc., Seattle, Wash.

pela sua velocidade de funcionamento, ao se acrescentar massa às peças móveis o carregamento de inércia sobre elas aumentará, a menos que suas acelerações cinemáticas sejam reduzidas diminuindo-se a velocidade da operação. Embora a massa acrescentada possa aumentar a resistência da peça, o benefício pode ser reduzido ou anulado pelo resultante aumento das forças de inércia.

Iteração

Desse modo, enfrentamos um dilema nos estágios iniciais do projeto da máquina. Geralmente, antes de atingir o estágio de dimensionamento das peças, a cinemática da máquina já terá sido definida. As forças externas proporcionadas pelo "mundo exterior" sobre a máquina geralmente também são conhecidas. Observe que, em alguns casos, será muito difícil prever que cargas externas estarão agindo sobre a máquina, como por exemplo, as cargas sobre um automóvel em movimento. O projetista não pode prever com precisão a que fatores ambientais o usuário submeterá a máquina (buracos, conversões bruscas, etc.). Em tais casos, a análise estatística dos dados empíricos reunidos a partir de um teste real podem proporcionar algumas informações para fins de projeto.

O que falta ser definido são as forças de inércia que serão geradas pelas acelerações cinemáticas conhecidas atuantes sobre as massas ainda indefinidas das peças móveis. O dilema só pode ser resolvido por meio de **iteração,** que significa *repetir, ou voltar a um estágio anterior.* Devemos admitir uma configuração inicial para cada peça, usar as propriedades de inércia (massa, local do centro de gravidade e o momento de inércia da massa) dessa configuração inicial em uma análise dinâmica de forças para determinar as forças, os momentos e os torques internos atuantes sobre a peça, e então usar a geometria da seção transversal do projeto inicial para calcular as tensões resultantes. Em geral, a tarefa mais difícil na elaboração do projeto é determinar com precisão todos os esforços exercidos sobre a máquina. Se os esforços forem conhecidos, as tensões poderão ser calculadas.

O mais provável é descobrirmos que a primeira tentativa fracassa porque o material não suporta o nível de tensão apresentado. Devemos então reprojetar as peças (iterar) alterando o formato, as medidas, os materiais, o processo de fabricação ou outros fatores para alcançar um projeto aceitável. Geralmente não é possível alcançar um resultado bem-sucedido sem fazer várias iterações ao longo da elaboração do projeto. Observe, além disso, que uma alteração da massa de uma peça também afetará as forças aplicadas sobre as peças conectadas a ela, exigindo assim que se refaça o projeto das demais peças. Trata-se, na verdade, de um projeto de **peças inter-relacionadas.**

1.2 METODOLOGIA DE PROJETOS*

A metodologia de projetos é essencialmente um exercício de criatividade aplicada. Muitas "metodologias de projetos" foram definidas para ajudar a organizar a enfrentar o "problema não estruturado", isto é, casos em que a definição do problema é vaga e para os quais muitas soluções possíveis existem. Algumas dessas definições contêm somente algumas etapas, e outras, uma lista detalhada de 25 etapas. Uma versão de uma metodologia de projetos é mostrada na Tabela 1-1, que relaciona dez etapas. A etapa inicial, **Identificação da necessidade**, geralmente consiste em uma exposição mal definida e vaga do problema. O desenvolvimento das informações na **Pesquisa de suporte** (etapa 2) é necessário para definir e compreender completamente o problema, sendo depois possível estabelecer o **Objetivo** (etapa 3) de forma mais razoável e realista do que na exposição original do problema.

* Adaptado de Norton, *Design of Machinery*, 3.ed., McGraw-Hill, New York, 2004, com autorização da editora.

Tabela 1-1 Metodologia de projetos

1	Identificação da necessidade
2	Pesquisa de suporte
3	Definição dos objetivos
4	Especificações de tarefas
5	Síntese
6	Análise
7	Seleção
8	Projeto detalhado
9	Protótipo e teste
10	Produção

A etapa 4 pede a criação de um conjunto detalhado de **Especificações de tarefas** que fecham o problema e limitam seu alcance. É na etapa da **Síntese** (5) que se busca tantas alternativas de projeto quanto possíveis, geralmente sem considerar (nesta etapa) seu valor ou qualidade. É também chamada, às vezes, de etapa de **Concepção e invenção,** na qual é gerado o maior número possível de soluções criativas.

Na etapa 6, as possíveis soluções da etapa anterior são **Analisadas** e aceitas, rejeitadas ou modificadas. A solução mais promissora é **Selecionada** na etapa 7. Quando um projeto aceitável é selecionado, o **Projeto detalhado** (etapa 8) pode ser realizado. Nesta etapa, todas as pontas são atadas, todos os croquis de engenharia feitos, fornecedores identificados, especificações de fabricação definidas, etc. A construção real do projeto é feita pela primeira vez como um **Protótipo** na etapa 9 e, finalmente, em quantidade na etapa 10 de **Produção.** Uma discussão mais completa deste método de projeto pode ser encontrada na referência 2, e várias referências sobre os tópicos de criatividade e projeto constam na bibliografia no final deste capítulo.

A descrição acima pode dar uma impressão errônea de que este método pode ser concluído de maneira linear conforme o relacionado. Ao contrário, **a iteração é necessária ao longo de todo o processo**, indo de qualquer etapa de volta a uma etapa anterior, em todas as combinações possíveis e repetidamente. As melhores ideias geradas na etapa 5 irão invariavelmente apresentar-se como imperfeitas quando posteriormente analisadas. Assim, um retorno pelo menos à fase de Concepção será necessário para se produzirem mais soluções. Talvez um retorno à etapa de Pesquisa de suporte pode ser necessário para reunir mais informações. As Especificações de tarefas podem ter que ser revisadas ao se verificar que elas eram irrealistas. Em outras palavras, qualquer coisa é "jogo limpo" na metodologia de projetos, inclusive a redefinição do problema, se for necessário. Não se pode projetar de modo linear. São três etapas para a frente e duas (ou mais) para trás, até que você finalmente apareça com uma solução aproveitável.

Teoricamente, poderíamos continuar esta iteração em um dado problema de projeto para sempre, criando continuamente pequenas melhoras. Inevitavelmente, os ganhos na função ou redução no custo tenderá a zero com o tempo. Em algum momento, devemos declarar o projeto "bom o suficiente" e executá-lo. Quase sempre alguém (provavelmente o chefe) irá tomá-lo de nosso alcance e executá-lo sobre nosso protesto de que ele ainda não está "perfeito". Máquinas que têm estado funcionando por muito tempo e que foram melhoradas por muitos projetistas atingem um nível de "perfeição" que as torna difíceis de serem melhoradas. Um exemplo é a simples bicicleta. Embora os inventores continuem tentando melhorar esta máquina, o projeto básico tem estado quase intacto após mais de um século de desenvolvimento.

No projeto de máquinas, as etapas iniciais da metodologia de projeto envolvem a **Síntese de tipo** de configurações cinemáticas adequadas capazes de proporcionar os movimentos necessários. A síntese de tipo envolve a escolha do *tipo de mecanismo mais adequado ao problema.* Esta é uma tarefa difícil para o estudante, pois requer alguma experiência e conhecimento dos diversos tipos de mecanismos que existem e que poderiam ser viáveis do ponto de vista do desempenho e da fabricação. Como exemplo, suponhamos que a tarefa seja projetar um dispositivo para trilhar o movimento retilíneo em velocidade constante de uma peça em uma correia transportadora e acoplar uma segunda peça a ele no momento em que estiver passando. Isso tem que ser feito com precisão e repetição, e deve ser confiável e barato. Você pode não estar ciente de que esta tarefa poderia ser executada pelos seguintes equipamentos:

- um mecanismo de barras articuladas;
- um camo e seguidor;
- um cilindro pneumático;
- um cilindro hidráulico;
- um robô;
- um solenoide.

Cada uma destas soluções, ainda que possível, pode não ser muito favorável ou mesmo prática. Cada uma tem pontos positivos e negativos. O mecanismo de barras articuladas é grande e pode ter acelerações indesejáveis; o camo e seguidor é caro, mas é preciso e suporta repetição. O cilindro pneumático é caro, mas barulhento e não confiável. O cilindro hidráulico e o robô são mais caros. O barato solenoide tem cargas de impacto e velocidades altas. Assim, a escolha do tipo de equipamento pode ter um grande efeito sobre a qualidade do projeto. Uma má escolha na etapa da síntese de tipo pode criar grandes problemas no futuro. O projeto pode ter que ser alterado depois de finalizado, gerando um grande custo. Projetar é essencialmente um exercício de trocas de vantagens e desvantagens. Geralmente, não existe uma solução bem-definida para um verdadeiro problema de projeto em engenharia.

Uma vez definido o tipo de mecanismo necessário, sua cinemática detalhada deve ser sintetizada e analisada. Os movimentos de todas as peças móveis e suas derivadas em relação ao tempo até a aceleração devem ser calculados para se ter condições de determinar as forças dinâmicas do sistema. (Ver referência 2 para mais informações sobre este aspecto do projeto de máquina.)

No contexto de projeto de máquinas abordado neste livro, não exercitaremos todo o método do projeto conforme a Tabela 1-1. Em vez disso, proporemos exemplos, problemas e estudos de caso que já tiveram as etapas 1-4 definidas. A síntese de tipo e a análise cinemática já terão sido feitas, ou pelo menos estabelecidas, e os problemas estarão estruturados até esta fase. As tarefas restantes envolverão amplamente as etapas de 5 a 8, concentrando-se em **síntese** (etapa 5) e **análise** (etapa 6).

Síntese e análise são as "duas faces" do projeto de máquinas, como dois lados da mesma moeda. **Síntese** significa *colocar junto* e **análise** significa *decompor, separar, resolver nas partes constituintes.* Portanto, elas são opostas, mas simbióticas. Não podemos separar o "nada"; assim, devemos primeiro sintetizar alguma coisa para poder analisá-la. Ao analisarmos algo, provavelmente encontraremos lacunas, requerendo mais síntese e, então, mais análise *ad nauseam,* finalmente iterando para uma melhor solução. Você precisará trabalhar arduamente sobre seu conhecimento de estática, dinâmica e resistência dos materiais para executar o projeto.

1.3 FORMULAÇÃO E CÁLCULO DO PROBLEMA

É extremamente importante para todo engenheiro desenvolver hábitos computacionais bons e cuidadosos. Solucionar problemas complicados exige uma abordagem organizada. Problemas de projetos também exigem bons hábitos de manutenção de registros e documentação para registrar muitas hipóteses e decisões de projeto feitas ao longo do trabalho de modo que o processo de raciocínio do projetista possa ser reconstruído posteriormente se for necessário um reprojeto.

Um procedimento sugerido para o projetista é mostrado na Tabela 1-2, que relaciona um grupo de subtarefas apropriadas para a maioria destes tipos de problemas de projeto de máquinas. Estas etapas devem ser documentadas para cada problema de maneira nítida e esmerada, de preferência em uma brochura encadernada para manter sua ordem cronológica.*

Estágio de definição

Em seu livro de registros do projeto, primeiramente **Defina o problema** de forma clara em um relatório conciso. Os **"dados"** de uma determinada tarefa deverão ser claramente relacionados, acompanhados pelo registro das **hipóteses** feitas pelo projetista sobre o problema. As hipóteses expandem-se sobre as informações dadas (conhecidas) para mais tarde delimitar o problema. Por exemplo, pode-se pressupor que os efeitos do atrito sejam desprezíveis em um caso particular, ou que o peso da peça possa ser ignorado por ser pequeno em comparação às forças aplicadas ou dinâmicas.

Estágio do projeto preliminar

Uma vez que delimitações gerais sejam definidas, algumas **Decisões preliminares do projeto** devem ser tomadas para se prosseguir. As razões e justificativas dessas decisões devem ser documentadas. Por exemplo, podemos decidir tentar uma seção transversal retangular maciça para uma barra conectora e escolher o alumínio como material de teste. Por outro lado, se reconhecermos a partir de nossa compreensão do problema que esta barra conectora estaria sujeita a acelerações significativas, variáveis com o tempo, que se repetiriam por milhões de ciclos, uma decisão melhor de projeto poderia ser usar uma barra oca ou uma seção de viga I para reduzir sua massa e também escolher o aço devido a sua vida infinita de resistência à fadiga. Portanto, essas decisões podem ter um efeito significativo sobre os resultados e quase sempre terão de ser alteradas ou abandonadas conforme fazemos iterações ao longo do processo do projeto. Tem-se observado com frequência que 90% das características de um projeto podem ser determinadas nos primeiros 10% do tempo total do projeto durante o qual essas decisões preliminares de projeto são tomadas. Se não forem boas decisões, po-

Tabela 1-2 Formulação e cálculo do problema

1	Definir o problema	Estágio de definição
2	Declarar os dados	
3	Elaborar hipóteses apropriadas	
4	Decisões preliminares do projeto	Estágio do projeto preliminar
5	Croquis do projeto	
6	Modelos matemáticos	Estágio do projeto detalhado
7	Análise do projeto	
8	Avaliação	
9	Documentar resultados	Estágio da documentação

* Se houver a possibilidade de o projeto resultar em uma invenção patenteável, o livro de registros deverá estar definitivamente encadernado (não tipo fichário de folhas soltas) e suas páginas deverão ser numeradas consecutivamente, datadas e atestadas por alguém que compreenda o conteúdo técnico.

derá não ser possível salvar o mau projeto por meio de modificações posteriores sem essencialmente reiniciá-lo. O conceito do projeto preliminar deverá ser documentado neste estágio com **Croquis do projeto** claramente desenhados e rotulados, para que sejam compreensíveis a outro engenheiro ou até ao próprio criador do projeto depois de algum tempo.

Estágio do projeto detalhado

Com um rumo de projeto tentativo estabelecido, podemos criar um ou mais **modelos** (matemáticos) **de engenharia** do elemento ou sistema para podermos analisá-lo. Esses modelos geralmente incluem um modelo do carregamento que consiste em diagramas de corpo livre que apresentam todas as forças, momentos e torques atuando sobre o elemento de máquina ou sistema e as equações apropriadas para seus cálculos. Os modelos dos estados de tensão e deflexão esperados nos locais de falha previstos são, então, definidos com as equações de tensão e deflexão apropriadas.

A **análise do projeto** é então feita utilizando esses modelos, e a segurança ou falha do projeto é determinada. Os resultados são **avaliados** em combinação com as propriedades dos **materiais de engenharia** escolhidos; toma-se a decisão de prosseguir com o projeto ou iterar para encontrar uma solução melhor retornando a uma etapa anterior do processo.

Estágio da documentação

Uma vez feitas tantas iterações quantas forem necessárias para se atingir resultados satisfatórios, a **documentação** do projeto do elemento de máquina ou do sistema deverá ser completada na forma de desenhos de engenharia detalhados, especificações dos materiais e da fabricação, etc. Se for feita uma abordagem apropriada, grande parte da tarefa de documentar pode ser realizada simultaneamente com os estágios anteriores, simplesmente mantendo-se registros precisos e claros de todas as hipóteses, cálculos e decisões de projeto realizados ao longo do processo.

1.4 O MODELO DE ENGENHARIA

O sucesso de qualquer projeto depende muito da validade e adequação dos modelos de engenharia utilizados para prever e analisar seu comportamento antes da construção de qualquer máquina. A criação de um modelo de engenharia útil para um projeto é provavelmente a parte mais difícil e desafiadora de todo o processo. Seu sucesso depende tanto de experiência como de habilidade. O mais importante é a compreensão completa dos princípios básicos e dos fundamentos da engenharia. O modelo de engenharia que estamos descrevendo aqui é uma coisa amorfa, que pode consistir em alguns croquis da configuração geométrica e em algumas equações que descrevam seu comportamento. É um modelo matemático que descreve o comportamento físico do sistema. Esse modelo de engenharia requer invariavelmente o uso de computadores para ser testado. A utilização de ferramentas de computação para analisar os modelos de engenharia será examinada na próxima seção. Um modelo físico ou protótipo geralmente vem mais tarde no processo e é necessário para provar a validade do modelo de engenharia por meio de experimentos.

Estimativa e análise de primeira ordem

Nunca é demais enfatizar o valor de se fazer até mesmo modelos muito simples de engenharia dos seus processos preliminares. Frequentemente, no começo de

um projeto, o problema está tão vago e mal definido que é difícil desenvolver um modelo abrangente e completo na forma de equações que descrevam totalmente o sistema. O estudante de engenharia está acostumado com problemas totalmente estruturados, do tipo *"Dados A, B e C, encontre D"*. Se alguém pudesse identificar as equações apropriadas (modelo) para se aplicar a um determinado problema, seria relativamente fácil determinar uma resposta (que poderia até ser igual à que se encontra no final do livro).

Na prática, os problemas de projeto de engenharia não são deste tipo. Eles são muito **desestruturados** e devem ser estruturados por você antes de poderem ser resolvidos. Também não existe *"resposta no final do livro"* para ser consultada.* Esta situação deixa a maior parte dos estudantes e novos engenheiros muito nervosos. Eles enfrentam a síndrome do "deu branco", não sabendo por onde começar. Uma estratégia útil é reconhecer que:

1 Você tem que começar por algum lugar.

2 Por onde quer que você comece, provavelmente esse não será o "melhor" lugar.

3 A mágica da iteração permitirá que você retroceda, melhore seu projeto e acabe tendo sucesso.

Com esta estratégia em mente, você pode sentir-se livre para fazer uma estimativa de uma configuração do projeto no início, pressupor qualquer condição limitante que achar apropriada e fazer uma "análise de primeira ordem", que será somente uma estimativa do comportamento do sistema. Esses resultados permitirão que você identifique formas de melhorar o projeto. Lembre-se de que é preferível obter uma resposta aproximada razoável, mas rápida, que indique se o projeto funciona ou não, do que gastar mais tempo obtendo o mesmo resultado com casas decimais. Com cada iteração bem-sucedida, você aprimorará sua compreensão do problema, a precisão de suas hipóteses, a complexidade de seu modelo e a qualidade das suas decisões de projeto. Mais cedo ou mais tarde, você será capaz de refinar seu modelo a ponto de incluir todos os fatores relevantes (ou identificá-los como irrelevantes) e obter uma análise final de ordem superior, na qual você terá mais confiança.

Croqui de engenharia

O croqui de uma concepção é geralmente o ponto inicial de um projeto. Pode ser um croqui à mão livre, mas deve sempre ser feito razoavelmente em escala para exibir proporções geométricas realistas. Esse croqui quase sempre serve ao propósito primário de comunicar a concepção a outros engenheiros e inclusive ao próprio criador do projeto. Uma coisa é ter uma vaga concepção em mente e outra bem diferente é defini-la em um croqui. Esse croqui deve, no mínimo, conter três ou mais vistas ortográficas, alinhadas de acordo com a convenção apropriada de desenho, e pode também incluir uma vista isométrica ou axiométrica. A Figura 1-1 mostra um croqui à mão livre de um projeto simples do subconjunto de engate para reboque de um trator. Ainda que geralmente incompleto em termos dos detalhes necessários para fabricação, o croqui de engenharia deve conter informações suficientes para permitir o desenvolvimento de um modelo de engenharia para projeto e análise. Ele deve incluir informações fundamentais, mesmo que aproximadas, de dimensões, algumas hipóteses de materiais e quaisquer outros dados pertinentes para seu funcionamento que sejam necessários para análise posterior. O croqui de engenharia capta alguns dos dados e hipóteses feitas, mesmo que implicitamente, no início do projeto.

* Um estudante comentou certa vez que "A vida é um problema de numeração ímpar". Este (lento) autor teve que pedir uma explicação, que foi: "A resposta não está no final do livro".

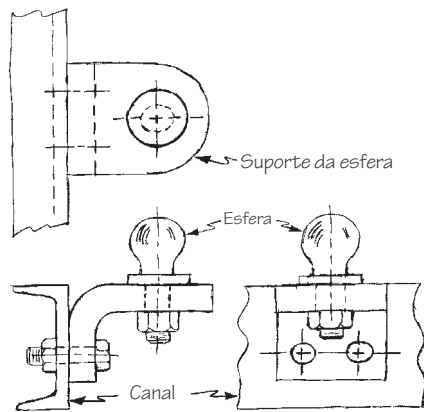



FIGURA 1-1

Croqui à mão livre do subconjunto de engate de reboque para trator.

1.5 PROJETO E ENGENHARIA AUXILIADOS POR COMPUTADOR

O surgimento do computador provocou uma verdadeira revolução no projeto e na análise de engenharia. Problemas cujos métodos de solução eram conhecidos literalmente por séculos, e que continuavam sendo praticamente insolúveis devido à alta demanda computacional, agora podem ser resolvidos em minutos em microcomputadores de baixo custo. Métodos tediosos de soluções gráficas foram desenvolvidos no passado para contornar a falta de um poder computacional disponível com réguas de cálculo. Alguns desses métodos ainda têm valor porque podem mostrar os resultados de uma forma compreensível, mas não se pode mais "fazer engenharia" sem utilizar o instrumento mais recente e mais poderoso: o computador.

Projeto auxiliado por computador (CAD[§])

À medida que o projeto prossegue, os incipientes croquis à mão livre realizados nos estágios iniciais serão suplantados por desenhos formais feitos ou com o equipamento convencional da prancheta ou – o que tem sido cada vez mais comum – com aplicativos de projeto auxiliado por computador ou de desenho auxiliado por computador. Se a distinção entre esses dois termos (ambos com a mesma sigla, CAD) foi alguma vez clara (um tema de debate que será evitado aqui), agora esta distinção está desaparecendo à medida que aplicativos de CAD cada vez mais sofisticados tornam-se disponíveis. Os sistemas de CAD originais de uma geração atrás eram essencialmente ferramentas de desenho que permitiam a criação de desenhos de vista múltipla gerados por computador semelhantes aos feitos durante séculos manualmente na prancheta. Os dados armazenados nesses sistemas de CAD iniciais eram representações estritamente bidimensionais de projeções ortográficas da geometria 3D verdadeira da peça. Somente as bordas da peça eram definidas no banco de dados. Este modelo era denominado **modelo de aramado** (*wireframe*). Alguns pacotes de CAD 3D também usam representação de aramado.

Versões atuais da maioria dos aplicativos de CAD permitem (e alguns requerem) que a geometria das peças seja codificada em um banco de dados 3D como **modelos sólidos.** Em um modelo sólido, as arestas e as faces da peça são definidas. A partir dessa informação de 3D, as vistas ortográficas convencionais em

[§] N. de T.: Sigla de *Computer-Aided Design.*

2D podem ser geradas automaticamente se desejado. A principal vantagem de se criar um banco de dados geométrico do modelo sólido em 3D para qualquer projeto é que as informações sobre as propriedades de massa podem ser rapidamente calculadas (isso não é possível em um modelo aramado 2D ou 3D). Por exemplo, ao projetar a peça de uma máquina, temos que determinar o local de seu centro de gravidade (CG), sua massa, seu momento de inércia da massa e as propriedades geométricas da seção transversal em vários locais. Deve-se determinar essas informações a partir de um modelo de 2D feito fora do CAD. Isso é cansativo de se fazer e será apenas aproximado quando a geometria for complexa. Mas se a peça for projetada em um sistema CAD de modelo sólido, como o *ProEngineer*[7], *Unigraphics*[4] ou muitos outros, podem-se calcular instantaneamente as propriedades de inércia de peças com geometrias mais complicadas.

Os sistemas de modelo sólido geralmente oferecem uma interface para um ou mais programas de análise de elementos finitos (FEA) e permitem transferência direta da geometria do modelo para o programa de FEA para análise de tensões, vibrações e transferência de calor. Alguns sistemas de CAD incluem a capacidade de geração de malhas que cria uma malha de elementos finitos automaticamente antes de enviar os dados para o *software* de FEA. Essa combinação de ferramentas proporciona um meio extremamente poderoso para se obter projetos superiores cujas tensões são mais precisamente conhecidas do que seria possível utilizando as técnicas de análise convencionais quando a geometria é complexa.

Embora seja muito provável que os leitores deste livro venham a usar as ferramentas do CAD que incluem métodos de análise de elementos finitos ou de elementos de contorno (BEA), ainda se faz necessário que os fundamentos da análise de tensão aplicada sejam completamente compreendidos. É esta a finalidade deste texto. As técnicas de FEA serão discutidas nos Capítulos 4 e 8, mas não serão enfatizadas neste livro. Ao contrário, vamos nos concentrar nas técnicas de análise de tensões clássicas, para uma compreensão completa de seus fundamentos e de suas aplicações ao projeto de máquinas.

Os métodos FEA e BEA estão se tornando rapidamente os métodos preferidos para a solução de problemas complicados de análise de tensões. Contudo, existe um risco em se utilizar dessas técnicas sem uma compreensão sólida da teoria por trás delas. Esses métodos sempre levarão a *alguns* resultados. Infelizmente, esses resultados podem ser incorretos se o problema não for bem formulado ou se não tiver uma malha adequada com os limites corretamente aplicados. Ser capaz de reconhecer os resultados incorretos de uma solução encontrada com o auxílio do computador é extremamente importante para o sucesso de qualquer projeto. O Capítulo 8 oferece uma breve introdução ao FEA. O estudante pode fazer alguns cursos de FEA e BEA para conhecer mais essas ferramentas.

A Figura 1-2 mostra um modelo sólido do suporte da esfera da Figura 1-1, que foi criada por meio de um aplicativo CAD. A vista sombreada isométrica no canto superior direito mostra que o volume sólido da peça está definido. As outras três vistas mostram projeções ortográficas da peça. A Figura 1-3 mostra dados das propriedades de inércia calculados pelo aplicativo. A Figura 1-4 mostra o modelo aramado da mesma peça gerada a partir do banco de dados de geometria sólida. Uma versão aramada do modelo é usada principalmente para reduzir o tempo de desenho na tela quando se trabalha no modelo. Há muito menos informações exibidas na representação aramada para calcular do que na representação sólida da Figura 1-2.

A Figura 1-5 mostra um desenho totalmente cotado, ortográfico e com vista múltipla do suporte da esfera, que foi gerado pelo aplicativo *Computervision.* Uma outra grande vantagem de se criar um modelo sólido de uma peça é que as

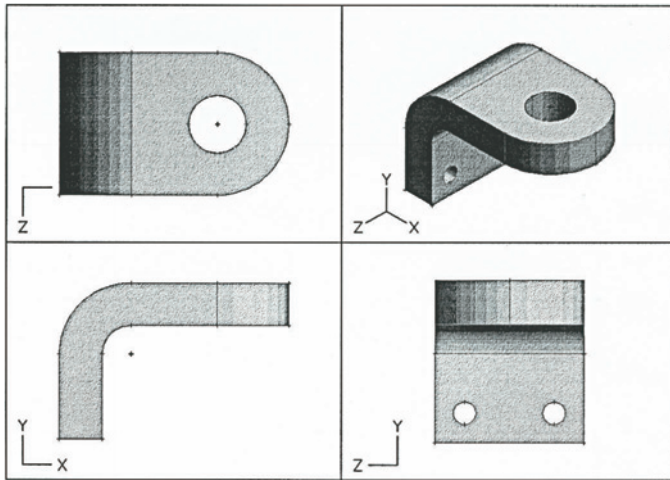



FIGURA 1-2

Um modelo sólido feito com CAD do suporte da esfera do engate de reboque para trator da Figura 1-1.

informações das dimensões e da trajetória da ferramenta, necessárias para sua fabricação, podem ser geradas no sistema de CAD e enviadas pela rede para uma máquina controlada por computador em uma fábrica. Esta característica permite a produção de peças sem a necessidade de desenhos no papel, como mostra a Figura 1-5. A Figura 1-6 mostra a mesma peça depois que uma malha de elementos finitos foi criada pelo aplicativo CAD, antes de enviá-la para o *software* FEA para análise de tensões.

Engenharia auxiliada por computador (CAE[§])

As técnicas anteriormente denominadas CAD fazem parte de um subgrupo de um tópico mais geral da engenharia auxiliada por computador (CAE), cujo termo significa que se trata de algo mais que uma simples geometria de peças. Entretanto, as distinções entre CAD e CAE continuam confusas à medida que aplicativos

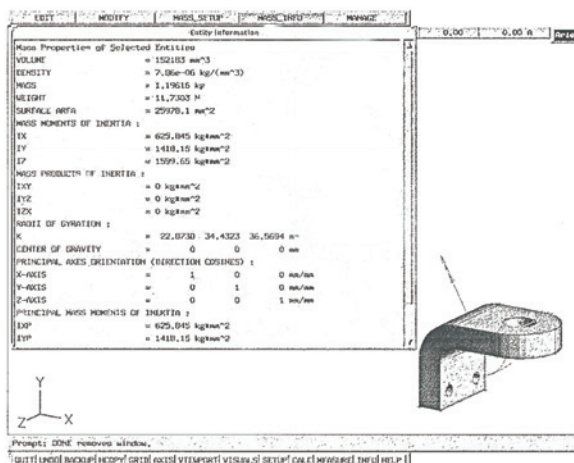



FIGURA 1-3

Propriedades de massa do suporte da esfera calculadas pelo sistema CAD a partir de seu modelo sólido.

[§] N. de T.: Sigla de *Computer-Aided Engineering*.

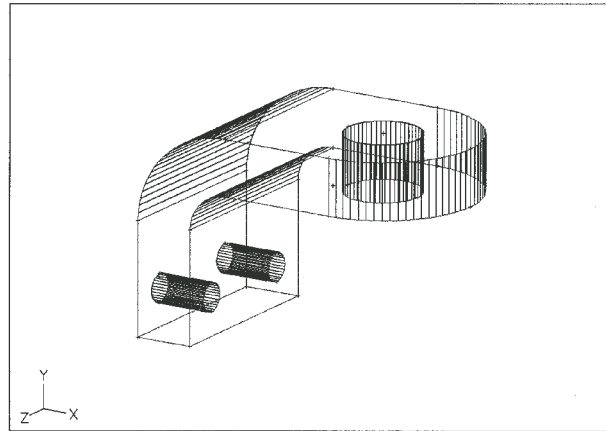



FIGURA 1-4

Representação aramada do chassi do suporte da esfera gerada a partir de seu modelo sólido em um sistema CAD.

mais sofisticados tornam-se disponíveis. Na verdade, a descrição do uso de um sistema de CAD para modelagem sólida e do pacote de FEA juntos, conforme descrito no item anterior, é um exemplo de CAE. Quando alguma análise de forças, tensões, deflexões ou outros aspectos do comportamento físico do projeto é incluída, com ou sem os aspectos da geometria sólida, o processo é chamado de CAE. Muitos aplicativos comerciais realizam um ou mais aspectos do CAE. Os aplicativos FEA e BEA mencionados anteriormente estão nesta categoria. Veja o Capítulo 8 para mais informações sobre FEA. Simulações de forças dinâmicas nos mecanismos podem ser feitas com aplicativos como *ADAMS*[5] e *Working Model*[6]. Alguns aplicativos, como *ProEngineer*[7], *Solidworks*[12], *Unigraphics*[4] e outros combinam aspectos de um sistema de CAD com capacidades de análise geral. Esses programas baseados em restrições permitem que sejam aplicadas

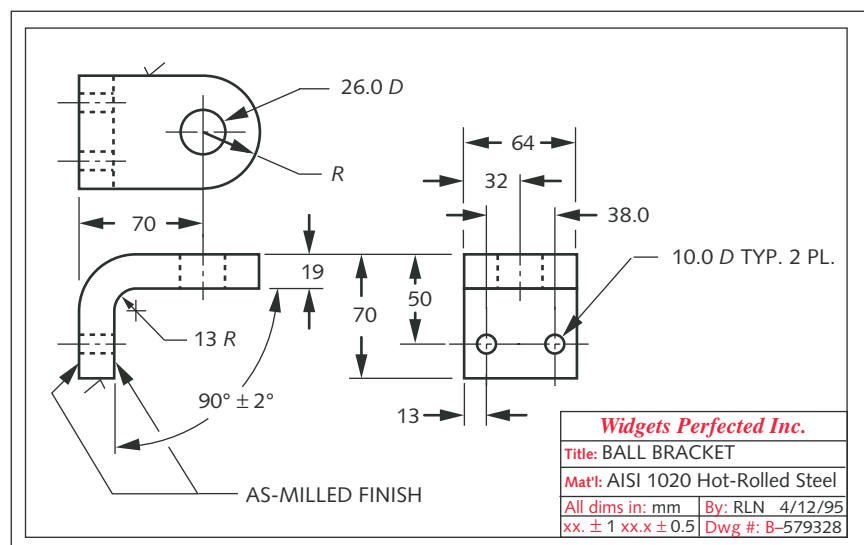



FIGURA 1-5

Desenho cotado, projeções ortogonais, com três vistas, feito com um aplicativo de desenho CAD 2D.

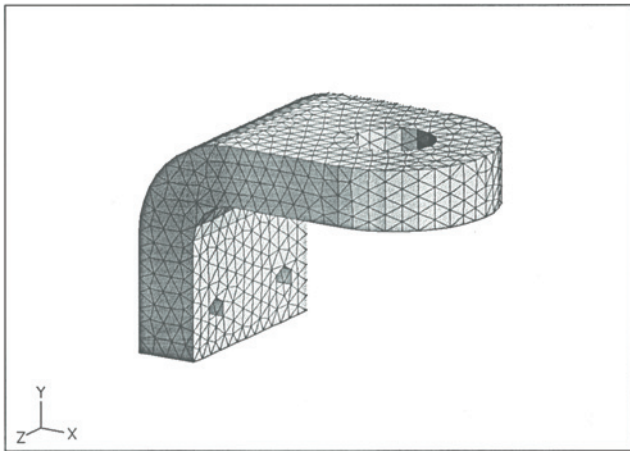



FIGURA 1-6

Malha FEA aplicada ao modelo sólido do suporte da esfera no sistema CAD.

restrições ao projeto que podem controlar a geometria da peça, uma vez que os parâmetros do projeto são variados.

Outras classes de ferramentas do CAE são de solucionadores de equações, como *MATLAB*[11], *Mathcad*[9], *TK Solver*[8] e planilhas como *Excel*[10]. Essas são erramentas de uso geral que permitem que qualquer combinação de equações seja codificada de forma conveniente e depois manipulam o grupo de equações (isto é, o modelo de engenharia) para diferentes valores dos dados e exibem convenientemente os resultados de forma tabular e gráfica. Os solucionadores de equações são inestimáveis para a solução das equações de força, tensão e deflexão nos problemas de projeto de máquinas, porque permitem que cálculos do tipo "o que ocorre se..." sejam feitos com rapidez. Os efeitos das mudanças das dimensões ou dos materiais sobre as tensões e deflexões na peça podem ser observadas de imediato. Na falta de um verdadeiro sistema de modelo sólido, um solucionador de equações também pode ser usado para aproximar as propriedades de inércia da peça enquanto itera a geometria e as propriedades do material das tentativas de projeto da peça. A iteração rápida até uma solução aceitável é, deste modo, facilitada.

O CD-ROM que acompanha o livro contém um grande número de modelos para vários solucionadores de equações como apoio ao exemplos e estudos de caso apresentados no livro. Introduções ao uso do *TK Solver* e do *Mathcad,* além de exemplos de uso de ambos, estão em arquivos PDF no CD-ROM. Além disso, os programas MOHR, CONTACT, ASDEQ, FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR, SLIDER, DYNACAM e MATRIX são oferecidos no CD-ROM para auxiliar no cálculo de solicitações dinâmicas e tensões que solucionam os problemas de projeto abertos.

Entretanto, deve-se ter em mente que essas ferramentas da computação são apenas ferramentas, e não substitutos para o cérebro humano. Sem uma compreensão total dos fundamentos da engenharia por parte do usuário, o computador não dará bons resultados. Entra lixo, sai lixo.[§] Cuidado leitor!

Precisão computacional

Computadores e calculadoras facilitam a obtenção de respostas numéricas que possuem muitos valores significativos. Antes de escrever todos aqueles dígitos, é aconselhável que você recorde a precisão de suas hipóteses iniciais e os dados fornecidos. Se, por exemplo, as forças aplicadas são conhecidas até apenas dois

[§] N. de T.: *Garbage in, garbage out* (GIGO) = "entra lixo, sai lixo"; expressão que significa que a precisão e a qualidade da informação de saída dependem da qualidade da entrada.

dígitos significativos, é incorreto e enganoso expressar as tensões calculadas em mais dígitos significativos do que os dados de entrada possuem. Entretanto, é válido e apropriado fazer todos os cálculos intermediários com a maior precisão disponível em suas ferramentas de computação. Isso irá minimizar os erros de arredondamento. Mas, quando terminado, arredonde os resultados a um nível compatível de precisão com os dados conhecidos ou pressupostos.

1.6 O RELATÓRIO DE ENGENHARIA*

A comunicação de suas idéias e resultados é um aspecto muito importante da engenharia. Muitos estudantes de engenharia visualizam-se na prática profissional gastando a maior parte de seu tempo fazendo cálculos de forma semelhante à que faziam como estudantes. Felizmente, este raramente é o caso, pois seria muito enfadonho. Na verdade, os engenheiros gastam grande parte de seu tempo comunicando-se com os outros, verbalmente ou por escrito. Os engenheiros escrevem propostas e relatórios técnicos, realizam apresentações e interagem com o pessoal de apoio. Quando seu projeto estiver pronto, normalmente será necessário apresentar os resultados a seu cliente, seus colegas ou a seu superior. A forma habitual de apresentação é um relatório formal de engenharia. Além de um relatório por escrito do projeto, esses relatórios conterão normalmente desenhos ou esboços de engenharia conforme foi descrito anteriormente, bem como tabelas e gráficos dos dados calculados a partir do modelo de engenharia.

É muito importante que o estudante de engenharia desenvolva suas habilidades de comunicação. *Você pode ser a pessoa mais inteligente do mundo, mas ninguém saberá disso se você não puder comunicar suas ideias claramente e de forma concisa.* Na realidade, se você não puder explicar o que fez, é porque provavelmente você mesmo não compreendeu. Os exercícios de projeto do Capítulo 9 são planejados para serem descritos em relatórios formais de engenharia para lhe dar um pouco de experiência nesta importante habilidade da comunicação técnica. Informações sobre relatórios escritos de engenharia podem ser encontradas na literatura relacionada na bibliografia.

1.7 COEFICIENTES DE SEGURANÇA E NORMAS DO PROJETO

A qualidade de um projeto pode ser medida por meio de muitos critérios. É sempre necessário calcular um ou mais coeficientes de segurança para estimar a probabilidade de falha. Pode haver normas de projetos, de legislatura ou aceitos de forma geral, que também devem ser adotados.

Coeficiente de segurança

Um coeficiente de segurança (também chamado de *fator de segurança*) pode ser expresso de muitas formas. Ele é tipicamente a razão entre duas quantidades que possuem as mesmas unidades, como (resistência)/(tensão atuante), (esforço crítico)/(esforço aplicado), (esforço que quebra a peça)/(esforço esperado em serviço), (máximo número de ciclos)/(número de ciclos solicitados) ou (velocidade que quebra)/(velocidade em operação). Um coeficiente de segurança é sempre adimensional.

A forma de expressão de um coeficiente de segurança pode geralmente ser escolhida com base no tipo de esforço exercido sobre a peça. Por exemplo, considere o esforço sobre a parede de uma torre cilíndrica de água que nunca pode estar "mais do que cheia" de um líquido de densidade conhecida dentro de uma gama de temperaturas conhecidas. Uma vez que este esforço é altamente previsível ao longo do tempo, a razão entre a resistência do material e a tensão na parede de um tanque cheio pode ser uma definição apropriada para o coeficiente

* Extraído de Norton, *Design of Machinery*, 3.ed., McGraw-Hill, New York, 2004, com autorização da editora.

de segurança. Observe neste exemplo que a possibilidade de a ferrugem reduzir a espessura da parede ao longo do tempo deve ser considerada. (Ver Seção 4.17 para uma discussão sobre tensões nas paredes de um cilindro e Seção 7.6 para uma discussão sobre corrosão.)

Se essa torre cilíndrica de água estiver apoiada em pernas de sustentação, como colunas, seria apropriado um coeficiente de segurança para as pernas baseado na razão entre o esforço de flambagem crítico da coluna e o esforço de compressão aplicado sobre a torre cheia de água. (Ver Seção 4.16 para a discussão sobre flambagem de colunas.)

Se uma peça estiver sujeita a solicitações que variam de forma cíclica com o tempo, ela pode sofrer falha por fadiga. A resistência de um material à fadiga para alguns tipos de solicitação pode ser expressa como o número máximo de ciclos de tensão reversa em um dado nível de tensão. Nesses casos, pode ser apropriado expressar o coeficiente de segurança como a razão entre o número máximo de ciclos até a falha esperada do material e o número de ciclos aplicados à peça em serviço no tempo de vida desejado para ela. (Ver Capítulo 6 para uma discussão dos fenômenos de falha por fadiga e várias abordagens para o cálculo dos coeficientes de segurança em tais situações.)

O coeficiente de segurança de uma peça como uma roldana (polia) ou volante é frequentemente expresso como a razão entre sua velocidade máxima de segurança e a velocidade mais alta esperada em serviço. Em geral, se as tensões sobre as peças forem uma função linear do carregamento aplicado em serviço e se esse carregamento for previsível, então o resultado do coeficiente de segurança expresso como resistência/tensão ou carregamento de falha/carregamento aplicado será o mesmo. Nem todas as situações se encaixam nesses critérios. Algumas precisam de um índice não linear. Uma coluna é um exemplo, porque suas tensões são uma função não linear do carregamento (ver Seção 4.16). Portanto, a carga crítica (de falha) para uma coluna deve ser calculada para uma comparação com a carga aplicada.

Um outro fator complicador é introduzido quando as magnitudes das cargas aplicadas esperadas não são previsíveis com exatidão. Isso pode ser verdade em praticamente qualquer aplicação na qual o uso (e, portanto, o carregamento) da peça ou do dispositivo seja controlado por humanos. Por exemplo, realmente não há como impedir que alguém tente erguer um caminhão de 10 toneladas com um macaco projetado para erguer um automóvel de 2 toneladas. Quando o macaco falha, o fabricante (ou projetista) pode ser acusado, muito embora a falha provavelmente se deva mais "ao tolo por trás do macaco". Em situações em que o usuário pode submeter o dispositivo a condições de sobrecarga, uma sobrecarga pressuposta pode ter que ser usada para calcular o coeficiente de segurança com base na razão entre a carga que causa falha e a sobrecarga de serviço pressuposta. Etiquetas advertindo contra uso inapropriado também podem ser necessárias nessas situações.

Uma vez que pode haver mais de uma forma de falha em potencial para qualquer elemento da máquina, pode haver mais de um valor para o coeficiente de segurança N. O menor valor de N para qualquer peça é o mais importante, já que ele prevê a forma mais provável de falha. Quando N é reduzido a 1, a tensão sobre a peça é igual à resistência do material (ou a carga aplicada é igual à carga que provoca falha, etc.), e a falha ocorre. Portanto, desejamos que N seja sempre superior a 1.

A escolha de um coeficiente de segurança

Escolher um coeficiente de segurança é quase sempre uma proposição confusa para o projetista iniciante. O coeficiente de segurança pode ser pensado como

uma medida da incerteza do projetista quanto aos modelos analíticos e teorias de falhas, bem como dados de propriedades do material utilizado, e deve ser escolhido apropriadamente. Quão maior do que um deve ser N depende de muitos fatores, inclusive de nosso nível de confiança no modelo no qual os cálculos são baseados, de nosso conhecimento da variação das possíveis condições de carga em serviço e da nossa confiança nas informações de resistência do material disponíveis. Se tivermos feito testes extensos em protótipos físicos de nosso projeto para provar a eficácia de nosso modelo de engenharia e de nosso projeto, e se tivermos gerado dados experimentais sobre as resistências do material específico, será possível utilizar um coeficiente de segurança menor. Se nosso modelo não tiver sido tão bem testado ou se as informações das propriedade dos materiais forem menos confiáveis, um N maior é recomendável. Na ausência de qualquer norma de projeto que possa especificar N para os casos particulares, a escolha do coeficiente de segurança envolve uma decisão de engenharia. Uma abordagem razoável é determinar as maiores cargas esperadas em serviço (inclusive possíveis sobrecargas) e as mínimas resistências esperadas dos materiais, baseando os coeficientes de segurança nesses dados. Assim, o coeficiente de segurança torna-se uma medida razoável de incerteza.

Se você voa de avião, poderá não se sentir muito confortável ao saber que os coeficientes de segurança de aeronaves comerciais estão entre 1,2 e 1,5. As aeronaves militares podem ter um $N < 1{,}1$, mas sua tripulação usa paraquedas. (Os pilotos de teste merecem os altos salários que recebem.) Os mísseis têm um $N = 1$, mas não possuem tripulação e não deverão retornar de qualquer maneira. Esses baixos fatores de segurança em aeronaves são necessários para manter o peso baixo, e são justificados por sofisticados modelos analíticos (geralmente envolvendo FEA), testes dos materiais realmente utilizados, extensos testes dos protótipos projetados e rigorosas inspeções de falhas incipientes do equipamento em serviço. A fotografia da primeira página deste capítulo mostra um elaborado equipamento de teste utilizado pela Boeing Aircraft Co. para testar mecanicamente a estrutura de um protótipo em escala real ou uma aeronave da linha de produção, aplicando a ele forças dinâmicas e medindo seus efeitos.

Pode ser difícil prever os tipos de carregamento que um conjunto suportará em serviço, especialmente se o carregamento estiver sob o controle do usuário final ou da Mãe Natureza. Por exemplo, que esforços deverão suportar a roda e a estrutura de uma bicicleta? Depende muito da idade, do peso e do grau de negligência do ciclista, do tipo de pista onde ela será usada, etc. O mesmo problema da incerteza das solicitações existe em todos equipamentos de transporte, navios, aeronaves, automóveis, etc. Os fabricantes dessas máquinas dedicam-se a extensos programas de testes para medir as solicitações operacionais típicas. Veja as Figuras 3-16 e 6-7 para exemplos de dados sobre esse tipo de solicitação em serviço.

Algumas orientações para a escolha de um coeficiente de segurança para projetos de máquinas podem ser definidas com base na qualidade e disponibilidade de dados adequados sobre as propriedades dos materiais, nas condições ambientais esperadas em comparação com aquelas nas quais os dados de teste do material foram obtidas, bem como na precisão dos modelos de solicitação e de tensão desenvolvidos para análises. A Tabela 1-3 mostra um conjunto de fatores para materiais dúcteis que podem ser escolhidos em cada uma das três categorias listadas com base no conhecimento ou julgamento do projetista sobre a qualidade das informações utilizadas. O coeficiente global de segurança é tomado como o maior dos três fatores escolhidos. Dadas as incertezas envolvidas, o coeficiente de segurança geralmente não deve ser assumido com precisão maior que a de uma casa decimal.

Tabela 1-3 Fatores utilizados para determinar um coeficiente de segurança para materiais dúcteis

Informações	Qualidade das informações	Fator
		F1
Dados das propriedades dos materiais disponíveis a partir de testes	O material realmente utilizado foi testado	1,3
	Dados representativos de testes do material estão disponíveis	2
	Dados razoavelmente representativos de testes do material estão disponíveis	3
	Dados insuficientemente representativos de testes do material estão disponíveis	5+
		F2
Condições ambientais nos quais será utilizado	São idênticas às condições dos testes de materiais	1,3
	Essencialmente igual ao ambiente de um laboratório comum	2
	Ambiente moderadamente desafiador	3
	Ambiente extremamente desafiador	5+
		F3
Modelos analíticos para forças e tensões	Os modelos foram testados em experimentos	1,3
	Os modelos representam precisamente o sistema	2
	Os modelos representam aproximadamente o sistema	3
	Os modelos são aproximações grosseiras	5+

$$N_{dúctil} \cong MAX\,(F1, F2, F3) \qquad (1.1a)$$

A ductilidade ou fragilidade do material é também uma preocupação. Os materiais frágeis são projetados pelo limite de ruptura, de modo que falha significa ruptura. Os materiais dúcteis sob carregamento estático são projetados pelo limite de escoamento, e espera-se que deem algum sinal visível de falha antes da ruptura, a menos que trincas indiquem a possibilidade de uma ruptura pela mecânica da fratura (ver Seções 5.3 e 6.5). Por essas razões, o coeficiente de segurança para materiais frágeis é geralmente duas vezes o coeficiente que seria usado para materiais dúcteis na mesma situação:

$$N_{frágil} \cong 2 * MAX\,(F1, F2, F3) \qquad (1.1b)$$

Este método para determinar o coeficiente de segurança é apenas uma orientação para obter um ponto de partida e está obviamente sujeito ao julgamento do projetista ao selecionar os fatores em cada categoria. O projetista tem a responsabilidade final de garantir que o projeto seja seguro. Um coeficiente de segurança maior do que qualquer um apresentado na Tabela 1-3 pode ser apropriado em algumas circunstâncias.

Normas de projetos e de segurança

Muitas associações de engenharia e agências governamentais desenvolveram normas para áreas específicas de projetos de engenharia. A maior parte delas são apenas recomendações, mas algumas têm força de lei. A ASME (American Society of Mechanical Engineers – Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos) oferece orientações e recomendações para coeficientes de segurança a serem usados em aplicações específicas, como caldeiras de vapor e vasos sob pressão. As normas de construção são legislação na maioria dos estados e cidades dos EUA e normalmente tratam de estruturas de acesso do público ou de seus componentes, como elevadores e escadas rolantes. Os coeficientes de segurança, às vezes, são especificados nessas normas, e poderão ser bem altos. (A norma para escadas rolantes em um estado chegou a exigir um coeficiente de segurança 14.) Observa-se, claramente, que sempre que a segurança humana estiver envolvida, altos valores de N serão justificáveis. Contudo, eles vêm com uma desvantagem de peso e custo, uma vez que as peças devem ser quase sempre mais pesadas para

atingir os altos valores de *N*. O engenheiro projetista deve sempre estar a par dessas normas e padrões e recorrer a eles quando for necessário.

A seguir, uma lista parcial de sociedades de engenharia e organizações governamentais, industriais e internacionais que publicam padrões e normas de potencial interesse para a engenharia mecânica. Endereços e dados sobre suas publicações podem ser obtidos em qualquer biblioteca técnica ou na Internet.

American Gear Manufacturers Association (AGMA) – *Associação Americana de Fabricantes de Engrenagem* http://www.agma.org/

American Institute of Steel Construction (AISC) – *Instituto Americano da Construção em Aço* http://www.aisc.org

American Iron and Steel Institute (AISI) – *Instituto Americano do Ferro e Aço* http://www.steel.org /

American National Standards Institute (ANSI) – *Instituto Americano de Normas* http://www.ansi.org/

American Society for Metals (ASM International) – *Sociedade Americana de Metais* http://www.asmintl.org/

American Society of Mechanical Engineers (ASME) – *Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos* http://www.asme.org/

American Society of Testing and Materials (ASTM) – *Sociedade Americana de Testes e Materiais* http://www.astm.org/

American Welding Society (AWS) – *Sociedade Americana de Solda* http://www.aws.org/

Anti-Friction Bearing Manufacturers Association (AFBMA) – *Associação dos Fabricantes de Mancais de Rolamento*

International Standards Organization (ISO) – *Organização Internacional de Normas* http://www.iso.ch/iso/en

National Institute of Standards and Technology (NIST)* – *Instituto Nacional de Normas e Tecnologia* http://www.nist.gov/

Society of Automotive Engineers (SAE) – *Sociedade dos Engenheiros Automotivos* http://www.sae.org/

Society of Plastics Engineers (SPE) – *Sociedade dos Engenheiros Plásticos* http://www.4spe.org/

Underwriters Laboratories (UL) – *Laboratórios de Seguros* http://www.ul.com/

1.8 CONSIDERAÇÕES ESTATÍSTICAS

Nada é absoluto em engenharia, assim como em qualquer outra área. A resistência dos materiais variarão de amostra para amostra. O tamanho real de diferentes exemplos da "mesma" peça produzida em quantidade varia devido às tolerâncias de fabricação. Como resultado, devemos levar em conta as distribuições estatísticas dessas propriedades nos nossos cálculos. Os dados publicados sobre a resistência de materiais podem ser declarados como valores mínimos ou como valores médios dos testes feitos com muitas amostras. Se for um valor médio, haverá uma chance de 50% de que a amostra escolhida do material ao acaso seja mais fraca ou mais forte do que o valor médio publicado. Para nos garantir contra falhas, podemos reduzir o valor da resistência do material que usaremos em nossos cálculos a um nível que inclui uma porcentagem maior da população. Para isso, é necessário alguma compreensão sobre fenômenos estatísticos e seus cálculos. Todos os engenheiros devem ter esta compreensão e devem incluir uma

* Antigo *National Bureau of Standards* (*NBS*) – Agência Nacional de Normas.

disciplina de estatística em seus currículos. Discutiremos brevemente alguns dos aspectos fundamentais da estatística no Capítulo 2.

1.9 UNIDADES*

Vários sistemas de unidades diferentes são utilizados em engenharia. Os sistemas mais comuns nos EUA são: o sistema americano ***pé-libra-segundo*** (***fps***)***,*** o sistema americano ***polegada-libra-segundo*** (***ips***) e o ***Sistema Internacional*** (***SI***)***.*** O sistema métrico de ***centímetro, grama, segundo*** (***cgs***) é utilizado com mais frequência nos EUA, especialmente em empresas internacionais, como as montadoras de automóveis. Todos os sistemas foram criados a partir da escolha de três das quantidades da expressão geral da segunda lei de Newton,

$$F = \frac{mL}{t^2} \tag{1.2a}$$

onde F é força, m é massa, L é comprimento e t é tempo. As unidades para qualquer uma dessas três variáveis podem ser escolhidas e a outra é, então, derivada nos termos das unidades escolhidas. As três unidades escolhidas são chamadas de *unidades básicas* e a remanescente é uma *unidade derivada.*

A maior parte da confusão que envolve a conversão de valores entre qualquer um dos sistemas dos EUA e o sistema *SI* deve-se ao fato de o sistema *SI* utilizar um grupo diferente de unidades básicas dos sistemas norte-americanos. Os dois sistemas dos EUA elegem ***força****, comprimento* e *tempo* como unidades básicas. Massa é, portanto, uma unidade derivada nesses sistemas, que são denominados *sistemas gravitacionais*, porque o valor da massa depende da constante gravitacional local. O sistema *SI* elege ***massa****, comprimento* e *tempo* como unidades básicas, e a força é uma unidade derivada. O *SI* é, então, denominado *sistema absoluto,* uma vez que a massa é uma unidade básica cujo valor não depende da gravidade local.

O sistema americano *pé-libra-segundo (fps)* exige que todos os comprimentos sejam medidos em pés (ft), as forças em libras (lb) e o tempo em segundos (sec)[§]. A massa é, assim, derivada da lei de Newton como

$$m = \frac{Ft^2}{L} \tag{1.2b}$$

e suas unidades são libras segundos ao quadrado por pé (lb sec^2/ft) = *slugs.*

O **sistema americano *polegada-libra-segundo*** (***ips***) exige que todos os comprimentos sejam medidos em polegadas (in), as forças em libras (lb) e o tempo em segundos (sec). A massa ainda é derivada da lei de Newton, Equação 1.2*b,* mas as unidades agora são

libras segundos ao quadrado por **polegada** (lb sec^2/in) = ***blobs***[†]

Essa unidade de massa não é *slugs*! Ela vale doze *slugs* ou um *"blob"*!

O peso é definido como a força exercida pela gravidade sobre um objeto. Provavelmente, o erro de unidade mais comum dos estudantes é confundir estes dois sistemas de unidades (*fps* e *ips*) ao converter unidades de peso (que são forças em libras) em unidades de massa. Observe que a constante da aceleração gravitacional (g ou g_c) na terra ao nível do mar é de aproximadamente 32,17 **pés** por segundo ao quadrado, o que equivale a 386 **polegadas** por segundo ao quadrado. A relação entre massa e peso é

massa = peso / aceleração gravitacional

$$m = \frac{W}{g_c}$$

* Extraído de Norton, *Design of Machinery,* 3.ed, 2004, McGraw-Hill, New York, com autorização da editora.

§ N. de R. T.: A abreviação de segundos no Brasil e no Sistema Internacional de Unidades é s, não sec.

† É uma pena que a unidade de massa no sistema *ips* nunca tenha recebido oficialmente uma denominação, como o termo *slug* é usado para massa no sistema *fps.* O autor sugere em negrito (com um tom de leve ironia) que esta unidade de massa no sistema *ips* seja denominado *blob* (bl) para distingui-lo mais claramente de *slug* (sl) e para ajudar o estudante a evitar um dos erros comuns descritos abaixo. Doze *slugs* = um *blob. Blob* não soa pior que *slug,* é fácil de memorizar, implica massa e tem uma abreviação conveniente (bl) que é um anagrama da abreviação de libra (lb). Além disso, se você já viu uma lesma (*slug*) de jardim, você sabe que se parece exatamente com uma "pequena gota" (*blob*).

Deveria ser óbvio que se você medir todos os seus comprimentos em **polegadas** e então usar $g = g_c = 32{,}17$ **pés**/$\sec^2$ para computar a massa, você terá um erro de *fator de 12* em seus resultados. Este é um erro grave, grande o bastante para derrubar um avião projetado por você. Pior é o estudante que negligencia *completamente* a conversão do peso em massa. Os resultados deste cálculo terão um erro de 32 ou 386, o que é o bastante para afundar o navio!*

O valor da massa é necessário na equação da segunda lei de Newton para determinar as forças decorrentes das acelerações:

$$F = ma \tag{1.4a}$$

As unidades de massa nesta equação são *g, kg, slugs* ou *blobs,* dependendo do sistema de unidades utilizado. Deste modo, em qualquer sistema inglês, o peso W (lb_f) tem que ser dividido pela aceleração devido à gravidade g_c, como indicado na Equação 1.3, para obter a quantidade de massa apropriada para a Equação 1.4*a*.§

Somado à confusão, ainda, está o uso comum da unidade de ***libras massa*** (lb_m). Esta unidade, geralmente usada na dinâmica de líquidos e na termodinâmica, aparece no uso de uma forma um pouco diferente da equação de Newton:

$$F = \frac{ma}{g_c} \tag{1.4b}$$

onde m = massa em lb_m, a = aceleração e g_c= constante gravitacional. Na Terra, o valor da **massa** de um objeto medido em ***libras massa*** (lb_m) é *numericamente igual* a seu **peso** em ***libras força*** (lb_f). Entretanto, o estudante *deve lembrar de dividir* o valor de m em lb_m por g_c quando usar esta forma da equação de Newton. Assim, a lb_m será dividida seja por 32,17 ou por 386 quando se calcular a força dinâmica. O resultado será o mesmo de quando a massa for expressa em *slugs* ou *blobs* na forma da equação $F = ma$. Lembre-se de que, nos números arredondados a nível do mar na terra,

o peso de 1 lb_m = 1 lb_f o peso de 1 *slug* = 32,17 lb_f o peso de 1 *blob* = 386 lb_f

O **sistema *SI*** requer que os comprimentos sejam medidos em metros (m), as massas em quilogramas (kg) e o tempo em segundos (s). Referimo-nos às vezes a isto como sistema *mks.* A força é derivada da lei de Newton e as unidades são:

$$\text{kg m/s}^2 = \text{newtons}$$

No sistema *SI,* há nomes diferentes para massa e força, o que ajuda a aliviar a confusão.† Ao converter os sistemas *SI* ao sistema americano, esteja alerta para o fato de que a massa se converte de quilogramas (kg) para *slugs* (sl) ou *blobs* (bl), e a força é convertida de newtons (N) para libras (lb). A constante gravitacional (g_c) no sistema *SI* é aproximadamente 9,81 m/$\sec^2$.

O sistema *cgs* requer que os comprimentos sejam medidos em centímetros (cm), a massa em gramas (g) e o tempo em segundos (s). A força é medida em dinas. O sistema *SI* é preferível ao sistema *cgs.*

Os sistemas de unidades utilizados neste livro são o sistema americano *ips* e o sistema *SI.* Muitos projetos de máquinas nos Estados Unidos ainda são feitos no sistema *ips,* embora o sistema *SI* venha se tornando cada vez mais comum†. A Tabela 1-4 mostra algumas das variáveis utilizadas neste texto e suas unidades. A Tabela 1-5 mostra vários fatores de conversão entre as unidades comumente utilizadas. O estudante deve sempre verificar as unidades em qualquer equação escrita para resolver um problema, tanto em seus estudos como na prática profissional. Se estiver bem escrita, uma equação deverá ter as mesmas unidades

* Uma sonda espacial de 125 milhões de dólares foi perdida porque a NASA não converteu os dados que tinham sido fornecidos em unidades *ips,* pela contratada Lockheed Aerospace, nas unidades métricas usadas nos programas de computadores da NASA que controlavam a espaçonave. Ela deveria viajar em órbita ao redor do planeta Marte, mas, em vez disso, ela se incendiou na atmosfera marciana ou se chocou contra o planeta devido ao erro de unidades. *Fonte: The Boston Globe, October 1, 1999, p. 1.*

§ N. de R T.: No Brasil, utiliza-se também a unidade *quilograma força,* kgf. Talvez ajude o estudante saber que a Equação 1.4*a,* da segunda lei de Newton, é escrita das seguintes maneiras, utilizando-se diferentes unidades para força, massa e comprimento: 1 N = (1 kg)(1 m/s^2), 1 kgf = (1 kg)(9,81 m/s^2), 1 lb = (1 lb_m)(32,17 ft/s^2), 1 lb = (1 lb_m)(386 in/s^2), 1 lb = (1 s/ug)(1 ft/s^2), 1 lb = (1 Wob)(1 in/s^2). E lb sempre se refere à força, isto é, lb = lb_f.

† Uma valiosa fonte de informações sobre o uso correto de unidades *SI* encontra-se no site do NIST no endereço http://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html. Outra ótima fonte sobre o uso do sistema métrico no projeto de máquinas é o informativo “Metric Is Simple”, publicado e distribuído pela Bossard International Inc., 235 Heritage Avenue, Portsmouth, NH 03801, http://www.bossard.com/

Tabela 1-4 Variáveis e unidades

Unidades Básicas em Negrito – Abreviações entre ( )

Variável	Símbolo	Unidade ips	Unidade fps	Unidade SI
Força	F	**libras (lb)**	**libras (lb)**	**newtons (N)**
Comprimento	l	**polegadas (in)**	**pés (ft)**	**metros (m)**
Tempo	t	**segundos (s)**	**segundos (s)**	**segundos (s)**
Massa	m	lb-s^2/in (bl)	lb-s^2/ft (sl)	**quilogramas (kg)**
Peso	W	libras (lb)	libras (lb)	newtons (N)
Pressão	p	psi	psf	N/m^2 = Pa
Velocidade	v	in/s	ft/s	m/s
Aceleração	a	in/s^2	ft/s^2	m/s^2
Tensão	σ, τ	psi	psf	N/m^2 = Pa
Ângulo	θ	graus (deg)	graus (deg)	graus (deg)
Velocidade angular	ω	radianos/s	radianos/s	radianos/s
Aceleração angular	α	radianos/s^2	radianos/s^2	radianos/s^2
Torque	T	lb-in	lb-ft	N-m
Momento de inércia da massa	I	lb-in-s^2	lb-ft-s^2	kg-m^2
Momento de inércia da área	I	in^4	ft^4	m^4
Energia	E	in-lb	ft-lb	joules = N-m
Força/potência	P	in-lb/s	ft-lb/s	N-m/s = watt
Volume	V	in^3	ft^3	m^3
Peso específico	v	lb/in^3	lb/ft^3	N/m^3
Densidade da massa	ρ	bl/in^3	sl/ft^3	kg/m^3

dos dois lados do sinal de igual. Se não estiver, então você poderá estar *absolutamente certo de que estará* ***incorreta***. Infelizmente, a uniformidade de unidades em qualquer equação não garante que ela esteja correta, posto que muitos outros erros são possíveis. Sempre confira duplamente seus resultados. Você poderá salvar uma vida.

EXEMPLO 1-1

Conversão de unidades

Problema **O peso de um automóvel é conhecido em lb_f. Converta-o em unidades de massa nos sistemas *SI*, *cgs*, *fps* e *ips*. Também converta-o em lb_m.**

Dado **O peso = 4500 lb_f.**

Hipóteses **O automóvel está em terra firme no nível do mar.**

Solução

1 A Equação 1.4*a* é válida para os primeiros quatro sistemas mencionados. Para o sistema *fps*:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{4\,500 \text{ lb}_f}{32{,}17 \text{ ft/sec}^2} = 139{,}9 \ \frac{\text{lb}_f - \text{sec}^2}{\text{ft}} = 139{,}9 \ slugs \qquad (a)$$

Tabela 1-5 Fatores de conversão das unidades selecionadas

Estes fatores de conversão (e outros) são construídos nos arquivos UNITMAST e STUDENT

multiplicar	por	isto	para obter	isto
aceleração				
in/s^2	×	0,0254	=	m/s^2
ft/s^2	×	12	=	in/s^2
ângulos				
radianos	×	57,2958	=	graus
área				
in^2	×	645,16	=	mm^2
ft^2	×	144	=	in^2
momento de inércia da área				
in^4	×	416231	=	mm^4
in^4	×	4,162*E*-07	=	m^4
m^4	×	1,0*E*+12	=	mm^4
m^4	×	1,0*E*+08	=	cm^4
ft^4	×	20736	=	in^4
densidade				
lb/in^3	×	27,6805	=	g/cc
lb/in^3	×	1728	=	lb/ft^3
g/cc	×	0,001	=	g/mm^3
kg/m^3	×	1,0E-06	=	g/mm^3
força				
lb	×	4,448	=	N
N	×	1,0*E*+05	=	dina
tonelada				
(curta)	×	2000	=	lb
comprimento				
in	×	25,4	=	mm
ft	×	12	=	in
massa				
blob	×	386	=	lb
slug	×	32,17	=	lb
blob	×	12	=	slug
kg	×	2,205	=	lb
kg	×	9,8083	=	N
kg	×	1000	=	g

multiplicar	por	isto	para obter	isto
momento de inércia da massa				
$lb\text{-}in\text{-}s^2$	×	0,1138	=	$N\text{-}m\text{-}s^2$
momentos e energia				
in-lb	×	0,1138	=	N-m
ft-lb	×	12	=	in-lb
N-m	×	8,7873	=	in-lb
N-m	×	0,7323	=	ft-lb
potência				
hp	×	550	=	ft-lb/s
hp	×	33000	=	ft-lb/min
hp	×	6600	=	in-lb/s
hp	×	745,7	=	watts
N-m/s	×	8,7873	=	in-lb/s
pressão e tensão				
psi	×	6894,8	=	Pa
psi	×	6,895*E*-3	=	MPa
psi	×	144	=	psf
kpsi	×	1000	=	psi
N/m^2	×	1	=	Pa
N/mm^2	×	1	=	MPa
taxa de recuo				
lb/in	×	175,126	=	N/m
lb/ft	×	0,08333	=	lb/in
intensidade da tensão				
$MPa\text{-}m^{0,5}$	×	0,909	=	$ksi\text{-}in^{0,5}$
velocidade				
in/s	×	0,0254	=	m/s
ft/s	×	12	=	in/s
rad/s	×	9,5493	=	rpm
volume				
in^3	×	16387,2	=	mm^3
ft^3	×	1728	=	in^3
cm^3	×	0,061023	=	in^3
m^3	×	1,0*E*+9	=	mm^3

Para o sistema *ips:*

$$m = \frac{W}{g} = \frac{4\,500\ \text{lb}_f}{386\ \text{in}/\text{sec}^2} = 11,66\ \frac{\text{lb}_f - \text{sec}^2}{\text{in}} = 11,66\ blobs \qquad (b)$$

Para o sistema *SI:*

$$W = 4\,500 \text{ lb} \frac{4{,}448 \text{ N}}{\text{lb}} = 20\,016 \text{ N}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20\,016 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/sec}^2} = 2\,040 \frac{\text{N} - \text{sec}^2}{\text{m}} = 2\,040 \text{ kg} \qquad (c)$$

Para o sistema *cgs:*

$$W = 4\,500 \text{ lb} \frac{4{,}448E5 \text{ dinas}}{\text{lb}} = 2{,}002E9 \text{ dinas}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{2{,}002E9 \text{ dinas}}{981 \text{ cm/sec}^2} = 2{,}04E6 \frac{\text{dinas} - \text{sec}^2}{\text{cm}} = 2{,}04E6 \text{ g} \qquad (d)$$

2 Para a massa expressa em lb_m, Equação 1.4*b* deve ser usada.

$$m = W\frac{g_c}{g} = 4\,500 \text{ lb}_f \frac{386 \text{ in/sec}^2}{386 \text{ in/sec}^2} = 4\,500 \text{ lb}_m \qquad (e)$$

Observe que lb_m é numericamente igual a lb_f e que, portanto, não pode ser usada como uma unidade de massa a menos que você esteja usando a forma da lei de Newton expressa como a Equação 1.4*b*.

1.10 RESUMO

Projetar pode ser divertido e frustrante ao mesmo tempo. Os problemas de projeto são muito desestruturados; por isso, uma grande parte da tarefa é criar estrutura suficiente para torná-lo solucionável. Isto naturalmente leva a múltiplas soluções. Os estudantes acostumados a buscar uma resposta igual à resposta do "final do livro" podem achar este exercício frustrante. Não existe "uma resposta correta" para o problema de projeto, apenas respostas que são, de forma discutível, melhores ou piores que outras. O mercado tem muitos exemplos deste fenômeno. Quantos modelos e formas diferentes de novos automóveis estão disponíveis? Todos eles não realizam mais ou menos a mesma tarefa? Mas você provavelmente tem sua própria opinião sobre quais deles realizam melhor a tarefa que os outros. Além disso, a definição de tarefa não é exatamente a mesma para todos os exemplos. Um automóvel com tração nas quatro rodas é projetado para uma definição de problema um pouco diferente de um carro esportivo de dois lugares (embora alguns veículos incorporem os dois aspectos).

Um recado para o projetista iniciante é que ele seja receptivo aos problemas de projeto apresentados. Não aborde os problemas com uma atitude de tentar encontrar "a resposta correta", já que ela não existe. Ao contrário, seja audacioso! Tente algo radical. Depois faça testes com análise. Quando descobrir que o que fez não funcionou, não fique desapontado; em vez disso, compreenda que você aprendeu alguma coisa sobre o problema. Resultados negativos ainda são resultados! Aprendemos com nossos erros e podemos projetar uma solução melhor na próxima vez. É por isso que a *iteração é* tão crucial para o sucesso do projeto.

O computador é um instrumento necessário para a solução dos problemas da engenharia moderna. As soluções podem vir mais rapidamente e com maior precisão utilizando-se apropriadamente o programa de computador (CAE). Contudo, os resultados serão apenas tão bons quanto a qualidade dos modelos de engenharia e os dados usados. O engenheiro não deverá confiar nas soluções dos computadores sem também desenvolver e aplicar uma compreensão total dos fundamentos nos quais o modelo e as ferramentas de CAE estão baseados.

Equações importantes utilizadas neste capítulo

Ver as seções referidas para informações sobre o uso correto destas equações.

Massa (Seção 1.9):

$$m = \frac{W}{g_c} \tag{1.3}$$

Força Dinâmica – para uso com unidades de massa padrões (kg, *slugs, blobs*) (Seção 1.9):

$$F = ma \tag{1.4a}$$

Força Dinâmica – para uso com massa em $lb_m = lb_f$ (Seção 1.9):

$$F = \frac{ma}{g_c} \tag{1.4b}$$

1.11 REFERÊNCIAS

1 *Random House Dictionary of the English Language.* 2nd ed. unabridged, S. B. Flexner, ed, Random House: New York, 1987, p. 1151.

2. **R. L. Norton,** *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines, 3ed.* McGraw-Hill: New York, 2004, pp. 7-14.

3 **Autocad**, Autodesk Inc., http://usa.autodesk.com

4 **Unigraphics**, EDS., Cyprus, CA., http://www.eds.com

5 **ADAMS**, Mechanical Dynamics, MI.MSC Software, http://www.krev.com

6 **Working Model**, MSC Software, http://www.krev.com.

7 **Pro/Engineer**, Parametric Technology Corp., Waltham, MA., http://www.ptc.com

8 **TK Solver**, Universal Technical Systems, Rockford, IL., http://www.uts.com

9 **Mathcad**, Mathsoft Inc., Cambridge, MA., http://www.mathsoft.com

10 **Excel**, Microsoft Corp., Redmond, WA., http://www.microsoft.com

11 **MATLAB**, Mathworks Inc., Natick, MA, http://www.mathworks.com

12 ***Solidworks***, *Solidworks* Corp., Concord, MA, http://www.solidworks.com

1.12 REFERÊNCIAS NA WEB

http://www.onlineconversion.com

Conversões de todos os tipos e gêneros. Mais de 5 mil unidades e 50 mil conversões.

http://www.katmarsoftware.com/uconeer.htm

Download gratuito de conversor de unidades para engenheiros.

http://global.ihs.com

Pesquisa de padrões técnicos em mais de 500 mil documentos disponível para *download* gratuito.

http://www.thomasnet.com

Busca eletrônica de empresas e produtos fabricados na América do Norte.

1.13 BIBLIOGRAFIA

Para informação sobre criatividade e metodologia do projeto, os seguintes textos são recomendados:

J. L. Adams, *The Care and Feeding of Ideas.* 3rd ed. Addison Wesley: Reading Mass, 1986. **J. L. Adams,** *Conceptual Blockbusting.* 3rd ed. Addison Wesley: Reading, Mass, 1986.

J. R. M. Alger and C. V. Hays, *Creative Synthesis in Design.* Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1964.

M. S. Allen, *Morphological Creativity.* Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1962.

H. R. Buhl, *Creative Engineering Design.* Iowa State University Press: Ames, Iowa, 1960.

W. J. J. Gordon, *Synectics.* Harper and Row: New York, 1962.

J. W. Haefele, *Creativity and Innovation.* Reinhold: New York, 1962.

L. Harrisberger, *Engineersmanship.* 2nd ed. Brooks/Cole: Monterey, Calif, 1982.

D. A. Norman, *The Psychology of Everyday Things.* Basic Books: New York, 1986.

A. E Osborne, *Applied Imagination.* Scribners: New York, 1963.

C. W. Taylor, *Widening Horizons in Creativity.* John Wiley: New York, 1964.

E. K. Von Fange, *Professional Creativity.* Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1959.

Para informações sobre relatórios de engenharia por escrito, os seguintes textos são recomendados:

R. Barrass, *Scientists Must Write.* Chapman and Hall: New York, 1978.

W. G. Crouch and R. L. Zetler, *A Guide to Technical Writing.* 3rd ed. The Ronald Press Co.: New York, 1964.

D. S. Davis, *Elements of Engineering Reports.* Chemical Publishing Co.: New York, 1963.

Tabela P1-0
Matriz do problema/tópico

1.4 Modelo de engenharia
1-1, 1-2, 1-3
1.9 Unidades
1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8

D. E. Gray, So *You Have to Write a Technical Report.* Information Resources Press: Washington, D.C., 1970.

H. B. Michaelson, *How to Write and Publish Engineering Papers and Reports. ISL* Philadelphia, PA., 1982.

J. R. Nelson, *Writing the Technical Report.* 3rd ed. McGraw-Hill: New York, 1952.

1.14 PROBLEMAS

1-1 Geralmente se diz "Construa a melhor ratoeira, e as portas se abrirão para você". Estude este problema, faça uma descrição do objetivo e desenvolva um conjunto de pelo menos 12 especificações de tarefas que você aplicaria para sua solução. Sugira, então, três conceitos possíveis para atingir o objetivo. Faça croquis descritivos à mão livre dos conceitos.

1-2 É necessário que se projete uma máquina de boliche para permitir que jovens tetraplégicos, que só conseguem mover uma alavanca de comando, pratiquem o esporte em uma pista convencional de boliche. Estude os fatores envolvidos, faça uma descrição do objetivo e desenvolva um conjunto de pelo menos 12 especificações de tarefa que restrinjam este problema. Sugira, então, três conceitos possíveis para atingir o objetivo. Faça croquis descritivos à mão livre dos conceitos.

1-3 Um tetraplégico precisa de um virador de páginas automatizado para permitir que ele leia livros sem ajuda. Estude os fatores envolvidos, faça uma descrição do objetivo e desenvolva um conjunto de pelo menos 12 especificações de tarefa que restrinjam este problema. Sugira, então, três conceitos possíveis para atingir o objetivo. Faça croquis descritivos à mão livre dos conceitos.

*1-4 Converta uma massa de 1000 lb_m em (a) lb_f, (b) *slugs,* (c) *blobs,* (d) kg.

*1-5 Uma massa de 250 lb_m é acelerada a 40 in/sec^2. Encontre a força em lb necessária para esta aceleração.

*1-6 Expresse uma massa de 100 kg em unidades de *slugs, blobs* e lb_m. Quanto pesa essa massa em lb_f e em N?

1-7 Prepare um programa interativo de computador (usando, por exemplo, *Excel, Mathcad, MATLAB* ou *TK Solver*) capaz de calcular as propriedades das seções transversais das formas mostradas no verso da capa. Faça o programa apresentar o resultado em unidades dos sistemas *ips* e *SI* e converta os resultados entre esses sistemas.

1-8 Prepare um programa interativo de computador (usando, por exemplo, *Excel, Mathcad, MATLAB* ou *TK Solver*) capaz de calcular as propriedades de massa dos sólidos mostrados no verso da capa. Monte o programa de forma que ele lide os sistemas de unidades *ips* e *SI* e converta os resultados entre esses sistemas.

1-9 Converta o programa escrito para o problema 1-7 para ter e usar um conjunto de funções ou sub-rotinas que podem ser chamados a partir de qualquer programa naquela linguagem para resolver as propriedades das seções transversais das formas mostradas no verso da capa.

1-10 Converta o programa escrito para o problema 1-8 para ter e usar um conjunto de funções ou sub-rotinas que podem ser chamados a partir de qualquer programa naquela linguagem para resolver as propriedades de massa para os sólidos mostrados na primeira página deste livro.

*As respostas destes problemas encontram-se no Apêndice D.

2

MATERIAIS E PROCESSOS

Não existe assunto tão antigo que não se possa dizer algo novo sobre ele.

DOSTOIÉVSKY

2.0 INTRODUÇÃO

O que quer que se projete, tem que ser feito de algum material e deve ser possível fabricá-lo. Uma sólida compreensão das propriedades, dos tratamentos e dos processos de fabricação dos materiais é essencial para se realizar bons projetos de máquinas. Presume-se que o leitor já tenha cursado uma disciplina em ciência dos materiais. Este capítulo apresenta uma rápida revisão de alguns conceitos metalúrgicos básicos e um breve resumo das propriedades dos materiais utilizados na engenharia para servir de suporte para o conteúdo que o seguirá. Este capítulo não tem a intenção de substituir um livro sobre ciência dos materiais, sendo o leitor incentivado a consultar referências, como as listadas na bibliografia deste capítulo, para informações mais detalhadas. Os capítulos posteriores deste livro explorarão mais detalhadamente algumas das formas comuns de falha dos materiais.

A Tabela 2-0 mostra as variáveis utilizadas neste capítulo e indica as equações, figuras ou seções nas quais são utilizadas. Ao final do capítulo, uma seção de resumo agrupa as equações importantes deste capítulo para facilitar a consulta e identifica a seção em que foram discutidas.

2.1 DEFINIÇÕES DE PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

As propriedades mecânicas de um material são geralmente determinadas por meio de testes destrutivos de amostras sob condições de carregamento controladas. As cargas do teste não reproduzem com precisão as solicitações em serviço real que as peças da máquina são submetidas, exceto em determinados casos especiais. Também não há garantia de que o material que você adquire para sua peça exibirá as mesmas propriedades de resistência que as amostras de materiais semelhantes previamente testadas. Haverá alguma variação estatística na resistência de qualquer amostra específica em comparação com as propriedades médias testadas daquele material. Por esta razão, muitos dos dados de resistência publicados são considerados como valores mínimos. É com esta consciência que você deve ver todos os dados de propriedades de materiais publicados, pois é responsabilidade do engenheiro garantir a segurança de seu projeto.

Tabela 2-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área	in^2	m^2	Seção 2.1
A_0	área inicial do corpo de prova	in^2	m^2	Equação 2.1*a*
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	Equação 2.2
el	limite elástico	psi	Pa	Figura 2-2
f	ponto de ruptura	nenhuma	nenhuma	Figura 2-2
G	módulo elasticidade transversal	psi	Pa	Equação 2.4
HB	dureza de Brinell	nenhuma	nenhuma	Equação 2.10
HRB	dureza de Rockwell B	nenhuma	nenhuma	Seção 2.4
HRC	dureza de Rockwell C	nenhuma	nenhuma	Seção 2.4
HV	dureza de Vickers	nenhuma	nenhuma	Seção 2.4
J	momento de inércia de área	in^4	m^4	Equação 2.5
K	fator de intensidade de tensão	$kpsi\text{-}in^{0,5}$	$MPa\text{-}m^{0,5}$	Seção 2.1
K_c	tenacidade à fratura	$kpsi\text{-}in^{0,5}$	$MPa\text{-}m^{0,5}$	Seção 2.1
l_0	comprimento de medida do corpo de prova	in	m	Equação 2.3
N	número de ciclos	nenhuma	nenhuma	Figura 2-10
P	força	lb	N	Seção 2.1
pl	limite de proporcionalidade	psi	Pa	Figura 2-2
r	raio	in	m	Equação 2.5*a*
S_d	desvio-padrão	qualquer uma	qualquer uma	Equação 2.9
S_e	limite	psi	Pa	Figura 2-10
S_{el}	resistência no limite elástico	psi	Pa	Equação 2.7
S_f	resistência à fadiga	psi	Pa	Figura 2-10
S_{us}	limite de ruptura no cisalhamento puro	psi	Pa	Equação 2.5
S_{ut}	limite de ruptura na tração	psi	Pa	Figura 2-2
S_y	limite de escoamento na tração	psi	Pa	Figura 2-2
S_{ys}	limite de escoamento no cisalhamento puro	psi	Pa	Equação 2.5*c*
T	torque	lb-in	N-m	Seção 2.1
U_R	resiliência	psi	Pa	Equação 2.7
U_T	tenacidade	psi	Pa	Equação 2.8
y	ponto de escoamento	nenhuma	nenhuma	Figura 2-2
ε	deformação específica	nenhuma	nenhuma	Equação 2.1*b*
σ	tensão de tração	psi	Pa	Seção 2.1
τ	tensão de cisalhamento	psi	Pa	Equação 2.3
θ	ângulo de rotação	rad	rad	Equação 2.3
μ	média	qualquer uma	qualquer uma	Equação 2.9*b*
ν	coeficiente de Poisson	nenhuma	nenhuma	Equação 2.4

Os melhores dados de propriedades do material são obtidos a partir de ensaios destrutivos ou não destrutivos sob carregamentos de serviço reais em protótipos reais de seu projeto, feitos de materiais reais por processos reais de manufatura. Isso normalmente se faz somente quando os riscos econômicos e de segurança são altos. Os fabricantes de aviões, automóveis, motocicletas, carros de neve, equipamentos para fazenda e de outros produtos regularmente instrumentam e testam o conjunto acabado sob condições de serviço reais ou simuladas.

Na ausência de tais testes específicos, o engenheiro deve adaptar e aplicar dados de propriedades dos materiais publicados de testes padronizados para a

situação específica. A Sociedade Americana de Testes e Materiais (ASTM) define normas para testar amostras e procedimentos de testes para uma variedade de medidas de propriedades dos materiais.* O teste mais comumente utilizado é o ensaio de tração.

Ensaio de tração

Um corpo de prova típico para o ensaio de tração é apresentado na Figura 2-1. Este corpo de prova é feito do material a ser testado em um dos vários diâmetros padrões d_o e comprimentos de medida l_o. O comprimento de medida é um comprimento arbitrário definido por duas marcas ao longo da região de diâmetro pequeno da amostra de modo que seu aumento possa ser medido durante o teste. As extremidades com diâmetros maiores do corpo de prova são rosqueadas para inserção em uma máquina de ensaio de tração capaz de aplicar forças controladas ou deslocamentos controlados nas extremidades do corpo de prova, e a região do comprimento de medida recebe um polimento espelhado para eliminar concentrações de tensão devido a defeitos de superfície. O corpo de prova é estendido lentamente em tração até romper-se, enquanto a força e a distância entre as marcas do comprimento de medida (ou, alternativamente, a deformação específica) são continuamente monitorados. O resultado é o diagrama de tensão-deformação do comportamento do material sob tração, como mostra a Figura 2-2*a*, que representa o diagrama para um aço de baixo carbono ou aço doce.

FIGURA 2-1

Corpo de prova para ensaio de tração.

TENSÃO E DEFORMAÇÃO Observe que os parâmetros medidos são força e deslocamento, mas os representados no diagrama são tensão e deformação específica. A **tensão** (σ) é definida como *força por unidade de área*, e para o corpo de prova sob tração é calculada por

$$\sigma = \frac{P}{A_o} \tag{2.1a}$$

onde P é a força aplicada em um determinado instante e A_o é a área inicial da seção transversal do corpo de prova. Assume-se que a tensão seja distribuída uniformemente na seção transversal. As unidades de tensão são psi ou Pa.

Deformação específica, ou simplesmente deformação, *é a mudança de comprimento por unidade de comprimento* e é calculada por

$$\varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o} \tag{2.1b}$$

onde l_0 é o comprimento de medida inicial e l é o comprimento de medida sob a ação da força P. A deformação específica é adimensional, sendo comprimento dividido por comprimento.

MÓDULO DE ELASTICIDADE Esse diagrama tensão-deformação de tração nos fornece vários parâmetros úteis do material. O ponto *pl* na Figura 2-2*a* é o **limite de proporcionalidade** abaixo do qual a tensão é proporcional à deformação, conforme expressa a **lei de Hooke**:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

onde E define a inclinação da curva tensão-deformação até o limite de proporcionalidade e é chamada de **módulo de Young** ou **módulo de elasticidade** do material. E é uma medida da rigidez do material em sua região elástica e tem as mesmas unidades da tensão. A maioria dos metais exibe esse comportamento linear e também tem módulos de elasticidade que variam muito pouco com tratamentos térmicos ou com a adição de elementos de liga. Por exemplo, o aço de

* *ASTM, 1994 Annual Book of ASTM Standards*, Vol. 03.01, Am. Soc. for Testing and Materials, Philadelphia, PA.

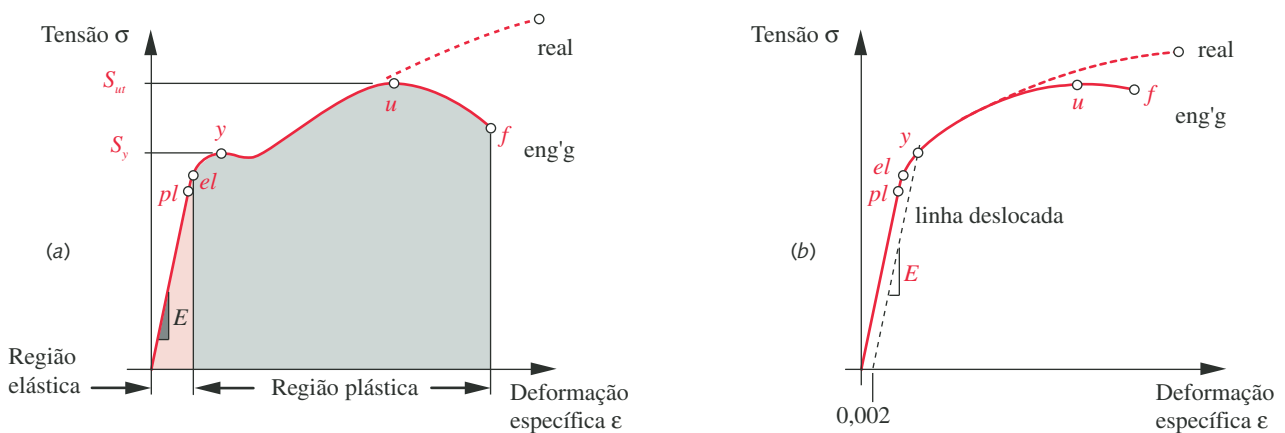



FIGURA 2-2

Diagramas tensão-real de formação e tensão de engenharia de formação: (*a*) aço de baixo carbono; (*b*) aço de alto carbono temperado.

mais alta resistência tem o mesmo *E* que o aço de mais baixa resistência de cerca de 30 Mpsi (207 GPa). Para a maior parte dos materiais dúcteis (definidos a seguir), o módulo de elasticidade em compressão é o mesmo que em tensão. O mesmo não ocorre com os ferros fundidos e outros materiais frágeis (definidos a seguir), ou com o magnésio.

Limite elástico O ponto marcado *el* na Figura 2-2*a* é o **limite elástico**, ou o ponto além do qual o material adquirirá uma forma permanente ou deformação plástica. O limite elástico marca o limiar entre as regiões de **comportamento elástico** e **comportamento plástico** do material. Os pontos *el* e *pl* normalmente são tão próximos que eles quase sempre são considerados o mesmo.

Resistência ao escoamento No ponto *y*, pouco acima do limite elástico, o material começa a ceder mais facilmente à tensão aplicada e sua taxa de deformação aumenta (observe a inclinação mais baixa). Isso se denomina **ponto de escoamento**, e o valor da tensão nesse ponto define a **resistência ao escoamento** ou a **tensão limite de escoamento** S_y do material.

Materiais muito dúcteis, como o aço de baixo carbono, às vezes apresentam uma queda aparente na tensão logo adiante do ponto de escoamento, conforme mostra a Figura 2-2*a*. Muitos materiais menos dúcteis, como o alumínio e aços de médio e alto carbono, não exibem esta queda aparente na tensão e se parecem mais com a Figura 2-2*b*. A resistência ao escoamento de um material que não exibe um ponto claro de escoamento tem que ser definida com uma linha deslocada, desenhada paralelamente à curva elástica e deslocada de uma pequena porcentagem ao longo do eixo de deformação. Um deslocamento de 0,2% de deformação permanente é mais frequentemente utilizado. A resistência ao escoamento é, então, tomada como intersecção do diagrama tensão-deformação com a linha deslocada, como mostra a Figura 2-2*b*.

Resistência à tração ou tensão limite de ruptura A tensão no corpo de prova continua a aumentar de forma não linear até um pico, ou o valor da **resistência à tração**, também chamado de **tensão limite resistência** ou **tensão limite de ruptura na tração**, S_{ut}, no ponto *u*. Este valor é considerado a maior tensão da tração que o material pode suportar antes da ruptura. Contudo, no diagrama de aço dúctil mostrado, a tensão parece diminuir para um valor menor no ponto de ruptura *f*. A aparente queda na tensão antes do ponto de ruptura (de *u* a *f* na Figura 2-2*a*) é casada pelo estrangulamento ou redução localizada na área do corpo de

prova dúctil. A redução da área da seção transversal é não uniforme ao longo do comprimento do corpo de prova, conforme se observa na Figura 2-3.

Como a tensão é calculada utilizando-se a área inicial A_o na Equação 2.1*a*, o valor real da tensão na verdade aumenta após o ponto *u*. É difícil monitorar com precisão a mudança dinâmica na área da seção transversal durante o ensaio, de modo que esses erros são aceitos. As resistências de materiais diferentes podem, todavia, ser comparadas com base nisso. Quando utilizamos a área A_o não corrigida, temos o que se chama **diagrama tensão de engenharia-deformação**, segundo mostra a Figura 2-2.

A tensão na ruptura é, na verdade, maior do que a apresentada. A Figura 2-2 também mostra o **diagrama tensão real-deformação** que resultaria caso as mudanças da área fossem levadas em conta. Os dados de **tensão de engenharia--deformação** da Figura 2-2 são normalmente utilizados na prática. Os valores de resistência mais comumente utilizados para a **solicitação estática** são a resistência ao escoamento S_y e a resistência à tração S_{ut}. A rigidez do material é definida pelo módulo de elasticidade *E*.

Ao se comparar as propriedades dos diferentes materiais, é bastante útil expressar essas propriedades normalizadas com relação à densidade do material. Uma vez que quase sempre se almeja peso leve no projeto, buscamos o material mais leve que tenha resistência e rigidez suficientes para suportar as cargas aplicadas. A **resistência específica** de um material é definida como *a resistência dividida pela densidade*. A menos que se especifique de outra forma, presume-se que resistência, neste caso, signifique o limite de resistência à tração, embora qualquer critério de resistência possa ser normalizado deste modo. A **razão resistência/peso** (SWR) é uma outra forma de expressar a resistência específica. A **rigidez específica** é o *módulo de elasticidade dividido pela densidade do material*.

Ductilidade e fragilidade

A tendência de um material a deformar-se significativamente antes de se romper é uma medida de sua ductilidade. A ausência de deformação significativa antes da ruptura é chamada de fragilidade.

DUCTILIDADE O diagrama tensão-deformação da Figura 2-2*a* é de um material dúctil, aço doce. Tome um clipe de papéis comum feito de arame de aço doce. Endireite-o com seus dedos. Dobre-o em novo formato. Você está escoando esse arame de aço dúctil, mas sem quebrá-lo. Você está agindo entre o ponto *y* e o ponto *f* do diagrama de tensão-deformação da Figura 2-2*a*. A presença de uma região plástica significativa no diagrama tensão-deformação é a evidência de ductilidade.

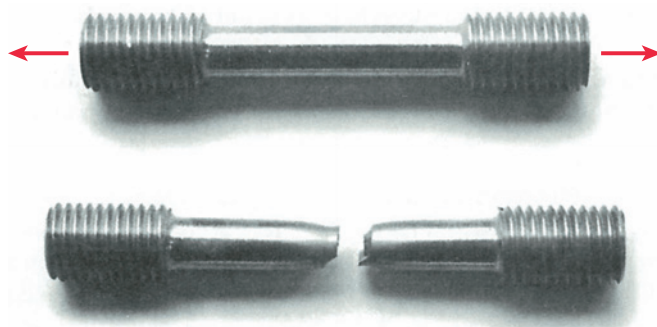



FIGURA 2-3

Um corpo de prova para ensaio de tração, material dúctil, aço doce, antes e depois da ruptura.

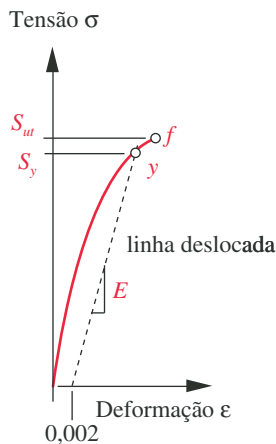



FIGURA 2-4

Diagrama tensão-deformação de um material frágil.

A Figura 2-3 mostra um corpo de prova de aço dúctil após a ruptura. A deformação denominada estricção (*necking*) pode claramente ser observada na ruptura. A superfície de ruptura aparece rasgada e está formada de elevações e depressões, também indicando uma ruptura dúctil. A **ductilidade** de um material é medida pela porcentagem de seu alongamento até a ruptura, ou pela porcentagem de redução da área na ruptura. Materiais com mais de 5% de alongamento na ruptura são considerados dúcteis.

Fragilidade A Figura 2-4 mostra um diagrama tensão-deformação de um material frágil. Observe a falta de um ponto bem definido de escoamento e a ausência de uma região plástica significativa antes da ruptura. Repita sua experiência do clipe de papéis, desta vez utilizando um palito de dente de madeira ou um palito de fósforos. Qualquer tentativa de entortá-lo resulta em quebra. A madeira é um material frágil.

Materiais frágeis não exibem um ponto claro de escoamento, assim a resistência ao escoamento tem que ser definida na intersecção do diagrama tensão-deformação com uma linha reta deslocada, desenhada paralelamente à curva elástica e deslocada de uma pequena porcentagem, como 0,2%, no eixo da deformação. Alguns materiais frágeis, como o ferro fundido, não possuem uma região elástica linear, e a linha reta deslocada é obtida pela inclinação média da região. A Figura 2-5 mostra um corpo de prova de ferro fundido após a ruptura. A quebra não mostra nenhuma evidência de estricção e tem a superfície mais lisa, comum a uma ruptura frágil.

Os mesmos materiais podem ser dúcteis ou frágeis dependendo do modo como são fabricados, trabalhados ou tratados termicamente. Metais que são **conformados plasticamente** (o que significa trefilados ou forjados na forma sólida tanto a frio quanto a quente) podem ser mais dúcteis do que metais que são fundidos despejando-se metal derretido em um molde ou forma. Existem, porém, muitas exceções a esta ampla afirmação. A conformação a frio do metal (discutido abaixo) tende a reduzir sua ductilidade e a aumentar sua fragilidade. O tratamento térmico (discutido abaixo) também tem um efeito marcante sobre a ductilidade dos aços. Deste modo, é difícil generalizar sobre a relativa ductilidade ou fragilidade dos diversos materiais. Um exame cuidadoso em todas as propriedades mecânicas de um dado material definirá cada caso.

Ensaio de compressão

A máquina de ensaio de tração pode ser revertida para aplicar uma força de compressão a um corpo de prova, que é um cilindro de diâmetro uniforme, segundo mostra a Figura 2-6. É difícil obter um diagrama tensão-deformação útil a partir desse ensaio porque um material dúctil escoa e aumenta a área de sua seção

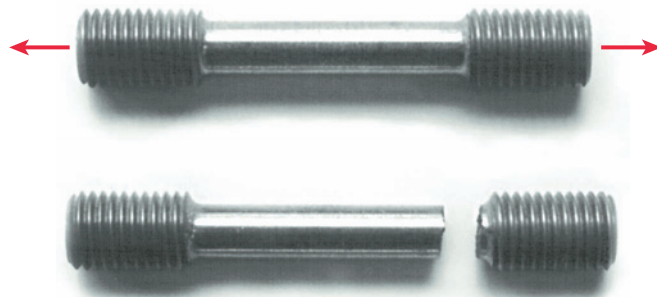



FIGURA 2-5

Corpo de prova para ensaio de tração, material frágil, ferro fundido antes e depois da ruptura.

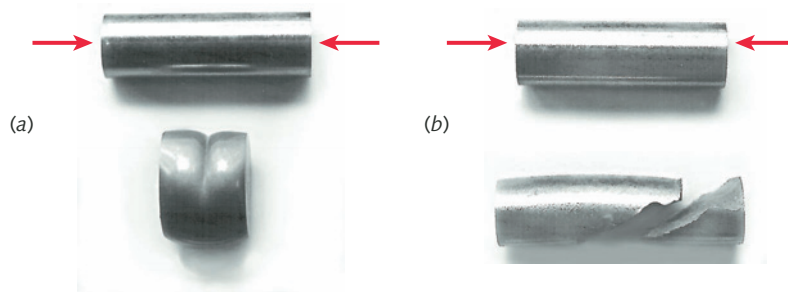



FIGURA 2-6

Corpos de prova para ensaio de compressão antes e após falha: (*a*) aço dúctil (*b*) ferro fundido frágil.

transversal, conforme mostra a Figura 2-6*a*, eventualmente enguiçando a máquina de teste. O corpo de prova dúctil não quebra na compressão. Se houver força suficiente na máquina, ele será esmagado no formato de uma panqueca. A maior parte dos materiais dúcteis tem resistência à compressão semelhante à resistência à tração, e o diagrama tensão-deformação na tração é utilizada para representar também seu comportamento sob compressão. Um material que tenha resistências essencialmente iguais à tração e à compressão é chamado de **material uniforme**.

Materiais frágeis rompem-se sob compressão. Uma amostra quebrada de ferro fundido frágil é apresentada na Figura 2-6*b*. Observe a superfície de ruptura áspera e em ângulo. A razão para a ruptura em um plano inclinado é discutida no Capítulo 4. Materiais frágeis geralmente têm resistência muito maior à compressão do que à tração. É possível diagramas de tensão-deformação na compressão, visto que o material se rompe em vez de se esmagar e que a área de seção transversal não se altera consideravelmente. Um material que tenha resistências de tração e compressão diferentes é denominado **material não uniforme**.

Ensaio de flexão

Uma barra fina, como a apresentada na Figura 2-7, é simplesmente apoiada em cada extremidade como uma viga e carregada transversalmente no centro de seu comprimento até a falha ocorrer. Se o material for dúctil, a falha será por escoamento, segundo mostra a Figura 2-7*a*. Se o material for frágil, a viga se romperá, como mostra a Figura 2-7*b*. Os diagramas de tensão-deformação não são gerados a partir deste ensaio porque a distribuição de tensões na seção transversal não é uniforme. A curva σ–ε do ensaio de tração é usada para prever a falha na flexão, pois as tensões de flexão são de tração no lado convexo e de compressão no lado côncavo da viga.

Ensaio de torção

As propriedades de cisalhamento de um material são mais difíceis de serem determinadas do que suas propriedades de tração. Um corpo de prova semelhante ao corpo de prova do teste de tração é feito com detalhes não circulares em suas extremidades, de modo que possa ser torcida em torno de seu eixo até se romper. A Figura 2-8 mostra dois desses corpos de prova, um de aço dúctil e um de ferro fundido frágil. Observe as linhas pintadas ao longo de seus comprimentos. As linhas eram inicialmente retas em ambos os casos. A rotação helicoidal na linha do corpo de prova dúctil após a falha mostra que ele girou várias vezes antes de romper. A linha da amostra frágil no ensaio de torção permanece reta após a falha, uma vez que não houve distorção plástica significativa antes da ruptura.

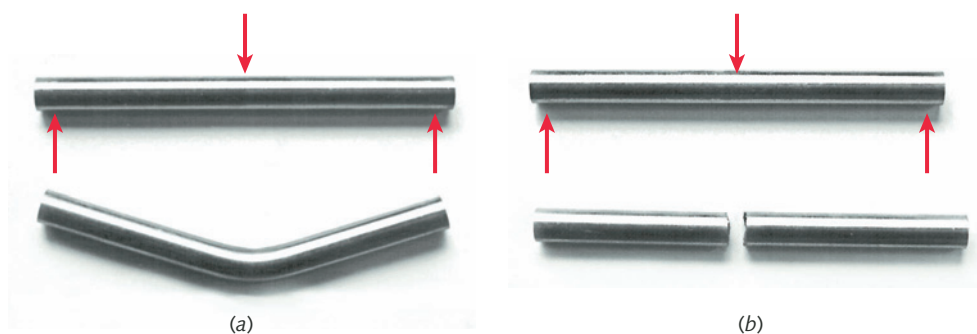



FIGURA 2-7

Corpos de prova para flexão antes e após falha: (*a*) aço dúctil (*b*) ferro fundido frágil.

Módulo de rigidez A relação tensão-deformação na torção pura é definida por

$$\tau = \frac{G r \theta}{l_o} \tag{2.3}$$

onde τ é a tensão de cisalhamento, r é o raio do corpo de prova, l_o é o comprimento de medida, θ é a rotação em radianos e G é o módulo de elasticidade transversal ou **módulo transversal**. G pode ser definido em termos do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.4}$$

O **coeficiente de Poisson** (ν) é a razão entre a deformação específica lateral e longitudinal, sendo, para a maior parte dos metais, em torno de 0,3, conforme mostra a Tabela 2-1.

Tabela 2-1
Coeficiente de Poisson ν

Material	ν
Alumínio	0,34
Cobre	0,35
Ferro	0,28
Aço	0,28
Magnésio	0,33
Titânio	0,34

Resistência ao cisalhamento A resistência à quebra na torção é chamada de resistência ao cisalhamento ou tensão limite de ruptura no cisalhamento puro S_{us} e é calculada por

$$S_{us} = \frac{T r}{J} \tag{2.5a}$$

onde T é o torque aplicado necessário para romper o corpo de prova, r é o raio do corpo de prova e J é momento polar de inércia da seção transversal. A distribuição da tensão na seção transversal solicitada na torção não é uniforme. Ela é zero no centro e máxima no raio externo. Assim, a região externa já escoou plasticamente enquanto a região interna ainda está abaixo do ponto de escoamento. Por

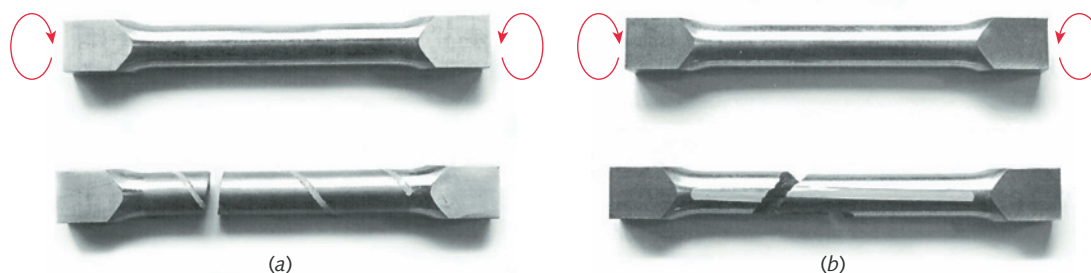



FIGURA 2-8

Corpos de prova para torção antes e após falha: (*a*) aço dúctil (*b*) ferro fundido frágil.

esse motivo, um tubo de parede fina é um corpo de prova melhor para o ensaio de torção do que uma barra maciça e pode dar uma medida melhor da resistência ao cisalhamento.

Na ausência de dados disponíveis para a tensão limite de ruptura no cisalhamento de um material, uma aproximação razoável pode ser obtida a partir dos dados do ensaio de tração:*

$$\begin{aligned} &\text{aços:} && S_{us} \cong 0{,}80 S_{ut} \\ &\text{outros materiais dúcteis:} && S_{us} \cong 0{,}75 S_{ut} \end{aligned} \tag{2.5b}$$

Observe que a tensão limite de escoamento no cisalhamento tem uma relação diferente com a tensão limite de escoamento na tração:

$$S_{ys} \cong 0{,}577\ S_y \tag{2.5c}$$

Esta relação é deduzida no Capítulo 5, onde a falha de materiais sob carregamento estático é discutida mais detalhadamente.

Resistência à fadiga e limite de resistência à fadiga

Os ensaios de tração e de torção aplicam cargas lentamente e apenas uma vez ao corpo de prova. Esses ensaios são estáticos e medem resistências estáticas. Embora algumas peças de máquinas possam estar sujeitas apenas a solicitações estáticas em sua vida útil, a maior parte sofrerá forças e tensões que variam com o tempo. Os materiais comportam-se de forma muito diferente em resposta a cargas que vêm e vão (chamadas **solicitações variáveis** ou **de fadiga**) e nos casos de cargas que permanecem estáticas. A maior parte do projeto de máquinas lida com o projeto de peças sujeitas a solicitações variáveis, portanto precisamos saber a **resistência à fadiga** dos materiais com essas condições de carregamento.

Um ensaio de resistência à fadiga é o ensaio de eixo girante de R. R. Moore, no qual um corpo de prova semelhante, mas ligeiramente menor do que o da Figura 2-1, é carregado como uma viga em flexão pura enquanto é girado por um motor. Lembre-se de seu primeiro curso de resistência de materiais que o momento fletor causa tração em um lado da viga e compressão no outro. (Ver Seções 4.9 e 4.10 para uma revisão de vigas sob flexão.) A rotação do eixo faz com que um ponto qualquer da superfície passe de compressão para tração e novamente para compressão em cada ciclo. Isso cria uma curva de tensão *versus* tempo, como mostra a Figura 2-9.

FIGURA 2-9

Carregamento que varia com o tempo.

O ensaio continua em um determinado nível de tensão até que a peça se rompa, e o número de ciclos N é, então, anotado. Muitos corpos de prova do mesmo material são ensaiados em vários níveis de tensão S até que uma curva semelhante à da Figura 2-10 seja gerada. Isso é chamado de curva de vida, ou de Wöhler, ou de curva *S-N*. Ela representa a resistência à quebra de um material específico submetido a vários números de ciclos repetidos de tensão totalmente reversa.

Observe na Figura 2-10 que a **resistência à fadiga** S_f de um ciclo é a mesma que a resistência estática S_{ut} e diminui linearmente com o aumento do número de ciclos N (em um gráfico log-log) até alcançar um platô em torno de 10^6 ciclos. Este platô da resistência à fadiga existe somente para determinados metais (notadamente os aços e algumas ligas de titânio) e é chamado de limite de resistência à fadiga S_e. As resistências à fadiga de outros materiais continuam caindo além desse ponto. Embora haja uma variação considerável entre os materiais, suas resistências padrão (ou não corrigidas) à fadiga em torno de $N = 10^6$ ciclos tendem a ser não mais que cerca de 40-50% de sua resistência à tração estática S_{ut}. Isso é uma redução significativa e, como veremos no Capítulo 6, reduções adicionais nas resistências à fadiga de materiais serão necessárias devido a outros fatores, como o acabamento superficial e o tipo de solicitação.

---

* No Capítulo 14, sobre projetos de molas helicoidais, uma relação empírica para a resistência ao cisalhamento de um arame de aço de pequeno diâmetro, baseada em exaustivos testes com o arame em torção, é apresentada na Equação 14.4 e é $S_{us} = 0{,}67\ S_{ut}$. Esta é, obviamente, distinta em relação à aproximação geral para o aço na Equação 2.5b. Os melhores dados sobre propriedades de material são obtidos a partir de testes com o mesmo material, mesma geometria e mesma carga a que a peça estará submetida no trabalho. Na ausência de dados vindos de testes diretos, devemos nos apoiar em aproximações como as da Equação 2.5b e aplicar fatores de segurança adequados baseados na incerteza desses dados.

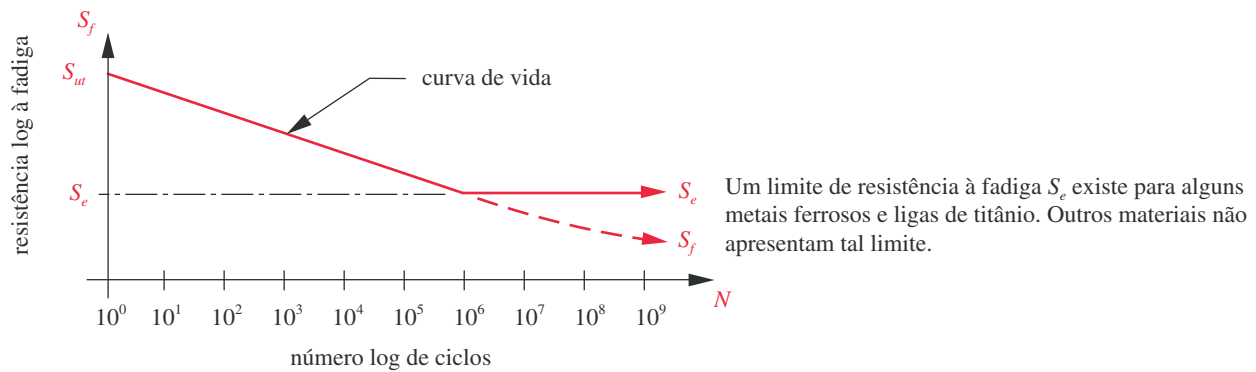



FIGURA 2-10

Diagrama de vida de Wöhler ou diagrama *S-N* da resistência à fadiga *versus* número de ciclos de tensão completamente reversa (simétrica).

É importante, neste estágio, lembrar-se de que o ensaio de tração não diz tudo e de que as propriedades de resistência estática do material raramente são adequadas por si só para prever falha em uma aplicação de projeto de máquinas. Este tópico de resistência à fadiga e limite de resistência à fadiga é tão importante e fundamental ao projeto de máquinas que dedicamos o Capítulo 6 exclusivamente ao estudo de falha por fadiga.

O ensaio de eixo girante agora está sendo suplantado por ensaios de tração axial realizados em máquinas de testes modernas que podem aplicar forças variáveis com o tempo de qualquer forma desejável ao corpo de prova em tração axial. Essa abordagem proporciona mais flexibilidade nos testes e dados mais precisos por causa da distribuição uniforme de tensão no corpo de prova em tração. Os resultados são consistentes com (mas ligeiramente menores que) os dados históricos dos ensaios de eixo girante para os mesmos materiais.

Resistência ao impacto

O ensaio de tração é feito com taxas de deformação controladas e muito baixas, permitindo ao material acomodar-se à variação da força. Se a força for aplicada repentinamente, a capacidade de absorção de energia do material torna-se importante. A energia em questão é sua **energia de deformação** (energia de deformação por volume de unidade U_0), ou a área sob o diagrama tensão-deformação em uma deformação particular.

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \tag{2.6a}$$

A energia de deformação U é igual à densidade da energia de deformação integrada sobre o volume v.

$$U = \int_v U_0 \, dv \tag{2.6b}$$

A **resiliência** e **tenacidade** do material são medidas da energia de deformação presente no material no limite elástico ou no ponto de ruptura, respectivamente.

Resiliência A capacidade de um material de absorver energia por unidade de volume sem deformação permanente é chamada de **resiliência** U_R (também denominada **módulo de resiliência**) e é igual à área sob o diagrama tensão-deformação até o limite elástico, mostrada em sombreado na Figura 2-2*a*. Resiliência é definida como:

$$U_R = \int_0^{\varepsilon_{el}} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} S_{el} \varepsilon_{el}$$
$$= \frac{1}{2} S_{el} \frac{S_{el}}{E} = \frac{1}{2} \frac{S_{el}^2}{E} \tag{2.7}$$
$$U_R \cong \frac{1}{2} \frac{S_y^2}{E}$$

onde S_{el} e ε_{el} representam, respectivamente, a resistência e a deformação no limite elástico. A substituição da lei de Hooke da Equação 2.2 expressa a relação em termos de resistência e o módulo de elasticidade. Uma vez que o valor S_{el} raramente está disponível, pode-se obter uma aproximação razoável da resiliência utilizando a resistência ao escoamento S_y em substituição.

Esta relação mostra que um material mais rígido de mesma resistência elástica é menos resiliente do que um mais flexível. Uma bola de borracha pode absorver mais energia sem deformação permanente do que uma bola feita de vidro.

Tenacidade A capacidade de um material de absorver energia por unidade de volume sem ruptura é denominada sua **tenacidade** U_T (também denominada **módulo de tenacidade**) e é igual à área sob o diagrama tensão-deformação até o ponto de ruptura, representada pela área sombreada total na Figura 2-2*a*. A tenacidade é definida como:

$$U_T = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon$$
$$\cong \left(\frac{S_y + S_{ut}}{2} \right) \varepsilon_f \tag{2.8}$$

onde S_{ut} e ε_f representam, respectivamente, a resistência à tração e a deformação na ruptura. Uma vez que uma expressão analítica da curva tensão-deformação raramente está disponível para integração real, uma aproximação da tenacidade pode ser obtida utilizando-se a média da resistência ao escoamento e do limite de resistência à tração e a deformação na ruptura para calcular uma área. As unidades de tenacidade e resiliência são energia por unidade de volume (in-lb/in^3 ou joules/m^3). Observe que essas unidades são numericamente equivalentes à psi ou Pa.

Um material dúctil com resistência à tração semelhante à de um material frágil será muito mais tenaz. Uma carroceria de automóvel feita de chapas de metal absorverá mais energia em uma colisão pela deformação plástica do que uma carroceria frágil de fibra de vidro.*

Ensaio de impacto Diversos testes foram criados para medir a capacidade dos materiais de resistir a cargas de impacto. Os ensaios de **Izod** e de **Charpy** são dois desses procedimentos, e consistem em golpear um corpo de prova entalhado com um pêndulo e registrar a energia cinética necessária para quebrar a amostra em uma determinada temperatura. Ainda que esses dados não se correlacionem diretamente com a área sob o diagrama tensão-deformação, eles, contudo, proporcionam um meio de comparar a capacidade de absorção de energia de vários materiais sob condições controladas. Manuais de materiais, como os listados na bibliografia deste capítulo, fornecem dados sobre a resistência ao impacto de diversos materiais.

Tenacidade à fratura

A **tenacidade à fratura** K_c (que não deve ser confundida com o módulo de tenacidade definido acima) é *uma propriedade do material que define sua capacidade de suportar tensão na ponta de uma trinca*. A tenacidade à fratura de um material

* É interessante observar que um dos materiais mais tenazes e fortes conhecidos é o das *teias de aranha!* Essas minúsculas aracnídeas tecem um monofilamento que tem uma resistência à tração de 200 a 300 kpsi (1380 a 2070 MPa) e 35% de alongamento na ruptura! Ela também pode absorver mais energia sem ruptura do que qualquer fibra conhecida, absorvendo três vezes mais energia que o Kevlar, uma fibra feita pelo homem usada na confecção de coletes a prova de balas.

De acordo com o Boston Globe (18 de janeiro de 2012), pesquisadores no Canadá e nos Estados Unidos sintetizaram um material com propriedades similares às da seda de aranha em fios de até 10 ft de comprimento com resistência de 1/4 a 1/3 da de fibra de seda natural, "mais forte do que um fio de aço de mesmo peso", tendo mais elasticidade do que a fibra de seda orgânica.

é medida sujeitando-se um corpo de prova com uma trinca determinada à tração cíclica até que ocorra a ruptura. Trincas criam concentrações de tensão muito altas que causam escoamento local (ver Seção 4.15). O efeito da trinca sobre a tensão local é medido pelo **fator de intensidade de tensão** K, que é definido na Seção 5.3. Quando a intensidade de tensão K atinge a tenacidade à fratura K_c, uma fratura súbita ocorre sem qualquer aviso. O estudo desse fenômeno de falha é chamado de **mecânica da fratura** e é discutido mais detalhadamente nos Capítulos 5 e 6.

Efeitos da fluência e da temperatura

O ensaio de tração, ainda que lento, não tem uma duração longa em comparação com o tempo no qual uma peça de máquina realmente pode estar sujeita a um esforço constante. Todos os materiais, sob certas condições ambientais (particularmente temperaturas elevadas), fluem (deformam-se) lentamente quando sujeitos a tensões bem abaixo do nível (ponto de escoamento) considerado seguro no ensaio de tração. Metais ferrosos tendem a ter uma fluência insignificante em temperatura ambiente ou mais baixa. Sua taxa de fluência aumenta com o aumento da temperatura do ambiente, geralmente tornando-se significativa ao redor de 30-60% da temperatura absoluta de fusão do material.

Metais com baixa temperatura de fusão, como chumbo e muitos polímeros, podem exibir fluência significativa na temperatura ambiente, bem como taxas de fluência elevadas em temperaturas mais altas. Os dados de fluência para materiais de engenharia são bastante escassos devido ao custo e ao tempo necessários para desenvolver dados experimentais. O projetista precisa estar ciente do fenômeno da fluência e obter dados atualizados dos fabricantes dos materiais selecionados caso se prevejam temperaturas ambientais elevadas, ou quando polímeros forem especificados. O fenômeno da fluência é mais complexo do que sugere esta descrição simples. Veja a bibliografia deste capítulo para informações mais detalhadas sobre fluência de materiais.

Também é importante entender que todas as propriedades dos materiais são uma função da temperatura, e os dados de ensaios publicados geralmente são gerados em temperatura ambiente. Um aumento de temperatura geralmente reduz a resistência. Muitos materiais que são dúcteis em temperatura ambiente podem comportar-se como materiais frágeis em temperaturas baixas. Deste modo, se sua aplicação envolver temperaturas elevadas ou baixas, você deverá procurar dados relevantes sobre propriedades do material para o ambiente de funcionamento. Os fabricantes de materiais são a melhor fonte de informações atualizadas. A maior parte dos fabricantes de polímeros publicam dados sobre a fluência de seus materiais em diversas temperaturas.

2.2 A NATUREZA ESTATÍSTICA DAS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Alguns dados publicados sobre propriedades de materiais representam os valores médios de muitas amostras testadas. (Outros dados são declarados como valores mínimos.) A dispersão dos resultados dos testes publicados às vezes é declarada, às vezes, não. A maioria das propriedades dos materiais varia em torno do valor médio de acordo com alguma distribuição estatística, como a *distribuição de Gauss* ou *normal* mostrada na Figura 2-11. Esta curva é definida em termos de dois parâmetros, a *média aritmética* μ e o *desvio-padrão* S_d. A equação da curva da distribuição de Gauss é

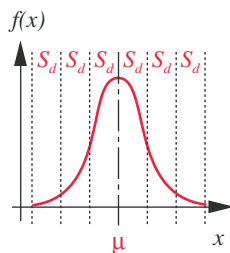



FIGURA 2-11

Distribuição de Gauss (normal).

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_d}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2S_d^2}\right], \qquad -\infty \le x \le \infty \tag{2.9a}$$

onde x representa algum parâmetro do material, $f(x)$ é a frequência com a qual esse valor de x ocorre na população e μ e S_d são definidos como

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.9b}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2} \tag{2.9c}$$

A *média* μ define o valor de x que ocorre com mais frequência[§] no pico da curva e o *desvio-padrão* S_d é uma medida da dispersão da curva ao redor da *média*. Um pequeno valor do S_d relativo à μ significa que toda a população está agrupada próximo da média. Um S_d grande indica que a população está largamente dispersa em torno da média. Para a distribuição normal, podemos esperar encontrar 68% da população entre $\mu \pm 1S_d$, 95% entre $\mu \pm 2S_d$ e 99% entre $\mu \pm 3S_d$.

Há uma considerável dispersão dos resultados de testes múltiplos do mesmo material sob as mesmas condições de teste. Observe que há uma probabilidade de 50% de que as amostras de qualquer material que você vá comprar tenham uma resistência inferior ao valor médio publicado do material. Assim, você pode não querer usar apenas o valor médio como prognóstico da resistência de uma amostra escolhida ao acaso desse material. Se o desvio-padrão dos resultados dos testes for publicado juntamente com a média, podemos utilizá-lo para definir um valor mais baixo do que a média para ser um prognóstico de uma porcentagem maior da população. Por exemplo, se você quer com probabilidade de 99% que todas as amostras possíveis do material sejam mais resistentes do que a resistência assumida de seu material, você deve subtrair aproximadamente $3S_d$ de μ para obter um valor admissível para seu projeto.[¶] Supõe-se que a distribuição da propriedade do material é normal e não assimétrica para uma ponta ou outra do espectro. Se um valor mínimo da propriedade do material for dado (e usado), então sua distribuição estatística não terá importância.

Geralmente não existem dados disponíveis sobre o desvio-padrão dos resultados dos testes das amostras dos materiais. Mas ainda se pode escolher reduzir a resistência média publicada por um fator de confiabilidade baseado em um S_d presumido. Essa abordagem assume que o S_d é uma porcentagem de μ baseado na experiência. Haugen e Wirsching[1] relatam que o desvio-padrão da resistência dos aços raramente excede 8% de seus valores médios. A Tabela 2-2 mostra fatores de redução para confiabilidade baseados na suposição de que $S_d = 0{,}08\ \mu$ para vários valores da confiabilidade. Observe que uma confiabilidade de 50% tem um fator de 1 e que o fator reduz-se conforme se escolhe uma confiabilidade mais alta. O fator de redução é multiplicado pelo valor médio de uma propriedade relevante do material. Por exemplo, se você deseja que 99,99% de suas amostras atinjam ou excedam a resistência assumida, multiplique o valor médio da resistência por 0,702.

Em resumo, a abordagem mais segura é desenvolver seu próprio banco de dados de propriedades dos materiais para os materiais e condições de carregamento específicos relevantes para seu projeto. Uma vez que esta abordagem costuma ser exorbitantemente cara tanto em tempo quanto em dinheiro, o engenheiro geralmente deverá confiar nos dados publicados de propriedades de materiais. Alguns dados de resistência publicados são expressos como resistência mínima a ser esperada em uma amostra estatística, mas outros dados podem ser dados como valores médios para as amostras testadas. Nesse caso, algumas das amostras do material testadas falharam sob tensões inferiores ao valor médio, e a resistência assumida em seu projeto pode precisar ser reduzida adequadamente.

Tabela 2-2
Fatores de confiabilidade para $S_d = 0{,}08\ \mu$

Confiabilidade (%)	Fator
50	1,000
90	0,897
95	0,868
99	0,814
99,9	0,753
99,99	0,702
99,999	0,659
99,9999	0,620

[§] N. de R. T.: Em uma distribuição geral, a média representa o valor esperado, ou seja, o valor mais provável de sair em um sorteio. A moda representa o valor correspondente ao pico da distribuição, e a mediana representa o valor onde 50% dos dados são inferiores ou superiores a ela. A distribuição de Gauss, ou normal, é unimodal e simétrica, de modo que a média, a moda e a mediana coincidem.

[¶] N. de R. T.: Este valor de $3S_d$ para 99% de probabilidade é aproximado. Mais precisamente, para a distribuição normal, $\mu - 3S_d$ representa 99,87% da população acima do valor.

2.3 HOMOGENEIDADE E ISOTROPIA

Toda a discussão sobre propriedades dos materiais até agora pressupôs que o material fosse homogêneo e isotrópico. **Homogêneo** significa que *as propriedades do material são uniformes nele todo*, por exemplo, não dependendo de sua posição. Esse estado ideal raramente é conseguido nos materiais reais, muitos dos quais estão sujeitos à inclusão de descontinuidades, precipitados, lacunas ou pequenos pedaços de material estranho oriundos do processos de fabricação. Contudo, a maioria dos metais e alguns não metais podem ser considerados, para fins de engenharia, macroscopicamente homogêneos apesar dos desvios microscópicos deste ideal.

Um material **isotrópico** é aquele cujas *propriedades mecânicas independem da orientação ou da direção*. Isto é, as resistências na direção da largura e da espessura são as mesmas das ao longo do comprimento da peça, por exemplo. A maior parte dos metais e alguns não metais podem ser considerados como macroscopicamente isotrópicos. Outros materiais são **anisotrópicos**, que significa que *não há plano da simetria da propriedade de materiais*. Os materiais **ortotrópicos** *possuem três planos mutuamente perpendiculares de simetria em relação às propriedades do material e podem ter propriedades de material diferentes ao longo de cada eixo*. Madeira, compensado de madeira (madeira compensada), fibra de vidro e algumas chapas laminadas a frio de metais são ortotrópicos.

Uma grande classe de materiais que é distintamente não homogênea (isto é, heterogênea) e não isotrópica é a dos **compósitos**. A maior parte dos compósitos é fabricada, mas alguns, como a madeira, são naturais. A madeira é um compósito de fibras longas confinadas em uma matriz resinosa de lignina. Sabe-se, por experiência, que é fácil dividir a madeira ao longo de suas fibras e que é praticamente impossível fazê-lo no sentido transversal às fibras. Sua resistência depende da orientação e da posição. A matriz é mais fraca do que as fibras e sempre racha entre elas.

2.4 DUREZA

A dureza de um material pode ser um indicador de sua resistência ao desgaste (mas não é uma garantia dessa resistência). As resistências de alguns materiais, como o aço, também estão estreitamente relacionadas com sua dureza. Vários tratamentos térmicos são aplicados aos aços e a outros metais para aumentar sua dureza e resistência. Esses tratamentos são discutidos a seguir.

A dureza é mais frequentemente medida em uma das três escalas: *Brinell, Rockwell* ou *Vickers*. Todos esses ensaios de dureza envolvem a impressão forçada de uma pequena prova na superfície do material que está sendo testado. O **ensaio Brinell** utiliza uma esfera de carbeto de tungstênio* de 10 mm de diâmetro sobre a qual se aplica uma carga de 500 kgf ou 3000 kgf, dependendo da faixa de dureza do material. O diâmetro da impressão resultante é medido com um microscópio e utilizado para calcular o valor da dureza Brinell, o qual tem unidade de kg_f/mm^2. O **ensaio Vickers** utiliza uma pirâmide de diamante para imprimir a marca e mede a largura da impressão no microscópio. O **ensaio Rockwell** usa uma esfera de 1/16 in de diâmetro ou uma ponta de diamante em forma de cone com ângulo de 120° e mede a profundidade de penetração.

A dureza é indicada por um número seguido da letra H, à qual se justapõe a letra indicativa do método utilizado, como, por exemplo, 375 HB ou 396 HV. Várias escalas identificadas por letras (A, B, C, D, F, G, N, T) são usadas para materiais em diferentes faixas de dureza Rockwell, sendo necessário especificar a letra e o número da leitura Rockwell, como, por exemplo, 60 HRC. No caso da escala Rockwell N, utiliza-se um marcador cônico de ângulo obtuso, com cargas

* O carbeto de tungstênio é uma das substâncias mais duras que se conhecem.

de 15, 30 ou 40 kgf, e a especificação deve incluir a carga utilizada bem como a letra de escala, por exemplo, 84,6 HR15N. Essa escala Rockwell N é tipicamente usada para medir a dureza "superficial" de peças finas ou endurecidas superficialmente. A carga mais baixa e a ponta N de ângulo obtuso produzem uma penetração rasa que mede a dureza da camada superficial sem incluir os efeitos do substrato mais macio.

Todos esses ensaios são não destrutivos na medida em que a amostra permanece intacta. Contudo, a impressão pode se tornar um problema caso o acabamento superficial seja um fator crítico, ou se a seção for delgada; nesses casos, eles são considerados ensaios destrutivos. O ensaio Vickers tem a vantagem de requerer apenas um arranjo para todos os materiais. Os ensaios Brinell e Rockwell exigem seleção do tamanho da ponta, da carga de impressão, ou de ambos, adaptando-se ao material a ser testado. O ensaio Rockwell é favorecido pela ausência de erros do operador, uma vez que nenhuma leitura no microscópio é necessária, e a impressão tende a ser menor, especialmente quando se usa a ponta N. Mas a dureza Brinell fornece uma maneira muito conveniente de estimar o limite de resistência à tração (S_{ut}) do material pela relação

$$\begin{aligned} S_{ut} &\cong 500\ H_B \pm 30\ H_B \ \text{psi} \\ S_{ut} &\cong 3{,}45\ H_B \pm 0{,}2\ H_B \ \text{MPa} \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde H_B é o valor da dureza Brinell. Isso proporciona uma forma conveniente de obter uma medida experimental aproximada da resistência de uma amostra de qualquer aço-carbono ou aço-liga de média ou baixa resistência, ainda que essa amostra já tenha sido colocada em serviço e não possa ser verdadeiramente ensaiada de maneira destrutiva.

Os **ensaios de microdureza** utilizam uma pequena carga sobre um diamante marcador e conseguem fornecer um perfil de microdureza como uma função da profundidade ao longo da seção de uma amostra. A dureza é computada em escala absoluta pela divisão da força aplicada pela área da impressão. A unidade de **dureza absoluta** é kg_f/mm^2. Valores de dureza Brinell e Vickers também têm essa unidade, apesar de que os valores medidos em uma mesma amostra podem variar dependendo do método. Por exemplo, uma dureza Brinell de 500 HB é aproximadamente a mesma que uma dureza Rockwell C de 52 HRC e uma dureza absoluta de 600 kg_f/mm^2. Observe que essas escalas não são linearmente relacionadas, o que torna difícil qualquer conversão. A Tabela 2-3 mostra conversões aproximadas entre durezas nas escalas Brinell, Vickers, Rockwell B e Rockwell C para aços, juntamente com seus limites de resistência à tração aproximados.

Tratamento térmico

O processo de tratamento térmico de um aço é bastante complicado, e uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em textos sobre materiais como aqueles listados na bibliografia ao final deste capítulo. Recomenda-se ao leitor procurar tais referências. Aqui, foram revistos somente alguns dos pontos principais.

A dureza e outras características de muitos aços e outros metais não ferrosos podem ser alteradas por tratamento térmico. O aço é uma liga de ferro e carbono. A porcentagem em massa de carbono no aço afeta a capacidade da liga de ser tratada termicamente. Um aço de baixo carbono tem entre 0,03% e 0,30% de carbono; um aço de médio carbono, entre 0,35% e 0,55%; e um aço de alto carbono, de 0,60% a 1,50% (ferros fundidos têm frações de carbono maiores do que 2%). A capacidade de endurecimento de um aço aumenta com a quantidade de carbono. Um aço de baixo carbono tem pouco carbono para ser submetido a um endurecimento maciço. Assim, outros processos de endurecimento superficial devem ser utilizados (ver a seguir). Aços de médio e de alto carbono podem ser submetidos

Tabela 2-3 Dureza equivalente aproximada e limites de resistência à tração para aços

		Rockwell		Tensão limite, σ_u	
HB Brinell	*HV* Vickers	*HRB*	*HRC*	MPa	ksi
627	667	–	58,7	2393	347
578	615	–	56,0	2158	313
534	569	–	53,5	1986	288
495	528	–	51,0	1813	263
461	491	–	48,5	1669	242
429	455	–	45,7	1517	220
401	425	–	43,1	1393	202
375	396	–	40,4	1267	184
341	360	–	36,6	1131	164
311	328	–	33,1	1027	149
277	292	–	28,8	924	134
241	253	100	22,8	800	116
217	228	96,4	–	724	105
197	207	92,8	–	655	95
179	188	89,0	–	600	87
159	167	83,9	–	538	78
143	150	78,6	–	490	71
131	137	74,2	–	448	65
116	122	67,6	–	400	58

Nota: Carga de 3000 kgf para a dureza Brinell, HB.

Fonte: Tabela 5-10, p. 185, in N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993, sob permissão.

a endurecimento maciço por um tratamento térmico apropriado. A profundidade de endurecimento varia com a quantidade de elemento de liga.

Têmpera Para endurecer um aço de médio ou de baixo carbono, a peça é aquecida acima de sua temperatura crítica (aproximadamente 1400°F {760°C}), deixa-se que ela se equilibre por algum tempo e depois ela deve ser repentinamente resfriada até a temperatura ambiente por imersão em um banho de água ou óleo. O rápido resfriamento cria uma solução supersaturada de carbono em ferro chamada martensita, que é extremamente dura e muito mais resistente do que o material "mole" original. Infelizmente, ela é também muito frágil. De fato, abriu-se mão da ductilidade do aço para aumentar sua resistência. O resfriamento repentino também introduz deformações na peça. A mudança na forma do diagrama tensão-deformação como resultado da têmpera de um aço dúctil de médio carbono é mostrada na Figura 2-12 (fora de escala). Da mesma forma que o aumento de resistência é desejável, a alta fragilidade de um aço totalmente temperado geralmente impede seu uso sem revenimento.

FIGURA 2-12

Diagramas tensão-deformação para um aço recozido, temperado e revenido.

Revenimento ou revenido Subsequentemente à têmpera, a mesma peça pode ser reaquecida a uma temperatura mais baixa (400 a 1300°F {200 a 700°C}), deixada nesse banho de calor por um longo tempo e depois deixada resfriar lentamente. Isso fará com que uma parte da martensita se converta em ferrita e cementita, o que reduz um pouco a resistência, mas restaura parte da ductilidade. A combinação de propriedades resultantes é bastante flexível e pode ser feita sob medida por meio da variação do intervalo de tempo e da temperatura durante o

processo de revenimento. Um engenheiro de materiais ou um metalurgista com bom conhecimento pode conseguir uma larga variedade de propriedades para se ajustar a qualquer aplicação. A Figura 2-12 também mostra um diagrama tensão-deformação para o mesmo aço após o revenimento.

Recozimento O processo de têmpera e de revenido é reversível por recozimento. A peça é aquecida acima da temperatura crítica (da mesma maneira que para a têmpera), porém, agora, deixada resfriar devagar até a temperatura ambiente. Isso restaura as condições de solução e as propriedades mecânicas da liga não endurecida. O recozimento é frequentemente utilizado, mesmo para peças que não foram previamente endurecidas, com o intuito de eliminar todas as tensões ou deformações residuais introduzidas pelas forças aplicadas durante o processo de conformação da peça. Ele efetivamente traz a peça de volta a um estado "relaxado" e mole, restaurando seu diagrama tensão-deformação original, como mostrado na Figura 2-12.

Normalização Muitas tabelas com dados sobre aços comerciais indicam que o aço foi normalizado após a laminação ou conformação que produziu sua forma bruta. A normalização é similar ao recozimento, porém envolve um banho à alta temperatura durante um menor período de tempo e uma taxa de resfriamento mais rápida. O resultado é um aço um pouco mais resistente e duro do que um aço totalmente recozido, mas que ainda está mais próximo da condição de um aço recozido do que da condição de um aço temperado e revenido.

Endurecimento superficial

Quando uma peça é grande ou espessa, é difícil obter dureza uniforme em seu interior por métodos de endurecimento maciço. Uma alternativa é endurecer apenas a superfície, deixando o interior mole. Isso também evita a distorção associada à têmpera de uma peça grande aquecida por completo. Se o aço tiver uma quantidade de carbono suficiente, sua superfície pode ser aquecida, temperada e revenida da mesma forma que seria feito para um endurecimento maciço. Para aços de baixo carbono (doces), outras técnicas são necessárias para se alcançar a condição endurecida. Elas incluem o aquecimento da peça em uma atmosfera especial rica em carbono, nitrogênio, ou ambos, passando-a então pelo processo de têmpera. O processo de endurecimento, nesses casos, é chamado de *cementação*, *nitretação* ou *cianetação*.[§] Em todas as situações, o resultado é uma superfície dura sobre um substrato mole, isto é, o **endurecimento superficial**.

A **cementação** aquece um aço de baixo carbono em uma atmosfera de monóxido de carbono, levando a superfície a absorver carbono em solução. A **nitretação** aquece um aço de baixo carbono em uma atmosfera de nitrogênio gasoso e forma duros nitretos de ferro nas camadas superficiais. A **cianetação** aquece a peça em um banho de sal cianeto até por volta de 1500°F (800°C), e o aço de baixo carbono forma tanto carbetos quanto nitretos a partir do sal.

Para aços de médio e de alto carbono, não é necessária nenhuma atmosfera artificial, já que o aço tem carbono suficiente para o endurecimento. Dois métodos são comumente utilizados. A **têmpera por chama** passa uma chama de oxiacetileno sobre a superfície a ser endurecida, que é seguida de um jato de água para provocar a têmpera. O resultado é uma superfície endurecida mais profunda do que a obtida pelos métodos com atmosferas artificiais. A **têmpera por indução** utiliza bobinas elétricas para aquecer rapidamente a superfície da peça, que é, então, temperada antes que o interior se aqueça.

O **endurecimento superficial** por qualquer método apropriado é um tratamento bastante desejável para muitas aplicações. Com frequência, é interessante manter a completa ductilidade (e, assim, a tenacidade) do material maciço para maior capacidade de absorção de energia, ao mesmo tempo que se obtém alta dure-

[§] N. de R. T.: Cementação, nitretação e cianetação são tratamentos termoquímicos. A cianetação também é chamada de carbonitretação líquida.

za superficial de maneira a reduzir o desgaste e aumentar a resistência da superfície. Grandes peças de máquinas, como camos e engrenagens, são exemplos de elementos que têm maior benefício com endurecimento superficial do que com endurecimento maciço, uma vez que a distorção por troca de calor é minimizada, e o interior dúctil e tenaz absorve melhor a energia de impactos.

Tratamentos térmicos de materiais não ferrosos

Algumas ligas não ferrosas são endurecíveis e outras, não. Algumas das ligas de alumínio podem ser **endurecidas por precipitação**, processo também chamado de **envelhecimento**. Um exemplo é a liga de alumínio com até aproximadamente 4,5% de cobre. Esse material pode ser trabalhado a quente (laminado, forjado, etc.) a uma determinada temperatura, depois aquecido e mantido a uma temperatura mais alta para forçar uma dispersão randômica do cobre na solução sólida. Ele é, então, temperado para aprisionar a solução supersaturada em temperatura ambiente. Em seguida, a peça é reaquecida até uma temperatura inferior à temperatura de têmpera e nela é mantida por um longo intervalo de tempo, enquanto uma parte da solução supersaturada precipita e, com isso, aumenta a dureza do material.

Outras ligas de alumínio, magnésio, titânio e algumas ligas de cobre respondem bem a tratamentos térmicos similares. As resistências das ligas endurecidas de alumínio se aproximam daquelas de aços de médio carbono. Visto que a densidade do alumínio é aproximadamente 1/3 da densidade do aço, as ligas de alumínio mais resistentes podem oferecer melhores relações resistência-peso do que os aços de baixo carbono (aços doces).

Conformação mecânica e encruamento

Trabalho a frio O trabalho mecânico de metais à temperatura ambiente para mudar sua forma ou sua dimensão também é capaz de encruá-los e de aumentar sua resistência, em detrimento da ductilidade. O trabalho a frio pode resultar do processo de laminação, em que a espessura de barras de metal é progressivamente reduzida por esmagamento entre cilindros, ou por qualquer operação que leva o metal dúctil além do seu limite de escoamento e o deforma de modo permanente. A Figura 2-13 mostra o processo, à medida que ele afeta o diagrama tensão-deformação. Enquanto o carregamento é aumentado a partir da origem O, ele faz o material passar pelo limite de escoamento y e atingir o ponto B, introduzindo uma deformação residual permanente OA na peça.

Se a carga for removida nesse ponto, a energia elástica armazenada é recuperada, e o material retorna à tensão zero no ponto A ao longo de uma nova linha de deformação elástica BA paralela à inclinação elástica original E. Se a carga for, então, reaplicada, levando a peça ao ponto C e fazendo novamente o material escoar, a nova curva tensão-deformação será $ABCf$. Observe que agora existe um novo limite de escoamento y', localizado em um valor mais alto de tensão do que y. O material **encruou**, aumentando seu limite de escoamento e reduzindo sua ductilidade. Esse processo pode ser repetido até que o material se torne frágil e se rompa.

Se for necessária deformação plástica significativa para a fabricação de uma peça – como em uma estampagem profunda de panelas ou cilindros – é necessário trabalhar o material a frio em estágios e recozer a peça entre estágios sucessivos para evitar a fratura. O recozimento faz o material retornar para aproximadamente o diagrama tensão-deformação original, permitindo escoamento adicional sem fratura.

Trabalho a quente Todos os metais têm uma temperatura de recristalização abaixo da qual os efeitos do trabalho mecânico serão como os descritos acima, ou seja, do trabalho a frio. Caso o material seja trabalhado acima de sua temperatura

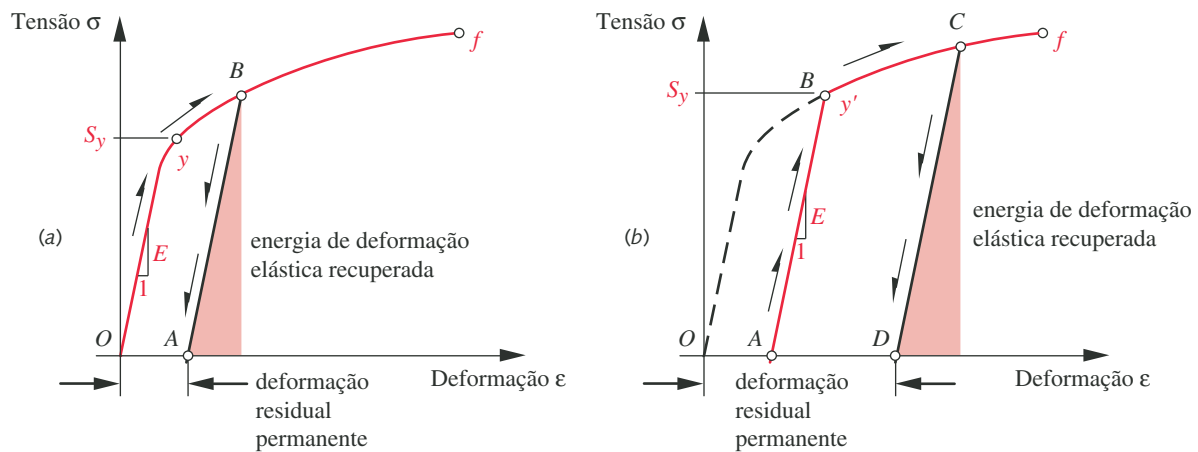



FIGURA 2-13

Encruamento de um material dúctil por trabalho mecânico a frio: (*a*) primeiro trabalho (*b*) segundo trabalho.

de recristalização (trabalho a quente), ele tenderá, pelo menos em parte, a sofrer recozimento enquanto se resfria. Assim, o trabalho a quente reduz o problema do encruamento, mas introduz seus próprios problemas de rápida oxidação da superfície devido às altas temperaturas. Metais laminados a quente tendem a apresentar maior ductilidade, menor resistência e acabamento superficial de pior qualidade do que metais da mesma liga trabalhados a frio. O trabalho mecânico a quente não aumenta a dureza do material de maneira considerável, embora ele possa aumentar a resistência por melhorar a estrutura do grão e alinhar os grãos do metal com o contorno final da peça. Isso é particularmente verdadeiro para peças forjadas.

Forjamento É uma automatização da antiga arte do ferreiro. O ferreiro aquece a peça em uma fornalha até que ela fique vermelha, depois dá pancadas de martelo para dar-lhe forma. Quando a peça está muito fria para a conformação, ela é reaquecida e o processo repetido. O forjamento atual utiliza uma série de matrizes, projetadas para conformar gradualmente o metal até sua forma final. A configuração da matriz de cada estágio representa uma mudança alcançável da forma a partir do estágio anterior (um lingote, no caso do primeiro estágio), rumo à forma final desejada. A peça é reaquecida entre as batidas das matrizes, as quais são montadas em uma prensa de forjamento. As grandes forças necessárias para deformar plasticamente o metal aquecido exigem prensas de grande porte para peças de tamanho médio e grande. São necessárias operações de usinagem para remover as grandes “linguetas” que se formam ao redor do molde além das linhas da matriz e também para fabricar furos, superfícies de montagem, etc. O acabamento superficial de um forjamento é tão rugoso quanto o de qualquer peça laminada a quente, devido à oxidação e descarbonização do metal aquecido.

Praticamente todo metal dúctil bruto pode ser forjado. Aço, alumínio e titânio são comumente usados. O forjamento tem a vantagem de criar peças mais resistentes do que as conseguidas com fundição ou usinagem. Ligas fundidas são por natureza menos resistentes à tração do que ligas trabalhadas mecanicamente. A conformação a quente de um material bruto até sua forma final forjada faz com que as “linhas de fluxo” ou “grãos” do material se aproximem dos contornos da peça, o que pode resultar em maior resistência do que se essas mesmas linhas fossem “cortadas” por usinagem até o contorno final. O forjamento é utilizado para peças altamente solicitadas, como estruturas da asa ou fuselagem de um avião, virabrequins, bielas de motores e barras de suspensão de veículos. A Figura 2-14 mostra um virabrequim forjado de caminhão. Na seção transversal, observa-se

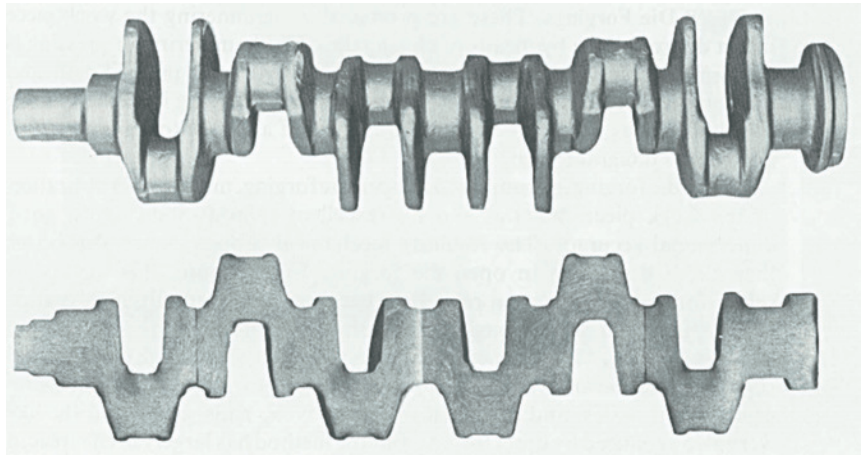



FIGURA 2-14

Virabrequim forjado em aço para um motor diesel de caminhão. (*Cortesia da Wyman--Gordon Corp., Grafton, MA.*)

que as linhas de contorno dos grãos seguem os contornos do virabrequim. O alto custo das múltiplas matrizes requeridas para fabricar peças forjadas fazem do processo uma escolha impraticável a menos que os volumes de produção sejam grandes o suficiente para amortizar o custo das ferramentas.

Extrusão É usada principalmente para metais não ferrosos (especialmente o alumínio), já que ela utiliza tipicamente matrizes de aço. A matriz típica é um disco espesso feito de aço-ferramenta endurecido, com um furo ou orifício cônico que termina com a seção transversal da peça acabada. Um lingote do material a ser extrudado é aquecido até um estado mole e então recalcado a uma velocidade bastante alta através da matriz, a qual é fixada na extrusora. O lingote flui, ou é extrudado, até a forma final da matriz. O processo é similar à fabricação de macarrão. Uma grande barra do material com a secção transversal desejada é extrudada a partir do lingote. A extrusão passa, então, por uma estação de resfriamento por pulverização de água. A extrusão é um meio econômico de se obter formas-padrão de seção transversal constante, pois as matrizes não são de fabricação muito cara. O controle dimensional e o acabamento superficial são bons. A extrusão é empregada para a fabricação de peças comerciais de alumínio como cantoneiras, canais, vigas I, formas-padrão para portas e janelas, etc. As peças extrudadas podem ser cortadas e usinadas convenientemente para montar o produto final. Algumas formas extrudadas são mostradas na Figura 2-15.

FIGURA 2-15

Perfis de extrusão. (*Cortesia do The Aluminum Extruders Council*.)

2.5 REVESTIMENTOS E TRATAMENTOS SUPERFICIAIS

Existem muitos tipos de revestimentos e tratamentos superficiais disponíveis para metais. Alguns têm como principal propósito evitar a corrosão, enquanto outros se dedicam a melhorar a dureza superficial e a resistência ao desgaste. Revestimentos também são utilizados para modificar (levemente) dimensões e para alterar propriedades físicas como refletividade, cor e resistividade. Por exemplo, anéis de pistão são cromados para melhorar a resistência ao desgaste, elementos de fixação são revestidos para reduzir corrosão e frisos de automóveis são cromados para melhorar a aparência e resistir à corrosão. A Figura 2-16 mostra uma árvore com vários tipos de revestimentos para aplicações em máquinas. Eles se dividem em duas famílias primárias: revestimentos metálicos e não metálicos, em função do tipo de revestimento, e não do substrato. Algumas das classes se dividem em

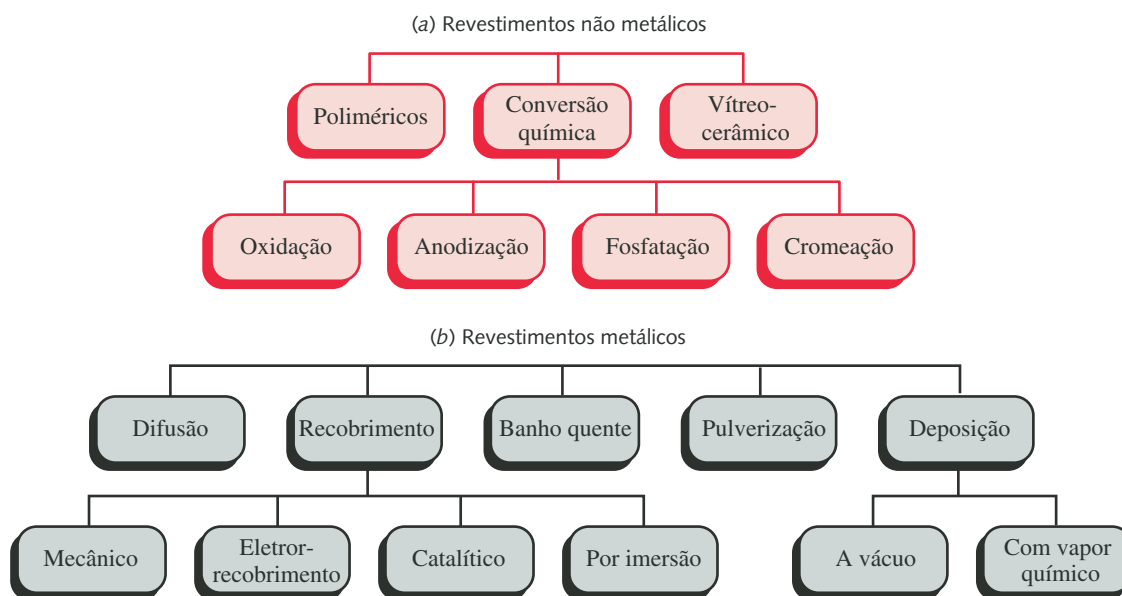



FIGURA 2-16

Métodos de revestimento disponíveis para metais.

muitas subclasses. Discutiremos aqui somente algumas delas. Incentivamos o leitor a buscar mais informações nas referências bibliográficas.

Ação galvânica

Quando uma camada de um metal é aplicada sobre outro metal não similar, pode--se criar uma célula galvânica. Todos os metais são eletroliticamente ativos em maior ou menor grau e, se tiverem potenciais eletrolíticos suficientemente diferentes, irão criar uma bateria em presença de um eletrólito condutivo como água do mar ou até água de torneira. A Tabela 2-4 lista alguns metais comuns ordenados de acordo com seu potencial de ação galvânica, do menos nobre (mais eletroliticamente ativo) ao mais nobre (menos ativo). Combinações de metais que estão próximos um ao outro na série galvânica, como ferro fundido e aço, são relativamente seguras contra corrosão galvânica. Combinações de metais muito distantes nessa escala, como alumínio e cobre, vão sofrer corrosão severa em um eletrólito, ou mesmo em um ambiente úmido.

Em um meio condutivo, os dois metais tornam-se ânodo e cátodo, com o metal menos nobre exercendo o papel de ânodo. O fluxo de corrente elétrica autoinduzida provoca uma perda de material no ânodo e deposição de material sobre o cátodo. O metal menos nobre desaparece gradativamente. Esse problema ocorre sempre que dois metais suficientemente afastados na série galvânica estiverem juntos em um meio eletricamente condutivo. Assim, não apenas revestimentos, mas também elementos de fixação e peças em contato, devem ser feitos de combinações de metais que não criem esse tipo de problema.

Tabela 2-4
Série galvânica de metais em água do mar

Menos nobre
Magnésio
Zinco
Alumínio
Cádmio
Aço
Ferro fundido
Aço inoxidável
Chumbo
Estanho
Níquel
Latão
Cobre
Bronze
Monel
Prata
Titânio
Grafite
Ouro
Platina
Mais nobre

Eletrorrecobrimento

O eletrorrecobrimento envolve a criação proposital de uma célula galvânica na qual a peça a ser recoberta é o cátodo e o material de cobertura, o ânodo. Os dois metais são mergulhados em um banho de eletrólito, e uma corrente elétrica direta (fluxo de elétrons) é aplicada do ânodo ao cátodo. Íons do material de recobrimento são conduzidos ao substrato a ser revestido através do eletrólito e cobrem

a peça com uma fina camada do material de cobertura. Uma atenção particular deve ser dada à espessura da camada de recobrimento, que é controlável. A espessura da camada obtida por esse método é uniforme, exceto em ângulos acentuados e em orifícios e fendas. A cobertura se forma nos ângulos externos e não penetra em orifícios ou fendas estreitas. Por isso, pode ser necessário retificar a peça para restaurar dimensões. Peças desgastadas (ou erros) podem, por vezes, ser reparadas pela aplicação de uma cobertura de material apropriado e, depois, retificadas até alcançarem a dimensão correta.

O eletrorrecobrimento se aplica muito bem a aços, ligas de níquel ou cobre, bem como a outros metais. Duas são as abordagens possíveis. Se um metal mais nobre (menos ativo) é depositado sobre o substrato, ele pode reduzir sua tendência a oxidar desde que a camada permaneça intacta para proteger o substrato do meio ambiente. Estanho, níquel e cromo são frequentemente utilizados para eletrorrecobrir o aço e protegê-lo contra corrosão. Revestimentos de cromo também oferecem um aumento da dureza superficial até 70 HRC, que está acima da dureza conseguida para muitas ligas de aço endurecidas.* Infelizmente, qualquer rachadura ou orifício no revestimento pode gerar um nódulo de ação galvânica se estiver presente um meio condutivo (como água da chuva). Devido ao substrato ser menos nobre do que o revestimento, ele se torna o eletrodo de sacrifício e sofre rápida corrosão. O eletrorrecobrimento com metais mais nobres que o substrato é raramente utilizado para peças que trabalham imersas em água ou outros eletrólitos.

Alternativamente, um metal menos nobre pode ser depositado sobre o substrato para servir como eletrodo de sacrifício, evitando a corrosão do substrato. O exemplo mais comum desse caso é a deposição de zinco sobre aço, também chamada de galvanização. (Pode-se usar cádmio no lugar do zinco, pois ele terá uma vida mais longa em água salgada ou em ambientes com maresia.) O revestimento de zinco ou cádmio irá, gradualmente, sofrer corrosão e proteger o substrato em aço mais nobre até que a camada se acabe; depois disso, o aço irá oxidar. Pode-se aplicar cobertura de zinco por um processo chamado de "banho quente" em vez de por eletrorrecobrimento, o que resultará em uma camada mais espessa e mais protetora, reconhecível pela sua aparência de "madrepérola". A galvanização é frequentemente aplicada pelos fabricantes de automóveis ao painel de instrumentos para inibir a corrosão. Ânodos de sacrifício em zinco também são acoplados a motores de popa de alumínio e a cascos de barcos em alumínio para frear a corrosão do alumínio na água do mar.

Um cuidado a se tomar com revestimentos por eletrorrecobrimento é que pode ocorrer fragilização do substrato por hidrogênio, causando significativa perda de resistência. Acabamentos eletrorrecobertos devem ser evitados em peças sujeitas à fadiga. A experiência mostra que a eletrodeposição reduz severamente a resistência à fadiga de metais e pode levar a falha prematura.

Recobrimento catalítico

O recobrimento catalítico coloca uma camada de níquel sobre o substrato sem a necessidade de corrente elétrica. O substrato "catódico", neste caso, (não há ânodo) funciona como um catalisador para iniciar uma reação química que faz com que os íons níquel da solução eletrolítica sejam reduzidos e depositados sobre o substrato. A camada de níquel também funciona como um catalisador e mantém a reação acontecendo até que a peça seja retirada do banho. Assim, camadas relativamente espessas podem se desenvolver. Os revestimentos têm tipicamente entre 0,001 in e 0,002 in de espessura. Ao contrário do eletrorrecobrimento, o recobrimento catalítico de níquel é completamente uniforme e penetra orifícios e fendas. O revestimento é denso e bastante duro, com aproximadamente 43 HRC.

* É interessante observar que o cromo em sua forma pura é mais mole do que o aço endurecido, mas, quando eletrodepositado sobre aço, ele se torna mais duro do que o substrato de aço. Níquel e ferro também têm sua dureza aumentada quando eletrorrecobrem outros substratos metálicos. O mecanismo não é bem compreendido, mas acredita-se que microdeformações internas se desenvolvam durante o processo de recobrimento, o que endurece a camada. A dureza do depósito pode ser controlada por meio de mudanças nas condições do processo.

Outros metais podem ser depositados por recobrimento catalítico, porém o níquel é o mais comumente utilizado.

Anodização

Apesar de o alumínio ser capaz de receber eletrorrecobrimento (com dificuldade), é mais comum tratá-lo com anodização. Esse processo cria uma camada muito fina de óxido de alumínio na superfície. O revestimento de óxido de alumínio é autolimitante na medida em que ele evita que o oxigênio atmosférico penetre até o substrato e o ataque em serviço. A camada anodizada de óxido é naturalmente incolor, mas pigmentos podem ser adicionados para colorir a superfície e prover uma agradável aparência em uma variedade de nuanças. Esse método de tratamento superficial é relativamente barato, tem boa resistência à corrosão e a distorção provocada é desprezível. Titânio, magnésio e zinco também podem ser anodizados.

Uma variação da anodização convencional do alumínio é chamada de "anodização profunda". Sabendo-se que o óxido de alumínio é um material cerâmico, ele é naturalmente muito duro e resistente à abrasão. A **anodização profunda** fornece uma camada mais espessa (mas não realmente mais dura) do que a anodização convencional e é geralmente utilizada para proteger peças de alumínio relativamente mole do desgaste em situações de contato abrasivo. A dureza desse tratamento superficial excede aquela do mais duro aço, e peças de alumínio com anodização dura podem trabalhar contra aço endurecido, embora a superfície um pouco abrasiva do óxido de alumínio não seja amigável para o aço.

Revestimentos com plasma pulverizado

Uma grande variedade de revestimentos cerâmicos pode ser aplicada a peças de aço e outros metais utilizando a técnica de plasma pulverizado. As temperaturas de aplicação são altas, o que limita a escolha do substrato. Os revestimentos, quando pulverizados, possuem um acabamento superficial do tipo "casca de laranja", o que demanda retificação ou polimento para a obtenção de um acabamento mais fino. A maior vantagem é uma superfície de dureza extremamente elevada e de alta resistência química. Entretanto, os revestimentos cerâmicos são frágeis e sujeitos à fragmentação sob choques mecânicos ou térmicos.

Revestimentos químicos

Os tratamentos químicos mais comuns para metais variam de uma lavagem de ácido fosfórico sobre aço (ou ácido crômico sobre alumínio), que fornece resistência à corrosão limitada e de curto prazo, até pinturas de vários tipos, projetadas para fornecer uma proteção mais durável contra corrosão. Podem-se encontrar pinturas em uma grande variedade de formulações para diferentes ambientes e substratos. Pinturas de uma parte[§] fornecem proteção um pouco menor do que formulações epóxi de duas partes[¶], mas todos os revestimentos químicos devem ser vistos apenas como proteção temporária contra corrosão, especialmente quando usadas sobre materiais com tendência à corrosão, como o aço. Acabamentos esmaltados e porcelanas sobre aço têm vida mais longa em termos de resistência à corrosão, porém sofrem de fragilidade. Novas formulações de pinturas e revestimentos de proteção têm sido continuamente desenvolvidas. Informações melhores e mais atualizadas podem ser obtidas junto a representantes desses produtos.

2.6 PROPRIEDADES GERAIS DOS METAIS

A grande variedade de materiais úteis de engenharia pode gerar confusão para o engenheiro iniciante. Não há espaço suficiente neste livro para tratar do tópico de

[§] N. de T.: Pinturas para aplicação direta, sem mistura.

[¶] N. de T.: Pinturas que devem ser misturadas com um catalisador antes da aplicação.

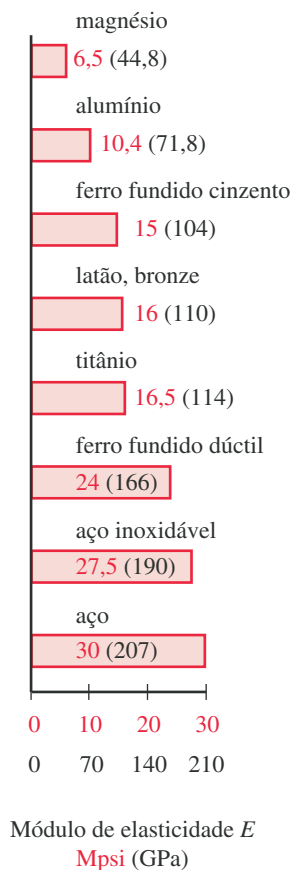



FIGURA 2-17

Módulos de elasticidade para vários metais.

seleção de materiais em detalhe. Várias referências são fornecidas na bibliografia deste capítulo, as quais o leitor é convidado a utilizar. Tabelas de propriedades mecânicas também são fornecidas para um conjunto limitado de materiais no Apêndice A deste livro. A Figura 2-17 mostra os módulos de elasticidade para vários metais de engenharia.

As seções que seguem são uma tentativa de fornecer informações gerais e diretrizes para o engenheiro de modo que ele possa identificar quais tipos de materiais podem ser adequados em uma dada situação de projeto. Espera-se que o engenheiro em aperfeiçoamento confie muito na experiência e na ajuda disponibilizada pelos fabricantes de materiais para a seleção do material ótimo para cada projeto. Há também muitas referências publicadas que listam propriedades detalhadas para a maioria dos materiais de engenharia. Algumas dessas referências estão relacionadas na bibliografia deste capítulo.

Ferro fundido

Os ferros fundidos constituem toda uma família de materiais. Suas maiores vantagens são o custo relativamente baixo e a facilidade de fabricação. Alguns são fracos em tração comparados ao aço, porém, como a maioria dos materiais fundidos, têm altas resistências à compressão. Suas densidades, próximas de 0,25 lb/in^3 (6920 kg/m^3), são levemente inferiores às do aço. A maior parte dos ferros fundidos não exibe uma relação tensão-deformação linear abaixo do limite elástico; eles não obedecem à Lei de Hooke. Seu módulo de elasticidade E é estimado desenhando-se uma reta da origem até o ponto da curva com tensão igual a 1/4 do limite de resistência e está na faixa de 14 a 25 Mpsi (97 a 172 MPa). A composição química do ferro fundido difere da do aço principalmente por causa de seu alto teor de carbono, entre 2% e 4,5%. A grande quantidade de carbono, presente em alguns ferros fundidos sob forma de grafita, faz com que algumas dessas ligas sejam fáceis de verter como um líquido de fundição e também fáceis de usinar com um sólido. O meio mais comum de fabricação é a fundição em areia, com posteriores operações de usinagem. Todavia, ferros fundidos não são facilmente soldados.

O FERRO FUNDIDO BRANCO é um material muito duro e frágil. Ele é difícil de usinar e tem utilização limitada, como em revestimentos para misturadores de cimento (betoneiras), onde sua dureza é necessária.

O FERRO FUNDIDO CINZENTO é a forma mais comumente utilizada de ferro fundido. Seus flocos de grafita lhe conferem a aparência acinzentada e o nome. A ASTM classifica o ferro fundido cinzento em sete classes, baseado no mínimo limite de resistência à tração em kpsi. O classe 20 tem um limite de resistência mínimo de 20 kpsi (138 MPa). Os números de classe 20, 25, 30, 35, 40, 50 e 60 representam, portanto, o limite de resistência à tração em kpsi. O custo aumenta com o aumento da resistência. Essa liga é fácil de verter, fácil de usinar e oferece bom amortecimento acústico. Isso faz dele a escolha mais popular para bases de máquinas, blocos de motores, rotores e tambores de freio, etc. Os flocos de grafita também lhe conferem boa lubricidade e resistência ao desgaste. Sua resistência à tração relativamente baixa não recomenda seu uso em situações em que altas cargas de flexão ou fadiga estejam presentes, porém ele é por vezes utilizado em virabrequins de motores de baixo custo. Ele pode ser utilizado razoavelmente bem em contato contra aço, desde que lubrificado.

O FERRO FUNDIDO MALEÁVEL tem resistência à tração superior à do ferro fundido cinzento, mas seu comportamento em desgaste não é tão bom. O limite de resistência na tração pode variar de 50 a 120 kpsi (345 a 827 MPa), dependendo da formulação. Ele é frequentemente utilizado em peças que suportam tensões de flexão.

O FERRO FUNDIDO NODULAR (DÚCTIL) tem a mais alta resistência à tração dos ferros fundidos, de aproximadamente 70 a 135 kpsi (480 a 930 MPa). O nome *nodular* vem do fato de suas partículas de grafita terem forma esférica. O ferro fundido nodular tem maior módulo de elasticidade (próximo de 25 Mpsi {172 GPa}) do que o ferro fundido cinzento e exibe um diagrama tensão-deformação linear. Ele é mais tenaz, resistente, mais dúctil e menos poroso do que o ferro fundido cinzento. É o ferro fundido que se escolhe para peças sujeitas à fadiga, como virabrequins, pistões e camos.

Aços fundidos

O aço fundido é similar ao aço manufaturado em termos de sua composição química, isto é, ele tem bem menos carbono do que o ferro fundido. As propriedades mecânicas do aço fundido são superiores às do ferro fundido, mas inferiores às do aço manufaturado. Sua principal vantagem é a facilidade de fabricação por fundição em areia ou em cera. O aço fundido é classificado de acordo com seu conteúdo de carbono em baixo carbono (< 0,2%), médio carbono (0,2 a 0,5%) e alto carbono (> 0,5%). Ligas de aço fundidas contendo outros elementos também são fabricadas para altas resistências mecânica e à temperatura. Os limites de resistência à tração das ligas de aço fundido variam de aproximadamente 65 a 200 kpsi (450 a 1380 MPa).

Aços conformados

O termo "conformado" refere-se a todos os processos que manipulam a forma do material sem derretê-lo. Laminação a quente e laminação a frio são os dois métodos mais comumente utilizados, porém existem muitas variantes, como estiramento, estampagem, extrusão e prensagem. O denominador comum é o escoamento intencional do material para mudar sua forma, seja à temperatura ambiente ou à temperatura elevada.

O AÇO LAMINADO A QUENTE é produzido forçando-se lingotes de aço quentes através de conjuntos de cilindros ou matrizes que progressivamente mudam sua forma para vigas I, seções em L, ângulos, planos, quadrados, cilindros, tubos, placas, chapas, etc. O acabamento superficial de formas laminadas a quente é rugoso devido à oxidação a temperaturas elevadas. As propriedades mecânicas também são relativamente baixas, porque o material termina o processo em um estado recozido ou normalizado, a menos que receba deliberadamente tratamento térmico após a fabricação. Ele é a escolha típica para componentes estruturais de aço baixo carbono utilizados nas estruturas da construção civil e de máquinas operatrizes. Material laminado a quente também é usado em peças mecânicas sujeitas a usinagem extensa (engrenagens, camos, etc.) em que o acabamento do material bruto é irrelevante e para as quais se desejem propriedades uniformes e de material não trabalhado a frio, devendo preceder um tratamento térmico planejado. É possível encontrar uma larga variedade de ligas e conteúdos em carbono sob a forma laminada a quente.

O AÇO LAMINADO A FRIO é produzido a partir de lingotes ou de formas laminadas a quente. O material é levado a sua forma e tamanho finais pelo rolamento entre cilindros de aço endurecidos ou pela prensagem através de matrizes à temperatura ambiente. Os cilindros ou matrizes dão polimento à superfície e trabalham o material a frio, aumentando sua resistência e reduzindo sua ductilidade, da mesma maneira como se descreveu na seção sobre conformação mecânica e endurecimento. O resultado é um material com bom acabamento superficial e dimensões precisas comparado ao material laminado a quente. Sua resistência e

sua dureza são aumentadas à custa de significativas deformações residuais, que podem ser aliviadas durante a usinagem, a soldagem ou o tratamento térmico, causando distorção. Formas laminadas a frio comumente disponíveis são chapas, tiras, placas, barras cilíndricas ou retangulares, tubos, etc. Formas estruturais como vigas I são geralmente encontradas apenas com laminação a quente.

Sistemas de numeração de aços

Vários sistemas de numeração de aços estão em uso. A ASTM, o AISI e a SAE* planejaram códigos para definir os elementos de liga e o conteúdo de carbono de aços. A Tabela 2-5 lista algumas das designações AISI/SAE para ligas de aço comumente utilizadas. Os dois primeiros dígitos indicam os principais elementos de liga. Os dois últimos dígitos indicam a quantidade de carbono presente, expressos em termos de centésimos de 1%. A ASTM e a SAE desenvolveram um novo Sistema Unificado de Numeração (UNS – *Unified Numbering System*) para todas as ligas metálicas, que utiliza o prefixo UNS seguido de uma letra e um número de cinco dígitos. A letra define a categoria da liga, *F* para ferro fundido, *G* para aços-carbono e baixa liga, *K* para aços para aplicações especiais, *S* para aços inoxidáveis e *T* para aços ferramenta. Para a série *G*, os números são os mesmos das designações AISI/SAE da Tabela 2-5, com a adição de um zero no final. Por exemplo, SAE 4340 passa a ser UNS G43400. Veja a referência 2 para mais informações sobre sistemas de numeração de metais. Usaremos as designações AISI/SAE para aços.

* ASTM é a American Society for Testing and Materials – Sociedade Americana para Testes e Materiais; AISI é o American Iron and Steel Institute – Instituto Americano de Ferro e Aço; e SAE é a Society of Automotive Engineers – Sociedade dos Engenheiros Automobilísticos. O AISI e a SAE utilizam as mesmas designações para os aços.

O AÇO-CARBONO COMUM é designado com 1 como primeiro dígito e 0 como segundo, já que não há outro elemento de liga além do carbono. Os aços de baixo

Tabela 2-5 Designações AISI/SAE para ligas de aço
Lista parcial – sobre outras ligas disponíveis, consulte os fabricantes

Tipo	Série AISI/SAE	Principais elementos de liga
Aços-carbono		
Comum	10xx	Carbono
Usinagem fácil	11xx	Carbono com enxofre (ressulfurado)
Aços-liga		
Manganês	13xx	1,75% manganês
	15xx	1,00 a 1,65% manganês
Níquel	23xx	3,50% níquel
	25xx	5,00% níquel
Níquel-cromo	31xx	1,25% níquel e 0,65 ou 0,80% cromo
	33xx	3,50% níquel e 1,55% cromo
Molibdênio	40xx	0,25% molibdênio
	44xx	0,40 ou 0,52% molibdênio
Cromo-molibdênio	41xx	0,95% cromo e 0,20% molibdênio
Níquel-cromo-molibdênio	43xx	1,82% níquel, 0,50 ou 0,80% cromo e 0,25% molibdênio
	47xx	1,45% níquel, 0,45% cromo e 0,20 ou 0,35% molibdênio
Níquel-molibdênio	46xx	0,82 ou 1,82% níquel e 0,25% molibdênio
	48xx	3,50% níquel e 0,25% molibdênio
Cromo	50xx	0,27 a 0,65% cromo
	51xx	0,80 a 1,05% cromo
	52xx	1,45% cromo
Cromo-vanádio	61xx	0,60 a 0,95% cromo e 0,10 a 0,15% vanádio, no mínimo

carbono são os de numeração AISI 1005 a 1030, os de médio carbono de 1035 a 1055 e os de alto carbono, de 1060 a 1095. A série AISI 11xx tem a adição de enxofre, principalmente para melhorar a usinabilidade. Esses aços são chamados "de usinagem livre" e não são considerados aços-liga, pois o enxofre não melhora as propriedades mecânicas, pelo contrário, torna o aço frágil. O limite de resistência à tração de um aço-carbono comum pode variar de aproximadamente 60 a 150 kpsi (414 a 1034 MPa) dependendo do tratamento térmico.

Os aços-liga contêm vários elementos adicionados em pequenas quantidades para melhorar a resistência do material, sua capacidade de ser endurecido, sua resistência à temperatura, à corrosão e outras propriedades. Qualquer nível de carbono pode ser combinado com esses elementos de liga. Adiciona-se cromo para melhorar resistência, ductilidade, tenacidade, resistência ao desgaste e capacidade de ser endurecido. Também se adiciona níquel para melhorar a resistência sem perda de ductilidade, e ele também eleva a capacidade de receber endurecimento superficial. O molibdênio, utilizado em combinação com níquel e/ou cromo, acrescenta dureza, reduz fragilidade e aumenta a tenacidade. Muitos outros elementos de liga em combinações variadas, como mostrado na Tabela 2-5, são usados para alcançar propriedades específicas. Fabricantes de aço especializados são a melhor fonte de informação e o melhor apoio para o engenheiro que procura o material mais adequado para uma aplicação qualquer. O limite de resistência à tração de aços-liga pode variar de aproximadamente 80 a 300 kpsi (550 a 2070 MPa), dependendo de elementos de liga e tratamentos térmicos. O Apêndice A contém tabelas com propriedades mecânicas para uma seleção de aços carbono e aços-liga. A Figura 2-18 mostra limites de resistência aproximados de alguns aços-carbono e liga normalizados, e a Figura 2-19, diagramas tensão-deformação de engenharia para ensaios de tração de três aços.

Os aços ferramenta são aços-liga médio a alto carbono especialmente formulados para prover alta dureza em combinação com resistência ao desgaste e suficiente tenacidade para resistir às cargas de choque experimentadas em serviço, como ferramentas de corte, matrizes e moldes. Existe no mercado uma grande variedade de aços ferramenta. Para obter mais informações, procure na bibliografia e na literatura de fabricantes.

Os aços inoxidáveis são aços-liga que contêm ao menos 10% de cromo e oferecem uma resistência à corrosão bastante melhorada em relação aos aços comuns e liga, ainda que seu nome não deva ser tomado ao pé da letra. Aços inoxidáveis irão sofrer oxidação e corrosão (lenta) em ambientes agressivos como a água do mar. Alguns aços inoxidáveis têm resistência melhorada contra altas temperaturas. Existem quatro tipos de aço inoxidável, chamados **martensítico**, **ferrítico**, **austenítico** e **de endurecimento por precipitação**.

O aço inoxidável **martensítico** contém de 11,5 a 15% de Cr e 0,15 a 1,2% de C, é magnético, pode ser endurecido por tratamento térmico e é comumente utilizado para instrumentos cortantes. O aço inoxidável **ferrítico** contém mais de 16% de Cr e baixo teor de carbono, é magnético, mole e dúctil, porém não é tratável termicamente, ainda que sua resistência possa ser modestamente aumentada por trabalho mecânico a frio. Ele é utilizado para peças estampadas, como panelas, e tem melhor resistência à corrosão do que o aço inoxidável martensítico. Os aços inoxidáveis ferrítico e martensítico são chamados de aço inoxidável **série 400**.

O aço inoxidável **austenítico** é ligado com 17 a 25% de cromo e 10 a 20% de níquel. Ele tem melhor resistência à corrosão por causa do níquel, é amagnético e tem excelentes ductilidade e tenacidade. Só pode ser endurecido por trabalho a frio. Ele é classificado como aço inoxidável **série 300**.

Os aços inoxidáveis **de endurecimento por precipitação** são designados por suas porcentagens de liga seguidas pelas letras PH, como em 17-4 PH, que

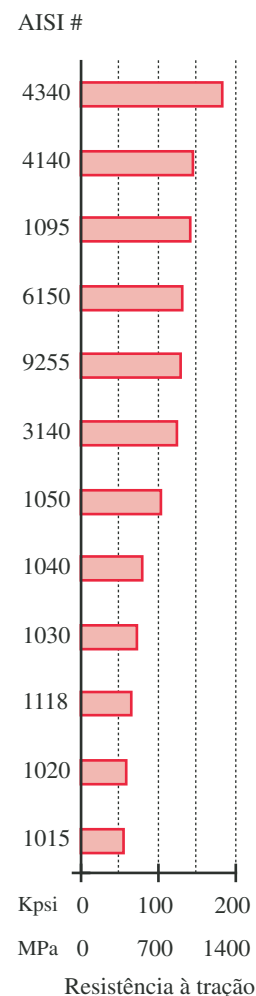



FIGURA 2-18

Limites de resistência à tração aproximados para alguns aços normalizados.

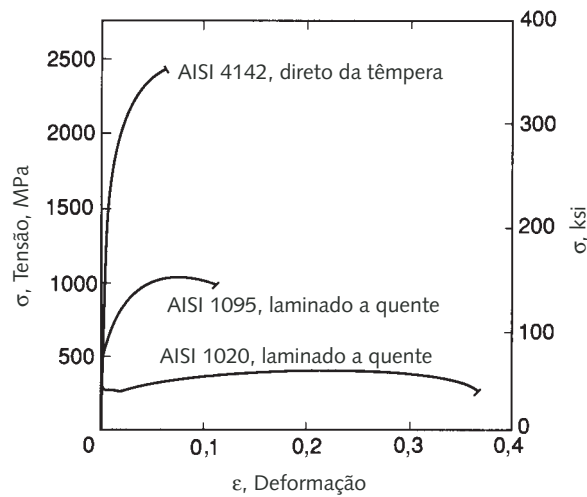



FIGURA 2-19

Diagramas tensão-deformação de ensaios de tração para três ligas de aço. (Extraído da Figura 5-16, p. 160, in N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993, com permissão)

contém 17% de cromo e 4% de níquel. Essas ligas oferecem alta resistência mecânica e altas resistências à temperatura e à corrosão.

Os aços inoxidáveis **série 300** são muito soldáveis, mas os da série 400 o são menos. Todos os tipos de aço inoxidável têm menor condutividade térmica do que o aço comum, e muitas das ligas inoxidáveis são difíceis de usinar. Todos os aços inoxidáveis são significativamente mais caros do que o aço comum. Veja o Apêndice A para dados de propriedades mecânicas.

Alumínio

O alumínio é o metal não ferroso mais amplamente utilizado, perdendo somente para o aço em termos de consumo mundial. O alumínio é produzido nas formas "puro" e em liga. Comercialmente, dispõe-se de alumínio com até 99,8% de pureza. Os elementos de liga mais comum nesse metal são cobre, silício, magnésio, manganês e zinco, em quantidades variáveis até próximo de 5%. As principais vantagens do alumínio são sua baixa densidade, boa relação resistência-peso (SWR – *strength-to-weight ratio*), ductilidade, excelente maleabilidade, capacidade de ser fundido, de ser soldado, resistência à corrosão, alta condutividade e custo razoável. Sua densidade é aproximadamente 1/3 da do aço (0,10 lb/in^3 contra 0,28 lb/in^3); sua rigidez em relação à do aço também corresponde a 1/3 (E_{al} = 10,3 Mpsi {71 GPa} contra $E_{aço}$ = 30 Mpsi {207 GPa}) e, de maneira geral, ele é menos resistente. Comparando-se os limites de resistência de aço baixo carbono e alumínio puro, o aço é cerca de três vezes mais resistente. Assim, a resistência específica (resistência por unidade de massa) é aproximadamente a mesma nessa comparação. Entretanto, o alumínio puro raramente é utilizado em aplicações de engenharia. Ele é muito mole e fraco. As principais vantagens do alumínio puro são seu acabamento brilhante e a boa resistência à corrosão. Ele é usado principalmente em aplicações estéticas e decorativas.

As ligas de alumínio têm resistências significativamente mais elevadas que as do alumínio puro e são muito utilizadas em engenharia, tendo nas indústrias aeronáutica e automotiva seus maiores usuários. As ligas de alumínio de alta resistência têm limites de ruptura na faixa de 70 a 90 kpsi (480 a 620 MPa) e limites de escoamento cerca de duas vezes maior do que o do aço doce. Eles se com-

param com certa vantagem ao aço médio carbono quanto à resistência específica. O alumínio compete com êxito com o aço em algumas aplicações, apesar de que poucos materiais superam o aço quando altas resistências se fazem necessárias. Ver na Figura 2-20 os limites de ruptura de algumas ligas de alumínio. A Figura 2-21 mostra diagramas tensão-deformação de engenharia de ensaios de tração para três ligas de alumínio. A resistência do alumínio é reduzida a baixas temperaturas, bem como a temperaturas elevadas.

Algumas ligas de alumínio permitem endurecimento por tratamento térmico e outras por encruamento ou precipitação e envelhecimento. Ligas de alumínio de alta resistência são cerca de 1,5 vezes mais duras do que um aço mole, e tratamentos superficiais como *anodização profunda* podem tornar a superfície do alumínio mais dura do que o mais duro aço.

O alumínio está entre os materiais de engenharia mais facilmente trabalháveis, ainda que ele tenda a encruar. Ele pode ser facilmente fundido, usinado, soldado* e conformado a quente ou a frio.† Ele pode, também, ser extrudado. Ligas de alumínio são especialmente formuladas para fundição em areia e em matriz, bem como para formas batidas e extrudadas e para peças forjadas.

As ligas de alumínio conformadas existem no mercado em uma grande variedade de formas como vigas I, perfis em L, canaletas, barras, tiras, chapas e tubos. A extrusão permite também formas personalizadas a um custo relativamente baixo. O sistema de numeração de ligas da Aluminum Association é mostrado na Tabela 2-6. O primeiro dígito indica o elemento de liga principal e define a série. A dureza é indicada por um sufixo que contém uma letra e até três números, como definido na tabela. As ligas de alumínio de maior disponibilidade e mais comumente utilizadas em aplicações de projeto de máquinas são as das séries 2000 e 6000.

A liga de alumínio mais antiga é a 2024, que contém 4,5% de cobre, 1,5% de magnésio e 0,8% de manganês. Ela está entre as ligas de alumínio de melhor usinabilidade e aceita tratamento térmico. Nas têmperas mais altas, como –T3 e –T4, ela possui um limite de resistência à tração que se aproxima de 70 kpsi (483 MPa), o que também a torna uma das ligas de alumínio de maior resistência. Ela também tem alta resistência à fadiga. Contudo, ela tem baixa soldabilidade e conformabilidade em relação às outras ligas de alumínio.

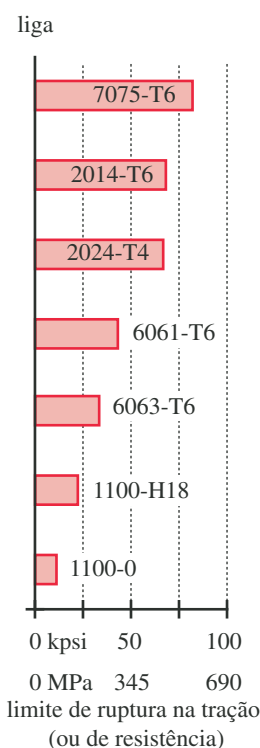



FIGURA 2-20

Tensões limite de ruptura de algumas ligas de alumínio.

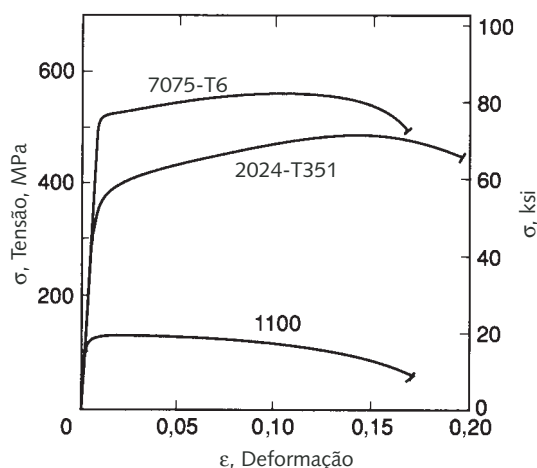



FIGURA 2-21

Diagramas experimentais tensão-deformação para três ligas de alumínio. (Extraído da Fig. 5.17, p. 160, em N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993, com permissão.)

* O aquecimento da soldagem causa recozimento localizado, o que pode remover propriedades de resistência desejáveis que foram obtidas por trabalho a frio ou tratamento térmico em qualquer metal.

† Algumas ligas de alumínio irão sofrer trabalho a frio quando conformadas, de tal modo que, quando se tentar deformá-las novamente (sem prévio recozimento), elas irão fraturar. Alguns ciclistas preferem quadros de aço aos de alumínio, apesar do seu maior peso, porque, uma vez que um quadro de alumínio é deformado em uma queda, ele não pode ser trazido de volta à sua configuração original sem trincar. Quadros em tubos de aço danificados podem ser endireitados e reutilizados.

Tabela 2-6 Designação da Aluminum Association para ligas de alumínio
Lista parcial – consulte os fabricantes sobre outras ligas disponíveis

Série	Elementos de liga principais	Ligas secundárias
1xxx	Comercialmente puro (99%)	Nenhuma
2xxx	Cobre (Cu)	Mg, Mn, Si
3xxx	Manganês (Mn)	Mg, Cu
4xxx	Silício (Si)	Nenhuma
5xxx	Magnésio (Mg)	Mn, Cr
6xxx	Magnésio e Silício	Cu, Mn
7xxx	Zinco (Zn)	Mg, Cu, Cr
Designações de dureza		
xxx-F	Como fabricado	
xxx-O	Recozido	
xxx-Hyyy	Encruado	
xxx-Tyyy	Endurecido por tratamento térmico/envelhecimento	

A liga 6061 contém 0,6% de silício, 0,27% de cobre, 1,0% de manganês e 0,2% de cromo. Ela é amplamente utilizada em aplicações estruturais por causa de sua excelente soldabilidade. Sua resistência é de aproximadamente 40 a 45 kpsi (276 a 310 MPa) nas têmperas mais altas. Ela tem menor resistência à fadiga do que o alumínio 2024. É facilmente usinada e é uma liga popular para extrusão, que é um processo de conformação a quente.

A série 7000 é chamada de alumínio aeronáutico e é mais utilizada em estruturas de aviões. São as ligas de alumínio mais resistentes, com limites de ruptura na tração de até 98 kpsi (676 MPa) e a mais alta resistência à fadiga: cerca de 22 kpsi (152 MPa) a 10^8 ciclos. Algumas ligas também estão disponíveis na forma *alclad*, que recebe uma fina camada de alumínio puro sobre um ou ambos os lados para aumentar a resistência à corrosão.

As ligas de alumínio fundido têm formulação diferente daquelas para conformação. Algumas delas podem ser endurecidas, porém suas resistências e ductilidades são menores do que as das ligas para conformação. Encontram-se disponíveis ligas para fundição em areia, fundição em matriz ou fundição em molde de cera (*investment casting*). Veja no Apêndice A as propriedades mecânicas de ligas de alumínio conformadas e fundidas.

Titânio

Apesar de descoberto como elemento em 1791, a produção comercial do titânio só começou a partir dos anos 1940. Assim, ele está entre os mais novos metais de engenharia. O titânio pode ser a resposta às preces dos engenheiros, em alguns casos. Ele tem um limite superior de temperatura de trabalho de 1200 a 1400°F (650 a 750°C), seu peso é metade do peso do aço (0,16 lb/in^3 {4429 kg/m^3}) e é tão resistente quanto um aço de resistência média (135 kpsi {930 MPa} típico). Seu módulo de elasticidade vai de 16 a 18 Mpsi (110 a 124 Gpa), ou aproximadamente 60% da rigidez do aço. Sua resistência específica se aproxima muito daquelas das mais resistentes ligas de aço e supera a resistência específica de aços de média resistência por um fator de 2. Sua rigidez específica é maior do que a do aço, o que o torna igual ou melhor na limitação de deflexões. Ele também é amagnético.

O titânio é muito resistente à corrosão e é atóxico, o que permite seu uso em contato com produtos de características ácidas ou básicas, alimentícios ou quími-

cos, e dentro do corpo humano como substituição a válvulas cardíacas e juntas da bacia, por exemplo. Infelizmente, ele é caro em comparação com o alumínio ou com o aço. O titânio encontra grande espaço na indústria aeroespacial, especialmente em estruturas de aviões militares e em motores a jato, onde se requer ao mesmo tempo resistência, baixo peso e altas resistências à temperatura e à corrosão.

Encontra-se comercialmente titânio puro e na forma de liga em combinações com alumínio, vanádio, silício, ferro, cromo e manganês. Suas ligas podem ser endurecidas e anodizadas. Há um número limitado de formas usuais disponíveis comercialmente. Ele pode ser forjado e conformado, mas é de difícil fundição, usinagem ou conformação a frio. A exemplo do aço, e diferentemente da maioria dos outros metais, algumas ligas de titânio exibem um verdadeiro limite de resistência à fadiga, ou nivelamento da resistência à fadiga, a partir de 10^6 ciclos de solicitações repetidas, como mostrado na Figura 2-10. Ver no Apêndice A dados de propriedades mecânicas.

Magnésio

O magnésio é o mais leve dos metais comercialmente disponíveis, porém é relativamente fraco. As resistências à tração de suas ligas estão entre 10 e 50 kpsi (69 e 345 MPa). Os elementos de liga mais comuns são o alumínio, o manganês e o zinco. Por causa de sua baixa densidade (0,065 lb/in^3 {1800 kg/m^3}), sua resistência específica se aproxima daquela do alumínio. Seu módulo de elasticidade é 6,5 Mpsi (45 Gpa) e sua rigidez específica excede a rigidez do alumínio e do aço. Ele é facilmente fundido e usinado, mas é mais frágil do que o alumínio e, por isso, difícil de ser conformado a frio.

Ele é amagnético e tem uma resistência à corrosão bastante boa, melhor do que a do aço, mas não tão elevada quanto a do alumínio. Algumas ligas de magnésio podem ser endurecidas, e todas elas podem ser anodizadas. É o metal mais ativo na escala galvânica e não pode ser combinado com quase nenhum outro metal em ambientes úmidos. O magnésio é também extremamente inflamável, especialmente quando na forma de pó ou cavaco, e suas chamas não podem ser combatidas com água. Quando usinado, é preciso utilizar uma alimentação com óleo refrigerante para evitar o fogo. Ele é, de maneira geral, duas vezes mais caro por unidade de peso do que o alumínio. O magnésio é utilizado em aplicações em que o peso é uma restrição de suma importância, como nas caixas fundidas de motosserras e em outros equipamentos segurados nas mãos. Veja no Apêndice A dados de propriedades mecânicas.

Ligas de cobre

O cobre puro é mole, fraco e maleável, e é usado principalmente para tubulações, chapas de proteção, condutores elétricos (fios) e motores. Ele pode ser prontamente trabalhado a frio e pode se tornar frágil após a conformação, devendo ser recozido entre estampagens sucessivas.

Muitas ligas são possíveis com o cobre. As mais comuns são latões e bronzes, que são famílias de ligas. Os **latões**, em geral, são ligas de cobre e zinco em proporções variáveis, e são utilizados em muitas aplicações, desde munição para artilharia leve e pesada até abajures e joalheria.

Os **bronzes** foram originalmente definidos como ligas de cobre e estanho, mas hoje incluem também ligas que não contêm estanho, como bronze de silício e bronze de alumínio; portanto, a terminologia ficou um pouco confusa. O **bronze de silício** é utilizado em aplicações navais, como em hélices de navios.

O **cobre-berílio** não é nem latão nem bronze, e é a mais resistente das ligas de cobre, com limites de ruptura atingindo os das ligas de aço (200 kpsi {1380 MPa}). Ele é frequentemente usado em molas que devem ser amagnéticas, con-

duzir eletricidade ou trabalhar em ambientes corrosivos. O **bronze-fósforo** também é usado para molas, mas, diferentemente do cobre-berílio, ele não pode ser flexionado ao longo do grão ou tratado termicamente.

O cobre e suas ligas têm excelente resistência à corrosão e são amagnéticos. Todas as ligas de cobre podem ser fundidas, conformadas a quente ou a frio e usinadas, mas o cobre puro é de usinagem difícil. Algumas ligas podem ser tratadas termicamente, e todas sofrem encruamento. O módulo de elasticidade da maioria das ligas de cobre é aproximadamente 17 Mpsi (117 Gpa) e sua densidade é levemente maior do que a do aço: 0,31 lb/in^3 (8580 kg/m^3). Ligas de cobre são caras quando comparadas a outros materiais estruturais. Veja no Apêndice A dados de propriedades mecânicas.

2.7 PROPRIEDADES GERAIS DE NÃO METAIS

A utilização de materiais não metálicos aumentou muito nos últimos 50 anos. As vantagens usuais procuradas são baixo peso, resistência à corrosão, resistência à temperatura, resistência dielétrica e facilidade de fabricação. O custo pode variar de baixo a alto comparado com os metais, dependendo do material não metálico particular. Há três categorias gerais de não metais de interesse geral na engenharia: **polímeros** (plásticos), **cerâmicas** e **compósitos**.

Os **polímeros** possuem uma grande variedade de propriedades, dentre as quais se destacam baixo peso, resistência e rigidez relativamente baixas, boas resistências elétrica e à corrosão e custo relativamente baixo por unidade de volume. As **cerâmicas** podem ter resistências à compressão (mas não à tração) extremamente altas, alta rigidez, alta resistência à temperatura, alta resistência dielétrica (resistência à passagem de corrente elétrica), alta dureza e relativamente baixo custo por unidade de volume. Os **compósitos** podem ter quase qualquer combinação de propriedades desejadas dependendo de como são construídos, incluindo as mais altas resistências específicas alcançáveis de qualquer material. Os compósitos podem ter custo baixo ou muito elevado. Vamos discutir brevemente os não metais e algumas de suas aplicações. O espaço não permite um tratamento completo dessas importantes classes de materiais; portanto, o leitor é convidado a consultar a bibliografia para informações mais aprofundadas. O Apêndice A fornece alguns dados de propriedades mecânicas para os polímeros.

Polímeros

A palavra polímero vem de **poli** = *muitas* e de **meros** = *partes*. Os polímeros são moléculas orgânicas de cadeias muito longas baseadas em compostos de carbono. (Existe também uma família de compostos poliméricos baseados em moléculas de silício.) A fonte da maior parte dos polímeros é o petróleo ou o carvão, os quais contêm o carbono ou os hidrocarbonetos necessários para criar polímeros. Existem muitos compostos poliméricos naturais (cera, borracha, proteínas, etc.); no entanto, a maior parte dos polímeros usados em engenharia é sintetizada pelo homem. Suas propriedades podem ser feitas sob medida em uma larga faixa por copolimerização com outros compostos ou pela formação de “ligas” com dois ou mais polímeros. Misturas de polímeros com materiais inorgânicos como talco ou fibra de vidro também são comuns.

Por causa de sua variedade, é difícil generalizar sobre as propriedades mecânicas dos polímeros, mas, comparados aos metais, eles têm baixa densidade, baixa resistência, baixa rigidez, diagramas tensão-deformação elásticos não lineares, como ilustrado na Figura 2-22 (com algumas exceções), baixa dureza, excelentes resistências elétrica e à corrosão e facilidade de fabricação. Seus módulos aparentes de elasticidade variam largamente de perto de 10 kpsi (69 MPa) até

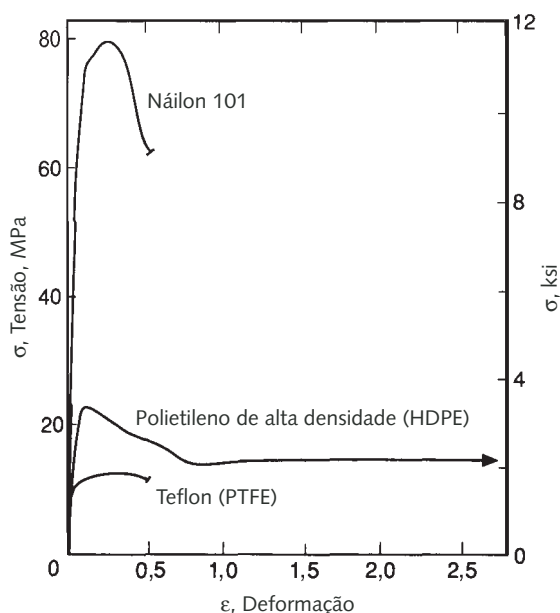



FIGURA 2-22

Diagramas tensão-deformação de ensaios de tração para três polímeros termoplásticos. (Extraído da Fig. 5.18, p. 161, em N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, 1993, com permissão.)

por volta de 400 kpsi (2,8 Gpa), todos bem menos rígidos do que qualquer metal. Seu limite de ruptura varia de 4 kpsi (28 MPa) para o polímero não enchido mais fraco, até 22 kpsi (152 MPa) para os polímeros enchidos com fibra de vidro mais resistentes. A densidade relativa (à densidade da água) para a maioria dos polímeros varia aproximadamente de 0,95 a 1,8, comparada com aproximadamente 2 para o magnésio, 3 para o alumínio, 8 para o aço e 13 para o chumbo. Assim, apesar de as resistências absolutas dos polímeros serem baixas, suas resistências específicas são respeitáveis devido às suas baixas densidades.

Os polímeros são divididos em duas classes: **termoplásticos** e **termofixos** (ou **termorrígidos**). Os **polímeros termoplásticos** podem ser repetidamente fundidos e solidificados, ainda que suas propriedades possam se degradar devido às altas temperaturas de fusão. Os termoplásticos são fáceis de moldar e seus refugos e restos podem ser reaproveitados em uma nova moldagem. Nos **polímeros termofixos** ocorrem ligações cruzadas quando aquecidos pela primeira vez para conformação; em um aquecimento posterior, os termofixos irão queimar em vez de derreter. Ligações cruzadas criam conexões (como os degraus de uma escada de pintor) entre as moléculas de cadeia longa que se enrolam e se torcem através de um polímero. Essas ligações cruzadas adicionam resistência e rigidez.

Uma outra divisão entre os polímeros pode ser feita entre os compostos enchidos e não enchidos. Os elementos de enchimento são geralmente materiais inorgânicos, como carvão, grafite, talco, fibra de vidro picada e metais em pó. Enchimentos são adicionados às resinas termoplásticas e termofixas, apesar de serem mais frequentemente utilizados com as últimas. Esses compostos enchidos possuem maiores resistência, rigidez e resistência à temperatura que aquelas de polímeros sem enchimentos, porém são mais difíceis de moldar e fabricar.

Dispõe-se comercialmente de uma confusa variedade de polímeros. A confusão é aumentada pela proliferação de marcas comerciais para compostos similares feitos por diferentes fabricantes. Os nomes químicos genéricos de polímeros tendem a ser longos, complexos e difíceis de lembrar. Em alguns casos, uma mar-

Tabela 2-7
Famílias de polímeros

Termoplásticos
Celulósicos
Etilênicos
Poliamidas
Poliacetatos
Policarbonatos
Óxidos polifenilínicos
Polissulfonas
Termofixos
Aminas
Elastômeros
Epóxis
Fenólicos
Poliésteres
Silicones
Uretanos

ca comercial particular de um polímero foi tão utilizada que se tornou genérica. *Náilon*, *plexiglass* e *fiberglass* são exemplos. O aprendizado dos nomes químicos genéricos associados às principais famílias de polímeros de engenharia e das respectivas marcas comerciais elimina boa parte da confusão. A Tabela 2-7 mostra várias famílias importantes de polímeros. As propriedades mecânicas de alguns deles que têm aplicações significativas em engenharia estão incluídas no Apêndice A.

Cerâmicas

Materiais cerâmicos estão encontrando cada vez mais aplicações em engenharia, e grandes esforços estão sendo colocados no desenvolvimento de compostos cerâmicos. As cerâmicas estão entre os mais antigos materiais de engenharia conhecidos: tijolos de argila são materiais cerâmicos. Apesar de ainda ser largamente utilizada em construções, a argila hoje não é mais considerada uma cerâmica de engenharia. Cerâmicas de engenharia são tipicamente compostas de elementos metálicos e não metálicos. Eles podem ser óxidos simples de um metal, misturas de óxidos metálicos, carbetos, boretos, nitretos e outros compostos como Al_2O_3, MgO, SiC e Si_3N_4, por exemplo. As principais propriedades de materiais cerâmicos são alta dureza e fragilidade, altas resistências química e à temperatura, alta resistência à compressão, alta resistência dielétrica e, potencialmente, baixos peso e custo. Materiais cerâmicos são duros demais para ser usinados com as técnicas convencionais e normalmente são formados pela compactação de pó, então queimados ou sinterizados para formar ligações entre partículas e aumentar sua resistência. A compactação do pó pode ser feita em moldes ou por pressão hidrostática. Algumas vezes, pó de vidro é misturado com a cerâmica, e o resultado é queimado para derreter o vidro e fundir os dois materiais um com o outro. Têm-se feito tentativas para substituir os metais tradicionais por cerâmicas em aplicações como blocos de motores fundidos, pistões e outras peças do motor. A baixa resistência à tração, a porosidade e a baixa tenacidade à fratura da maior parte das cerâmicas podem ser problemas para essas aplicações. Compostos cerâmicos de plasma pulverizado são frequentemente usados como revestimentos duros sobre substratos metálicos para prover superfícies resistentes ao desgaste e à corrosão.

Compósitos

A maior parte dos compósitos é feita pelo homem, mas alguns, como a madeira, existem na natureza. A madeira é um compósito de longas fibras de celulose mantidas juntas em uma matriz resinosa de lignina. Compósitos feitos pelo homem são tipicamente uma combinação de algum material resistente e fibroso como fibras de vidro, carbono, ou boro coladas entre si em uma matriz de resina como epóxi ou poliéster. A fibra de vidro (*fiberglass*) utilizada em barcos e outros veículos é um exemplo comum de compósito de poliéster reforçado com fibras de vidro (GFRP – *glass-fiber reinforced polyester*). As propriedades direcionais de um compósito podem ser feitas sob medida para uma determinada aplicação, pelo arranjo das fibras em diferentes justaposições como paralelas, entrelaçadas em ângulos particulares ou aleatórios, ou enroladas em torno de uma haste. Compósitos projetados para uma aplicação específica estão sendo utilizados cada vez mais em aplicações de alta solicitação mecânica, como estruturas aeronáuticas, devido a suas altas relações resistência-peso comparado aos metais estruturais comuns. Resistência à temperatura e à corrosão também podem ser determinadas no projeto de alguns materiais compósitos. Esses compósitos normalmente não são nem homogêneos nem isotrópicos, como foi discutido na Seção 2.3.

É interessante observar que, se calcularmos a resistência teórica de qualquer material cristalino "puro" baseado nas ligações interatômicas do elemento, as

Tabela 2-8
Resistências do ferro e do aço

Forma	S_{ut} kpsi (MPa)
Teórica	2900 (20*E*3)
"Fio de cabelo" (Whisker)	1800 (12*E*3)
Arame fino	1400 (10*E*3)
Aço doce	60 (414)
Ferro fundido	40 (276)

resistências calculadas serão ordens de magnitude mais altas do que aquelas observadas em qualquer teste de um material "real", como visto na Tabela 2-8. As enormes diferenças entre as resistências teóricas e reais são atribuídas a rupturas das ligações atômicas devido a defeitos cristalinos no material real. Isto é, considera-se impossível fabricar "qualquer coisa pura" em qualquer escala superatômica realista. Presume-se que, se fosse possível fabricar um "fio" de ferro puro de apenas um átomo de diâmetro, ele exibiria sua "super-resistência teórica". "Fios de cabelo" (*whiskers*) cristalinos têm sido feitos com sucesso de alguns materiais elementares e exibem resistências à tração muito altas, aproximando-se de seus valores teóricos (Tabela 2-8).

Outra evidência empírica para essa teoria vem do fato de que fibras de qualquer material feitas com diâmetros muito pequenos apresentam resistências à tração bem mais altas do que seria esperado de ensaios de tração com amostras maiores do mesmo material. Presumidamente, as seções transversais muito pequenas se aproximam de um estado de material "mais puro". Por exemplo, sabe-se que o vidro tem baixa resistência à tração. Entretanto, fibras de vidro de pequeno diâmetro apresentam resistência à tração bem maior do que o vidro plano, tornando-as uma fibra prática (e barata) para emprego em cascos de embarcações, que são submetidos a altas tensões de tração em operação. Fibras de pequeno diâmetro de carbono e boro exibem limites de tração ainda mais altos do que a fibra de vidro, o que explica seu uso em compósitos para aplicações em naves espaciais e aeronaves militares, onde seu custo relativamente alto não é um empecilho.

2.8 SELECIONANDO MATERIAIS

Uma das decisões mais importantes em projetos é a escolha adequada do material. Os materiais limitam projetos, e novos materiais que ainda estão sendo inventados abrem novas possibilidades de projetos. Seria útil se houvesse uma maneira sistemática de selecionar um material para uma aplicação. M. F. Ashby propôs uma abordagem que separa várias propriedades de material umas das outras para formar "gráficos de seleção de materiais".[3] Estes materiais podem ser divididos em seis categorias: metais, cerâmicos, polímeros (sólidos ou em espuma), elastômeros, vidros e compostos (incluindo madeira). Os membros dessas categorias e subcategorias tendem a se agrupar em um gráfico desse tipo.

A Figura 2-23 mostra um gráfico que marca o módulo de Young contra densidade, que é chamada de *rigidez específica*. Ao desenhar linhas de inclinação constante em um gráfico, é possível ver quais materiais possuem propriedades semelhantes. Uma linha de rigidez específica $E/\rho = C$ foi desenhada com cor na Figura 2-23 e mostra que algumas madeiras têm rigidez específica equivalente ao aço e a outros metais. A linha também passa pelo menor intervalo da "bolha" de compostos de engenharia, indicando que a fibra de vidro (GFRP) possui aproximadamente a mesma rigidez que a madeira e o aço, enquanto os termoplásticos não reforçados, como o náilon e o poliéster, possuem menor rigidez específica. Desta forma, se você busca o material mais rígido e mais leve, você deve procurar acima e à esquerda no gráfico. Outras linhas mostradas possuem inclinações iguais a $E^n/\rho = C$, onde n é uma fração de 1/2 ou 1/3. Essas representam situações de carga, como vigas envergando, para as quais o parâmetro de interesse é uma função não linear de rigidez específica. Uma vez que esse é um gráfico log-log, funções exponenciais também resultam em gráficos de linha reta, permitindo comparações simples.

A Figura 2-24 mostra um gráfico de resistência *versus* rigidez (chamado de *resistência específica*) para um certo número de materiais. Nesse gráfico, a resistência do material utilizado varia de acordo com o caráter do material. Por exemplo, metais dúcteis e polímeros mostram sua resistência ao escoamento,

FIGURA 2-23

Módulo de Young sobreposto à densidade para materiais de engenharia (da Fig. 4-3, p.37, em M.F. Ashby, *Materials Selection in Mechanical Design*, 2ed, Butterworth-Heinemann, 1999, com permissão).

cerâmicas frágeis mostram sua resistência à compressão, e os elastômeros, sua resistência ao rasgamento. O alongamento vertical da "bolha" de um material indica a faixa de valores de resistência que podem ser obtidos pelo endurecimento térmico ou a frio, elementos de ligação, etc. A linha colorida desenhada no gráfico representa um valor particular de resistência específica $\sigma/\rho = C$ e mostra que o índice resistência-peso de algumas madeiras é tão bom quanto o do aço de alta resistência e melhor do que a maioria dos outros metais. Não surpreende que a madeira seja um material muito usado na construção de edifícios. É importante notar também a alta resistência específica da cerâmica de engenharia. Infelizmente, os seus limites de tração estão por volta de, no máximo, 10% dessas resistências de compressão, o que explica por que é pouco usada em estruturas onde tensões de tração são comumente encontradas.

O livro de Ashby[3] é uma referência bastante útil para o engenheiro profissional. Ele contém dezenas de gráficos ao estilo dos que foram mostrados aqui e

FIGURA 2-24

Resistência sobreposta à densidade para materiais de engenharia (da Fig. 4-4, p. 39, em M.F. Ashby, *Materials Selection in Mechanical Design*, 2ed, Butterworth-Heinemann, 1999, com permissão).

que cotejam várias propriedades de uma maneira que reforça sua comparação e desenvolve bom entendimento.

2.9 RESUMO

Existem muitos tipos diferentes de resistências dos materiais. É fundamental entender quais são importantes em situações particulares de carregamento. As resistências mais comumente medidas e divulgadas são o **limite de resistência à tração S_{ut}** (ou *limite de ruptura na tração*) e o **limite de escoamento na tração S_y**. O S_{ut} indica a máxima tensão que o material pode suportar antes da ruptura e S_y, a tensão além da qual o material apresentará uma deformação permanente. Muitos materiais têm **resistências à compressão** aproximadamente iguais às suas resistências à tração e são chamados de **materiais uniformes**. A maioria dos metais conformados plasticamente estão na categoria dos materiais *uniformes*.

Alguns materiais têm resistências à tração e à compressão significativamente diferentes e são chamados de **materiais não uniformes**. Os metais fundidos estão normalmente na categoria dos *não uniformes,* com resistências à compressão muito maiores do que suas resistências à tração. A **resistência ao cisalhamento** de materiais uniformes tende a ser aproximadamente a metade de sua resistência à tração, enquanto que a resistência ao cisalhamento de materiais não uniformes tende a estar entre sua resistência à tração e sua resistência à compressão.

Uma ou mais dessas resistências podem ser de interesse quando o carregamento é estático. Se o material for dúctil, então S_y é o critério usual de falha, já que um material dúctil é capaz de suportar grandes deformações antes da ruptura. Se o material for frágil, como é a maior parte dos materiais fundidos, então S_{ut} é um parâmetro mais interessante, pois o material irá romper antes que qualquer deformação significativa ocorra. De qualquer modo, valores da tensão de escoamento são fornecidos para materiais frágeis, mas são usualmente calculados com base em um valor pequeno e arbitrário de deformação em vez de em qualquer escoamento medido no corpo de prova. O Capítulo 5 trata de mecanismos de falha em materiais para ambas as classes, dúcteis e frágeis, em mais detalhes do que o presente capítulo.

O **ensaio de tração** é a medida mais comum desses parâmetros de resistência estática. O **diagrama tensão-deformação** (σ–ε) gerado nesse ensaio é mostrado na Figura 2-2. O chamado **diagrama σ–ε de engenharia** difere do **diagrama σ–ε verdadeiro** devido a uma redução na área da seção transversal de um corpo de prova dúctil durante o processo de falha. Não obstante, o **diagrama σ–ε de engenharia** é o padrão usado para comparar materiais, uma vez que o diagrama σ–ε verdadeiro é difícil de ser levantado.

A inclinação da curva σ–ε na região elástica, chamada de **módulo de Young** ou **módulo de elasticidade *E*,** é um parâmetro muito importante, pois define a rigidez do material ou sua resistência à deformação elástica sob carregamento. Ao projetar de forma a controlar deformações, bem como tensões, o valor de *E* pode ser de maior interesse do que a resistência do material. Enquanto várias ligas de um dado material-base podem variar bastante em termos de resistência, elas terão essencialmente o mesmo *E.* Se a deformação é a principal restrição, uma liga de baixa resistência é tão boa quanto uma de alta resistência do mesmo material-base.

Quando o carregamento em uma peça varia com o tempo, ele é chamado de **dinâmico**[§] ou **carregamento em fadiga** ou de *solicitações variáveis.* Então, nessa situação, a resistência estática não dá uma boa indicação de falha. Em seu lugar, a **resistência à fadiga** é de maior interesse. Esse parâmetro de resistência é medido sujeitando-se o corpo de prova a um carregamento variável até que ele falhe. A magnitude das tensões e o número de ciclos de tensão na falha são reportados como o critério de resistência. A resistência à fadiga de um dado material será sempre mais baixa do que sua resistência estática e frequentemente inferior à metade de seu S_{ut}. O Capítulo 6 trata do fenômeno da fadiga de materiais em mais detalhes do que este capítulo.

Outros parâmetros dos materiais de interesse para o projetista de máquinas são a **resiliência**, que é a capacidade de absorver energia sem deformação permanente, e a **tenacidade**, ou a capacidade de absorver energia sem se romper (mas *com* deformação permanente). **Homogeneidade** é a uniformidade de um material através de seu volume. Pode-se assumir que muitos materiais de engenharia, especialmente metais, sejam macroscopicamente homogêneos ainda que em um nível microscópico eles sejam frequentemente heterogêneos. **Isotropia** significa ter propriedades que são as mesmas, independentemente da direção no material. Muitos materiais de engenharia são razoavelmente isotrópicos, em nível macroscópico, e são assim assumidos para propósitos de engenharia. Entretanto, outros materiais

[§] N. de R. T.: O termo carregamento dinâmico pode gerar confusão. O que importa nesta situação é o fato da solicitação ser variável. Carregamento dinâmico refere-se aos esforços devidos a inércias em movimento, e esses esforços dinâmicos podem ser constantes. Por exemplo, considere uma barra girando com velocidade angular constante em torno de uma articulação fixa. O carregamento dinâmico em uma determinada seção transversal dessa barra é constante.

úteis de engenharia como madeira e compósitos não são nem homogêneos nem isotrópicos, e suas resistências devem ser medidas separadamente em diferentes direções. A **dureza** é importante na resistência ao desgaste e também está relacionada à resistência do material. O **tratamento térmico**, superficial ou no corpo todo, bem como o **trabalho a frio**, pode aumentar a dureza e a resistência de alguns materiais.

Equações importantes usadas neste capítulo

Ver as seções referidas para informações sobre a utilização correta destas equações.

Tensão normal de tração (Seção 2.1):

$$\sigma = \frac{P}{A_o} \tag{2.1a}$$

Deformação longitudinal na tração (Seção 2.1):

$$\varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o} \tag{2.1b}$$

Módulo de elasticidade (módulo de Young) (Seção 2.1):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

Módulo de elasticidade transversal (Seção 2.1):

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{2.4}$$

Limite de resistência ao cisalhamento (Seção 2.1):

aços: $S_{us} \cong 0{,}8 S_{ut}$

outros metais dúcteis: $S_{us} \cong 0{,}75 S_{ut}$ (2.5b)

Limite de escoamento no cisalhamento (Seção 2.1):

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \tag{2.6}$$

Energia de resiliência, por unidade de volume (Seção 2.1):

$$U_R \cong \frac{1}{2} \frac{S_y^2}{E} \tag{2.7}$$

Energia de tenacidade, por unidade de volume (Seção 2.1):

$$U_T \cong \left(\frac{S_y + S_{ut}}{2} \right) \varepsilon_f \tag{2.8}$$

Média aritmética (Seção 2.2):

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.9b}$$

Desvio-padrão (Seção 2.2):

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \tag{2.9c}$$

Limite de resistência à tração como função da dureza Brinell (Seção 2.4):

$$S_{ut} \cong 500H_B \pm 30H_B \text{ psi}$$
$$S_{ut} \cong 3,45H_B \pm 0,2H_B \text{ MPa} \quad (2.10)$$

2.10 REFERÊNCIAS

1 **E. B. Haugen** e **P.H. Wirsching**, "Probabilistic Design", *Machine Design*, v. 47, nos. 10-14, Penton Publishing, Cleveland, Ohio, 1975.

2 **H. E. Boyer** e **T. L. Gall**, ed. *Metals Handbook*. Vol. 1. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1985.

3 **M. F. Ashby**, *Materials Selection in Mechanical Design*, 2ed., Butterworth and Heinemann, 1999.

2.11 REFERÊNCIAS NA WEB

A Internet é uma fonte útil para obter informação atualizada sobre propriedades de materiais. Acesse estes e outros sites, que podem ser encontrados com uma ferramenta de busca.

http://www.matweb.com

Fichas de dados de propriedades para mais de 41.000 metais, plásticos, cerâmicas e compostos.

http://metals.about.com

Propriedades de material e dados.

2.12 BIBLIOGRAFIA

Para informações gerais sobre materiais, consultar:

Metals & Alloys in the Unified Numbering System. 6th ed. ASTM/SAE: Philadelphia, Pa., 1994.

Brady, ed. *Materials Handbook*. 13th ed. McGraw-Hill: New York. 1992.

H. E. Boyer, ed. *Atlas of Stress-Strain Curves*. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1987.

K. Budinski, *Engineering Materials: Properties and Selection*. 4th ed. Reston-Prentice-Hall: Reston, Va., 1992.

M. M. Farag, *Selection of Materials and Manufacturing Processes for Engineering Design*. Prentice-Hall International: Hertfordshire, U. K., 1989.

I. Granet, *Modern Materials Science*. Reston-Prentice-Hall: Reston, Va., 1977.

H. W. Pollack, *Materials Science and Metallurgy*. 2nd ed. Reston-Prentice-Hall: Reston, Va., 1977.

S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill: New York, 1983.

L. H. V. Vlack, *Elements of Material Science and Engineering*. 6th ed. Addison-Wesley: Reading, Mass., 1989.

M. M. Schwartz, ed. *Handbook of Structural Ceramics*. McGraw-Hill: New York, 1984.

Para informações específicas sobre propriedades dos materiais, consultar:

H. E. Boyler e **T. L. Gall**, ed. *Metals Handbook*. Vol. 1. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1985.

U. S. Department of Defense. *Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicles and Structures*. MIL-HDBK-5H, 1998.

R. Juran, ed. *Modern Plastics Encyclopedia*. McGraw-Hill: New York. 1988.

J. D. Lubahn e **R. P. Felgar**, *Plasticity and Creep of Metals*. Wisley: New York, 1961.

Para mais informações sobre falhas de materiais, consultar:

J. A. Collins, *Faillure of Metals in Mechanical Design*. Wiley: New York, 1981.

N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1992.

R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, 1967.

Para mais informações sobre polímeros e compósitos, consultar:

ASM, *Engineered Materials Handbook: Composites*. Vol. 1. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1987.

ASM, *Engineered Materials Handbook: Engineering Plastics*. Vol. 2. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1988.

Harper, ed. *Handbook of Plastics*, *Elastomers and Composites*. 2nd ed. McGraw-Hill: New York, 1990.

J. E. Hauck, "Long-Term Performance of Plastics". *Materials in Design Engineering*, pp. 113-128, November 1965.

M. M. Schwartz, *Composite Materials Handbook*. McGraw-Hill: New York, 1984.

Para informações sobre processos de fabricação, ver:

R. W. Boltz, *Production Processes: The Productivity Handbook*. Industrial Press: New York, 1974. **J. A. Shey**, *Introduction to Manufacturing Processes*. McGraw-Hill: New York, 1977.

J. A. Schey, *Introduction to Manufacturing Processes*, McGraw-Hill: New York, 1977.

2.13 PROBLEMAS

2-1 A Figura P2-1 mostra diagramas tensão-deformação para três corpos de prova rompidos. Todos estão construídos na mesma escala.

(a) Caracterize cada material como dúctil ou frágil.
(b) Qual é o mais rígido?
(c) Qual tem o mais alto limite de ruptura?
(d) Qual tem a maior energia de resiliência?
(e) Qual tem a maior energia de tenacidade?

2-2 Determine uma relação aproximada entre o limite de escoamento e o limite de resistência para cada material mostrado na Figura P2-1.

2-3 Qual das ligas de aço mostradas na Figura 2-19 você escolheria para obter:

(a) máxima resistência?
(b) máxima energia de resiliência?
(c) máxima energia de tenacidade?
(d) máxima rigidez?

Tabela P2-0
Matriz de tópicos/problemas

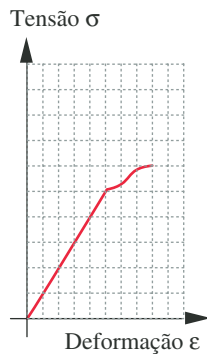
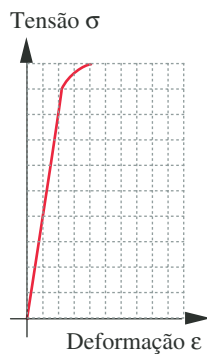
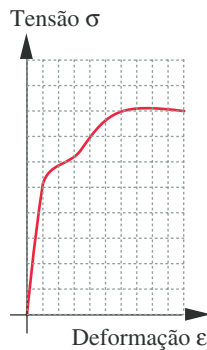
2.1 Propriedades de material
2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7, 2-8, 2-9, 2-10, 2-11, 2-12, 2-18, 2-19, 2-20, 2-21, 2-22, 2-23
2.4 Dureza
2-13, 2-14
2.6 Propriedades gerais
2-15, 2-16, 2-17, 2-24, 2-25, 2-26
2.8 Selecionando materiais
2-37, 2-38, 2-39, 2-40

(*a*)

(*b*)

(*c*)

FIGURA P2-1

Diagramas tensão-deformação.

2-4 Qual das ligas de alumínio mostradas na Figura 2-21 você escolheria para obter:
(a) máxima resistência?
(b) máxima energia de resiliência?
(c) máxima energia de tenacidade?
(d) máxima rigidez?

2-5 Qual dos polímeros termoplásticos mostrados na Figura 2-22 você escolheria para obter:
(a) máxima resistência?
(b) máxima energia de resiliência?
(c) máxima energia de tenacidade?
(d) máxima rigidez?

*2-6 Um metal tem uma resistência de 414 MPa no seu limite elástico, e a deformação (específica) nesse ponto é 0,002. Qual é o seu módulo de elasticidade? Qual é a energia de deformação no limite elástico? Assuma que o corpo de prova tem 12,8 mm de diâmetro e 50 mm de comprimento. Você consegue definir o tipo de metal baseado nos dados fornecidos?

2-7 Um metal tem uma resistência de 41,2 kpsi (284 MPa) no seu limite elástico, e a deformação (específica) nesse ponto é 0,004. Qual é a energia de deformação no limite elástico? Assuma que o corpo de prova tem 0,505 in de diâmetro e 2 in de comprimento. Você consegue definir o tipo de metal baseando-se nos dados fornecidos?

*2-8 Um metal tem uma resistência de 134 MPa no seu limite elástico, e a deformação (específica) nesse ponto é 0,003. Qual é o seu módulo de elasticidade? Qual é a energia de deformação no limite elástico? Assuma que o corpo de prova tem 12,8 mm de diâmetro e 50 mm de comprimento. Você consegue definir o tipo de metal baseando-se nos dados fornecidos?

*2-9 Um metal tem uma resistência de 100 kpsi (689 MPa) no seu limite elástico, e a deformação (específica) nesse ponto é 0,006. Qual é o seu módulo de elasticidade? Assuma que o corpo de prova tem 12,8 mm de diâmetro e 50 mm de comprimento. Assuma que o corpo de prova tem 0,505 in de diâmetro e 2 in de comprimento. Você consegue definir o tipo de metal baseando-se nos dados fornecidos?

2-10 Um material tem uma tensão de escoamento de 689 MPa e a deformação (específica) nesse ponto é 0,6%. Qual é sua energia de resiliência?

2-11 Um material tem uma tensão de escoamento de 414 MPa e a deformação (específica) nesse ponto é 0,2%. Qual é sua energia de resiliência?

*2-12 Um aço tem uma tensão de escoamento de 414 MPa, um limite de resistência de 689 MPa e um alongamento na ruptura de 15%. Qual é aproximadamente sua energia de tenacidade? Qual é sua energia de resiliência aproximada?

2-13 A dureza Brinell de uma peça de aço foi medida como sendo 250 HB. Qual é a resistência à tração aproximada do material? Qual é sua dureza na escala Vickers? E na escala Rockwell?

*2-14 A dureza Brinell de uma peça de aço foi medida como sendo 340 HB. Qual é a resistência à tração aproximada do material? Qual é sua dureza na escala Vickers? E na escala Rockwell?

2-15 Quais são os principais elementos de liga de um aço AISI 4340? Qual é a quantidade de carbono que ele possui? Ele pode ser endurecido? Por meio de quais técnicas?

*2-16 Quais são os principais elementos de liga de um aço AISI 1095? Qual é a quantidade de carbono que ele possui? Ele pode ser endurecido? Por meio de quais técnicas?

2-17 Quais são os principais elementos de liga de um aço AISI 6180? Qual é a quantidade de carbono que ele possui? Ele pode ser endurecido? Por meio de quais técnicas?

*As respostas para esses problemas estão no Apêndice D.

2-18 Qual dos aços dos Problemas 2-15, 2-16 e 2-17 é o mais rígido?

2-19 Calcule a *resistência específica* e a *rigidez específica* dos materiais a seguir e escolha um para uso em uma longarina de asa de avião.

(a) Aço S_{ut} = 80 kpsi (552 MPa)
(b) Alumínio S_{ut} = 60 kpsi (414 MPa)
(c) Titânio S_{ut} = 90 kpsi (621 MPa)

2-20 Se fosse desejada máxima *resistência ao impacto* de uma peça, por quais propriedades de material você iria procurar?

2-21 Consultando as tabelas de dados de materiais no Apêndice A, determine as relações resistência-peso das seguintes ligas, baseando-se em seus limites de escoamento: alumínio 2024 tratado termicamente, aço SAE 1040 laminado a frio, titânio Ti-75A, aço inoxidável tipo 302 laminado a frio.

2-22 Consultando as tabelas de dados de materiais no Apêndice A, determine as relações resistência-peso das seguintes ligas, baseando-se em seus limites de ruptura: alumínio 2024 tratado termicamente, aço SAE 1040 laminado a frio, plástico acetal não enchido, titânio Ti-75A, aço inoxidável tipo 302 laminado a frio.

2-23 Consultando as tabelas de dados de materiais no Apêndice A, calcule a rigidez específica do alumínio, titânio, ferro fundido cinzento, ferro dúctil, bronze, aço-carbono e aço inoxidável. Classifique-os em ordem crescente de propriedade mecânica e discuta a importância desses dados.

2-24 Telefone para os seus distribuidores locais de alumínio e aço (consulte o guia telefônico ou a Internet) e obtenha custos atualizados por unidade de peso para um tarugo cilíndrico de tamanho razoável em aço baixo carbono (SAE 1020), aço SAE 4340, alumínio 2024-T4 e alumínio 6061-T6. Calcule a relação resistência/dólar e a relação rigidez/dólar para cada liga. Qual seria sua primeira escolha em termos de custos para uma barra cilíndrica solicitada à tração axial:

(a) se fosse necessária máxima resistência?
(b) se fosse necessária máxima rigidez?

2-25 Telefone para os distribuidores locais de polímeros (consulte o guia telefônico ou a internet) e obtenha custos atualizados por unidade de peso para uma barra ou tubo de tamanho razoável em plexiglass, acetal, náilon 6/6 e PVC. Calcule a relação resistência/dólar e a relação rigidez/dólar para cada material. Qual seria sua primeira escolha em termos de custos para uma barra cilíndrica ou tubo de diâmetro particular solicitados à tração axial:

(a) se fosse necessária máxima resistência?
(b) se fosse necessária máxima rigidez?

2-26 Uma peça foi projetada e suas dimensões não podem ser modificadas. Para minimizar suas deformações sob o mesmo carregamento em todas as direções, independentemente dos níveis de tensão, qual dentre os seguintes materiais você escolheria: alumínio, titânio, aço ou aço inox? Por quê?

*2-27 Supondo que os dados de propriedades mecânicas fornecidos no Quadro A-9 do Apêndice para alguns aços de carbono representam valores médios, qual é o valor da elasticidade para aço 1050 revenido e temperado a 400F se é exigida uma confiabilidade de 99,9%?

2-28 Supondo que os dados de propriedades mecânicas fornecidos no Quadro A-9 do Apêndice para alguns aços de carbono representam valores médios, qual é o valor do limite de resistência à tração para aço 4340 revenido e temperado a 800F se é exigida uma confiabilidade de 99,99%?

2-29 Supondo que os dados de propriedades mecânicas fornecidos no Quadro A-9 do Apêndice para alguns aços de carbono representam valores médios, qual é o valor do limite de resistência à tração para aço 4130 revenido e temperado a 400F se é exigida uma confiabilidade de 90%?

2-30 Supondo que os dados de propriedades mecânicas fornecidos no Quadro A-9 do Apêndice para alguns aços de carbono representam valores médios, qual é o va-

*As respostas para esses problemas estão no Apêndice D.

lor da elasticidade para aço 4140 revenido e temperado a 800F se é exigida uma confiabilidade de 99,999%?

2-31 Uma peça de aço deve ser revestida para garantir mais resistência à corrosão. Dois materiais estão sendo considerados: cádmio e níquel. Levando em conta apenas o problema da ação galvânica, qual você escolheria? Por quê?

2-32 Uma peça de aço com muitos orifícios e ângulos acentuados deve ser coberta com níquel. Dois processos estão sendo considerados: eletrorrecobrimento e recobrimento catalítico. Qual processo você escolheria? Por quê?

2-33 Qual é o tratamento comum usado no alumínio para evitar oxidação? Que outros metais também podem ser tratados com esse método? Quais opções estão disponíveis com esse método?

*2-34 O aço é frequentemente revestido com algum metal menos nobre que atua como eletrodo de sacrifício que será corroído no lugar do aço. Que metal é comumente usado para esse propósito (quando o produto final não será exposto à água salgada), qual é o nome desse processo de cobertura e quais são os processos comuns usados para obter o produto final?

2-35 Uma peça de um aço de baixo carbono deve receber tratamento térmico para aumentar sua resistência. Se um limite de resistência à tração de aproximadamente 550 MPa é exigido, quanto de dureza Brinell média essa parte deve ter após o tratamento? Qual é a dureza equivalente na escala Rockwell?

2-36 Uma peça de aço de baixo carbono foi testada com o método Brinell e constatou-se uma dureza de 220 HB. Quais são, aproximadamente, os limites mais altos e mais baixos de resistência de tração dessa peça em MPa?

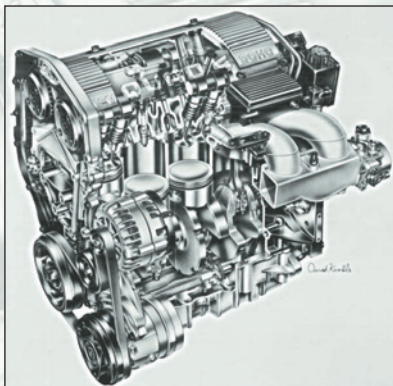
2-37 A Figura 2-24 fornece "diretrizes" para um projeto de peso mínimo quando uma situação de falha é o critério. A diretriz, ou índice, para minimizar o peso de uma viga em processo de flexão é $\sigma_f^{2/3}/\rho$, onde σ_f é o limite de escoamento na tração de um material e ρ é sua densidade de massa. Para uma dada seção transversal, o peso de uma viga com determinada carga será minimizado quando esse índice for maximizado. Os seguintes materiais estão sendo considerados para uma aplicação de viga: alumínio 5052, laminado a frio; cobre-berílio CA-170, endurecido e envelhecido; e aço 4130, temperado e revenido a 1.200F. Com qual desses materiais a barra ficará mais leve?

2-38 A Figura 2-24 mostra "diretrizes" para um projeto de peso mínimo quando uma situação de falha é o critério. A diretriz, ou índice, para minimizar o peso de uma viga em processo de flexão é σ_f/ρ, onde σ_f é o limite de escoamento na tração de um material e ρ é sua densidade de massa. O peso de um componente com determinada carga será minimizado quando seu índice for maximizado. Para os três materiais dados no Problema 2-37, qual resultará no membro com menor tensão de peso?

2.39 A Figura 2-23 mostra "diretrizes" para um projeto de peso mínimo quando rigidez é o critério. A "diretriz", ou o índice, para minimizar o peso de uma viga em processo de flexão é $E^{1/2}/\rho$, onde E é o módulo de elasticidade do material e ρ é a densidade de massa. Em uma determinada seção transversal, o peso de uma viga com dada rigidez será minimizado quando esse índice for maximizado. Os seguintes materiais serão considerados para aplicação na viga: alumínio 5052, laminado a frio; cobre-berílio CA-170, endurecido e envelhecido; e aço 4130 temperado e revenido a 1.200F. O uso desses materiais resultará em uma viga com peso mínimo?

2-40 A Figura 2-24 fornece "diretrizes" para um projeto de peso mínimo em que rigidez é o critério. A "diretriz", ou o índice, para minimizar o peso de um membro em tensão é E / ρ, onde E é o módulo de elasticidade de um material e ρ é sua densidade de massa. O peso de um membro com determinada rigidez será minimizado quando o índice for maximizado. Entre os três materiais citados no Problema 2-39, qual comporá o membro com menor tensão de peso?

*As respostas para esses problemas estão no Apêndice D.

3

DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES

Se um construtor fez uma casa para
um homem, mas seu trabalho não é forte
e a casa desmorona, matando o dono da casa,
esse construtor deve ser morto.
– Do Código de Hamurabi, 2150 a.C.

3.0 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma revisão dos fundamentos de análise de forças dinâmicas e estáticas, forças de impacto e carregamento em vigas. Presume-se que o leitor já tenha tido disciplinas de estática e dinâmica. Assim, este capítulo apresenta apenas uma revisão breve e geral desses tópicos, mas também fornece técnicas mais poderosas de solução, como o uso de funções de singularidade para o cálculo de vigas. O método de solução newtoniano é revisto e alguns exemplos de estudos de caso são apresentados para reforçar o entendimento no assunto. Os estudos de caso serão aprofundados em capítulos posteriores, quando serão feitas análises de tensões, deformações e falha nos mesmos sistemas.

A Tabela 3-0 mostra as variáveis usadas neste capítulo, indicando as equações, as seções ou os estudos de caso onde são encontrados. Ao final do capítulo, é apresentado um resumo que agrupa as equações significantes do capítulo para fácil referência, identificando a seção em que se encontra sua discussão.

3.1 CLASSES DE SOLICITAÇÕES

Os tipos de solicitações que agem sobre um sistema podem ser divididos em diversas classes baseadas na característica das cargas aplicadas e na presença ou não de movimento no sistema. Uma vez definida a configuração geral de um sistema mecânico e calculados os movimentos cinemáticos, a próxima tarefa é determinar as magnitudes e direções de todas as forças e binários presentes nos seus diversos elementos. Essas solicitações podem ser constantes ou variáveis no tempo. Os elementos no sistema podem ser móveis ou imóveis. A classe de solicitações mais geral é aquela de sistemas que se movem com cargas variáveis no tempo. As outras combinações são subgrupos dessa classe geral.

Tabela 3-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
a	distância à carga	in	m	Seção 3.9
b	distância à carga	in	m	Seção 3.9
d	amortecimento	lb-s/in	N-s/m	Equação 3.6
E	energia	in-lb	joules	Equação 3.9, 3.10
F	força ou carga	lb	N	Seção 3.3
f_d	frequência natural amortecida	Hz	Hz	Equação 3.7
f_n	frequência natural	Hz	Hz	Equação 3.4
g	aceleração da gravidade	in/s^2	m/s^2	Equação 3.12
I_x	momento de inércia com relação ao eixo x	lb-in-s^2	kg-m^2	Seção 3.3
I_y	momento de inércia com relação ao eixo y	lb-in-s^2	kg-m^2	Seção 3.3
I_z	momento de inércia com relação ao eixo z	lb-in-s^2	kg-m^2	Seção 3.3
k	constante elástica de mola	lb/in	N/m	Equação 3.5
l	comprimento	in	m	Seção 3.9
m	massa	lb-s^2/in	kg	Seção 3.3
N	força normal	in	m	Caso 4A
M	momento, função momento	lb-in	N-m	Seção 3.3, 3.9
q	carregamento distribuído sobre uma viga	lb	N	Seção 3.9
$\mathbf{R}$	vetor posição	in	m	Seção 3.4
R	força de reação	lb	N	Seção 3.9
v	velocidade linear	in/s	m/s	Equação 3.10
V	força cortante em uma seção da viga	lb	N	Seção 3.9
W	peso	lb	N	Equação 3.14
x	variável de comprimento generalizada	in	m	Seção 3.9
y	deslocamento	in	m	Equação 3.5, 3.8
δ	deflexão	in	m	Equação 3.5
η	fator de correção	nenhuma	nenhuma	Equação 3.10
μ	coeficiente de atrito	nenhuma	nenhuma	Caso 4A
ω	velocidade angular ou rotação	rad/s	rad/s	Caso 5A
ω_d	frequência natural amortecida	rad/s	rad/s	Equação 3.7
ω_n	frequência natural	rad/s	rad/s	Equação 3.4

A Tabela 3-1 mostra as quatro classes possíveis. A Classe 1 consiste em um sistema imóvel com solicitações constantes. Um exemplo de sistema de classe 1 é a estrutura da base de uma prensa de bancada usada em uma oficina mecânica. A base é necessária para suportar o peso morto da prensa, que é essencialmente constante ao longo do tempo, e a estrutura da base não se move. As peças que são levadas à prensa temporariamente somam seu peso ao carregamento da base, mas isso, em geral, constitui uma pequena percentagem do peso morto suportado pela base. Uma análise de carregamento estático é suficiente para um sistema de Classe 1.

A Classe 2 inclui sistemas imóveis com solicitações variáveis no tempo. Um exemplo é uma ponte que, embora essencialmente imóvel, é submetida a solicitações variantes quando veículos passam sobre ela ou devido à incidência de correntes de vento sobre sua estrutura. A Classe 3 é definida como de sistemas

A fotografia da página capitular é cortesia da divisão Chevrolet da General Motors Co., Detroit, MI.

Tabela 3-1 Classes de solicitações

	Solicitações constantes	Solicitações variáveis
Elementos imóveis	Classe 1	Classe 2
Elementos móveis	Classe 3	Classe 4

móveis com solicitações constantes. Mesmo sendo os esforços externos constantes, quaisquer acelerações significantes dos membros móveis podem criar forças reativas variáveis no tempo. Um exemplo pode ser um cortador de grama com lâminas rotativas. Excetuando-se o caso de se atingir um objeto como uma rocha, as lâminas são submetidas a um carregamento externo quase constante quando em operação. No entanto, as acelerações das lâminas girantes podem gerar grandes esforços em suas fixações. Uma análise dinâmica é requerida para sistemas de Classes 2 e 3 para a determinação das solicitações.

Observe no entanto que, se os movimentos de um sistema de Classe 3 forem tão lentos a ponto de gerarem acelerações desprezíveis em seus membros, isso pode qualificar o sistema como de Classe 1. Um macaco de automóvel do tipo sanfona (Figura 3-5) pode ser considerado um sistema de Classe 1 e chamado de quase-estático, pois o carregamento externo (quando usado) é essencialmente constante, e o movimento dos elos é lento com acelerações desprezíveis. A única complexidade introduzida pelo movimento dos elementos nesse exemplo é o de determinar em que posição os esforços internos nos elementos do macaco serão máximos, uma vez que eles variam à medida que o macaco é erguido, apesar do carregamento externo ser essencialmente constante.

A Classe 4 descreve o caso geral de um sistema móvel suficientemente veloz submetido a solicitações variáveis no tempo. Observe que, ainda que os carregamentos externos aplicados sejam essencialmente constantes em um dado caso, os esforços dinâmicos desenvolvidos nos elementos devido às suas acelerações irão variar no tempo. A maior parte das máquinas, especialmente se movidas por motor, são de Classe 4. Um exemplo é o motor de um carro. As partes internas (eixo de manivela, bielas, pistões, etc.) são submetidas a solicitações que variam no tempo devido à explosão do combustível, juntamente com esforços inerciais variáveis devido às suas próprias acelerações. Uma análise dinâmica das solicitações é necessária para Classe 4.

3.2 DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE

Para identificar corretamente todas as forças e momentos potenciais de um sistema, é necessário desenhar corretamente o diagrama de corpo livre (DCL) de cada membro do sistema. Esses DCLs devem mostrar um esboço geral do formato da parte, indicando todas as forças e momentos que agem sobre ela, que podem ser tanto esforços externos aplicados sobre o elemento quanto forças e/ou momentos de ligação nos locais de contato entre as partes adjacentes do conjunto ou sistema.

Além das forças e binários, conhecidas ou incógnitas, mostrados no DCL, as dimensões e os ângulos dos elementos do sistema são definidos em relação a um sistema de coordenadas local localizado nos **centros de gravidade** (CG) ou **baricentros** de cada elemento.* Para uma análise das solicitações dinâmicas, as acelerações, tanto linear (no CG) como angular, devem ser conhecidas ou calculadas para cada elemento antes de se fazer a análise das solicitações.

* Embora não seja obrigatório o uso do sistema de coordenadas local no CG, esta abordagem fornece consistência e simplifica os cálculos dinâmicos. Além do mais, a maior parte dos sistemas CAD/CAE existentes calcula automaticamente as propriedades de massa das partes em relação ao CG. A abordagem usada aqui é a de aplicar um método consistente que funcione tanto para problemas estáticos como dinâmicos e que também seja aplicável a uma solução com o uso de computadores.

3.3 ANÁLISE DO CARREGAMENTO

Esta seção apresenta uma breve revisão das leis de Newton e das equações de Euler quando aplicadas a sistemas carregados estática ou dinamicamente, tanto em 2D quanto em 3D. O método de solução apresentado aqui pode ser um tanto diferente do usado em disciplinas de estática e dinâmica. A abordagem usada para estabelecer as equações para análise de força e momento foi feita de forma a facilitar a programação computadorizada da solução.

Essa abordagem admite o sinal positivo a todas as forças e os momentos *desconhecidos*, sem considerar o que a nossa intuição ou o exame do DCL possa indicar a respeito de seus possíveis sentidos. No entanto, todos os componentes de força *conhecidos* são indicados com seus devidos sinais, indicando seus respectivos sentidos. A solução do sistema de equações simultâneas resultante vai fazer com que os valores encontrados já tenham os sinais corretos. Essa é definitivamente uma abordagem mais simples do que a que é normalmente ensinada em disciplinas de estática e dinâmica que requerem que o estudante atribua sentidos a todas as forças e momentos desconhecidos (uma prática que, no entanto, ajuda o aluno a desenvolver uma certa intuição). Mesmo com essa abordagem tradicional, uma atribuição errada de sinal só resultará em um valor negativo na solução. Atribuindo sinais positivos a todas as incógnitas, o programa de computador resultante para a solução do problema é bem mais simples do que seria usando a outra abordagem. O método de solução das equações simultâneas é conceitualmente muito simples, porém requer o auxílio de um computador para sua solução. Aplicativos para resolução de equações simultâneas são fornecidos junto com o texto. Veja o programa MATRIX no CD-ROM.

Sistemas dinâmicos reais são tridimensionais e, portanto, devem ser analisados como tais. Porém, muitos sistemas 3D podem ser analisados por métodos 2D mais simples. Desse modo, serão investigadas ambas as abordagens.

Análise tridimensional

Como três dos quatro casos potencialmente requerem uma análise dinâmica do carregamento e uma vez que uma análise estática de forças é, na verdade, um caso particular da análise dinâmica, faz sentido começar pelo caso dinâmico. A análise dinâmica do carregamento pode ser feita por qualquer um dos muitos métodos existentes, mas aquele que fornece mais informações a respeito das forças internas é a abordagem newtoniana baseada nas leis de Newton.

Primeira lei de Newton *Um corpo em repouso tende a permanecer em repouso e um corpo em movimento com uma velocidade constante tenderá a manter esta velocidade, a menos que seja submetido a uma força externa.*

Segunda lei de Newton *A derivada em relação ao tempo da quantidade de movimento de um corpo é igual à magnitude da força aplicada e age na direção da força.*

A segunda lei de Newton pode ser escrita para um corpo rígido de duas formas, uma para forças lineares e outra para momentos ou torques:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{3.1a}$$

onde F = força, m = massa, $\mathbf{a}$ = aceleração, $\mathbf{M}_G$ = momento em relação ao centro de gravidade e $\dot{\mathbf{H}}_G$ = a derivada em relação ao tempo da quantidade de movimento angular, ou do momento da quantidade de movimento em relação ao CG. Os termos à esquerda das equações representam a somatória de todas as forças e os

momentos que agem sobre o corpo, sejam elas forças aplicadas conhecidas ou forças nas junções com corpos adjacentes do sistema.

Para um sistema tridimensional de corpos rígidos conectados, essa equação vetorial pode ser escrita como três equações escalares envolvendo componentes ortogonais tomadas de acordo com um sistema local de eixos *x, y, z* com sua origem no CG do corpo:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{3.1b}$$

Se os eixos *x, y, z* escolhidos coincidem com os eixos principais de inércia do corpo,* a quantidade de movimento angular do corpo é definido por

$$\mathbf{H}_G = I_x\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I_y\omega_y\hat{\mathbf{j}} + I_z\omega_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.1c}$$

onde I_x, Iy e I_z são os momentos principais centrais de inércia. Essa equação vetorial pode ser substituída na Equação 3.1*a* para produzir as três equações escalares conhecidas como **equações de Euler**:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x\alpha_x - \left(I_y - I_z\right)\omega_y\omega_z \\ \sum M_y &= I_y\alpha_y - \left(I_z - I_x\right)\omega_z\omega_x \\ \sum M_z &= I_z\alpha_z - \left(I_x - I_y\right)\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{3.1d}$$

onde M_x, M_y, M_z são momentos em relação àqueles eixos e α_x, α_y, α_z são as componentes da aceleração angular. Isso supõe que os termos de inércia se mantêm constantes com o tempo, isto é, a distribuição de massa em relação aos eixos é constante.

Terceira lei de Newton *Quando duas partículas interagem, um par de forças reativas, iguais e opostas, existe em seu ponto de contato. Essas forças têm a mesma magnitude e agem ao longo da mesma linha de ação, mas têm sentidos opostos.*

É necessário aplicar essa lei, assim como a segunda lei, quando se quiser encontrar as forças em conjuntos formados por corpos que agem um sobre o outro. As seis equações nas Equações 3.1*b* e 3.1*d* podem ser escritas para cada corpo rígido em um sistema 3D. Além disso, serão escritas tantas equações de forças de ação e reação (da terceira lei) quanto forem necessárias e o sistema de equações simultâneas resultante será resolvido para calcular as forças e momentos. O número de equações resultantes da segunda lei será seis vezes o número de corpos em um sistema tridimensional (mais as equações de ação e reação), o que significa que mesmo sistemas simples resultam em grandes sistemas de equações. Precisa-se de um computador para resolver essas equações, ainda que muitas calculadoras de última geração consigam também resolver grandes sistemas de equações simultâneas. As equações de ação e reação (da terceira lei) são em geral substituídas nas equações da segunda lei para reduzir o número total de equações simultâneas que devem ser resolvidas.

Análise bidimensional

Todas as máquinas existentes são tridimensionais, mas muitos sistemas tridimensionais podem ser analisados em duas dimensões se seus movimentos ocorrem apenas em um plano, ou em planos paralelos. As **Equações de Euler** 3.1*d* mostram que se os movimentos rotacionais (ω, α) e os momentos ou binários aplicados

* Esta é uma escolha conveniente para corpos simétricos, mas pode ser menos conveniente para outros formatos. Ver F. P. Beer e E. R. Johnson, *Vector Mechanics for Engineers, 3rd ed., 1977* McGraw-Hill, New York, Chap. 18, "Kinetics of Rigid Bodies in Three Dimensions".

existem em relação a apenas um eixo (como por exemplo, o eixo z), então aquele conjunto de três equações se reduz a uma única equação,

$$\sum M_z = I_z \alpha_z \tag{3.2a}$$

porque os termos ω e α em relação aos eixos x e y são iguais a zero. A Equação 3.1b é reduzida a

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{3.2b}$$

As Equações 3.2 podem ser escritas para todos os corpos conectados em um sistema plano e o conjunto todo pode ser resolvido simultaneamente para a determinação de forças e momentos. O número de equações resultantes da segunda lei será agora até três vezes o número de corpos no sistema mais o número de equações de ação e reação necessárias nos pontos de junção, mais uma vez resultando em grandes sistemas de equações, mesmo para sistemas simples. Observe que, mesmo quando todo o movimento se dá em relação a um único eixo (z) em um sistema 2D, pode ainda haver carregamentos com componentes na direção z devido a forças ou binários externos.

Análise estática do carregamento

A diferença entre uma situação de carregamento estático e uma dinâmica é a presença ou não de acelerações. Se as acelerações nas Equações 3.1 e 3.2 forem zero, então, para o caso tridimensional, essas equações se reduzem a

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \\ &\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \end{aligned} \tag{3.3a}$$

e, para o caso bidimensional,

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \tag{3.3b}$$

Assim, pode-se observar que a situação de carregamento estático é apenas um caso particular do dinâmico no qual as acelerações são nulas. Uma abordagem para solução baseada no caso dinâmico irá então satisfazer o caso estático, com as devidas substituições das acelerações por zero.

3.4 ESTUDOS DE CASO DE CARREGAMENTOS ESTÁTICOS BIDIMENSIONAIS

Essa seção apresenta três estudos de caso de complexidade crescente, limitados a situações de carregamento estático bidimensional. Uma alavanca de freio de bicicleta, um alicate de pressão e um macaco tipo sanfona são os sistemas analisados. Esses estudos de caso fornecem exemplos da mais simples forma de análise de forças, não tendo acelerações significativas e com forças agindo em apenas duas dimensões.

ESTUDO DE CASO 1A

Análise do carregamento em uma alavanca de freio de bicicleta

Problema **Determine as forças nas peças do conjunto da alavanca de freio de bicicleta mostrado na Figura 3-1 durante a freagem.**

Dados **A geometria de cada elemento é conhecida. Uma mão humana comum pode gerar uma força de aperto em torno de 267 N (60 lb) na posição da alavanca mostrada.**

Hipóteses **As acelerações são desprezíveis. Todas as forças são coplanares e bidimensionais. Um modelo de carregamento Classe 1 é apropriado e a análise estática é aceitável.**

Solução **Ver Figuras 3-1, 3-2 e a Tabela 3-2, partes 1 e 2.**

1 A Figura 3-1 mostra o conjunto da alavanca do freio de mão, que consiste de três subconjuntos: o guidão (1), a alavanca (2) e o cabo (3). A alavanca é articulada ao guidão e o cabo é conectado à alavanca. O cabo é revestido com uma capa de plástico (para menor atrito) e vai até o mecanismo que movimenta as sapatas do freio localizadas próximas ao aro da roda da bicicleta. A capa está sujeita a uma força de compressão para equilibrar a força de tração no cabo ($F_{capa} = - F_{cabo}$). A mão do usuário aplica forças iguais e opostas em algum ponto na alavanca e na manopla. Essas forças são transformadas em uma força de maior intensidade no cabo pelo ganho na alavanca da peça 2.

A Figura 3-1 é o diagrama de corpo livre do conjunto todo, uma vez que mostra todas as forças e momentos que potencialmente agem nele, com exceção da força peso, que é pequena se comparada às outras forças aplicadas, sendo, portanto, desprezível na análise. A parte que foi "cortada" da figura pode exercer sobre o sistema uma força com componentes nas direções x e y e um momento, se requeridos para equilíbrio. Essas forças de reação estão arbitrariamente mostradas no sentido positivo. Seus verdadeiros sinais sairão dos cálculos. As forças aplicadas conhecidas estão mostradas em suas direções e sentidos reais.

2 A Figura 3-2 mostra os três subconjuntos separados e desenhados como diagramas de corpo livre, com todas as forças e os momentos relevantes aplicados aos respectivos elementos, mais uma vez desprezando-se os pesos das partes. A alavanca (parte 2) tem três forças sobre ela, $\mathbf{F}_{b2}$, $\mathbf{F}_{32}$ e $\mathbf{F}_{12}$. Os índices de dois caracteres usados aqui para designar as forças devem ser lidos da seguinte forma: força que o elemento 1 **exerce sobre** 2 ($\mathbf{F}_{12}$) ou força **em** B sobre 2 ($\mathbf{F}_{b2}$), etc. Isso define a origem da força (primeiro índice) e o elemento sobre o qual ela age (segundo índice).

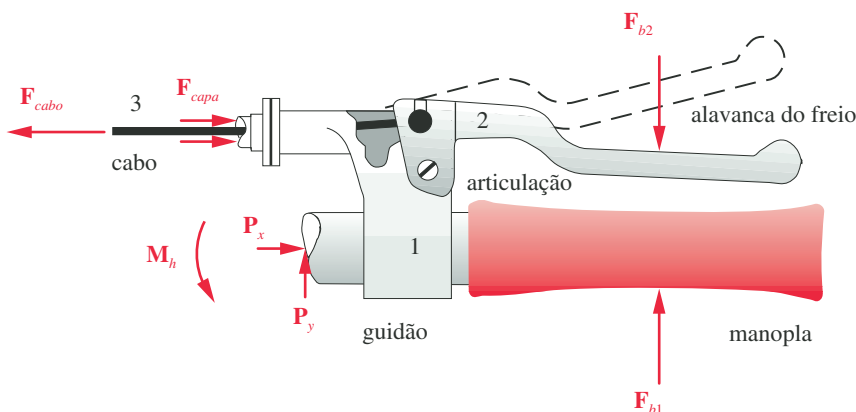



FIGURA 3-1

Conjunto da alavanca de freio de bicicleta.

Tabela 3-2 parte 1
Estudo de Caso 1A
Dados fornecidos

Variável	Valor	Unidade
F_{13x}	0,0	N
F_{b2x}	0,0	N
F_{b2y}	–267,0	N
θ	184,0	deg
ϕ	180,0	deg
R_{b2x}	39,39	mm
R_{b2y}	2,07	mm
R_{32x}	–50,91	mm
R_{32y}	4,66	mm
R_{12x}	–47,91	mm
R_{12y}	–7,34	mm
R_{21x}	7,0	mm
R_{21y}	19,0	mm
R_{b1x}	47,5	mm
R_{b1y}	–14,0	mm
R_{b1y}	–27,0	mm
R_{31y}	30,0	mm
R_{31x}	–27,0	mm
R_{py}	0,0	mm
R_{dx}	–41,0	mm
R_{dy}	27,0	mm

Esta notação será usada constantemente ao longo deste texto tanto para forças como para vetores posição como $\mathbf{R}_{b2}$, $\mathbf{R}_{32}$ e $\mathbf{R}_{12}$ na Figura 3-2, que servem para localizar as três forças acima em um sistema de coordenadas local e não rotativo cuja origem se encontra no centro de gravidade (CG) do elemento ou subconjunto sendo analisado.*

Nesta alavanca de freio, $\mathbf{F}_{b2}$ é uma força aplicada cuja magnitude e direção são conhecidas. $\mathbf{F}_{32}$ é a força no cabo. Sua direção é conhecida, mas não sua intensidade. A força $\mathbf{F}_{12}$ é exercida pela peça 1 na peça 2, no pino de articulação. O seu módulo e direção são desconhecidos. Podemos escrever as Equações 3.3*b* para essa peça para somar forças nas direções x e y e os momentos com relação ao CG. Observe que todas as forças e momentos desconhecidos são, inicialmente, pressupostos como sendo positivos nas equações. Os seus sinais verdadeiros aparecerão após os cálculos.† Entretanto, todas as forças conhecidas ou dadas devem estar com o seu sinal próprio (sinal correto).

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{12x} + F_{b2x} + F_{32x} = 0 \\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{b2y} + F_{32y} = 0 \\ \sum M_z &= \left(R_{12} \times F_{12}\right) + \left(R_{b2} \times F_{b2}\right) + \left(R_{32} \times F_{32}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (a)$$

Os produtos vetoriais na equação de momento representam as "forças de giro" ou momentos criados com a aplicação dessas forças em pontos afastados do CG do elemento. Lembre que esses produtos vetoriais podem ser expandidos na forma

$$\begin{aligned} \sum M_z = &\left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{b2x}F_{b2y} - R_{b2y}F_{b2x}\right) \\ &+ \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (b)$$

A esta altura, temos três equações e quatro incógnitas (F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}). Portanto, precisamos de outra equação, que se obtém pelo fato de que a direção de $\mathbf{F}_{32}$ é conhecida. (O cabo só pode ser tracionado ao longo de seu próprio eixo). Pode-se expressar uma das componentes da força no cabo $\mathbf{F}_{32}$ em termos de sua outra componente e do ângulo do cabo θ, também conhecido.

$$F_{32y} = F_{32x} \operatorname{tg} \theta \qquad (c)$$

Poderíamos, então, resolver essas equações e calcular as quatro incógnitas para este elemento, porém, antes serão determinadas as equações para os outros dois corpos.

3 A peça 3, na Figura 3-2, é o cabo do freio, que passa por um furo na peça 1. Esse orifício é revestido por um material de baixo coeficiente de atrito, o que permite desprezar o atrito na junção entre as peças 1 e 3. Mais adiante será assumido que as três forças ($\mathbf{F}_{13}$, $\mathbf{F}_{23}$ e $\mathbf{F}_{cabo}$) formam um sistema de forças coincidentes, atuantes no CG, e que não geram momento. Com essa suposição, apenas a somatória das forças é necessária para este elemento.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{cabo_x} + F_{13x} + F_{23x} = 0 \\ \sum F_y &= F_{cabo_y} + F_{13y} + F_{23y} = 0 \end{aligned} \qquad (d)$$

4 O conjunto de elementos chamados de peça 1 mostrado na Figura 3-2 pode apresentar forças e momentos aplicados nele (isto é, não se trata de um sistema de forças concorrentes). Assim, são necessárias as três Equações 3.3*b*.

* Na verdade, para uma análise estática simples como a deste exemplo, qualquer ponto (dentro ou fora do elemento) pode ser tomado como a origem do sistema de coordenadas local. Porém, em uma análise de forças dinâmicas, a análise é simplificada se o sistema de coordenadas é colocado no CG. Então, para manter a consistência e preparar para os problemas de análise dinâmica mais complicados adiante, será usado o CG como origem mesmo para os casos estáticos aqui estudados.

† Você não deve ter feito isso em suas aulas de estática, mas esta abordagem torna o problema muito mais ameno em termos de uma solução computacional. Observe que, apesar da direção mostrada para qualquer força desconhecida no DCL (diagrama de corpo livre), assume-se que suas componentes são positivas nas equações. Os ângulos das forças conhecidas (dadas) ou os sinais de suas componentes, entretanto, devem ser introduzidos corretamente nas equações.

FIGURA 3-2

Diagrama de corpo livre de alavanca de freio de bicicleta.

$$\sum F_x = F_{21x} + F_{b1x} + F_{31x} + P_x + F_{capa_x} = 0$$

$$\sum F_y = F_{21y} + F_{b1y} + F_{31y} + P_y = 0 \qquad (e)$$

$$\sum \mathbf{M}_z = \mathbf{M}_h + (\mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{R}_{b1} \times \mathbf{F}_{b1}) + (\mathbf{R}_{31} \times \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{R}_p \times \mathbf{P}) + (\mathbf{R}_d \times \mathbf{F}_{capa}) = 0$$

Desenvolvendo-se os produtos vetoriais da equação de momento, tem-se a magnitude do momento resultante como sendo

$$\sum M_z = M_h + (R_{21x}F_{21y} - R_{21y}F_{21x}) + (R_{b1x}F_{b1y} - R_{b1y}F_{b1x}) + (R_{31x}F_{31y} - R_{31y}F_{31x}) + (R_{dx}P_y - R_{Py}P_x) + (R_{dx}F_{capa_y} - R_{dy}F_{capa_x}) = 0 \qquad (f)$$

5 O número total de incógnitas, incluindo-se as listadas no passo 2 acima, são 21: F_{b1x}, F_{b1y}, F_{12x}, F_{12y}, F_{21x}, F_{21y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{13x}, F_{13y}, F_{31x}, F_{31y}, F_{cabo_x}, F_{cabo_y}, F_{capa_x}, F_{capa_y}, P_x, P_y e M_h, apenas nove equações até aqui: três equações em (*a*), uma Equação (*c*), duas equações em (*d*) e três equações em (*e*). Ainda precisamos de mais 12 equações para resolver o sistema. Podemos obter sete equações a partir da Terceira Lei de Newton aplicada aos elementos em contato (lei da ação e reação):

$$\begin{aligned} F_{23x} &= -F_{32x} & F_{23y} &= -F_{32y} \\ F_{21x} &= -F_{12x} & F_{21y} &= -F_{12y} \\ F_{31x} &= -F_{13x} & F_{31y} &= -F_{13y} \end{aligned} \qquad (g)$$
$$F_{capa_x} = -F_{cabo_x}$$

Tabela 3-2 parte 1 repetida
Estudo de Caso 1A
Dados fornecidos

Variável	Valor	Unidade
F_{13x}	0,0	N
F_{b2x}	0,0	N
F_{b2y}	–267,0	N
θ	184,0	deg
ϕ	180,0	deg
R_{b2x}	39,39	mm
R_{b2y}	2,07	mm
R_{32x}	–50,91	mm
R_{32y}	4,66	mm
R_{12x}	–47,91	mm
R_{12y}	–7,34	mm
R_{21x}	7,0	mm
R_{21y}	19,0	mm
R_{b1x}	47,5	mm
R_{b1y}	–14,0	mm
R_{31y}	–27,0	mm
R_{31y}	30,0	mm
R_{px}	–27,0	mm
R_{py}	0,0	mm
R_{dx}	–41,0	mm
R_{dy}	27,0	mm

Outras duas equações são obtidas da hipótese (mostrada na Figura 3-1) de que as duas forças provenientes da ação da mão do ciclista na alavanca do freio e no guidão da bicicleta têm o mesmo valor e sentidos contrários:*

$$\begin{aligned} F_{b1x} &= -F_{b2x} \\ F_{b1y} &= -F_{b2y} \end{aligned} \qquad (h)$$

As três equações restantes são obtidas da geometria dada e das hipóteses assumidas a respeito deste sistema. A direção das forças F_{cabo} *e* F_{capa} é a mesma que a do cabo, em sua extremidade. Na figura, percebe-se que esse trecho do cabo é horizontal. Então, tem-se

$$F_{cabo_y} = 0; \qquad F_{capa_y} = 0 \qquad (i)$$

Devido à hipótese de ausência de atrito, a força F_{31} pode ser considerada como sendo normal à superfície de contato entre o cabo e o furo da peça 1. Essa superfície é horizontal no exemplo em questão e, portanto, F_{31} é vertical e

$$F_{31x} = 0 \qquad (j)$$

6 Com isso, completa-se o conjunto de 21 equações (conjunto de Equações *a, c, d, e, g, h, i* e *j*) que podem ser resolvidas simultaneamente para a determinação das 21 incógnitas, ou seja, todas as 21 equações podem ser colocadas na forma matricial e solucionadas com o auxílio de um programa de computador apropriado. Entretanto, o problema pode ser simplificado pela substituição manual das Equações *c, g, h, i* e *j* nas outras, reduzindo-se a um conjunto de oito equações para oito incógnitas. Os valores conhecidos ou dados são mostrados na Tabela 3-2.

7 Como primeiro passo, para o corpo 2, substitua as Equações *b* e *c* na Equação *a* para obter:

$$\begin{aligned} F_{12x} + F_{b2x} + F_{32x} &= 0 \\ F_{12y} + F_{b2y} + F_{32x}\,\mathrm{tg}\,\theta &= 0 \\ \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{b2x}F_{b2y} - R_{b2y}F_{b2x}\right) + \left(R_{32x}F_{32x}\,\mathrm{tg}\,\theta - R_{32y}F_{32x}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad (k)$$

8 Em seguida, considere as Equações *d* para o corpo 3 e substitua a Equação *c*; também substitua F_{23x} por $-F_{32x}$ e F_{23y} por $-F_{32y}$ das Equações *g* a fim de eliminar essas variáveis.

$$\begin{aligned} F_{cabo_x} + F_{13x} - F_{32x} &= 0 \\ F_{cabo_y} + F_{13y} - F_{32x}\ \mathrm{tg}\,\theta &= 0 \end{aligned} \qquad (l)$$

9 Para o corpo 1, substitua a Equação *f* em *e* e troque F_{21x} por $-F_{12x}$, F_{21y} por $-F_{12y}$, F_{31x} por $-F_{13x}$, F_{31y} por $-F_{13y}$ e F_{capax} por $-F_{cabox}$ das Equações *g*,

$$\begin{aligned} -F_{12x} + F_{b1x} - F_{13x} + P_x - F_{cabo_x} &= 0 \\ -F_{12y} + F_{b1y} - F_{32x}\,\mathrm{tg}\,\theta + P_y &= 0 \\ M_h + \left(-R_{21x}F_{12y} + R_{21y}F_{12x}\right) + \left(R_{b1x}F_{b1y} - R_{b1y}F_{b1x}\right) & \\ + \left(-R_{31x}F_{13y} + R_{31y}F_{13x}\right) + \left(R_{Px}P_y - R_{Py}P_x\right) + R_{dy}F_{cabo_x} &= 0 \end{aligned} \qquad (m)$$

10 Por último, substitua as Equações *h, i* e *j* nas Equações *k, l* e *m* para produzir o seguinte conjunto de oito equações simultâneas para as oito incógnitas restantes: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{13y}, F_{cabo}, P_x, P_y e M_h. Coloque-as na forma padrão, na qual todas as incógnitas ficam do lado esquerdo e todos os termos conhecidos no lado direito dos sinais de igualdade.

* Mas não necessariamente colineares.

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} &= -F_{b2x} \\
F_{12y} + F_{32x} \operatorname{tg}\theta &= -F_{b2y} \\
F_{cabo_x} - F_{32x} &= 0 \\
F_{13y} - F_{32x} \operatorname{tg}\theta &= 0 \\
-F_{12x} + P_x - F_{cabo_x} &= F_{b2x} \\
-F_{12y} - F_{13y} + P_y &= F_{b2y} \\
R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + \left(R_{32x} \operatorname{tg}\theta - R_{32y}\right)F_{32x} &= -R_{b2x}F_{b2y} + R_{b2y}F_{b2x} \\
M_h - R_{21x}F_{12y} + R_{21y}F_{12x} - R_{31x}F_{13y} + R_{Px}P_y - R_{Py}P_x + R_{dy}F_{cabo_x} &= R_{b1x}F_{b2y} - R_{b1y}F_{b2x}
\end{aligned}
\qquad (n)
$$

11 Forme as matrizes a partir das Equações n.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \operatorname{tg}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\operatorname{tg}\theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-R_{12y} & R_{12x} & R_{32x}\operatorname{tg}\theta - R_{32y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{21y} & -R_{21x} & 0 & -R_{31x} & R_{dy} & -R_{Py} & R_{Px} & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{13y} \\ F_{cabo_x} \\ P_x \\ P_y \\ M_h
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-F_{b2x} \\ -F_{b2y} \\ 0 \\ 0 \\ F_{b2x} \\ F_{b2y} \\ -R_{b2x}F_{b2y} + R_{b2y}F_{b2x} \\ R_{b1x}F_{b2y} - R_{b1y}F_{b2x}
\end{bmatrix}
\qquad (o)
$$

12 Substitua os valores conhecidos conforme a Tabela 3-2 parte 1.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0{,}070 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0{,}070 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
7{,}34 & -47{,}91 & -0{,}324 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
19 & -7 & 0 & 27 & 27 & 0 & -27 & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{13y} \\ F_{cabo_x} \\ P_x \\ P_y \\ M_h
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 267 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -267 \\ 93{,}08 \\ -112{,}25
\end{bmatrix}
\qquad (p)
$$

13 A solução é mostrada na Tabela 3-2 parte 2. Esta equação matricial pode ser resolvida com o auxílio de programas para solução de matrizes disponíveis comercialmente, como *Mathcad*, *MATLAB*, *Maple* ou *Mathematica*, assim como com calculadoras científicas de bolso. Um programa feito por encomenda, denominado MATRIX, é fornecido no CD-ROM deste livro e pode ser utilizado para a resolução de sistemas lineares até 16 equações. A Equação p foi resolvida com o programa MATRIX para se determinar as oito incógnitas listadas na etapa 10. Os

Tabela 3-2 parte 2
Estudo de Caso 1A
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
F_{32x}	–1.909	N
F_{32y}	–133	N
F_{12x}	1.909	N
F_{12y}	400	N
F_{23x}	1.909	N
F_{23y}	133	N
F_{13y}	–133	N
F_{cabo_x}	–1.909	N
F_{cabo_y}	0	N
F_{b1x}	0	N
F_{b1y}	267	N
F_{31x}	0	N
F_{31y}	133	N
F_{21x}	–1.909	N
F_{21y}	–400	N
P_x	0	N
P_y	0	N
M_h	9	N-m
F_{capa_x}	1.909	N

Tabela 3-2 parte 2 repetida
Estudo de Caso 1A
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
F_{32x}	–1.909	N
F_{32y}	–133	N
F_{12x}	1.909	N
F_{12y}	400	N
F_{23x}	1.909	N
F_{23y}	133	N
F_{13y}	–133	N
F_{cabo_x}	–1.909	N
F_{cabo_y}	0	N
F_{b1x}	0	N
F_{b1y}	267	N
F_{31x}	0	N
F_{31y}	133	N
F_{21x}	–1.909	N
F_{21y}	–400	N
P_x	0	N
P_y	0	N
M_h	9	N-m
F_{capa_x}	1.909	N

resultados obtidos foram então substituídos nas outras equações para se calcular as variáveis previamente eliminadas.

14 A Tabela 3-2 exibe também os resultados calculados com base nos dados fornecidos na Figura 3-2 e na primeira parte da própria Tabela 3-2. Esses resultados assumem que há uma força de 267 N (60 lb) aplicada pela mão do ciclista normal à alavanca de freio. A força gerada no cabo (F_{cabo}) é de 1909 N (429 lb) e a força de reação aplicada no guidão (F_{21}) é de 1951 N (439 lb) inclinada de –168°.

ESTUDO DE CASO 2A

Análise de forças de uma ferramenta manual de dobramento

Problema **Determine as forças nos elementos da ferramenta de dobramento, mostrada na Figura 3-3 durante uma operação de dobramento.**

Dados **A geometria é conhecida e a ferramenta desenvolve uma força de dobramento de 2000 lb (8896 N) no fechamento para a posição mostrada.**

Hipóteses **As acelerações são desprezíveis. Todas as forças são coplanares e bidimensionais. Um modelo de solicitações de Classe 1 é apropriado e uma análise estática é aceitável.**

Solução **Ver Figuras 3-3, 3-4 e Tabela 3-3, partes 1 e 2.**

1 A Figura 3-3 mostra a ferramenta na posição fechada para o processo de dobramento de um conector de metal em torno de um fio. A mão do usuário aplica uma força entre as peças 1 e 2, mostrada na forma do par reativo F_h. O operador pode apertar a alavanca da ferramenta em qualquer ponto ao longo de seu comprimento; entretanto, assume-se a existência de um braço de momento nominal R_h para a aplicação da força de aperto resultante (ver Figura 3-4). A elevada vantagem mecânica da ferramenta transforma a força de aperto em uma força de dobramento elevada.

A Figura 3-3 ilustra o diagrama de corpo livre do conjunto completo da ferramenta, desprezando seu peso, que é pequeno se comparado à força de dobramento. Existem quatro elementos, ou corpos, no conjunto, interligados por articulações. O corpo 1 pode ser considerado como o corpo "fixo", com os outros elementos movimentando-se em relação a ele conforme a ferramenta se fecha. A intensidade desejada para a força de dobramento (F_c) é definida e o seu sentido será normal às superfícies no instante do dobramento. A terceira lei de Newton relaciona os pares de força de ação e reação atuantes nos corpos 1 e 4:

$$\begin{aligned} F_{c1x} &= -F_{c4x} \\ F_{c1y} &= -F_{c4y} \end{aligned} \qquad (a)$$

2 A Figura 3-4 mostra as partes do conjunto da ferramenta de dobramento separadas e seus diagramas de corpo livre com as respectivas forças aplicadas em cada parte, com exceção dos pesos das partes, que têm valores insignificantes quando comparados às forças aplicadas. Os centros de gravidade das respectivas partes são utilizados como origens dos sistemas de coordenadas locais (sem rotação), em relação aos quais os pontos de aplicação de todas as forças das partes estão localizados.*

3 Consideremos que o corpo 1 é um corpo "fixo" e analisemos os movimentos dos outros corpos em relação a ele. Observe que todas as forças e momentos incógnitos são assumidos inicialmente como tendo sinal positivo. Há três forças atuando

* Novamente, em uma análise estática, não é necessário tomar o CG como origem do sistema de coordenadas (qualquer ponto pode ser utilizado). Entretanto, ele será utilizado como tal aqui para manter a consistência com a abordagem dinâmica, na qual a escolha do CG como origem é bastante útil.

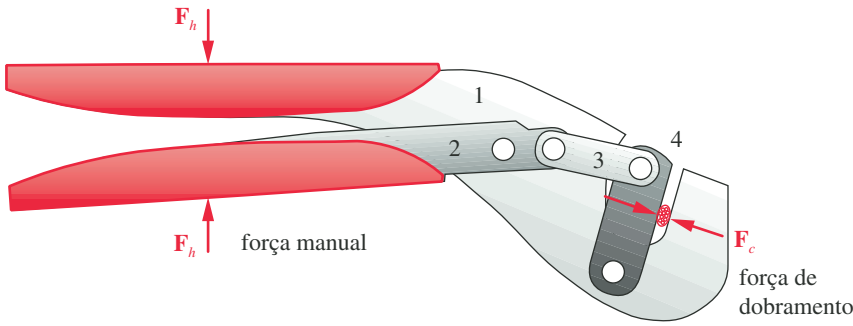



FIGURA 3-3

Ferramenta para o dobramento de conectores de fios.

Tabela 3-3 parte 1
Estudo de Caso 2A
Dados fornecidos

Variável	Valor	Unidade
F_{c4x}	–1.956,30	lb
F_{c4y}	415,82	lb
R_{c4x}	0,45	in
R_{c4y}	0,34	in
R_{12x}	1,40	in
R_{12y}	0,05	in
R_{32x}	2,20	in
R_{32y}	0,08	in
R_h	–4,40	in
R_{23x}	–0,60	in
R_{23y}	0,13	in
R_{43x}	0,60	in
R_{43y}	–0,13	in
R_{14x}	–0,16	in
R_{14y}	–0,76	in
R_{34x}	0,16	in
R_{34y}	0,76	in

no corpo 2: F_h é a força desconhecida proveniente da mão do operador e $\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{32}$ são as forças reativas referentes aos corpos 1 e 3, respectivamente. A força $\mathbf{F}_{12}$ provém da ação do corpo 1 em 2, no pino de articulação, e a força $\mathbf{F}_{32}$, do corpo 3 atuando no corpo 2, também em seu respectivo pino. As magnitudes e direções de ambas as forças nos pinos são desconhecidas. Escrevemos as Equações 3.3*b* para esse elemento a fim de termos a soma de forças, nas direções *x* e *y*, e a soma de momentos em torno do CG (com o desenvolvimento dos produtos vetoriais).

$$\sum F_x = F_{12x} + F_{32x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{12y} + F_{32y} + F_h = 0 \qquad (b)$$
$$\sum M_z = F_h R_h + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = 0$$

4 Há duas forças aplicadas no corpo 3, $\mathbf{F}_{23}$ e $\mathbf{F}_{43}$. Escrevemos as Equações 3.3*b* para esse elemento:

$$\sum F_x = F_{23x} + F_{43x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{23y} + F_{43y} = 0 \qquad (c)$$
$$\sum M_z = \left(R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x}\right) + \left(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}\right) = 0$$

5 Há três forças atuando no corpo 4: $\mathbf{F}_{c4}$ é uma força conhecida (força desejada para o dobramento) e $\mathbf{F}_{14}$ e $\mathbf{F}_{34}$ são as forças reativas referentes aos corpos 1 e 3, respectivamente. As magnitudes e direções de ambas as forças nos pinos são desconhecidas. Escrevemos as Equações 3.3*b* para esse elemento:

$$\sum F_x = F_{14x} + F_{34x} + F_{c4x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{14y} + F_{34y} + F_{c4y} = 0 \qquad (d)$$
$$\sum M_z = \left(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}\right) + \left(R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x}\right) + \left(R_{c4x}F_{c4y} - R_{c4y}F_{c4x}\right) = 0$$

6 As nove equações nos conjuntos de *b* até *d* possuem 13 incógnitas: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, F_{34x}, F_{34y} e F_h. Podemos escrever as relações provenientes da terceira lei de Newton (para os pares de ação e reação de forças) em cada um dos pontos de ligação para obtermos as quatro equações adicionais necessárias:

$$F_{32x} = -F_{23x}; \quad F_{34x} = -F_{43x}; \quad F_{32y} = -F_{23y}; \quad F_{34y} = -F_{43y} \qquad (e)$$

FIGURA 3-4

Diagrama de corpo livre de uma ferramenta para o dobramento de conectores de fios.

7 As 13 Equações *b-e* podem ser resolvidas simultaneamente por métodos de redução de matrizes ou por um método interativo com um algoritmo de determinação de raízes. Para a solução matricial, as incógnitas são colocadas no lado esquerdo, e todos os termos conhecidos, no lado direito dos sinais de igualdade.

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_h &= 0 \\
R_h F_h + R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{23y} + F_{43y} &= 0 \\
R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x} + R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x} &= 0 \\
F_{14x} + F_{34x} &= -F_{c4x} \\
F_{14y} + F_{34y} &= -F_{c4y} \\
R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} + R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x} &= -R_{c4x}F_{c4y} + R_{c4y}F_{c4x} \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0
\end{aligned}
\qquad (f)
$$

Tabela 3-3 parte 2
Estudo de Caso 2A
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
F_h	53,1	lb
F_{12x}	1.513,6	lb
F_{12y}	–381,0	lb
F_{32x}	–1.513,6	lb
F_{32y}	327,9	lb
F_{43x}	–1.513,6	lb
F_{43y}	327,9	lb
F_{23x}	1.513,6	lb
F_{23y}	–327,9	lb
F_{34x}	1.513,6	lb
F_{34y}	–327,9	lb
F_{14x}	442,7	lb
F_{14y}	–87,9	lb
F_{21x}	–1.513,6	lb
F_{21y}	381,0	lb
F_{41x}	–442,7	lb
F_{41y}	87,9	lb

8 Substituindo os dados fornecidos pela Tabela 3-3, parte 1, temos

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_h &= 0 \\
-4{,}4F_h + 1{,}4F_{12y} - 0{,}05F_{12x} + 2{,}2F_{32y} - 0{,}08F_{32x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{23y} + F_{43y} &= 0 \\
-0{,}6F_{23y} - 0{,}13F_{23x} + 0{,}6F_{43y} + 0{,}13F_{43x} &= 0 \\
F_{14x} + F_{34x} &= 1956{,}3 \qquad\qquad (g) \\
F_{14y} + F_{34y} &= -415{,}82 \\
-0{,}16F_{14y} + 0{,}76F_{14x} + 0{,}16F_{34y} - 0{,}76F_{34x} &= -0{,}45(415{,}82) - 0{,}34(1956{,}3) \\
&= -852{,}26 \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0
\end{aligned}
$$

9 Construindo a matriz para solução, temos:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}05 & 1{,}4 & -0{,}08 & 2{,}2 & -4{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}13 & -0{,}6 & 0{,}13 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}76 & -0{,}16 & -0{,}76 & 0{,}16 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_h \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{34x} \\ F_{34y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1956{,}30 \\ -415{,}82 \\ -852{,}26 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\qquad (h)
$$

10 A Tabela 3-3 parte 2 mostra a solução para esse problema para os dados fornecidos na parte 1, assumindo uma força aplicada de dobramento de 2000 lb (8896 N), normal às superfícies de contato. Foi usado o programa MATRIX (no CD-ROM). A força gerada na barra 3 é de 1547 lb (6888 N), a força de reação na barra 1 devido à barra 2 ($\mathbf{F}_{21}$) é de 1561 lb (6943 N) a 166°, a força de reação na barra 1 devido à barra 4 ($\mathbf{F}_{41}$) é de 451 lb (2008 N) a 169°, e um momento de –233,5 lb-in (–26,6 N-m) deve ser aplicado às manoplas para gerar a força de dobramento especificada. Esse momento pode ser obtido com uma força de 53,1 lb (236 N) aplicada no meio da manopla. Essa força está dentro da capacidade fisiológica média humana para a força de aperto.

ESTUDO DE CASO 3A

Análise das solicitações em um macaco tipo sanfona de automóvel

Problema **Determine as forças nos elementos do macaco na posição mostrada na Figura 3-5.**

Dados **A geometria é conhecida e o macaco suporta uma força P = 1000 lb (4448 N) na posição mostrada.**

Hipóteses **As acelerações são desprezíveis. O macaco está em um piso nivelado. O ângulo do carro elevado não implica em um momento de tombamento sobre o macaco. Todas as forças são coplanares e bidimensionais. Um modelo de solicitações de Classe 1 é apropriado e uma análise estática é aceitável.**

Solução **Ver Figuras 3-5 a 3-8 e a Tabela 3-4, partes 1 e 2.**

1 A Figura 3-5 mostra um esquema de um macaco tipo sanfona simples usado para erguer um carro. Ele consiste em seis barras, que são conectadas por articulações e/ou engrenamentos, e em um sétimo elemento (corpo 1), na forma de parafuso de movimento, que é girado para elevar o macaco. Mesmo sendo um equipamento claramente tridimensional, ele pode ser analisado como bidimensional se assumirmos que a força aplicada (do carro) e o macaco estão exatamente na vertical (na direção de y). Sendo assim, todas as forças estarão no plano xy. Essa hipótese é valida se o carro for erguido sobre uma superfície nivelada. Caso contrário, haverá outras forças nos planos yz e xz. O projetista de macacos precisa considerar o caso mais geral, mas para o nosso exemplo simples, iremos assumir inicialmente um carregamento bidimensional. Para o conjunto geral mostrado na Figura 3-5, podemos encontrar a força de reação $\mathbf{F}_g$, dada a força $\mathbf{P}$, pelo somatório de forças: $\mathbf{F}_g = -\mathbf{P}$.

2 A Figura 3-6 mostra um conjunto de diagramas de corpo livre para todo o macaco. Cada elemento ou subconjunto de interesse foi separado dos outros e as forças e os momentos são mostrados atuando (exceto para os pesos próprios, que são pequenos quando comparados às forças aplicadas e, portanto, podem ser negligenciados nesta análise). As forças e os momentos podem ser tanto

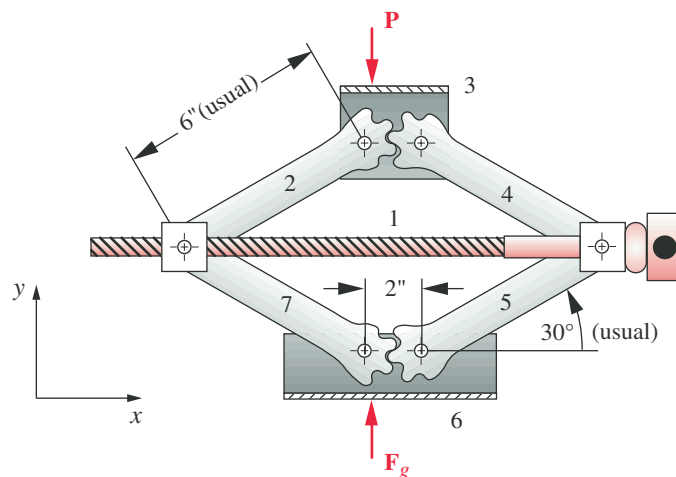



FIGURA 3-5

Um macaco tipo sanfona de automóvel.

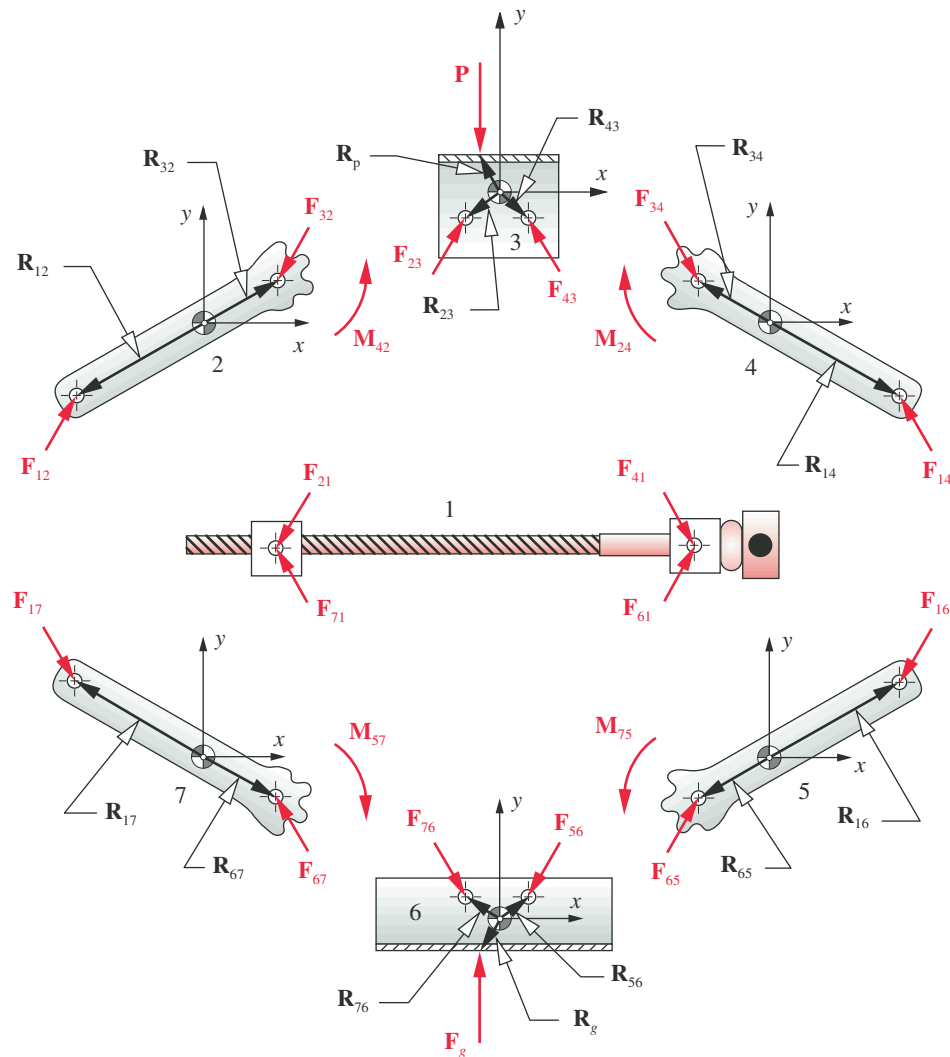



FIGURA 3-6

Diagramas de corpo livre do macaco tipo sanfona completo.

reações internas nas conexões com outros elementos quanto cargas externas do "mundo externo". O centro de gravidade dos respectivos elementos é usado como origem dos sistemas de coordenadas locais não girantes, em relação aos quais os pontos de aplicação de todas as forças no elemento são localizados. Nesse projeto, o equilíbrio é conseguido devido ao engrenamento de dois pares de segmentos de engrenagens (não evolventes) agindo entre as barras 2 e 4 e entre as barras 5 e 7. Essas interações são modeladas como forças agindo sobre uma *normal comum* compartilhada entre os dois dentes. Essa normal comum é perpendicular à tangente comum no ponto de contato.

Existem 3 equações da segunda lei disponíveis para cada um dos sete elementos, permitindo 21 incógnitas. Dez equações adicionais da terceira lei são necessárias para um total de 31. É um sistema incômodo de resolver para um dispositivo simples como esse, mas podemos usar sua simetria para simplificar o problema.

Tabela 3-4 parte 1
Estudo de Caso 3A
Dados fornecidos

Variável	Valor	Unidade
P_x	0.00	lb
P_y	–1.000,00	lb
R_{px}	–0,50	in
R_{py}	0,87	in
θ	–45,00	deg
R_{12x}	–3,12	in
R_{12y}	–1,80	in
R_{32x}	2,08	in
R_{32y}	1,20	in
R_{42x}	2,71	in
R_{42y}	1,00	in
R_{23x}	–0,78	in
R_{23y}	–0,78	in
R_{43x}	0,78	in
R_{43y}	–0,78	in
R_{14x}	3,12	in
R_{14y}	–1,80	in
R_{24x}	–2,58	in
R_{24y}	1,04	in
R_{34x}	–2,08	in
R_{34y}	1,20	in

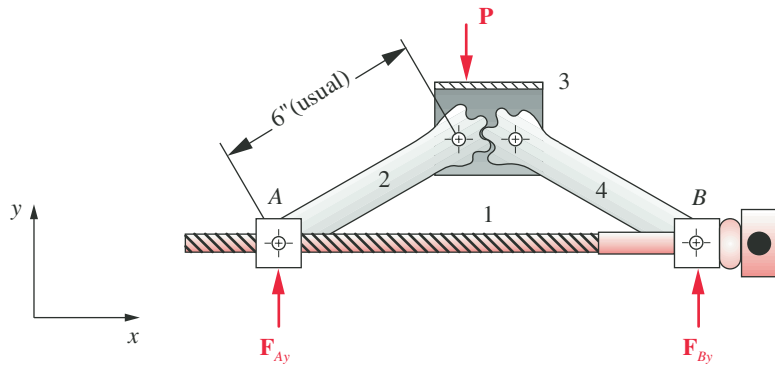



FIGURA 3-7

Diagrama de corpo livre da metade superior simétrica do macaco tipo sanfona para automóvel.

3 A Figura 3-7 mostra a metade superior do conjunto do macaco. Devido à simetria entre a parte superior e inferior, a metade inferior pode ser removida para simplificar a análise. As forças calculadas para essa metade são iguais às forças que agem na outra metade. Se quiséssemos, poderíamos calcular as forças de reação em *A* e *B* usando as Equações 3.3*b* para o diagrama de corpo livre do conjunto da metade do macaco.

4 A Figura 3-8*a* mostra os diagramas de corpo livre para a metade superior do macaco, que são essencialmente os mesmos dos da Figura 3-6. Temos agora quatro elementos, mas podemos considerar o subconjunto chamado 1 como sendo o "chão", deixando três elementos para aplicar as Equações 3.3. Observe que todas as forças e os momentos desconhecidos são inicialmente assumidos como positivos nas equações.

5 Há três forças agindo na barra 2: $\mathbf{F}_{42}$ é a força desconhecida no ponto de contato do dente de engrenagem com a barra 4; $\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{32}$ são as forças de reação desconhecidas das barras 1 e 3, respectivamente. A força $\mathbf{F}_{12}$ é exercida pela peça 1 sobre a peça 2 através do pino de articulação, e a força $\mathbf{F}_{32}$ é exercida pela peça 3 sobre a peça 2 sobre seu pino de articulação comum. As magnitudes e as direções dessas forças nos pinos e a magnitude de $\mathbf{F}_{42}$ são desconhecidas. A direção de $\mathbf{F}_{42}$ é ao longo da normal comum mostrada na Figura 3-8*b*. Escreva as Equações 3.3*b* para esse elemento para o somatório de forças nas direções *x* e *y* e o somatório dos momentos em relação ao CG (com os produtos cruzados expandidos):*

$$\sum F_x = F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} = 0 \qquad (a)$$
$$\sum M_z = R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x} + R_{42x}F_{42y} - R_{42y}F_{42x} = 0$$

6 Há três forças agindo na barra 3: a carga aplicada **P**, $\mathbf{F}_{23}$ e $\mathbf{F}_{43}$. Apenas **P** é conhecida. Escrevendo as Equações 3.3*b* para este elemento, temos

$$\sum F_x = F_{23x} + F_{43x} + P_x = 0$$
$$\sum F_y = F_{23y} + F_{43y} + P_y = 0 \qquad (b)$$
$$\sum M_z = R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x} + R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x} + R_{Px}P_y - R_{Py}P_x = 0$$

* Observe a similaridade com as Equações (*b*) no Estudo de Caso 2A. Apenas o índice para o momento de reação é diferente, pois uma barra diferente está exercendo-o. A notação consistente deste método de análise de força torna fácil escrever as equações para qualquer sistema.

(a) Diagramas de corpo livre

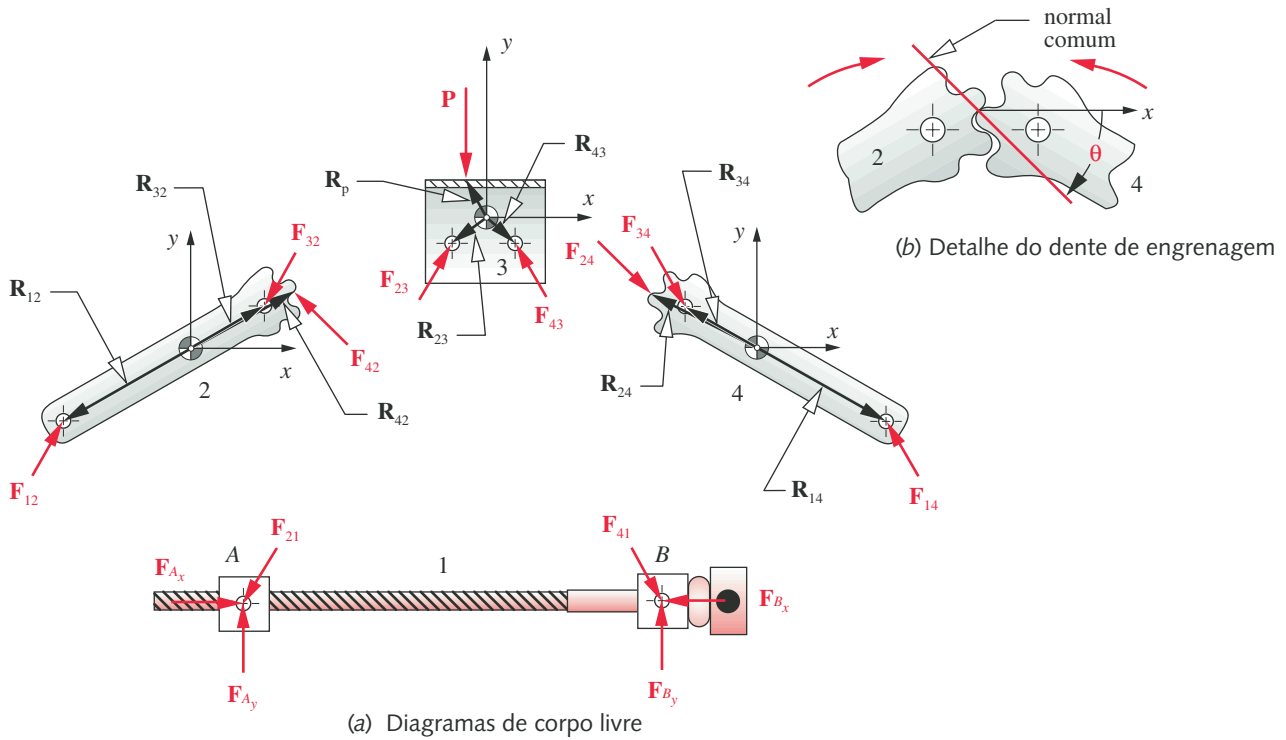



FIGURA 3-8

Diagramas de corpo livre dos elementos da metade do macaco tipo sanfona.

7 Há três forças agindo na barra 4: $\mathbf{F}_{24}$ é a força desconhecida da barra 2; $\mathbf{F}_{14}$ e $\mathbf{F}_{34}$ são as forças de reação das barras 1 e 3, respectivamente.

$$\sum F_x = F_{14x} + F_{24x} + F_{34x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{14y} + F_{24y} + F_{34y} = 0 \qquad (c)$$
$$\sum M_z = R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} + R_{24x}F_{24y} - R_{24y}F_{24x} + R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x} = 0$$

8 As nove equações em conjuntos de *a* até *c* tem 16 incógnitas: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, F_{34x}, F_{34y}, F_{24x}, F_{24y}, F_{42x} e F_{42y}. Podemos escrever as relações da terceira lei entre os pares ação-reação para cada uma das junções para obter seis das sete equações adicionais necessárias:

$$F_{32x} = -F_{23x} \qquad F_{32y} = -F_{23y}$$
$$F_{34x} = -F_{43x} \qquad F_{34y} = -F_{43y} \qquad (d)$$
$$F_{42x} = -F_{24x} \qquad F_{42y} = -F_{24y}$$

9 A última equação necessária vem da relação entre as componentes *x* e *y* da força F_{24} (ou F_{42}) no ponto de contato dos dentes. Tal junção de contato pode transmitir força (exceto as forças de atrito) somente ao longo da **normal comum**[4], que é perpendicular à tangente comum à junção, como mostrado na Figura 3-8*b*. A normal comum também é chamada de **eixo de transmissão**. A tangente do ângulo dessa normal comum relaciona as duas componentes da força na junção:

$$F_{24y} = F_{24x} \operatorname{tg} \theta \qquad (e)$$

10 As equações de *a* até *e* compõem um conjunto de 16 equações simultâneas que podem ser resolvidas tanto por redução de matriz quanto por métodos iterativos para encontrar as raízes. Colocando-as na forma padrão para uma solução matricial, temos:

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} &= 0 \\
R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x} + R_{42x}F_{42y} - R_{42y}F_{42x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= -P_x \\
F_{23y} + F_{43y} &= -P_y \\
R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x} + R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x} &= -R_{Px}P_y + R_{Py}P_x \\
F_{14x} + F_{24x} + F_{34x} &= 0 \\
F_{14y} + F_{24y} + F_{34y} &= 0 \\
R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} + R_{24x}F_{24y} - R_{24y}F_{24x} + R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x} &= 0 \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0 \\
F_{42x} + F_{24x} &= 0 \\
F_{42y} + F_{24y} &= 0 \\
F_{24y} - F_{24x}\ \mathrm{tg}\,\theta &= 0
\end{aligned} \qquad (f)
$$

Tabela 3-4 parte 2
Estudo de Caso 3A
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
F_{12x}	877,8	lb
F_{12y}	530,4	lb
F_{32x}	–587,7	lb
F_{32y}	–820,5	lb
F_{42x}	–290,1	lb
F_{42y}	290,1	lb
F_{23x}	587,7	lb
F_{23y}	820,5	lb
F_{43x}	–587,7	lb
F_{43y}	179,5	lb
F_{14x}	–877,8	lb
F_{14y}	469,6	lb
F_{24x}	290,1	lb
F_{24y}	–290,1	lb
F_{34x}	587,7	lb
F_{34y}	–179,5	lb

11 Substituindo os dados fornecidos na parte 1 da Tabela 3-4, temos:

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} &= 0 \\
-3{,}12F_{12y} + 1{,}80F_{12x} + 2{,}08F_{32y} - 1{,}20F_{32x} + 2{,}71F_{42y} - 0{,}99F_{42x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= 0{,}0 \\
F_{23y} + F_{43y} &= 1000 \\
-0{,}78F_{23y} + 0{,}78F_{23x} + 0{,}78F_{43y} + 0{,}78F_{43x} &= -500 \\
F_{14x} + F_{24x} + F_{34x} &= 0 \\
F_{14y} + F_{24y} + F_{34y} &= 0 \\
3{,}12F_{14y} + 1{,}80F_{14x} - 2{,}58F_{24y} - 1{,}04F_{24x} - 2{,}08F_{34y} - 1{,}20F_{34x} &= 0 \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0 \\
F_{42x} + F_{24x} &= 0 \\
F_{42y} + F_{24y} &= 0 \\
F_{24y} + 1{,}0F_{24x} &= 0
\end{aligned} \qquad (g)
$$

12 Coloquemos essas equações na forma matricial.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1{,}80 & -3{,}12 & -1{,}20 & 2{,}08 & -1{,}00 & 2{,}71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}78 & -0{,}78 & 0{,}78 & 0{,}78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}80 & 3{,}12 & -1{,}04 & -2{,}58 & -1{,}20 & -2{,}08 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{42x} \\ F_{42y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{24x} \\ F_{24y} \\ F_{34x} \\ F_{34y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\qquad (h)
$$

13 A parte 2 da Tabela 3-4 mostra a solução para este problema obtido por meio do programa MATRIX para os dados fornecidos na parte 1 da Tabela 3-4, que assume uma força vertical aplicada **P** de 1000 lb (4448 N).

14 As forças na barra 1 também podem ser determinadas pela terceira lei de Newton.

$$
\begin{aligned}
F_{Ax} &= -F_{21x} = F_{12x} \\
F_{Ay} &= -F_{21y} = F_{12y} \\
F_{Bx} &= -F_{41x} = F_{14x} \\
F_{By} &= -F_{41y} = F_{14y}
\end{aligned}
\qquad (i)
$$

3.5 ESTUDO DE CASO DE CARREGAMENTO ESTÁTICO TRIDIMENSIONAL

Esta seção apresenta um estudo de caso envolvendo carregamento estático tridimensional em um dispositivo de freio de bicicleta. As mesmas técnicas usadas para a análise de carregamento bidimensional também se aplicam para o caso tridimensional. A terceira dimensão requer mais equações, que estão disponíveis a partir do somatório de forças na direção de z e dos somatórios de momentos em relação aos eixos x e y como definidos nas Equações 3.1 e 3.3 para os casos dinâmico e estático, respectivamente. Como exemplo, iremos analisar agora o braço de freio de uma bicicleta que é acionado pela manopla de freio analisada no Estudo de Caso 1A.

ESTUDO DE CASO 4A

Análise das solicitações do braço do freio de uma bicicleta

Problema **Determine as forças atuando em três dimensões no braço do freio de uma bicicleta na sua posição acionada, como mostrado na Figura 3-9. Esse braço de freio tem falhado em serviço e precisa ser redimensionado.**

Dados **A geometria do braço do freio é conhecida e o braço é acionado por uma força aplicada no cabo de 1.046 N na posição mostrada (ver também o Estudo de Caso 1A).**

Hipóteses **As acelerações são desprezíveis. O modelo de carregamento de Classe 1 é apropriado e a análise estática é aceitável. O coeficiente de atrito entre a sapata do freio e o aro da roda foi medido e vale 0,45 à temperatura ambiente e 0,40 a 150°F.**

Solução **Ver as Figuras 3-9, 3-10 e a Tabela 3-5.**

1 A Figura 3-9 mostra um conjunto de acionamento central do braço do freio comumente usado em bicicletas. Ele consiste em seis elementos ou subconjuntos: a estrutura e os seus pinos de articulação (1), os dois braços do freio (2 e 4), o sistema de acionamento do cabo (3), as sapatas do freio (5) e o aro da roda (6). Este é obviamente um dispositivo tridimensional e deve ser analisado como tal.

2 O cabo é o mesmo que está ligado à alavanca do freio na Figura 3-1. A força do acionamento manual de 267 N (60 lb) é multiplicada pela vantagem mecânica da alavanca manual e transmitida pelo cabo até o par de braços do freio da maneira como foi calculada no Estudo de Caso 1A. Assumiremos que não há perda de

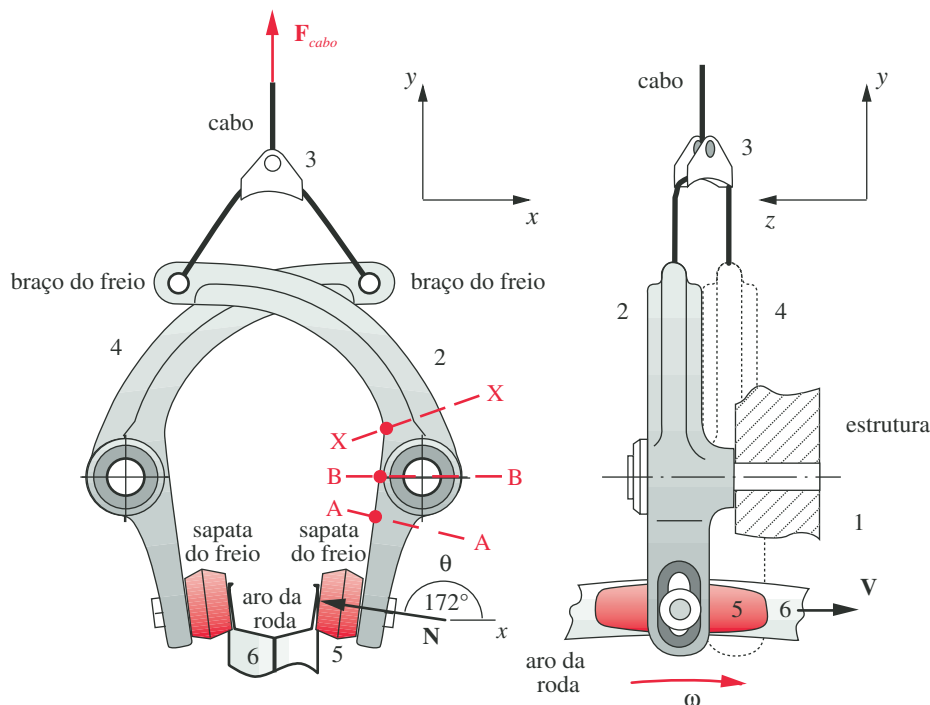



FIGURA 3-9

Conjunto de acionamento central do braço do freio de uma bicicleta.

força nas guias do cabo; logo, toda a força de 1046 N (235 lb) aplicada ao cabo está disponível em sua extremidade.

3 A direção da força normal entre a sapata do freio e o aro da roda é mostrada na Figura 3-9 e está a $\theta = 172°$ em relação ao sentido positivo do eixo x, e a força de atrito é orientada ao longo do eixo z. (Ver as Figuras 3-9 e 3-10 para a orientação dos eixos xyz.)

4 A Figura 3-10 mostra os digramas de corpo livre do braço, da estrutura e do conjunto de acionamento do cabo. Estamos interessados principalmente nas forças agindo no braço do freio. No entanto, precisamos primeiro analisar o efeito da geometria do acionador do cabo em relação à força aplicada no braço em A. Essa análise pode ser bidimensional se, por simplificação, desprezarmos o pequeno deslocamento entre os dois braços na direção z. Uma análise mais precisa irá exigir que as componentes na direção z das forças do acionador do cabo que atuam nos braços sejam incluídas. Observe que o subconjunto do cabo (3) é um sistema de forças concorrentes. Ao escrever as Equações 3.3b em duas dimensões para este subconjunto, percebendo a simetria em relação ao ponto A e a partir da análise do DCL, podemos escrever:

$$\sum F_x = F_{23x} + F_{43x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{23y} + F_{43y} + F_{cabo} = 0 \qquad (a)$$

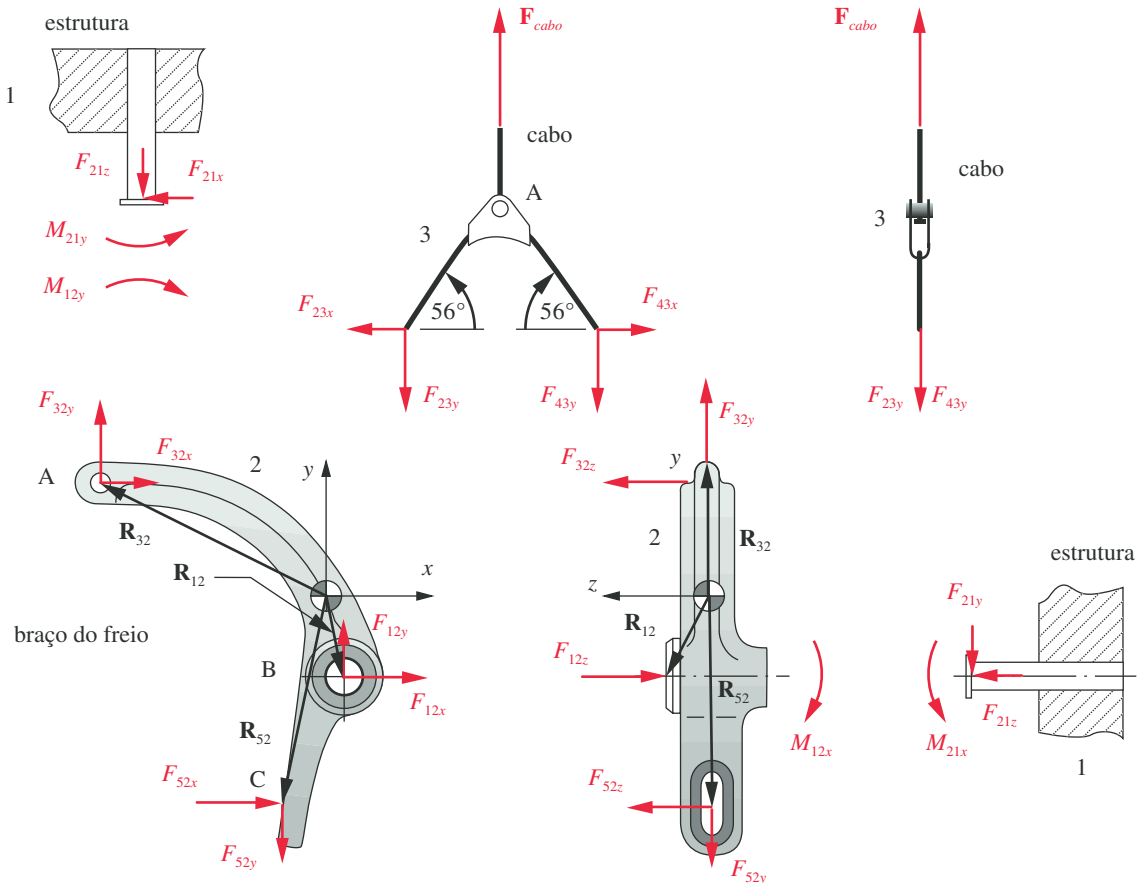



FIGURA 3-10

Diagramas de corpo livre do braço do freio.

Este conjunto de equações pode ser facilmente resolvido resultando em

$$
\begin{aligned}
F_{23y} &= F_{43y} = -\frac{F_{cabo}}{2} = -\frac{1046}{2} = -523 \text{ N} \\
F_{23x} &= \frac{F_{23y}}{\text{tg}(56°)} = \frac{-523}{1,483} = -353 \text{ N} \\
F_{43x} &= -F_{23x} = 353 \text{ N}
\end{aligned}
\tag{b}
$$

A terceira lei de Newton relaciona essas forças com suas reações no braço do freio no ponto A.

$$
\begin{aligned}
F_{32x} &= -F_{23x} = 353 \text{ N} \\
F_{32y} &= -F_{23y} = 523 \text{ N} \\
F_{32z} &= 0
\end{aligned}
\tag{c}
$$

5 Podemos agora escrever as Equações 3.3a para o braço (peça 2).

Para as forças:

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} + F_{52x} = 0; & F_{12x} + F_{52x} &= -353 \\
\sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} + F_{52y} = 0; & F_{12y} + F_{52y} &= -523 \\
\sum F_z &= F_{12z} + F_{32z} + F_{52z} = 0; & F_{12z} + F_{52z} &= 0
\end{aligned}
\tag{d}
$$

Para os momentos:

$$
\begin{aligned}
\sum M_x &= M_{12x} + \left(R_{12y}F_{12z} - R_{12z}F_{12y}\right) + \left(R_{32y}F_{32z} - R_{32z}F_{32y}\right) \\
&\quad + \left(R_{52y}F_{52z} - R_{52z}F_{52y}\right) = 0 \\
\sum M_y &= M_{12y} + \left(R_{12z}F_{12x} - R_{12x}F_{12z}\right) + \left(R_{32z}F_{32x} - R_{32x}F_{32z}\right) \\
&\quad + \left(R_{52z}F_{52x} - R_{52x}F_{52z}\right) = 0 \\
\sum M_z &= \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) \\
&\quad + \left(R_{52x}F_{52y} - R_{52y}F_{52x}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{e}
$$

Observe que todas as forças e momentos desconhecidos são inicialmente considerados positivos nas equações, sem levar em conta seus sentidos apresentados nos DCLs. Os momentos M_{12x} e M_{12y} são devidos ao fato de haver um momento de contato entre o braço (2) e o pino de articulação (1) em relação aos eixos x e y. Assumimos atrito desprezível em relação ao eixo z, fazendo com que M_{12z} seja zero.

6 O contato entre a sapata do freio (5) e o aro da roda (6) transmite uma força normal ao plano de contato. O módulo da força de atrito, F_f, no plano de contato é relacionado com a força normal pela equação do atrito de Coulomb,

$$F_f = \mu N \tag{f}$$

onde μ é o coeficiente de atrito e N é a força normal. A velocidade do ponto do aro sob o centro da sapata do freio está na direção z. Os componentes de força F_{52x} e F_{52y} são devidos inteiramente à transmissão da força normal ao braço através da sapata e são, portanto, relacionados pela terceira lei de Newton.

$$F_{52x} = -N_x = -N\cos\theta = -N\cos 172° = 0{,}990N$$
$$F_{52y} = -N_y = -N\,\text{sen}\theta = -N\,\text{sen}172° = -0{,}139N \quad (g)$$

A direção da força de atrito F_f deve sempre se opor ao movimento e, portanto, age no aro da roda na direção negativa do eixo z. Sua força reativa no braço tem o sentido oposto.

$$F_{52z} = -F_f \quad (h)$$

7 Temos agora 10 equações (nos conjuntos denominados *d, e, f, g* e *h*) contendo 10 incógnitas: F_{12x}, F_{12y}, F_{12z}, F_{52x}, F_{52y}, F_{52z}, M_{12x}, M_{12y}, N e F_f. As forças F_{32x}, F_{32y} e F_{32z} são conhecidas a partir das Equações *c*. Essas 10 equações podem ser resolvidas simultaneamente por inversão de matrizes ou por métodos iterativos de localização de raízes. Primeiro organize as equações com todas as incógnitas à esquerda e com todos os valores conhecidos e assumidos à direita.

$$\begin{aligned}
F_{12x} + F_{52x} &= -353\\
F_{12y} + F_{52y} &= -523\\
F_{12z} + F_{52z} &= 0\\
M_{12x} + R_{12y}F_{12z} - R_{12z}F_{12y} + R_{52y}F_{52z} - R_{52z}F_{52y} &= R_{32z}F_{32y} - R_{32y}F_{32z}\\
M_{12y} + R_{12z}F_{12x} - R_{12x}F_{12z} + R_{52z}F_{52x} - R_{52x}F_{52z} &= R_{32x}F_{32z} - R_{32z}F_{32x}\\
R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{52x}F_{52y} - R_{52y}F_{52x} &= R_{32y}F_{32x} - R_{32x}F_{32y}\\
F_f - \mu N &= 0\\
F_{52x} + N\cos\theta &= 0\\
F_{52y} + N\,\text{sen}\theta &= 0\\
F_{52z} + F_f &= 0
\end{aligned} \quad (i)$$

8 Substitua os valores conhecidos e assumidos mostrados da Tabela 3-5, parte 1:

$$\begin{aligned}
F_{12x} + F_{52x} &= -353\\
F_{12y} + F_{52y} &= -523\\
F_{12z} + F_{52z} &= 0\\
M_{12x} - 27{,}2F_{12z} - 23{,}1F_{12y} - 69{,}7F_{52z} - 0F_{52y} &= 0(523) - 38{,}7(0) = 0\\
M_{12y} + 23{,}1F_{12x} - 5{,}2F_{12z} + 0F_{52x} + 13F_{52z} &= -75{,}4(0) - 0(353) = 0\\
5{,}2F_{12y} + 27{,}2F_{12x} - 13F_{52y} + 69{,}7F_{52x} &= 38{,}7(353) + 75{,}4(523) = 53095\\
F_f - 0{,}4N &= 0\\
F_{52x} - 0{,}990N &= 0\\
F_{52y} + 0{,}139N &= 0\\
F_{52z} + F_f &= 0
\end{aligned} \quad (j)$$

9 Construa as matrizes para o equacionamento.

Tabela 3-5 parte 1
Estudo de Caso 4A
Dados fornecidos e pressupostos

Variável	Valor	Unidade
μ	0,4	nenhuma
θ	172,0	deg
R_{12x}	5,2	mm
R_{12y}	–27,2	mm
R_{12z}	23,1	mm
R_{32x}	–75,4	mm
R_{32y}	38,7	mm
R_{32z}	0,0	mm
R_{52x}	–13,0	mm
R_{52y}	–69,7	mm
R_{52z}	0,0	mm
F_{32x}	353,0	N
F_{32y}	523,0	N
F_{32z}	0,0	N
M_{12z}	0,0	N-m

Tabela 3-5 parte 2
Estudo de Caso 4A
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
F_{12x}	–1.805	N
F_{12y}	–319	N
F_{12z}	587	N
F_{52x}	1.452	N
F_{52y}	–204	N
F_{52z}	–587	N
M_{12x}	32.304	N–mm
M_{12y}	52.370	N–mm
N	1.467	N
F_f	587	N

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -23{,}1 & -27{,}2 & 0 & 0 & -69{,}7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 23{,}1 & 0 & -5{,}2 & 0 & 0 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 27{,}2 & 5{,}2 & 0 & 69{,}7 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}990 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}139 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{12z} \\ F_{52x} \\ F_{52y} \\ F_{52z} \\ M_{12x} \\ M_{12y} \\ F_f \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -353 \\ -523 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 53095 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k)$$

10 A Tabela 3-5 parte 2 mostra a solução desse problema utilizando o programa MATRIX com os dados apresentados na Tabela 3-5 parte 1. Esse problema pode ser resolvido usando programas comerciais para solução de equações, como *Mathcad*, *MATLAB*, *Maple*, *Mathematica* ou com o programa MATRIX, fornecido com o texto.

3.6 ESTUDO DE CASO DE SOLICITAÇÃO DINÂMICA

Esta seção apresenta um estudo de caso envolvendo solicitação dinâmica bidimensional de um mecanismo de quatro barras construído para demonstração de esforços dinâmicos. Uma fotografia desse mecanismo é mostrada na Figura 3-11. Este equipamento pode ser analisado em duas dimensões desde que todos os seus elementos possam se mover em planos paralelos. A presença de acelerações consideráveis nos elementos móveis de um sistema requer que seja feita uma análise dinâmica usando as Equações 3.1. O desenvolvimento é semelhante ao feito na análise anterior sobre carregamento estático, exceto pela necessidade de incluir os termos de $m\mathbf{A}$ e $I\alpha$ nas equações.

ESTUDO DE CASO 5A

Análise das solicitações em um mecanismo de quatro barras

Problema **Determine as forças teóricas de corpo rígido que atuam em duas dimensões no mecanismo de quatro barras mostrado na Figura 3-11.**

Dados **A geometria do mecanismo, as massas e os momentos de inércia de massa são conhecidos e o mecanismo é acionado a 120 rpm por um motor elétrico de velocidade controlada.**

Hipóteses **As acelerações são consideráveis. Um modelo de carregamento de Classe 4 é apropriado e é necessária uma análise dinâmica. Não há cargas externas ao sistema; todas as cargas se devem às acelerações das barras. As forças peso são insignificantes em comparação com as forças de inércia e serão desprezadas. Assume-se que as barras sejam corpos rígidos ideais. Também serão ignorados o atrito e os efeitos das folgas existentes nas uniões por pinos.**

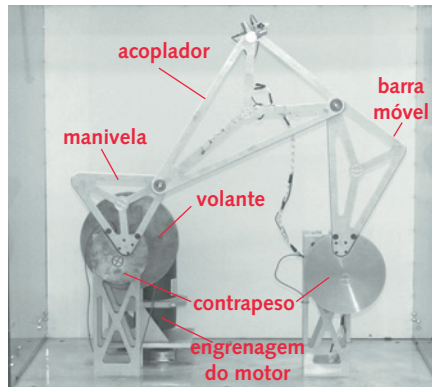



FIGURA 3-11

Modelo dinâmico do mecanismo de quatro barras.

Tabela 3-6 parte 1
Estudo de Caso 5A
Dados fornecidos e processados

Variável	Valor	Unidade
θ_2	30,00	deg
ω_2	120,00	rpm
$massa_2$	0,525	kg
$massa_3$	1,050	kg
$massa_4$	1,050	kg
I_{cg2}	0,057	kg-m^2
I_{cg3}	0,011	kg-m^2
I_{cg4}	0,455	kg-m^2
R_{12x}	–46,9	mm
R_{12y}	–71,3	mm
R_{32x}	85,1	mm
R_{32y}	4,9	mm
R_{23x}	–150,7	mm
R_{23y}	–177,6	mm
R_{43x}	185,5	mm
R_{43y}	50,8	mm
R_{14x}	–21,5	mm
R_{14y}	–100,6	mm
R_{34x}	–10,6	mm
R_{34y}	204,0	mm

Solução **Ver as Figuras 3-11 a 3-13 e a Tabela 3-6.**

1 As Figuras 3-11 e 3-12 mostram o modelo de demonstração do mecanismo de quatro barras. Ele é constituído por três partes móveis (barras 2, 3 e 4) mais a estrutura ou a barra fixa (1). O motor aciona a barra 2 através de uma caixa de redução. Os dois apoios fixos são instrumentados com transdutores de força piezoelétricos para medir as forças dinâmicas que agem nas direções x e y do plano da barra fixa. Um par de acelerômetros é montado em um ponto do acoplador (barra 3) para medir suas acelerações.

2 A Figura 3-12 mostra um esquema do mecanismo. As barras são feitas com furos de alívio para reduzir suas massas e momentos de inércia de massa. A entrada da barra 2 pode ser uma aceleração angular (ou uma velocidade angular constante) mais um torque. A barra 2 gira totalmente em torno do apoio fixo O_2. Mesmo que a barra 2 tenha uma aceleração angular α_2 nula, movendo-se com uma velocidade angular ω_2 constante, ainda haverá aceleração angular variável no tempo nas barras 3 e 4, desde que estas oscilem para frente e para trás. De qualquer forma, os CGs das barras estarão sujeitos a acelerações lineares variáveis no tempo quando o mecanismo se movimentar. Essas acelerações angulares e lineares

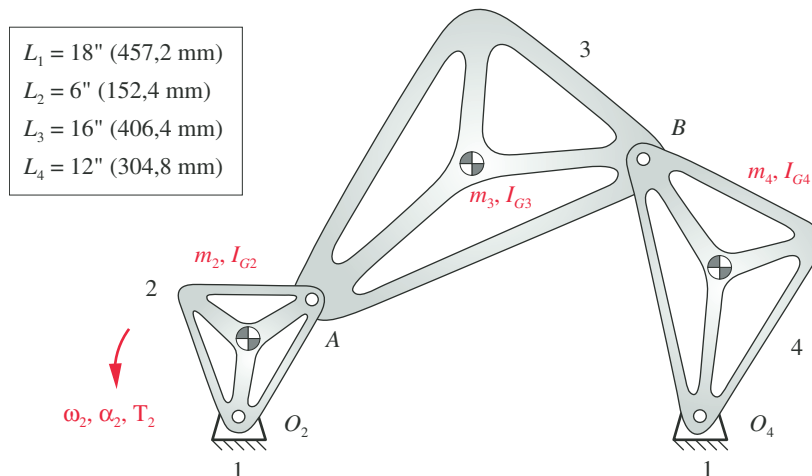



FIGURA 3-12

Esquema do mecanismo de quatro barras. (Veja a Tabela 3-6 para mais informações.)

FIGURA 3-13

Diagramas de corpo livre dos elementos de um mecanismo de quatro barras.

geram forças de inércia e torques, como definido pela segunda lei de Newton. Portanto, mesmo sem forças externas ou torques aplicados nas barras, as forças de inércia causam forças reativas nos pinos. São essas as forças que desejamos calcular.

3 A Figura 3-13 mostra os diagramas de corpo livre de cada barra. O sistema de coordenadas local e não rotativo de cada barra é posicionado em seu CG. As equações cinemáticas do movimento devem ser resolvidas para a determinação das acelerações lineares dos CGs de cada barra e das acelerações angulares das barras para cada posição de interesse durante o ciclo (ver a referência 1 para uma explicação deste procedimento). Essas acelerações, $\mathbf{A}_{Gn}$ e α_n, são mostradas atuando em cada uma das n barras. As forças em cada pino de conexão são mostradas como pares xy, numeradas como antes e inicialmente assumidas como positivas.

4 As Equações 3.1 podem ser escritas para cada uma das barras móveis do sistema. As massas e os momentos de inércia de massa em relação ao CG de cada barra precisam ser calculados para serem usados nas equações. Neste estudo de caso, foi usado um sistema CAD de modelagem sólida para considerar a geometria das barras e calcular suas propriedades de inércia.

5 Para a barra 2:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} = m_2 A_{G2_x}\\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} = m_2 A_{G2_y}\\ \sum M_z &= T_2 + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = I_{G2}\alpha_2\end{aligned} \tag{a}$$

6 Para a barra 3:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{23x} + F_{43x} = m_3 A_{G3_x}\\ \sum F_y &= F_{23y} + F_{43y} = m_3 A_{G3_y}\\ \sum M_z &= \left(R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x}\right) + \left(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}\right) = I_{G3}\alpha_3\end{aligned} \tag{b}$$

7 Para a barra 4:

$$\sum F_x = F_{14x} + F_{34x} = m_4 A_{G4_x}$$
$$\sum F_y = F_{14y} + F_{34y} = m_4 A_{G4_y} \qquad (c)$$
$$\sum M_z = \left(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}\right) + \left(R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x}\right) = I_{G4}\alpha_4$$

8 Há 13 incógnitas nessas nove equações: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, F_{34x}, F_{34y} e T_2. Quatro equações da terceira lei podem ser escritas para equacionar os pares de ação e reação nas articulações.

$$F_{32x} = -F_{23x}$$
$$F_{32y} = -F_{23y}$$
$$F_{34x} = -F_{43x} \qquad (d)$$
$$F_{34y} = -F_{43y}$$

9 O conjunto de 13 equações de *a* até *d* pode ser resolvido simultaneamente para determinar as forças e o torque-motor por métodos de redução de matrizes ou métodos iterativos para localização de raízes. Este estudo de caso foi resolvido com ambos os métodos, e seus arquivos encontram-se no CD. Observe que as massas e os momentos de inércia de massa das barras são constantes com o tempo e com a posição, mas as acelerações são variáveis no tempo. Logo, uma análise completa requer que as Equações *a-d* sejam resolvidas para todas as posições ou intervalos de tempo de interesse. Os modelos utilizam listas ou vetores para armazenar os valores calculados a partir das Equações *a-d* para 13 valores do ângulo de entrada θ_2 da barra motora (0 até 360°, com acréscimos de 30°). O modelo também calcula as acelerações das barras e dos seus CGs, pois são necessárias para os cálculos das forças. A maior e a menor força presente em cada barra durante o ciclo pode agora ser determinada para posterior uso em análises de tensão e deformação. Os valores fornecidos e os resultados desta análise de forças para uma posição da manivela (θ_2 = 30°) são mostrados na Tabela 3-6, partes 1 e 2. Gráficos das forças atuando nos apoios fixos para uma volta completa da manivela são mostrados na Figura 3-14.

Tabela 3-6 parte 2
Estudo de Caso 5A
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
F_{12x}	–255,8	N
F_{12y}	–178,1	N
F_{32x}	252,0	N
F_{32y}	172,2	N
F_{34x}	–215,6	N
F_{34y}	–163,9	N
F_{14x}	201,0	N
F_{14y}	167,0	N
F_{43x}	215,6	N
F_{43y}	163,9	N
F_{23x}	–252,0	N
F_{23y}	–172,2	N
T_{12}	–3,55	N-m
α_3	56,7	rad/s^2
α_4	138,0	rad/s^2
A_{cg2x}	–7,4	rad/s^2
A_{cg2y}	–11,3	rad/s^2
A_{cg3x}	–34,6	rad/s^2
A_{cg3y}	–7,9	rad/s^2
A_{cg4x}	–13,9	rad/s^2
A_{cg4y}	2,9	rad/s^2

3.7 SOLICITAÇÃO VIBRATÓRIA

Em sistemas solicitados dinamicamente, com frequência haverá esforços vibratórios sobrepostos aos esforços teóricos previstos pelas equações da dinâmica. Esses esforços vibratórios podem ser decorrentes de várias causas. Se os elementos do sistema fossem infinitamente rígidos, as vibrações poderiam ser eliminadas. Mas todos os elementos reais, de qualquer material, possuem elasticidade e, portanto, comportam-se como molas quando sujeitos a forças. As deformações resultantes podem gerar forças adicionais, originadas a partir de forças inerciais associadas aos movimentos vibratórios dos elementos ou, se existirem folgas na junção entre partes articuladas, solicitações de impacto (choque) durante as vibrações.

Uma discussão detalhada sobre o fenômeno vibratório está fora do objetivo deste texto e não será empreendida. Para estudos mais aprofundados, ver as referências no final deste capítulo. O tópico é introduzido aqui principalmente para alertar o projetista de máquinas sobre a necessidade de se considerar a vibração como uma fonte de esforços. Com frequência, o único modo de se obter uma medição precisa dos efeitos da vibração em um sistema é realizar testes em

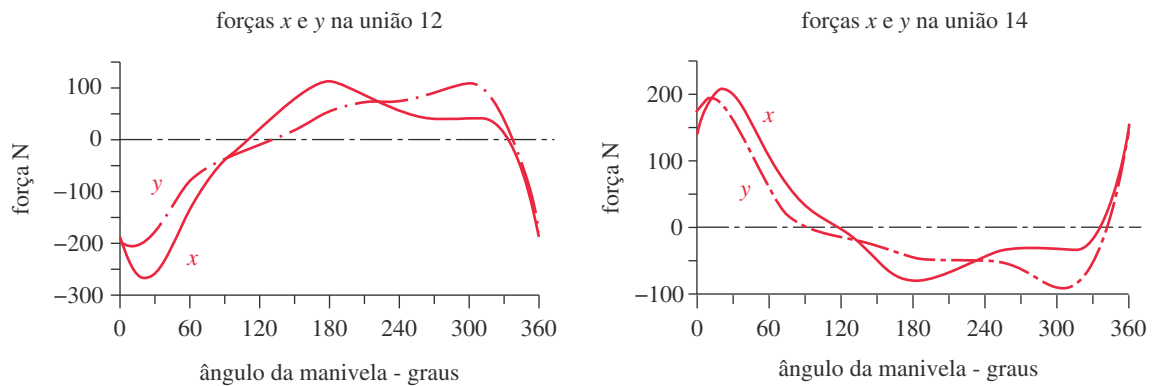



FIGURA 3-14

Forças dinâmicas de corpo rígido calculadas para o mecanismo de quatro barras do Estudo de Caso 5A.

protótipos ou construir sistemas sujeitos às condições de serviço. A discussão sobre coeficientes de segurança na Seção 1.7 mencionou que muitas indústrias (automotivas, aeronáuticas, etc.) realizam extensos programas de testes para desenvolver modelos realistas das solicitações em seus equipamentos. Esse tópico será discutido em mais detalhes na Seção 6.4, onde é introduzida a solicitação em fadiga. Técnicas modernas de análise com elementos finitos (FEA) e com elementos de contorno (BEA) também permitem que sejam modelados e calculados os efeitos vibratórios de um sistema ou estrutura. Ainda é difícil obter um modelo computacional de um sistema complexo que seja tão preciso quanto um protótipo real ligado a sensores. Isso é evidenciado quando folgas (lacunas) entre partes móveis permitem a ocorrência de impactos nas articulações quando o esforço é revertido. Impactos ocasionam não linearidades que apresentam um modelamento matemático muito difícil.

Frequência natural

Quando se projeta uma máquina, é desejável determinar as frequências naturais do conjunto e de seus subconjuntos, para prever e evitar problemas de ressonância durante a operação. Qualquer sistema real pode ter um número infinito de frequências naturais com as quais irá vibrar prontamente. O número de frequências naturais que são necessárias ou desejáveis de se calcular irá variar de acordo com a situação. A abordagem mais completa da tarefa é feita por meio de uma análise com elementos finitos (FEA) para dividir o conjunto em um grande número de elementos discretos. Veja o Capítulo 8 para mais informações sobre FEA. As tensões, as deflexões e o número de frequências naturais que podem ser calculadas com essa técnica são limitadas principalmente pelo tempo e pelos recursos computacionais disponíveis.

Se não utilizarmos FEA, gostaríamos de determinar, pelo menos, a frequência natural do sistema menor ou fundamental, pois essa frequência geralmente ocasiona as maiores amplitudes de vibrações. A frequência natural sem amortecimento ω_n, com unidades de rad/s, ou f_n, com unidades de Hz, pode ser obtida por intermédio das expressões

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n \tag{3.4}$$

onde ω_n é a frequência natural fundamental, m é a massa móvel do sistema em unidades adequadas de massa (por exemplo, kg, g, *blob*, ou *slug*, e não lb_m) e k é a constante efetiva de mola do sistema. (O período da frequência natural é o seu inverso em segundos, $T_n = 1/f_n$.)

A Equação 3.4 baseia-se em um modelo de sistema discreto com um grau de liberdade. A Figura 3.15 mostra um modelo de um sistema simples de camo e seguidor que consiste em um camo, um seguidor deslizante e uma mola de retorno. O modelo discreto mais simples consiste em uma massa conectada à base por uma mola e um amortecedor. Todas as massas móveis do sistema (seguidor, mola) estão contidas em m, e a constante de mola k representa a rigidez equivalente da mola física e a rigidez de todas as outras partes.

Constante de mola Uma constante de mola k é uma relação, presumidamente linear, entre a força F aplicada ao elemento e a deformação resultante δ (ver Figura 3-17):

$$k = \frac{F}{\delta} \tag{3.5a}$$

Se uma expressão para a deformação de um elemento puder ser encontrada ou deduzida, ela irá fornecer essa relação de constante de mola. Este tópico será revisitado no próximo capítulo. No exemplo da Figura 3-15, a deformação da mola δ é igual ao deslocamento y da massa.

$$k = \frac{F}{y} \tag{3.5b}$$

Amortecimento Todas as perdas, por amortecimento viscoso ou por atrito, são incluídas no coeficiente de amortecimento d. Neste exemplo simples, o amortecimento é assumido como sendo inversamente proporcional à velocidade y da massa.

$$d = \frac{F}{\dot{y}} \tag{3.6}$$

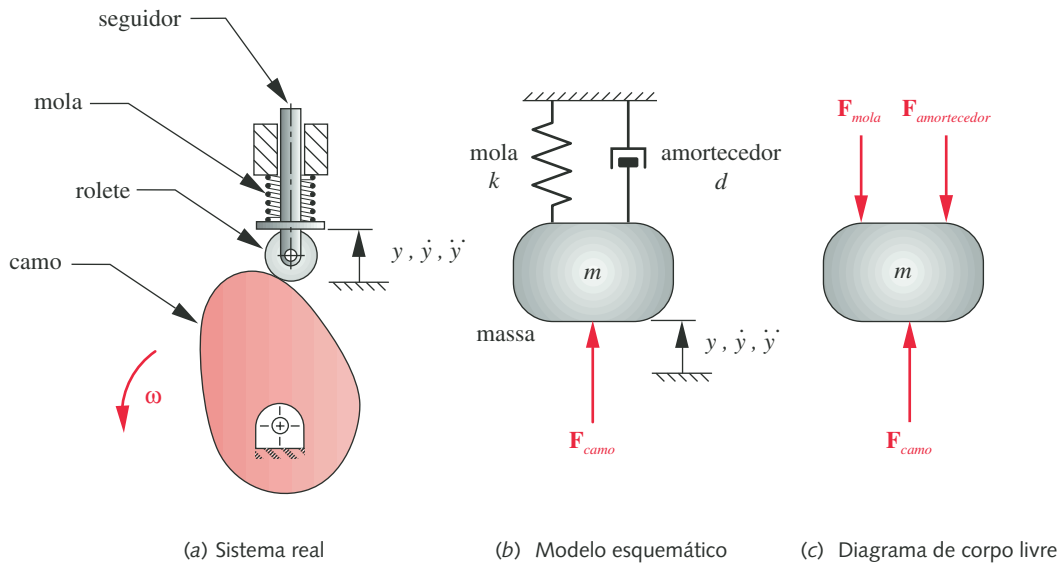



FIGURA 3-15

Modelo esquemático de um sistema dinâmico de camo-seguidor.

A Equação 3.4 simplifica ainda mais este modelo assumindo que o amortecimento d é zero. Caso o amortecimento seja incluído, a expressão para a frequência natural com amortecimento ω_d, em radianos/segundo, ou f_d, em Hz, é dada a seguir:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} \qquad f_d = \frac{1}{2\pi}\omega_d \tag{3.7}$$

Essa frequência com amortecimento ω_d será ligeiramente menor do que a frequência sem amortecimento ω_n.

Valores efetivos A determinação da massa efetiva para um modelo esquemático é simples e requer somente a soma de todos os valores de massa em movimento e conectadas em unidades apropriadas. Determinar os valores da constante efetiva de mola e do coeficiente efetivo de amortecimento é mais complicado e não será abordado aqui. Ver referência 2 para explicações.

Ressonância A condição denominada ressonância pode ocorrer se a frequência forçada ou de operação aplicada ao sistema for a mesma que qualquer uma das suas frequências naturais, isto é, se a velocidade angular de entrada aplicada a um sistema rotativo é a mesma ou está próxima de ω_n, a amplitude da vibração será muito grande. Isso pode criar forças muito grandes e causar falhas. Então, é necessário evitar a operação em frequências próximas ou iguais à frequência natural do sistema, quando possível.

Forças dinâmicas

Se escrevermos a Equação 3.1 para o modelo simples e com um grau de liberdade do sistema dinâmico, apresentado na Figura 3-15, e substituirmos as Equações 3.5 e 3.6, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma = m\ddot{y} \\ F_{camo} - F_{mola} - F_{amortecedor} &= m\ddot{y} \\ F_{camo} &= m\ddot{y} + d\dot{y} + ky \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se os parâmetros cinemáticos de deslocamento, velocidade e aceleração são conhecidos para o sistema, essa equação pode ser solucionada diretamente para a força no camo como função do tempo. Caso a força no camo seja conhecida e os parâmetros cinemáticos forem desejados, então a solução para uma equação diferencial de coeficientes constantes, que é muito bem conhecida, pode ser aplicada. Ver referência 3 para uma dedução detalhada da solução. Ainda que o sistema de coordenadas utilizado em uma análise dinâmica possa ser arbitrariamente escolhido, é importante notar que tanto os parâmetros cinemáticos (deslocamento, velocidade e aceleração) como as forças na Equação 3.8 devem ser definidas no **mesmo** sistema de coordenadas.

Como um exemplo do efeito da vibração nas forças dinâmicas de um sistema, retornaremos ao mecanismo de quatro barras do Estudo de Caso 5A e examinaremos os resultados da medição real das forças dinâmicas sob condições de operação.

ESTUDO DE CASO 5B

Medição do carregamento dinâmico em um mecanismo de quatro barras

Problema **Determine as forças que realmente atuam nos apoios fixos do mecanismo de quatro barras da Figura 3-11 durante um ciclo da manivela de entrada.**

Dados **A manivela gira a 60 rpm e é acionada por um motor elétrico de velocidade controlada, e transdutores de força são colocados entre o apoio fixo do mancal e o solo.**

Hipóteses **Não existe carregamento externo ao sistema; todo o carregamento é devido à aceleração das peças. As forças peso são insignificantes se comparadas às forças de inércia e serão desconsideradas. Os transdutores de força medem apenas forças dinâmicas.**

Solução **Ver Figuras 3-12 e 3-16.**

1 A Figura 3-11 mostra o mecanismo de quatro barras. Ele é composto de três elementos móveis (barras 2, 3 e 4) e uma barra fixa (1). O motor elétrico montado movimenta a barra 2 através de uma caixa de engrenagem e um acoplamento de eixo. Os dois apoios fixos estão instrumentados com transdutores piezoelétricos de força para a medição das forças dinâmicas atuantes nas direções x e y no apoio fixo.

2 A Figura 3-16 mostra as medidas das forças atuais e torques enquanto o mecanismo funciona a 60 rpm e os compara com as forças e torques teóricos, obtidos a partir das Equações *a-d* do Estudo de Caso 5A.[5] Somente a componente x da força na articulação entre a barra 2 e a base, e o torque na barra 2 são mostrados como exemplo. As outras forças nos pinos e suas componentes mostram desvios similares dos valores teóricos. Alguns desses desvios são resultantes das variações instantâneas da velocidade angular do motor de acionamento. A análise teórica assume uma velocidade constante de entrada no eixo. Vibrações e impactos são a causa dos outros desvios.

Este exemplo de desvios das forças teóricas em um modelo dinâmico muito simples é apresentado para salientar que o nosso melhor cálculo de forças (e as tensões resultantes) em um sistema pode estar errado devido a fatores não considerados em uma análise simplificada de forças. É comum que o cálculo teórico das forças em um sistema dinâmico subestime o que ocorre na realidade, o que é, obviamente, um resultado não conservativo. Sempre que possível, os testes em protótipos físicos fornecerão os resultados mais precisos e reais.

Os efeitos da vibração em um sistema podem causar carregamentos significativos e difíceis de prever sem dados de testes do tipo dos mostrados na Figura 3-16, na qual os carregamentos reais são o dobro do valor previsto; isso irá, obviamente, dobrar as tensões. Uma aproximação tradicional e um tanto grosseira utilizada no projeto de máquinas é a utilização de fatores de sobrecarga às cargas teóricas, baseando-se na experiência com a própria máquina ou semelhantes. Como exemplo, ver a Tabela 12-17 no capítulo sobre projeto de engrenagens cilíndricas. Esta tabela lista os fatores de sobrecarga recomendados pela indústria para engrenagens submetidas a vários tipos de carregamento de impacto. Esse tipo de fator só deve ser usado quando não se podem desenvolver testes como os mostrados na Figura 3-16.

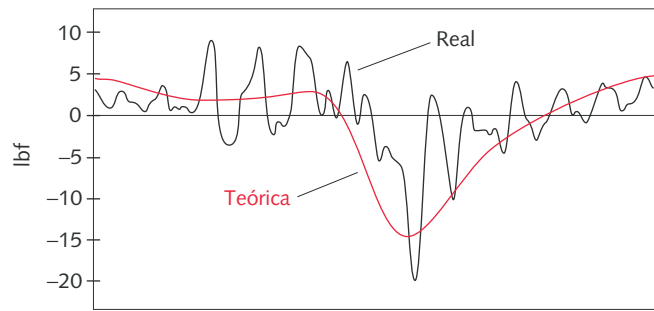
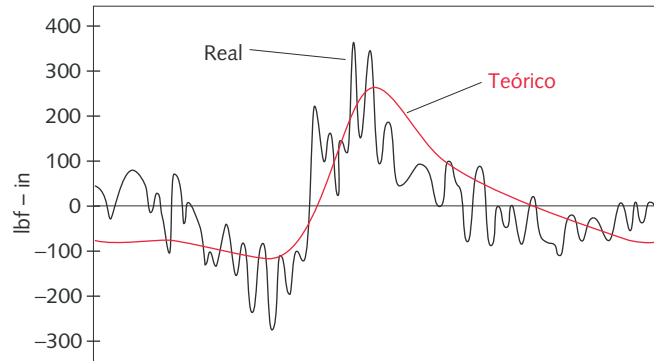



FIGURA 3-16

Forças e torques dinâmicos teóricos e experimentais.

3.8 CARREGAMENTO DE IMPACTO

O carregamento considerado até agora tem sido estático ou, quando ocorre variação no tempo, aplicado gradual e suavemente, com todas as partes envolvidas continuamente em contato. Muitas máquinas têm elementos que estão sujeitos a um carregamento súbito ou a impacto. Um exemplo é o mecanismo da biela-manivela, que forma o coração do motor automobilístico. A cabeça do pistão é submetida a uma elevação explosiva da pressão a cada duas revoluções da manivela quando o cilindro explode, e a folga entre a circunferência do pistão e a parede do cilindro pode permitir um impacto entre essas duas superfícies quando o carregamento é revertido a cada ciclo. Um exemplo mais extremo é a britadeira, cuja proposta é impactar o pavimento e despedaçá-lo. As solicitações resultantes de impacto podem ser muito maiores que aquelas resultantes do contato gradual dos mesmos elementos. Imagine tentar fixar um prego gentilmente, colocando a cabeça do martelo no prego em vez de impactá-lo.

O que distingue um carregamento de impacto de um estático é o tempo de aplicação do carregamento. Se o carregamento é aplicado vagarosamente, é considerado estático; se é aplicado rapidamente, então é impacto. Um critério utilizado para distinguir os dois é comparar o tempo de carregamento t_l (definido como o tempo necessário para o carregamento subir de zero ao seu valor máximo) com o período da frequência natural T_n do sistema. Se t_l é menor que a metade de T_n, então é considerado impacto. Se t_l é maior que três vezes T_n, então o carregamento é estático. A região entre essas duas situações é uma região incerta onde qualquer das duas condições pode ocorrer.

Considera-se que existem dois casos gerais de carregamento por impacto, embora perceberemos que um é um caso especial do outro. Burr[6] chama esses dois casos de *impacto de batida* e *impacto de força*. O **impacto de batida** refere-se a uma colisão real de dois corpos, como em um martelo ou na eliminação da

folga entre partes em contato. O **impacto de força** refere-se a carregamentos aplicados repentinamente, sem velocidade de colisão, como em um peso subitamente aplicado a um suporte. Essa condição é bem comum em embreagem e freios de atrito (ver Capítulo 17). Esses casos podem ocorrer separadamente ou em combinação.

Colisões severas entre objetos em movimento podem resultar em deformações permanentes nos corpos colididos, como em um acidente de automóvel. Nesses casos, essa deformação é desejável a fim de se absorver grande quantidade de energia da colisão e, assim, proteger os ocupantes de escoriações mais graves. Estamos preocupados somente com os casos nos quais o impacto não causa deformação permanente; ou seja, a tensão vai permanecer na região elástica. Isso é necessário para permitir o uso contínuo do componente após o impacto.

Se a massa do objeto impactante m é grande comparada à massa do objeto impactado m_b e se o objeto impactante pode ser considerado rígido, então a energia cinética contida pelo objeto impactante pode ser igualada à energia elástica armazenada pelo objeto impactado na sua deflexão máxima. Essa aproximação energética fornece um **valor aproximado** para o carregamento de impacto. Não é exata porque se pressupõe que a tensão nos corpos envolvidos atinja o valor máximo no mesmo instante. No entanto, ondas de tensão são absorvidas pelo corpo impactado, viajam através dele com a velocidade do som e refletem nas bordas. O cálculo dos efeitos dessas ondas longitudinais de tensão no meio elástico fornece resultados exatos e é necessário quando a razão entre a massa do objeto impactante e a do objeto impactado é pequena. O método de ondas não será discutido aqui. Ao leitor é recomendada a referência 6 para informações complementares.

Método da energia

A energia cinética do corpo impactante será convertida em energia potencial no corpo impactado, assumindo que não ocorra perda por dissipação de calor. Se admitirmos que todas as partículas dos corpos combinados vêm ao repouso no mesmo instante, então, no instante anterior ao retorno, a força, a tensão e a deformação do corpo impactado serão máximas. A energia elástica armazenada no corpo impactado será igual à área sob o diagrama força-deformação definida pela constante de mola particular. Uma curva generalizada força-deformação para um elemento de mola linear é mostrada na Figura 3-17. A energia elástica armazenada é a área sob a curva entre zero e qualquer combinação de força e deformação. Por causa da relação linear, esta é a área de um triângulo, $A = 1/2bh$. Então, a energia armazenada no ponto de deformação máxima por impacto, δ_i, é

$$E = \frac{1}{2} F_i \delta_i \tag{3.9a}$$

Substituindo a Equação 3.5, tem-se

$$E = \frac{F_i^2}{2k} \tag{3.9b}$$

FIGURA 3-17

Energia armazenada em uma mola.

IMPACTO HORIZONTAL A Figura 3-18*a* mostra uma massa a ponto de impactar o final de um tirante horizontal. Esse aparelho é algumas vezes chamado de *martelo deslizante* e é usado para remover entalhos em chapas de metal, entre outros usos. No ponto de impacto, uma porção da energia cinética da massa em movimento que é cedida à massa impactada é

$$E = \eta\left(\frac{1}{2} m v_i^2\right) \tag{3.10}$$

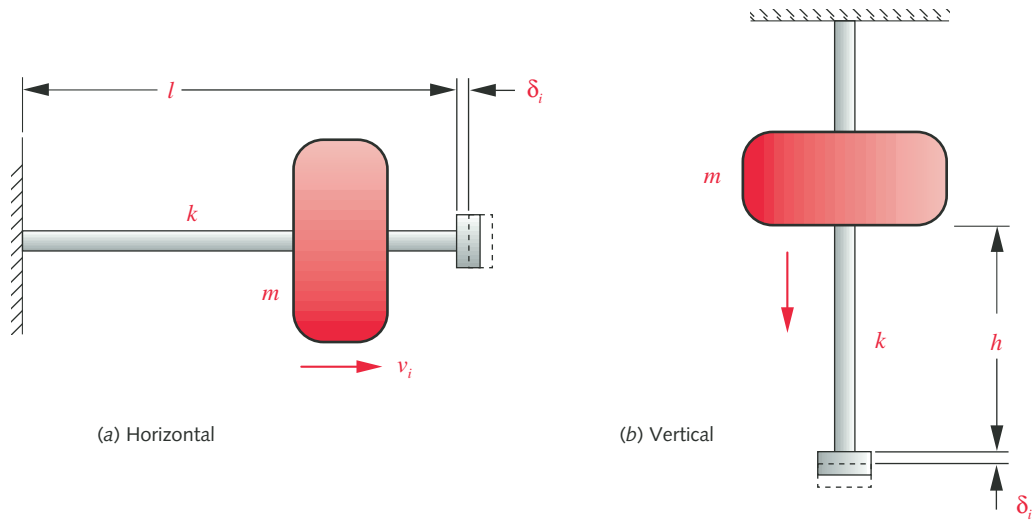



FIGURA 3-18

Impacto axial em uma barra delgada.

onde m é a massa e v_i é a velocidade no impacto. Precisamos modificar o termo da energia cinética por um fator de correção η para levar em consideração a dissipação de energia associada com o tipo particular de membro elástico que está sendo impactado. Caso a dissipação de energia seja desprezível, η assumirá o valor 1.

Assumindo que toda a energia cinética transferida pela massa em movimento seja convertida em energia potencial e armazenada pelo membro impactado, podemos escrever a seguinte equação

$$\frac{F_i^2}{2k} = \eta \frac{m v_i^2}{2}$$
$$F_i = v_i \sqrt{\eta m k} \tag{3.11}$$

Se a massa pudesse carregar estaticamente o membro impactado, a deformação estática resultante seria $\delta_{st} = W/k$, na qual $w = mg$. Substituindo isso na Equação 3.11, obtém-se a razão entre a força dinâmica e a estática ou a razão entre a deformação dinâmica e estática:

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = v_i \sqrt{\frac{\eta}{g \delta_{st}}} \tag{3.12}$$

O termo no lado direito da equação é chamado de fator de impacto, que fornece a razão de impacto entre a força e a deformação estáticas. Então, se a deformação estática pode ser calculada a partir da aplicação de uma força igual ao peso da massa, pode-se conseguir uma estimativa da força e da deformação dinâmicas. Observe que as Equações 3.11 e 3.12 são válidas para todos os casos de impacto horizontal, não importando se o objeto é carregado axialmente, como mostrado aqui, em momentos fletor ou torçor. Métodos para o cálculo da deformação de vários casos estão no próximo capítulo. O coeficiente de mola k de qualquer objeto é encontrado pelo rearranjo da sua equação de deformação de acordo com a Equação 3.5.

Impacto vertical Para o caso de uma massa caindo de uma distância h em uma barra, como mostrado na Figura 3-18b, a Equação 3.11 também se aplica à velocidade de impacto $v_i^2 = 2gh$. A energia potencial de uma queda na distância h é:

$$E = \eta \frac{mv_i^2}{2} = \eta mgh = W\eta h \tag{3.13a}$$

Se a deformação do impacto é pequena em relação à distância da queda h, a equação é suficiente. Mas, se a deformação é significativa em relação a h, então a energia do impacto deve incluir a deformação que leva o peso além de h. A energia potencial total da massa no impacto é de

$$E = mg\left(\eta h + \delta_i\right) = W\left(\eta h + \delta_i\right) \tag{3.13b}$$

Igualando essa energia potencial com a energia elástica armazenada no membro impactado e substituindo a Equação 3-9b e a expressão $W = k\delta_{st}$

$$\frac{F_i^2}{2k} = W\left(\eta h + \delta_i\right)$$

$$F_i^2 = 2kW\left(\eta h + \delta_i\right) = 2\frac{W}{\delta_{st}}W\left(\eta h + \delta_i\right)$$

$$\left(\frac{F_i}{W}\right)^2 = \frac{2\eta h}{\delta_{st}} + \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = \frac{2\eta h}{\delta_{st}} + 2\left(\frac{F_i}{W}\right)$$

$$\left(\frac{F_i}{W}\right)^2 - 2\left(\frac{F_i}{W}\right) - \frac{2\eta h}{\delta_{st}} = 0 \tag{3.14a}$$

Levando à equação quadrática em F_i/W, cuja solução é:

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta h}{\delta_{st}}} \tag{3.14b}$$

O lado direito da equação é a razão do impacto do peso em queda. A Equação 3-14b pode ser usada em casos que envolvam pesos em queda. Por exemplo, se o peso é jogado em uma viga, a deformação estática da viga no ponto de impacto é usada.

Caso a distância h, que é a elevação da massa, seja assumida nula, a Equação 3.14b se iguala a 2. Isso quer dizer que se a massa é mantida **em contato** com o corpo "impactado" (com o peso da massa suportado separadamente) e, de repente, é permitido que a massa passe esse peso para o corpo, a força dinâmica será duas vezes o valor do peso. Esse é o caso do "impacto de força" descrito anteriormente, no qual não há colisão real entre os objetos. Uma análise mais precisa, usando o método das ondas, prevê que a força dinâmica será maior que o dobro mesmo neste caso de não colisão no qual a força é aplicada repentinamente.[6] Muitos projetistas usam o valor 3 ou 4 como uma estimativa mais conservadora para o fator dinâmico para os casos de aplicação repentina de carregamento. No entanto, esta é somente uma estimativa grosseira, e se possível, devem-se fazer medições experimentais ou a análise pelo método das ondas para determinar um fator dinâmico mais razoável para cada projeto em particular.

Burr deduziu o fator de correção η para diversos casos de impacto na referência 6. Roark e Young fornecem fatores para casos adicionais na referência 7. Para o caso da massa impactando uma barra axialmente, como mostra a Figura 3-18, o fator de correção é[6]

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_b}{3m}} \tag{3.15}$$

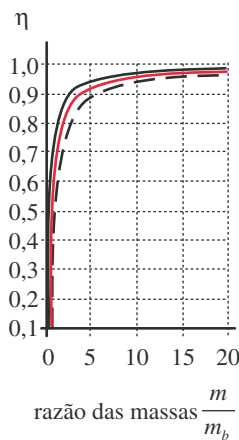



FIGURA 3-19

Fator de correção η como função da razão das massas.

onde m é a massa do objeto impactante e m_b é a massa do objeto impactado. Enquanto a razão entre a massa impactante e a massa impactada aumenta, o fator de correção η assume assintoticamente o valor 1. A Figura 3-19 mostra η em função da razão das massas em três casos diferentes: uma barra axial (Equação 3.15) plotada colorida, uma viga biapoiada golpeada no ponto médio (linha contínua preta) e uma viga engastada impactada na extremidade livre (linha tracejada preta).[6] O fator de correção η é sempre menor que um (e $\eta > 0{,}9$ para razões de massa > 5), então, quando se assume o valor um, estamos sendo conservadores. No entanto, tenha em mente que esse método de energia fornece resultados aproximados e não conservativos em geral, e faz-se necessário utilizar coeficientes de segurança maiores que o usual.

EXEMPLO 3-1

Carregamento de impacto em uma barra axial

Problema **A barra axial mostrada na Figura 3-18*a* é atingida por uma massa em movimento com uma velocidade de 1 m/s.**

a. Determine a sensibilidade da força de impacto à razão comprimento/diâmetro da barra para uma massa em movimento de 1 kg.

b. Determine a sensibilidade da força de impacto à razão da massa em movimento e a massa da barra para uma razão comprimento/diâmetro de valor 10, constante.

Dados **A barra circular tem comprimento de 100 mm. A barra e a massa que se move são de aço com *E* = 207 GPa e densidade de massa de 7,86 g/cm^3.**

Hipóteses **Um método aproximado de energia será aceito. O fator de correção para a dissipação de energia será utilizado.**

Solução **Ver Figuras 3-18a, 3-20 e 3-21.**

1 A Figura 3-18 mostra o sistema. A massa que se move atinge a flange no final da barra com a velocidade preestabelecida de 1 m/s.

2 Para a parte (*a*), iremos manter o corpo em movimento com massa de 1 kg e o comprimento do tirante constante em 100 mm, e iremos variar o diâmetro para obter uma razão l/d entre 1 e 20. No desenvolvimento seguinte, mostraremos somente um cálculo feito para a razão *l / d de 10.* Também podemos calcular todos os resultados para uma lista de valores de razão l/d. A deformação estática que resultaria da aplicação da força peso da massa é calculada a partir da expressão para uma deformação de uma barra tracionada. (Ver Equação 4.8 no próximo capítulo para a dedução.)

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE} = \frac{9{,}81\ \text{N}\left(100\ \text{mm}\right)}{78{,}54\ \text{mm}^2\left(2{,}07E5\ \text{N}/\text{mm}^2\right)} = 0{,}06\ \mu\text{m} \qquad (a)$$

O fator de correção η é calculado aqui para uma razão de massas assumida de 16,2,

$$\eta = \frac{1}{1+\dfrac{m_b}{3m}} = \frac{1}{1+\dfrac{0{,}0617}{3(1)}} = 0{,}98 \qquad (b)$$

Esses valores (calculados para cada diâmetro da barra d) são então substituídos na Equação 3.12 para se determinar a razão das forças F_i/W e a força dinâmica F_i. Para $d = 10$ mm, tem-se

$$\frac{F_i}{W} = v_i\sqrt{\frac{\eta}{g\delta_{st}}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{0{,}98}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(0{,}00006\,\text{m})}} = 1285{,}9$$

$$F_i = 1285{,}9(9{,}81\,\text{N}) = 12612\ \text{N} \tag{c}$$

A variação da razão das forças em função da razão l/d, mantendo-se constantes a massa em movimento e a velocidade de impacto (isto é, a energia de entrada), é mostrada na Figura 3-20. Com a diminuição da razão l/d, a barra torna-se mais rígida e gera forças dinâmicas muito maiores com a mesma energia de impacto. Esse fato mostra claramente que as forças de impacto podem ser reduzidas aumentando a flexibilidade do sistema impactado.

3 Para a parte (*b*), iremos manter a razão l/d constante em 10 e variar a razão das massas (massa em movimento em relação à massa da barra) entre 1 e 20. Os arquivos EX03-01B no CD-ROM calculam todos os valores para uma lista de razões de massa. Os resultados para uma razão de massas de 16,2 são os mesmos que os obtidos na parte (*a*) acima. A Figura 3-21*a* mostra que a razão da força dinâmica varia inversamente com a razão das massas. No entanto, o valor da força dinâmica aumenta com a razão de massa, como mostrado na Figura 3-21*b*, porque a força estática W também aumenta com a razão de massa.

FIGURA 3-20

Força dinâmica e razão das forças em função da razão l/d para o sistema do Exemplo 3-1.

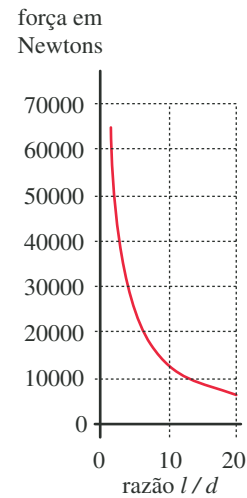
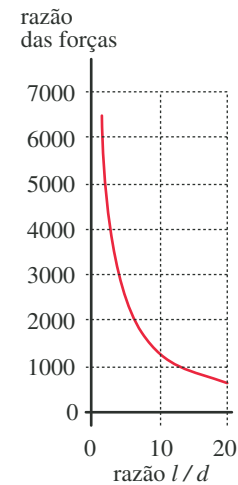
3.9 CARREGAMENTOS EM VIGAS

Uma viga é qualquer elemento que suporte um carregamento transversal ao longo de seu eixo e que também possa suportar carregamentos na direção axial. Uma viga apoiada em pinos ou apoios estreitos em cada extremidade é dita **biapoiada**, como mostra a Figura 3-22*a*. Uma viga fixa em uma extremidade e livre na outra é uma **viga engastada** (Figura 3-22*b*). Uma viga biapoiada que se projeta além de seu apoio é uma **viga biapoiada com extremidade em balanço** (Figura 3-22*c*). Se uma viga tem mais apoios do que o necessário para o equilíbrio estático (isto é, para fazer o grau de liberdade ser nulo), então a viga é dita hiperestática ou indeterminada, como mostra a Figura 3-22*d*. As reações de apoio de uma **viga indeterminada** não podem ser calculadas usando apenas as Equações 3.3; assim, outras técnicas são necessárias. Este problema é tratado no próximo capítulo.

Vigas são tipicamente analisadas como mecanismos estáticos, embora vibrações e acelerações possam causar carregamento dinâmico. Uma viga pode suportar carregamentos nas três dimensões, caso para o qual as Equações 3.3*a* se aplicam. Para o caso bidimensional, as Equações 3.3*b* são suficientes. Os exemplos de revisão usados aqui foram limitados a casos 2D para ser breve.

Força cortante e momento

Uma viga pode ser carregada com alguma combinação de forças distribuídas e/ou concentradas ou momentos, como mostra a Figura 3-22. As forças aplicadas irão criar tanto forças cortantes como momentos fletores na viga. Uma análise dos esforços internos deve encontrar as magnitudes e as distribuições ao longo da viga dessas forças cortantes e dos momentos fletores.[§] A força cortante V e o momento fletor M na viga estão relacionados à função que expressa o carregamento distribuído $q(x)$ por

$$q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} \tag{3.16a}$$

[§] N. de R. T.: No Brasil, chamamos os esforços em uma seção transversal de uma viga de esforços internos solicitantes (EIS). Eles incluem as forças normal e cortante e os momentos fletor e torçor.

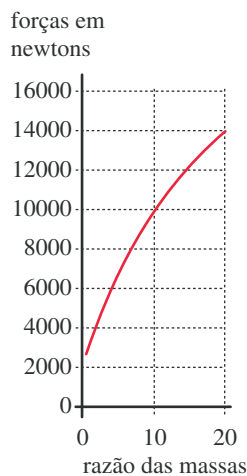
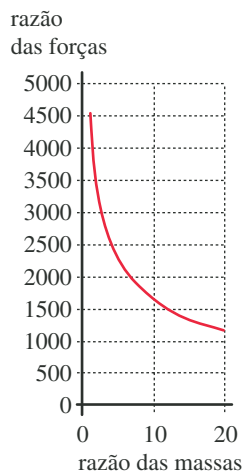



FIGURA 3-21

Força dinâmica e razão das forças em função da razão das massas para o sistema do Exemplo 3-1.

A função que expressa o carregamento distribuido $q(x)$ é tipicamente conhecida e as distribuições da força cortante V e do momento fletor M podem ser encontradas integrando-se a Equação 3.16*a*:

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_A}^{x_B} q\,dx = V_B - V_A \qquad (3.16b)$$

A Equação 3.16*b* mostra que a diferença entre as forças cortantes em quaisquer dois pontos, *A* e *B*, é igual à área sob o gráfico da função carregamento distribuído, Equação 3.16*a*.

Integrando a relação entre cortante e momento fornece

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{V_A}^{V_B} V dx = M_B - M_A \qquad (3.16c)$$

mostrando que a diferença entre os momentos fletores de quaisquer dois pontos, *A* e *B*, é igual à área sob o gráfico da função força cortante, Equação 3.16*b*.

Convenções de sinal As convenções de sinal usuais (e arbitrárias) para vigas incluem considerar um momento fletor positivo se ele causa à viga uma deflexão côncava para baixo (como para armazenar água).[§] Isso coloca a parte superior em compressão e a parte inferior em tração. A força cortante é considerada positiva se ela causa uma rotação horária na seção em que atua. Essas convenções estão mostradas na Figura 3-23 e resultam em momentos positivos para carregamentos positivos. Todos os carregamentos mostrados na Figura 3-22 são negativos. Por exemplo, na Figura 3-22*a*, a magnitude do carregamento distribuído de $x = a$ a $x = l$ é $q = -w$.

Solução da equação A solução das Equações 3.3 e 3.16 para qualquer problema de viga pode ser encontrada de diversas maneiras. Soluções sequenciais e gráficas são descritas em muitos livros-texto de estática e mecânica dos materiais. Uma aproximação clássica para esses problemas é encontrar as reações nos apoios da viga usando as Equações 3.3 e desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor usando a integração gráfica combinada com o cálculo dos valores significativos da função. Essa aproximação tem valor pedagógico a partir do momento em que é de fácil compreensão, mas é incômoda para implementar. A maneira mais conveniente para uma solução computacional é usar uma classe de funções matemáticas conhecidas por **funções de singularidade** para representar a função carregamento na viga. Apresentamos a visão clássica como uma referência pedagógica e também introduzimos o uso das funções de singularidade, que oferecem algumas vantagens computacionais.

Ainda que essa aproximação possa ser nova para alguns alunos quando comparada a outros métodos usualmente ensinados em outros cursos, ela tem vantagens significativas na solução computacional.

Funções de singularidade

Como o carregamento em vigas é tipicamente uma coleção de entidades discretas, como carregamentos pontuais ou segmentos de carregamentos distribuídos que podem ser descontínuos ao longo do comprimento da viga, é difícil representar essas funções discretas como equações que sejam válidas ao longo de todo o comprimento da viga. Uma classe especial de funções, chamadas de **funções de singularidade**, foi inventada para lidar com esse tipo de situação matemática. Funções de singularidade são frequentemente denotadas por um binômio entre parênteses angulados ou chaves especiais como mostrado nas Equações 3.17. O primeiro valor dentro dos parênteses é a variável de interesse, no nosso caso *x*, que é a distância ao longo do comprimento da barra. O segundo valor *a* é um

[§] N. de R. T.: Momento fletor positivo é o que causa tração nas fibras debaixo da viga. Uma regra mnemônica usada no Brasil é a que diz que o momento fletor é positivo quando a viga fica com a forma da boca quando se está sorrindo. Isto é, sorrir é positivo. Nos EUA, utiliza-se a regra mnemônica que diz que a forma da viga é capaz de armazenar água quando o momento fletor é positivo.

(*a*) Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído

(*b*) Viga engastada com carregamento concentrado

(*c*) Viga biapoiada com extremidade em balanço, com momento aplicado e carregamento distribuído linearmente

(*d*) Viga estaticamente indeterminada com carregamento uniformemente distribuído

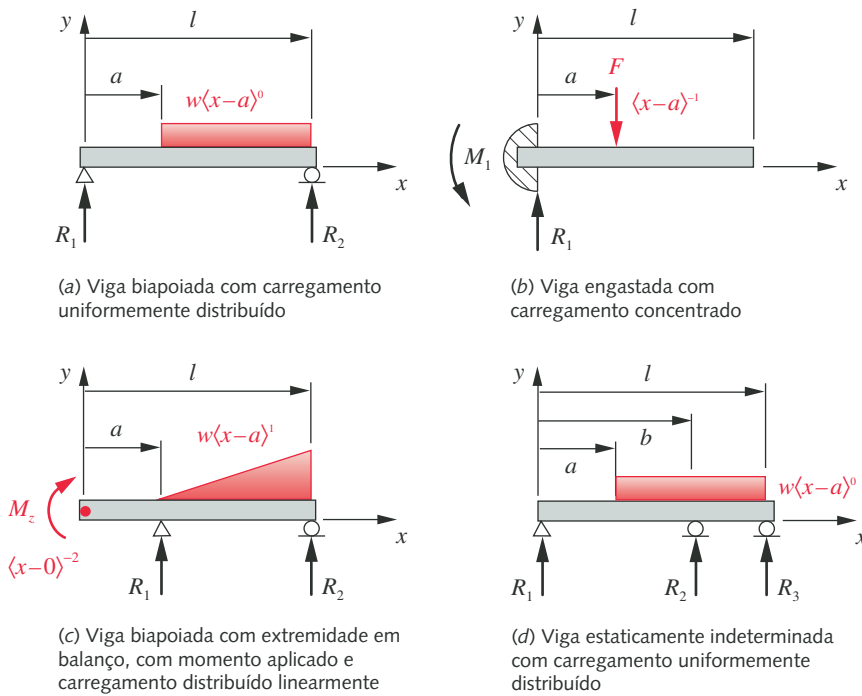



FIGURA 3-22

Tipos de vigas e seus carregamentos.

FIGURA 3-23

Convenção de sinais de viga.

parâmetro definido pelo usuário que denota onde em x a função de singularidade atua ou começa a atuar. Por exemplo, para um carregamento pontual, o valor a representa o valor particular de x onde o carregamento atua (ver Figura 3-22*b*). A definição da função de singularidade **impulso unitário** ou **função delta de Dirac** é dada na Equação 3-17*d*. Observe que toda função de singularidade envolve uma restrição condicional. O impulso unitário vale ∞ *se* $x = a$ e vale 0 para qualquer outro valor de x. A função **degrau unitário**, ou **função de Heaviside** (Equação 3.17*c*), vale 0 para todos os valores de x menores que a e 1 para todos os outros x.

Como essas funções são definidas para possuir valor unitário, ao multiplicá-las por um coeficiente cria-se qualquer magnitude desejada. As suas aplicações são mostradas nos próximos três exemplos e são explicadas mais detalhadamente no Exemplo 3-2B. Se um carregamento distribuído uniforme começa e termina dentro do intervalo de x analisado, são necessárias duas funções de singularidade para descrevê-lo. A primeira define o valor a_1, no qual a função começa a atuar, e tem um coeficiente positivo ou negativo conforme o seu sentido. A segunda define o valor a_2, no qual a função deixa de atuar, e tem um coeficiente de mesma magnitude, mas de sinal oposto à primeira. Essas duas funções irão se anular a partir de a_2, tornando o carregamento nulo. Um caso desse tipo será apresentado no Exemplo 4-6 no próximo capítulo.

Carregamentos de distribuição quadrática podem ser representados por uma **função parabólica unitária**,

$$\langle x - a\rangle^2 \tag{3.17a}$$

que é definida como 0 quando $x \le a$ e igual a $(x - a)^2$ quando $x > a$.

Carregamentos de distribuição linear podem ser representados por uma **função rampa unitária**,

$$\langle x - a \rangle^1 \tag{3.17b}$$

que é definida como 0 quando $x \leq a$ e igual a $(x - a)$ quando $x > a$.

Carregamentos de distribuição uniforme sobre uma porção da viga podem ser representados matematicamente por uma **função degrau unitária**,

$$\langle x - a \rangle^0 \tag{3.17c}$$

que é definida como 0 quando $x < a$, unitária quando $x > a$ e indefinida para $x = a$. Forças concentradas podem ser representadas por uma **função impulso**,

$$\langle x - a \rangle^{-1} \tag{3.17d}$$

que é definida como 0 quando $x < a$, ∞ quando $x = a$ e igual a 0 para $x > a$. Sua integral é igual a um.

Momentos concentrados podem ser representados por uma **função dipolo ou *doublet* unitária**,

$$\langle x - a \rangle^{-2} \tag{3.17e}$$

que é definida como 0 quando $x < a$, indeterminada quando $x = a$ e igual a 0 quando $x > a$. Ela corresponde a um momento unitário aplicado em $x = a$.

Esse processo pode ser expandido para obter uma função de singularidade polinomial de qualquer ordem $<x - a>^n$ para aproximar um carregamento distribuído de qualquer formato. Quatro das cinco funções de singularidade descritas aqui são mostradas na Figura 3-22, aplicadas a vários tipos de vigas. Um programa de computador é necessário para avaliar essas funções. A Tabela 3-17 mostra cinco das funções de singularidade implementadas em um pseudocódigo do tipo BASIC. Os *loops For* (Para) correm a variável x em um intervalo que vai de 0 ao comprimento da viga, l. O teste *If* (Se) determina se x atingiu o valor a, que representa o início da função de singularidade. Dependendo desse teste, o valor de $y(x)$ é zero ou a magnitude específica da função de singularidade. Este tipo de código pode ser facilmente implementado em qualquer linguagem computacional (como Fortran, C+, BASIC) ou em um solucionador de equações (como *Mathcad, TK Solver, MATLAB, EES*).

As integrais dessas funções de singularidade têm uma definição especial que, em alguns casos, afronta o senso comum, mas fornece os resultados matemáticos desejados. Por exemplo, a função impulso unitário (Equação 3-17d) é definida no limite como tendo largura zero e magnitude infinita; no entanto, sua área (integral) é definida como unitária (Equação 3.18d). (Ver referência 8 para uma discussão mais completa sobre funções de singularidade.) As integrais das funções de singularidade mostradas nas Equações 3.17 são definidas como

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^2 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^3}{3} \tag{3.18a}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^1 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^2}{2} \tag{3.18b}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^0 d\lambda = \langle x - a \rangle^1 \tag{3.18c}$$

Tabela 3-7 Pseudocódigo para avaliar as funções de singularidade

```
' Função de singularidade impulso
    For x = 0 to l
        If ABS (x - a) < 0.0001 Then y(x) = magnitude, Else y(x) = 0*
    Next x
' Função de singularidade degrau
    For x = 0 to l
        If x < a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude
    Next x
' Função de singularidade rampa
    For x = 0 to l
        If x < = a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude * (x – a)
    Next x
' Função de singularidade parabólica
    For x = 0 to l
        If x < = a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude * (x – a)^2
    Next x
' Função de singularidade cúbica
    For x = 0 to l
        If x < = a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude * (x – a)^3
    Next x
```

* Nota: Essas rotinas não geram o valor infinito da função delta Dirac. No entanto, elas geram a magnitude de um carregamento pontual aplicado em um local *a* para ser plotado em uma função de carregamento de uma viga.

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-1} d\lambda = \langle x - a \rangle^{0} \tag{3.18d}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-2} d\lambda = \langle x - a \rangle^{-1} \tag{3.18e}$$

onde λ é somente uma variável de integração que varia de $-\infty$ a x. Essas expressões podem ser utilizadas para avaliar as funções da força cortante e do momento fletor que resultam de qualquer função de carregamento, expressa como uma combinação de funções de singularidade.

EXEMPLO 3-2A

Diagramas de força cortante e momento fletor de uma viga biapoiada utilizando o método gráfico

Problema **Determine e plote as funções do momento fletor e da força cortante para uma viga biapoiada com um carregamento uniformemente distribuído, como mostra a Figura 3-22*a*.**

Dados **Comprimento da viga l = 10 in e o carregamento inicia-se em a = 4 in. A magnitude do carregamento uniformemente distribuída é w = 10 lb/in.**

Hipóteses **O peso da viga é desprezível comparado ao carregamento aplicado e pode, portanto, ser desconsiderado.**

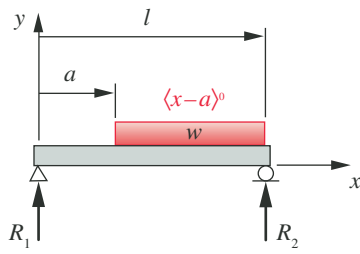
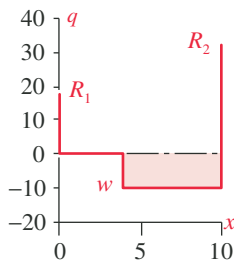
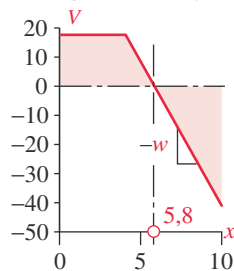
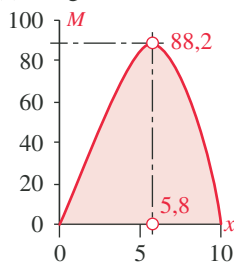
Solução **Ver Figuras 3-22*a* e 3-24.**

Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído

FIGURA 3-22A

Repetida.

1 Calcule as reações de apoio utilizando as Equações 3.3. Somando os momentos em relação à extremidade da direita e somando as forças na direção y temos

$$\sum M_z = 0 = R_1 l - \frac{w(l-a)^2}{2}$$

$$R_1 = \frac{w(l-a)^2}{2l} = \frac{10(10-4)^2}{2(10)} = 18 \tag{a}$$

$$\sum F_y = 0 = R_1 - w(l-a) + R_2$$

$$R_2 = w(l-a) - R_1 = 10(10-4) - 18 = 42 \tag{b}$$

2 A forma do diagrama da força cortante pode ser esquematizada por integração gráfica do diagrama de carregamento mostrado na Figura 3-24*a*. Como um "mecanismo" para a visualização desse processo de integração gráfica, imagine-se andando de costas através do diagrama de carregamento da viga, começando da extremidade esquerda e dando pequenos passos de tamanho *dx*. Você irá marcar no diagrama da cortante (Figura 3-24*b*) a área (*carregamento* · *dx*) do diagrama de carregamento que você pode ver a cada passo. Assim que você der o primeiro passo para trás, partindo de $x = 0$, o diagrama da cortante aumentará imediatamente para o valor R_1. À medida que andar de $x = 0$ para $x = a$, nenhuma mudança ocorrerá, pois você não verá forças adicionais. Quando pisar sobre $x = a$, você começará a ver trechos de área iguais a $-w \cdot dx$, que se subtraem do valor R_1 no diagrama da cortante. Quando você atingir $x = l$, a área total terá atingido o valor do diagrama da cortante de $-R_2$. Quando você descer de costas do diagrama do carregamento da viga (Figura 3-24*a*) e despencar da viga, poderá ver a força de reação R_2, que fecha o diagrama da cortante em zero. O maior valor da força cortante neste caso será R_2 em $x = l$.

3 Se seu reflexo fosse rápido o suficiente, você tentaria se segurar no diagrama de cortante (Figura 3-24*b*) enquanto cai, escalando-o, e repetiria esse truque de andar para trás ao longo do diagrama de força cortante para criar o diagrama de momento fletor, que é a integral do diagrama da cortante. Observe na Figura 3-24*c* que de $x = 0$ a $x = a$ essa função do momento é uma linha reta com inclinação $= R_1$. Acima do ponto a, o diagrama da cortante é triangular, e, assim, a sua integração é uma parábola. O pico do momento fletor vai ocorrer quando o diagrama da cortante cruzar o zero (isto é, inclinação zero no diagrama do momento fletor). O valor de x em $V = 0$ pode ser encontrado por trigonometria, sem esquecer que a inclinação do triângulo é $-w$:

$$x_{@V=0} = a + \frac{R_1}{w} = 4 + \frac{18}{10} = 5{,}8 \tag{c}$$

Áreas de força cortante positiva adicionam ao valor do momento fletor e áreas negativas subtraem. Então, o valor máximo do momento fletor pode ser encontrado adicionando as áreas das porções retangulares e triangulares do diagrama de força cortante de $x = 0$ ao ponto onde a força cortante é nula, $x = 5{,}8$:

$$M_{@x=5,8} = R_1(a) + R_1\frac{1{,}8}{2} = 18(4) + 18\frac{1{,}8}{2} = 88{,}2 \tag{d}$$

O método recém-descrito fornece a magnitude e o local da força cortante máxima e também do momento fletor máximo da viga e é útil para uma rápida determinação desses valores. No entanto, todas aquelas caminhada e queda podem

(*a*) Diagrama do carregamento

(*b*) Diagrama da força cortante

(*c*) Diagrama do momento fletor

FIGURA 3-24

Gráficos do Exemplo 3-2.

tornar-se cansativas, e seria útil possuir um método que pudesse ser convenientemente computadorizado para fornecer informações precisas e completas sobre os diagramas da força cortante e do momento fletor em qualquer caso de carregamento da viga. Tal método irá também permitir que a curva de deflexão da viga seja obtida com um trabalho adicional. O método simples apresentado anteriormente não é útil para determinar as curvas de deflexão, como veremos no próximo capítulo. Repetiremos agora esse exemplo usando funções de singularidade para determinar os diagramas do carregamento, da força cortante e do momento fletor.

EXEMPLO 3-2B

Diagramas de força cortante e momento fletor de uma viga biapoiada utilizando funções de singularidade

Problema **Determine e plote as funções de força cortante e momento fletor para uma viga biapoiada com um carregamento uniformemente distribuído, como mostra a Figura 3-22*a*.**

Dados **Comprimento da viga $l = 10$ in e lugar onde o carregamento inicia $a = 4$ in. A magnitude do carregamento uniformemente distribuída é $w = 10$ lb/in.**

Hipóteses **O peso da viga é desprezível comparado ao carregamento aplicado e pode ser, portanto, desconsiderado.**

Solução **Ver Figuras 3-22*a* e 3-24.**

Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído

FIGURA 3-22A

Repetida.

1 Escreva as equações da função carregamento de acordo com as Equações 3.17 e integre a função resultante duas vezes usando as Equações 3.18 para obter as funções da força cortante e do momento fletor. Para a viga da Figura 3-22*a*,

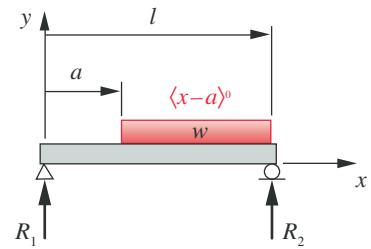
$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \tag{a}$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \tag{b}$$

$$M = \int V\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \tag{c}$$

Existem duas forças de reação nos apoios e duas constantes de integração para serem calculadas. Estamos integrando ao longo de uma viga hipotética infinita de $-\infty$ a x. A variável x pode assumir valores inferiores ou superiores às extremidades da viga. Se considerarmos a condição em um ponto infinitesimal à esquerda de $x = 0$ (escrito como $x = 0^-$), a força cortante e o momento fletor serão nulas. As mesmas condições se aplicam ao ponto infinitesimalmente à direita de $x = l$ (escrito como $x = l^+$). Essas observações fornecem as quatro condições de contorno necessárias para se obter as constantes C_1, C_2, R_1, R_2: quando $x = 0^-$, $V = 0$, $M = 0$; quando $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$.

2 As constantes C_1 e C_2 podem ser encontradas substituindo as condições de contorno $x = 0^-$, $V = 0$ e $x = 0^-$, $M = 0$ nas Equações (*b*) e (*c*), respectivamente:

$$\begin{aligned} V(0^-) &= 0 = R_1\langle 0^- - 0\rangle^{0} - w\langle 0^- - a\rangle^{1} + R_2\langle 0^- - l\rangle^{0} + C_1 \\ C_1 &= 0 \\ M(0^-) &= 0 = R_1\langle 0^- - 0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle 0^- - a\rangle^{2} + R_2\langle 0^- - l\rangle^{1} + C_1(0^-) + C_2 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{d}$$

Observe que, em geral, as constantes C_1 e C_2 serão sempre nulas se as forças e os momentos de reação atuando na viga forem incluídos na função carregamento, porque os diagramas de momento fletor e força cortante devem ser nulos em cada extremidade da viga.

3 As forças de reação R_1 e R_2 podem ser encontradas pelas Equações (c) e (b), respectivamente, substituindo as condições de contorno $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$. Observe que podemos substituir l^+ por l desde que a diferença entre eles seja extremamente pequena.

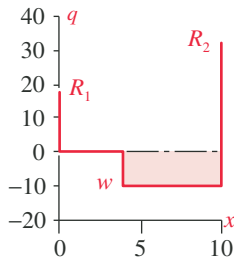
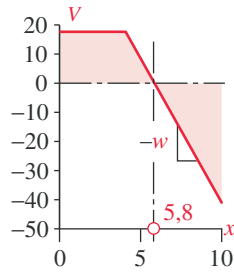
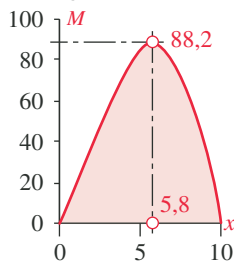
$$M\left(l^+\right) = R_1\left\langle l^+ - 0\right\rangle^1 - w\frac{\left\langle l^+ - a\right\rangle^2}{2} + R_2\left\langle l^+ - l\right\rangle^1 = 0$$

$$0 = R_1 l^+ - \frac{w\left(l^+ - a\right)^2}{2} \tag{e}$$

$$R_1 = \frac{w\left(l^+ - a\right)^2}{2l^+} = \frac{w(l-a)^2}{2l} = \frac{10(10-4)^2}{2(10)} = 18$$

$$V\left(l^+\right) = R_1\left\langle l^+ - 0\right\rangle^0 - w\left\langle l^+ - a\right\rangle^1 + R_2\left\langle l^+ - l\right\rangle^0 = 0$$

$$0 = R_1 - w(l-a) + R_2 \tag{f}$$

$$R_2 = w(l-a) - R_1 = 10(10-4) - 18 = 42$$

Uma vez que w, l e a sejam fornecidos, a Equação (e) pode ser utilizada para calcular R_1 e seu resultado pode ser substituído na Equação (f) para se obter R_2. Observe que a Equação (f) é somente a $\Sigma F = 0$, e a Equação (e) é a soma dos momentos em relação ao ponto $x = l$ e igualados a 0.

4 Para criar as funções da força cortante e do momento fletor ao longo do comprimento da viga, as Equações (b) e (c) devem ser avaliadas para uma gama de valores de x entre 0 e l, depois de ter-se substituído os valores de C_1, C_2, R_1 e R_2. A variável independente x varreu de 0 a $l = 10$ com um incremento de 0,1. As reações, a função carregamento, a função força cortante e a função momento fletor foram calculados pelas equações de (a) a (f) e estão plotadas na Figura 3-24. Os arquivos EX03-02 que geram esses gráficos estão no CD-ROM.

5 Os maiores valores absolutos da força cortante e do momento fletor são de interesse no cálculo das tensões na viga. Os gráficos mostram que a força cortante é maior no ponto $x = l$ e o momento fletor tem um máximo M_{max} perto do centro. O valor de x em M_{max} pode ser encontrado fazendo V igual a zero na Equação (b) e resolvendo para x. (A função força cortante é a derivativa da função momento fletor e, portanto, deve ser nula em cada máximo ou mínimo daquela função.) Isso fornece $x = 5{,}8$ em M_{max}. Os valores das funções nesses pontos de máximos ou mínimos podem então ser calculados a partir das Equações (b) e (c), respectivamente, substituindo os valores apropriados de x e avaliando os resultados das funções de singularidade. Para o máximo valor absoluto da força cortante em $x = l$,

$$\begin{aligned} V_{max} = V_{@x=l^-} &= R_1\left\langle l^- - 0\right\rangle^0 - w\left\langle l^- - a\right\rangle^1 + R_2\left\langle l^- - l\right\rangle^0 \\ &= R_1 - w\left(l^- - a\right) + 0 \\ &= 18 - 10\left(10 - 4\right) + 0 = -42 \end{aligned} \tag{g}$$

(a) Diagrama do carregamento

(b) Diagrama da força cortante

(c) Diagrama do momento fletor

FIGURA 3-24 Repetida

Gráficos do Exemplo 3-2.

Observe que a primeira função singularidade vale 1, pois $l^- > 0$ (ver Equação 3.17*c*), a segunda função singularidade é calculada com $(l - a)$ porque $l^- > a$ neste problema (ver Equação 3.17*b*) e a terceira função singularidade vale 0, como definido na Equação 3.17*c*. O máximo momento fletor é calculado de maneira semelhante:

$$\begin{aligned} M_{max} = M_{@x=5,8} &= R_1\langle 5,8-0\rangle^1 - w\frac{\langle 5,8-a\rangle^2}{2} + R_2\langle 5,8-l\rangle^1 \\ &= R_1\langle 5,8\rangle^1 - w\frac{\langle 5,8-4\rangle^2}{2} + R_2\langle 5,8-10\rangle^1 \\ &= 18(5,8) - 10\frac{(5,8-4)^2}{2} + 0 = 88,2 \end{aligned} \tag{h}$$

A terceira singularidade vale 0 porque $5,8 < l$ (ver Equação 3.17*b*).

6 Os resultados são

$$R_1 = 18 \qquad R_2 = 42 \qquad V_{max} = -42 \qquad M_{max} = 88,2 \tag{i}$$

EXEMPLO 3-3A

Diagramas de força cortante e momento fletor de uma viga engastada utilizando o método gráfico

Problema **Determine e plote as funções força cortante e momento fletor para uma viga engastada com um carregamento concentrado, como mostra a Figura 3-22*b*.**

Dados **Comprimento da viga $l = 10$ in e o local do carregamento é $a = 4$ in. A magnitude da força é $F = 40$ lb.**

Hipóteses **O peso da viga é desprezível comparado ao carregamento aplicado e pode ser, portanto, desconsiderado.**

Solução **Ver Figuras 3-22*b* e 3-25.**

1 Calcular as reações de apoio usando as Equações 3.3. Somando os momentos em relação à extremidade esquerda e somando as forças na direção y, temos

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0 = Fa - M_1 \\ M_1 &= Fa = 40(4) = 160 \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 = R_1 - F \\ R_1 &= F = 40 \end{aligned} \tag{b}$$

2 Pela convenção de sinais, a força cortante é positiva e o momento fletor é negativo neste exemplo. Para construir graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga engastada, faça imaginariamente uma "caminhada de costas", começando na extremidade fixa da viga e movendo-se em direção à extremidade livre (da esquerda para a direita na Figura 3-24).

Neste exemplo, esse procedimento mostra a primeira força observada, a reação R_1, atuando para cima. Essa força cortante permanece constante até que a força F para baixo em $x = a$ seja encontrada, o que fecha o diagrama da força cortante em zero.

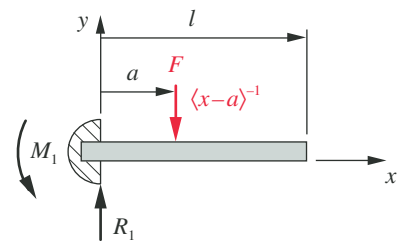



FIGURA 3-22B

Repetida.

3 O diagrama do momento fletor é a integral do diagrama da força cortante, que neste caso é uma linha reta de inclinação = 40.

4 Tanto a força cortante quanto o momento fletor são máximos na parede dessa viga engastada. As suas magnitudes máximas são como mostradas nas Equações (*a*) e (*b*) acima.

Repetiremos este exemplo usando funções de singularidade.

EXEMPLO 3-3B

Diagramas de força cortante e momento fletor de uma viga engastada utilizando funções de singularidade

Problema **Determine e plote as funções força cortante e momento fletor para uma viga engastada com um carregamento concentrado, como mostra a Figura 3-22*b*.**

Dados **Comprimento da viga l = 10 in e local do carregamento é a = 4 in. A magnitude da força é F = 40 lb.**

Hipóteses **O peso da viga é desprezível comparado ao carregamento aplicado e pode ser, portanto, desconsiderado.**

Solução **Ver Figuras 3-22*b* e 3-25.**

1 Escreva as equações da função carregamento de acordo com as Equações 3.17 e integre a função resultante duas vezes usando as Equações 3.18 para obter as funções da força cortante e do momento fletor. Observe o uso da função dipolo unitário para representar o momento no engastamento. Para a viga da Figura 3-22*b*,

$$q = -M_1\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} \tag{a}$$

$$V = \int q\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + C_1 \tag{b}$$

$$M = \int V\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + C_1x + C_2 \tag{c}$$

O momento reativo no engastamento, M_1, é na direção z e as forças R_1 e F são na direção y na Equação (*b*). Todos os momentos da Equação (*c*) estão na direção z.

2 Como as reações vinculares estão incluídas na função carregamento e os diagramas da força cortante e do momento fletor devem fechar em zero em cada extremidade da viga, as constantes são $C_1 = C_2 = 0$.

3 A força de reação R_1 e o momento de reação M_1 podem ser calculados pelas Equações (*b*) e (*c*), respectivamente, substituindo as condições de contorno $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$. Observe que podemos substituir l^+ por l desde que a diferença entre eles seja extremamente pequena. M_1 não aparece na Equação (*d*) porque sua função de singularidade não é definida com $l = l^+$.

$$\begin{aligned} V &= M\langle l\rangle^{-1} + R_1\langle l-0\rangle^{0} - F\langle l-a\rangle^{0} = 0 \\ 0 &= M(0) + R_1 - F \\ R_1 &= F = 40 \text{ lb} \end{aligned} \tag{d}$$

(*a*) Diagrama do carregamento

(*b*) Diagrama da força cortante

(*c*) Diagrama do momento fletor

FIGURA 3-25

Gráficos para o Exemplo 3-3.

$$M = -M_1\langle l-0\rangle^0 + R_1\langle l-0\rangle^1 - F\langle l-a\rangle^1$$
$$0 = -M_1 + R_1(l) - F(l-a) \qquad (e)$$
$$M_1 = R_1(l) - F(l-a) = 40(10) - 40(10-4) = 160 \text{ lb-in cw}$$

Uma vez que F, l e a sejam fornecidos, a Equação (d) pode ser utilizada para calcular R_1 e seu resultado substituído na Equação (e) para obter M_1. Note que a Equação (d) é somente a $\Sigma F_y = 0$, e a Equação (e) é $\Sigma M_z = 0$.

4 Para gerar as funções da força cortante e do momento fletor ao longo do comprimento da viga, as Equações (b) e (c) devem ser avaliadas para uma gama de valores de x entre 0 e l, depois de se ter substituído os valores de C_1, C_2, R_1 e M_1. A variável independente x varreu de 0 a $l = 10$ com um incremento de 0,1. As reações, a função carregamento, a função da força cortante e a função do momento fletor foram calculadas pelas equações de (a) a (e) e estão plotadas na Figura 3-25. Os arquivos EX03-03 que geram esses gráficos encontram-se no CD-ROM.

5 Os maiores valores absolutos da força cortante e do momento fletor são de interesse no cálculo das tensões na viga. Os gráficos mostram que a força cortante e o momento fletor são máximos no ponto $x = 0$. Os valores das funções nesses pontos podem ser calculados a partir das Equações (b) e (c), respectivamente, substituindo $x = 0$ e avaliando os resultados das funções de singularidade:

$$R_1 = 40 \qquad V_{max} = 40 \qquad |M_{max}| = 160 \qquad (f)$$

EXEMPLO 3-4

Diagramas de força cortante e momento fletor de uma viga biapoiada com extremidade em balanço utilizando o método gráfico

Problema Determine e plote as funções da força cortante e do momento fletor para uma viga biapoiada com extremidade em balanço, sujeita a um momento aplicado e um carregamento distribuído triangular, como mostra a Figura 3-22*c*.

Dados Comprimento da viga $l = 10$ in e o local do início do carregamento é $a = 4$ in. A magnitude do momento aplicado é $M = 20$ lb-in, e a inclinação do carregamento distribuído é $w = 10$ lb/in/in.

Hipóteses O peso da viga é desprezível comparado ao carregamento aplicado e pode ser, portanto, desconsiderado.

Solução Ver Figuras 3-22*c* e 3-26.

Viga biapoiada com extremidade em balanço, com momento aplicado e carregamento distribuído linearmente

FIGURA 3-22C

Repetida.

1 Escreva as equações da função carregamento de acordo com as Equações 3.17 e integre a função resultante duas vezes usando as Equações 3.18 para obter as funções da força cortante e do momento fletor. Para a viga da Figura 3-22*c*,

$$q = M\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-a\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \qquad (a)$$

$$V = \int q\,dx = M\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-a\rangle^{0} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \qquad (b)$$

$$M = \int V\,dx = M\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-a\rangle^{1} - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^{3} + R_2\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \qquad (c)$$

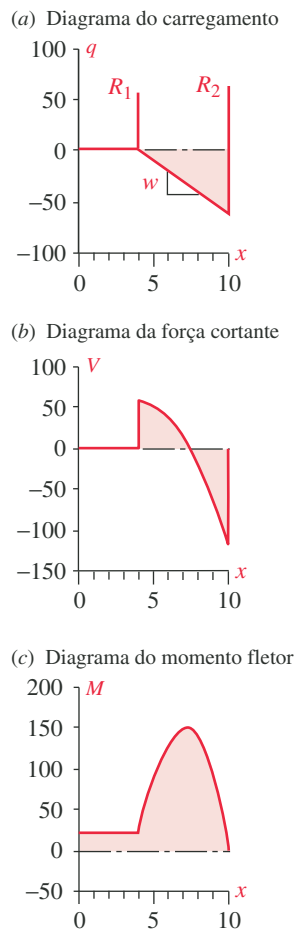



FIGURA 3-26

Gráficos do Exemplo 3-4.

2 Como demonstrado nos dois exemplos anteriores, as constantes C_1 e C_2 serão sempre nulas se as reações dos apoios estiverem incluídas nas equações para a força cortante e para o momento fletor. Então, iremos assumir que são nulas.

3 As forças reativas R_1 e R_2 podem ser calculadas utilizando-se as Equações (*c*) e (*b*), respectivamente, substituindo as condições de contorno $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$. Observe que podemos substituir l^+ por l desde que a diferença entre eles seja extremamente pequena.

$$M = M_1 \langle l \rangle^0 + R_1 \langle l - a \rangle^1 - \frac{w}{6} \langle l - a \rangle^3 + R_2 \langle l - l \rangle^1 = 0$$

$$0 = M_1 + R_1 (l - a) - \frac{w}{6} (l - a)^3$$

$$R_1 = \frac{w}{6}(l - a)^2 - \frac{M_1}{(l - a)} \tag{d}$$

$$= \frac{10}{6}(10 - 4)^2 - \frac{20}{(10 - 4)} = 56{,}67 \text{ lb}$$

Observe que a Equação (*d*) é somente $\Sigma M_z = 0$ e a Equação (*e*) é $\Sigma F_y = 0$.

$$V = M \langle l \rangle^{-1} + R_1 \langle l - a \rangle^0 - \frac{w}{2} \langle l - a \rangle^2 + R_2 \langle l - l \rangle^0 = 0$$

$$0 = M(0) + R_1 - \frac{w}{2}(l - a)^2 + R_2 \tag{e}$$

$$R_2 = \frac{w}{2}(l - a)^2 - R_1 = \frac{10}{2}(10 - 4)^2 - 56{,}67 = 123{,}33 \text{ lb}$$

4 Para gerar as funções da força cortante e do momento fletor ao longo do comprimento da viga, as Equações (*b*) e (*c*) devem ser avaliadas para uma gama de valores de x entre 0 e l, depois de se ter substituído os valores de $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, R_1 e R_2. A variável independente *x foi* varrida de 0 a $l = 10$ com um incremento de 0,1. As reações, a função carregamento, a função da força cortante e a função do momento fletor foram calculadas pelas equações de (*a*) a (*f*) e estão plotadas na Figura 3-26.*

5 Os maiores valores absolutos da força cortante e do momento são de interesse no cálculo das tensões na viga. Os gráficos mostram que a força cortante é maior no ponto $x = l$ e o momento fletor tem um máximo à direita do centro. O valor de x em M_{max} pode ser encontrado fazendo V nulo na Equação (*b*) e calculando o valor de x. A função força cortante é a derivativa da função momento fletor e, portanto, deve ser nula em cada máximo ou mínimo daquela função. Isso fornece $x = 7{,}4$ em M_{max}. Os valores das funções nesses pontos máximos ou mínimos podem ser calculados a partir das Equações (*b*) e (*c*), respectivamente, substituindo os valores apropriados de x e avaliando os resultados das funções de singularidade:

$$R_1 = 56{,}7 \qquad R_2 = 123{,}3 \qquad V_{max} = -120 \qquad M_{max} = 147{,}2 \tag{f}$$

Superposição

Esses exemplos de sistemas formados por viga representam somente uma pequena fração de todas as possíveis combinações de carregamento e tipos de apoios de vigas que alguém pode encontrar na prática. Em vez de ter que escrever e integrar as funções de carregamento para cada nova situação de viga a partir do nada, um problema particular pode ser frequentemente resolvido por superposição, o que significa simplesmente adicionar os resultados individuais. Para pequenas deflexões, é seguro pressupor linearidade nesses problemas, e linearidade é um

* Os arquivos EX03-04 que geraram os gráficos encontram-se no CD-ROM.

requisito para a validade da superposição. Por exemplo, o carregamento devido ao peso próprio de uma viga (desconsiderados nos exemplos anteriores) pode ser incluído por uma superposição de um carregamento uniforme ao longo de toda a viga aos outros carregamentos que possam estar presentes.

Os efeitos de um carregamento múltiplo nos diagramas de força cortante e do momento fletor de uma viga podem ser determinados pela superposição de carregamentos individuais. Se, por exemplo, a viga do Exemplo 3-3 tivesse dois carregamentos pontuais aplicados a ela, cada um a uma distância diferente a, o seu efeito combinado poderia ser encontrado aplicando as equações daquele exemplo duas vezes, uma para cada carregamento e posição, e depois somando (superpondo) os dois resultados. O Apêndice B contém uma coleção de situações comuns de carregamento de vigas, apresentando as funções da força cortante e do momento fletor e fornecendo as suas equações e gráficos. Essas soluções podem ser combinadas por superposição para tratar situações mais complicadas. Elas podem ser superpostas com o seu modelo para obter e plotar os diagramas da força cortante e do momento fletor, seus máximos e mínimos.

3.10 RESUMO

Embora o aluno que esteja aprendendo análise de tensões possa não concordar, o assunto análise das solicitações pode ser frequentemente mais difícil e complicado que a análise de tensões. De fato, a precisão de qualquer análise de tensões é limitada pela qualidade do nosso conhecimento sobre as solicitações ao sistema, já que as tensões geralmente são proporcionais às cargas, como será discutido no Capítulo 4. Este capítulo apresenta uma revisão dos métodos Newtonianos de análise de força e momento para alguns tipos de sistemas de solicitações dinâmicas e estáticas. Isto não é, de maneira alguma, um tratamento completo do complexo assunto que é a análise das solicitações, e as referências bibliográficas deste capítulo devem ser consultadas para mais detalhes e para casos não estudados aqui.

Devemos ter em mente os seguintes fatores quando desejarmos determinar as solicitações em um sistema:

1 Determine o tipo de carregamento em termos das classes de solicitações como definido na Seção 3.1 para decidir se a análise das solicitações deve ser estática ou dinâmica.

2 Desenhe o diagrama de corpo livre completo (DCL) do sistema e dos muitos subsistemas necessários para definir as cargas que agem em seus elementos. Inclua todos os momentos e torques aplicados bem como as forças. Não podemos subestimar a importância de um DCL cuidadosamente desenhado. Muitos erros nas análises de força ocorrem neste passo porque o DCL é, muitas vezes, desenhado incorretamente.

3 Escreva as equações relevantes usando as leis de Newton para definir as forças e os momentos desconhecidos que agem no sistema. A solução dessas equações para muitos sistemas reais requer algum tipo de ferramenta computacional, como um solucionador de equações ou planilha de cálculo, de modo a obter resultados satisfatórios em tempo razoável. Isso é especialmente verdadeiro para sistemas dinâmicos que precisam ser resolvidos para diversas posições para determinar as solicitações máximas.

4 A presença das forças de impacto pode aumentar significativamente as solicitações em qualquer sistema. O cálculo preciso das forças devido ao impacto é bastante difícil. O método de energia para estimativa das forças de impacto apresentado neste capítulo é grosseiro e deve ser considerado uma aproximação. São necessárias informações detalhadas sobre as deformações dos corpos em impacto para um resultado mais preciso, e isso pode

não estar disponível sem testes do sistema real sob impacto. Existem técnicas de análise mais sofisticadas para análises das forças de impacto, mas fogem do escopo deste texto. O leitor deve consultar a bibliografia para mais informações.

5 Carregamentos devido a vibrações também podem aumentar as solicitações que de fato ocorrem, muito além dos níveis que foram calculados teoricamente, como mostrado no Estudo de Caso 5B e na Figura 3-16. Medidas experimentais feitas em condições reais são a melhor maneira para se obter informações nesses casos.

Os estudos de casos deste capítulo foram elaborados para apresentar problemas realistas para as análises de tensões e de falhas que são apresentadas nos capítulos que seguem. Embora a complexidade desses problemas possa intimidar um pouquinho o aluno em um primeiro momento, ele terá muito a ganhar pelo tempo investido neste estudo. Esse esforço será recompensado pela melhor compreensão dos tópicos de análise de tensões e de teoria de falhas nos capítulos que se sucedem.

Equações importantes usadas neste capítulo

Veja as seções referidas para saber como usar estas equações.

Segunda lei de Newton (Seção 3.3):

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{3.1b}$$

Equações de Euler (Seção 3.3):

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x\alpha_x - \left(I_y - I_z\right)\omega_y\omega_z \\ \sum M_y &= I_y\alpha_y - \left(I_z - I_x\right)\omega_z\omega_x \\ \sum M_z &= I_z\alpha_z - \left(I_x - I_y\right)\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{3.1d}$$

Solicitações estáticas (Seção 3.3):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x &= 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \end{aligned} \tag{3.3a}$$

Frequência natural sem amortecimento (Seção 3.7):

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f_n &= \frac{1}{2\pi}\omega_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Frequência natural com amortecimento (Seção 3.7):

$$\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} \\ f_d &= \frac{1}{2\pi}\omega_d \end{aligned} \tag{3.7}$$

Constante elástica de mola (Seção 3.7):

$$k = \frac{F}{\delta} \tag{3.5a}$$

Amortecimento viscoso (Seção 3.7):

$$d = \frac{F}{\dot{y}} \tag{3.6}$$

Razão de força dinâmica (Seção 3.8):

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta h}{\delta_{st}}} \tag{3.14b}$$

Relações entre as funções carregamento, força cortante e momento fletor (Seção 3.9):

$$q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} \tag{3.16a}$$

Integrais das funções de singularidade (Seção 3.9):

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^2 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^3}{3} \tag{3.18a}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^1 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^2}{2} \tag{3.18b}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^0 d\lambda = \langle x - a \rangle^1 \tag{3.18c}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-1} d\lambda = \langle x - a \rangle^0 \tag{3.18d}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-2} d\lambda = \langle x - a \rangle^{-1} \tag{3.18e}$$

3.11 REFERÊNCIAS

1 **R. L. Norton**, *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines, 3ed*. McGraw-Hill: New York, pp. 162–196, 265–355, 2004.

2 *Ibid*., pp. 537-549.

3 *Ibid*., pp. 730-753.

4 *Ibid*., p. 279.

5 **R. L. Norton, et al**., "Bearing Forces as a Function of Mechanical Stiffness and Vibration in a Fourbar Linkage," in *Effects of Mechanical Stiffness and Vibration on Wear*, R. G. Bayer, ed. American Society for Testing and Materials: Philadelphia, Pa., 1995.

6 **A. H. Burr and J. B. Cheatham**, *Mechanical Analysis and Design*. 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., pp. 835–863, 1995.

7 **R. J. Roark and W. C. Young**, *Formulas for Stress and Strain*. 6th ed. McGraw-Hill: New York, 1989.

8 **C. R. Wylie and L. C. Barrett**, *Advanced Engineering Mathematics*. 5th ed. McGraw-Hill: New York, 1982.

3.12 REFERÊNCIAS NA WEB

Diagramas de corpo livre

http://laser.phys.ualberta.ca/~freeman/enph131/fbdex1.html

http://eta.physics.uoguelph.ca/tutorials/fbd/Q.fbd.html

http://www.ac.wwu.edu/~vawter/PhysicsNet/Topics/Dynamics/Forces/FreeBodyDiagram.html

Funções de singularidade

http://www.ce.berkeley.edu/Courses/CE130/Sing.pdf

3.13 BIBLIOGRAFIA

Para ajudar na revisão de análise de forças estáticas e dinâmicas, consultar:

R. C. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Statics*. 7th ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1995.

R. C. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Dynamics*. 7th ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1995.

I. H. Shames, *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*. 3rd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1980.

Para mais informações sobre impacto, consultar:

A. H. Burr and J. B. Cheatham, *Mechanical Analysis and Design*, 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., Chapter 14, 1995.

W. Goldsmith, *Impact*. Edward Arnold Ltd.: London, 1960.

H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*. Dover Publications: New York, 1963.

Para mais informações sobre vibrações, consultar:

L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill: New York, 1975.

Para fórmulas e tabelas para análise de vigas, consultar:

R. J. Roark and W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*. 6th ed. McGraw-Hill: New York, 1989.

3.14 PROBLEMAS

3-1 Quais classes de carregamentos da Tabela 3-1 se aplicam melhor nestes sistemas?

(a) Estrutura de bicicleta (b) Mastro de bandeira (c) Remo de barco
(d) Prancha de mergulho (e) Chave de grifo (f) Taco de golfe

3-2 Desenhe o diagrama de corpo livre para os sistemas do Problema 3-1.

*[†]**3-3** Desenhe o diagrama de corpo livre da montagem braço e pedal de uma bicicleta com o braço do pedal na posição horizontal com as dimensões mostradas na Figura P3-1. (Considerar os dois braços, os pedais e a articulação como uma única peça.) Assumindo que o ciclista aplica uma força de 1500 N no pedal, determine o torque aplicado na roda dentada e o máximo momento de fletor e torque no braço conectado ao pedal.

3-4 O engate de reboque da Figura 1-1 está sujeito a forças aplicadas como mostrado na Figura P3-2. Um peso de 100 kgf atua para baixo e uma força de 4905 N é aplicada horizontalmente. Usando as dimensões do suporte da esfera do engate indicadas na Figura 1-5, desenhe o diagrama de corpo livre do suporte da esfera e determine as forças de tração e de cortante aplicadas aos dois parafusos que fixam o suporte ao canal da Figura 1-1.

Tabela P3-0[†]
Matriz de tópicos/problemas

3.1 Classes de solicitações
3-1

3.2 Diagramas de corpo livre
3-2, 3-43, 3-45, 3-50, 3-52

3.3 Análise do carregamento
3-3, 3-4, 3-5, 3-7, 3-9, 3-15, 3-16, 3-17, 3-18, 3-19, **3-21,** 3-29, 3-30, 3-31, 3-44, 3-46, 3-51, 3-53

3.7 Solicitação vibratória
3-8, 3-47, 3-48, 3-49

3.8 Carregamento de impacto
3-6, 3-14, 3-20, 3-22, 3-42

3.9 Vigas-estáticas
3-10, 3-12, 3-23, 3-24, 3-26, 3-27, 3-28, 3-32, 3-33, 3-34, 3-35, 3-36, 3-37, 3-38, 3-39, 3-40, 3-41

3.9 Vigas-dinâmicas
3-11, 3-13

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

† Os problemas com números em **negrito** são estendidos a problemas similares em capítulos posteriores com a mesma numeração. Por exemplo, o Problema 4-4 é baseado no Problema 3-4, etc.

3-5 Para o engate de reboque do Problema 3-4, determine a força horizontal que deverá ocorrer na esfera se o reboque de 2000 kg for acelerado, a partir do repouso, até atingir uma velocidade de 60 m/s em 20 s. Pressuponha uma aceleração constante.

***3-6** Para o engate de reboque do Problema 3-4, determine a força horizontal que deverá ocorrer na esfera devido a um impacto entre a esfera e a barra de conexão do reboque de 2000 kg se o engate se deformar 2,8 mm dinamicamente devido ao impacto. O veículo trator pesa 1000 kg. A velocidade de impacto é de 0,3 m/s.

***3-7** O pistão de um motor de combustão interna está conectado a sua biela por um pino. Ache a força no pino se o pistão, que tem massa de 0,5 kg, tiver uma aceleração de 2500 g.

***3-8** Um sistema camo-seguidor similar ao mostrado na Figura 3-15 tem uma massa $m = 1$ kg e a constante elástica $k = 1000$ N/m, e coeficiente de amortecimento viscoso $d = 19{,}4$ N-s/m. Ache a frequência natural sem amortecimento e com amortecimento desse sistema.

3-9 Um alicate de pressão (ViseGrip®) está desenhado em escala na Figura P3-3. Ache as forças que atuam em cada pino e membros do conjunto, assumindo que a força aplicada na peça é $P = 4000$ N na posição mostrada. Que força F é necessária para mantê-lo apertado na posição mostrada? *Observação: Deve haver uma ferramenta similar na oficina de sua escola.*

***3-10** Um trampolim na forma de uma viga biapoiada, com extremidade em balanço, é mostrado na Figura P3-4*a*. Determine as reações nos apoios e desenhe os diagramas de força cortante e de momento fletor quando uma pessoa de massa 100 kg está na extremidade livre da barra. Determine a força cortante máxima, o máximo momento fletor e as suas posições.

***3-11** Determine a força de impacto e a deflexão dinâmica que resultará quando a pessoa de 100 kg do Problema 3-10 pular a uma altura de 25 cm e cair novamente na extremidade do trampolim. Pressuponha que o trampolim tem massa de 29 kg e apresenta uma deflexão estática de 13,1 cm quando a pessoa está estacionada em sua extremidade livre. Determine as reações de apoio e desenhe os diagramas de força cortante e momento fletor para esse carregamento dinâmico. Determine a força cortante máxima e o momento fletor máximo e as suas posições ao longo do trampolim.

3-12 Repita o Problema 3-10 usando uma viga engastada para o trampolim ilustrado na Figura P3-4*b*.

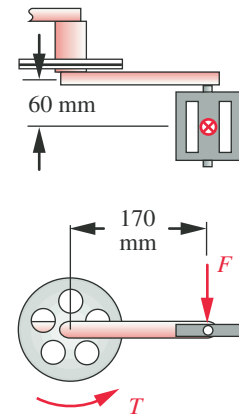



FIGURA P3-1

Problema 3-3. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

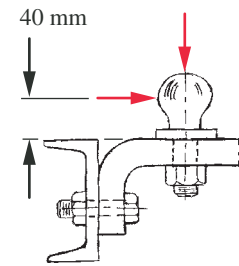



FIGURA P3-2

Problema 3-4, 3-5, 3-6. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

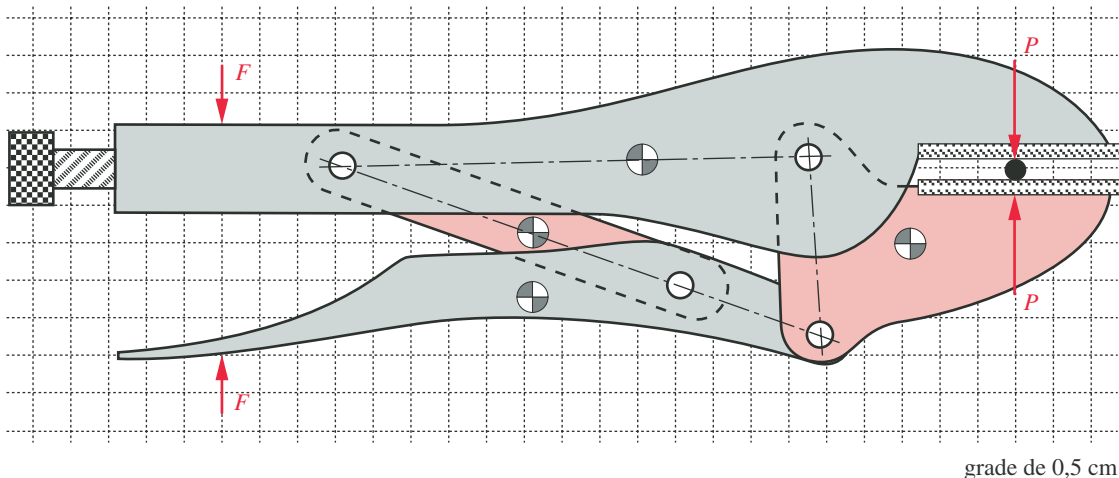



FIGURA P3-3

Problema 3-9. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

(a) Trampolim na forma de viga biapoiada

(b) Viga engastada para o trampolim

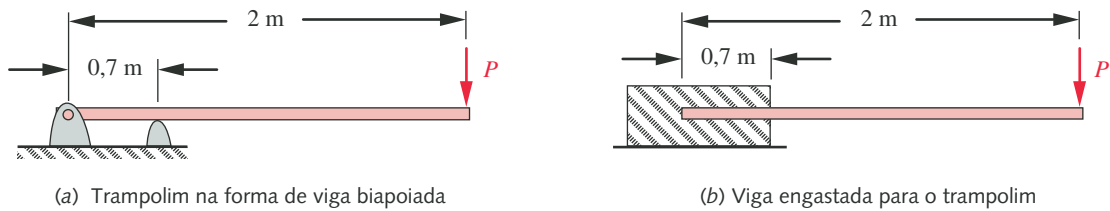
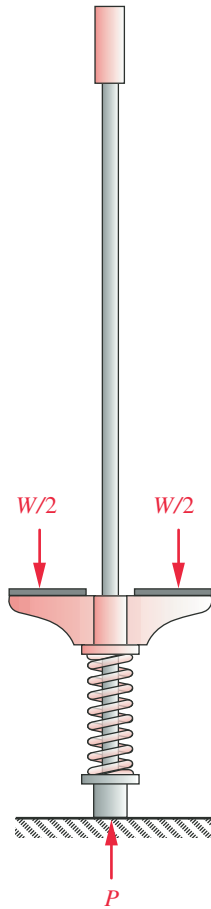



FIGURA P3-4

Problemas 3-10 a 3-13.

3-13 Repita o Problema 3-11 usando o trampolim representado na Figura P3-3*b*. Assuma que o trampolim tem massa de 19 kg e deflete de 8,5 cm quando a pessoa se encontra estacionada sobre sua extremidade.

3-14 A Figura P3-5 mostra um brinquedo de criança conhecido como *pula-pula*. A criança fica de pé em cima dos pedais, aplicando metade do seu peso em cada lado. Ela pula, fazendo o brinquedo afastar-se do solo, com seus pés continuamente apoiados nos pedais, e aterrissa, com o impacto sendo amortecido pela mola, e a energia armazenada auxilia o próximo salto. Pressuponha que a criança tenha 60 lb e que a constante elástica da mola seja de 100 lb/in. O pula-pula tem peso de 5 lb. Determine a frequência natural do sistema, a deflexão estática da mola quando a criança fica sobre este e a força e deflexão dinâmicas quando a criança aterrissa após saltar 2 in acima do solo.

FIGURA P3-5

Problema 3-14.

***3-15** Uma impressora que utiliza caneta (*plotter*) provoca uma aceleração constante de 2,5 m/s^2 no subconjunto que contém a caneta, que se move em linha reta ao longo do papel. Esse subconjunto móvel que contém a caneta tem massa de 0,5 kg. A impressora tem massa de 5 kg. Qual o coeficiente de atrito necessário entre os pés da impressora e o topo da mesa para prevenir o movimento da impressora quando a caneta acelera?

3-16 Uma trilha para guiar bolas de boliche é projetada com duas hastes redondas como mostrado na Figura P3-6. As hastes não são paralelas entre si, apresentando um pequeno ângulo entre elas. As bolas rolam sobre as hastes até caírem entre estas, alcançando uma outra trilha. O ângulo entre as hastes é alterável para que as bolas possam cair em diferentes posições. O comprimento de cada haste é 30 in e o ângulo entre elas é de 3,2°. As bolas têm diâmetro de 4,5 in e peso de 2,5 lb. A distância entre os centros das hastes de 1 in de diâmetro é de 4,2 in na extremidade estreita. Determine a distância a partir da extremidade estreita onde a bola cai e a máxima força cortante e máximo momento fletor nas hastes para a pior situação enquanto as bolas rolam até 98% da distância até a queda. Pressuponha que as hastes estão simplesmente apoiadas em cada uma das extremidades e não apresentam deflexão devido às cargas aplicadas. (Observe que assumir uma deflexão nula neste caso não é realista; esta simplificação será eliminada no próximo capítulo após o estudo da deflexão.)

3-17 Uma pinça para gelo é mostrada na Figura P3-7. O gelo pesa 50 lb e tem 10 in de largura. A distância entre as alças é 4 in e o raio de curvatura *r* de cada garra da pinça é 6 in. Desenhe o diagrama de corpo livre para as duas garras e determine as forças que agem sobre elas. Determine o momento fletor no ponto *A*.

*3-18 Um caminhão reboque capotou em um trecho de acesso à rodovia New York Thruway. Esse trecho tem um raio de curvatura de 50 ft naquele ponto e uma inclinação de 3°, sendo mais baixo no lado externo da curva. O reboque, na forma de caixa, tem 45 ft de comprimento, 8 ft de largura e 8,5 ft de altura (13 ft do chão até o topo) e está carregado com 44415 lb de rolos de papel em duas fileiras com dois rolos de altura sobrepostos como mostra a Figura P3-8. Os rolos têm diâmetro de 40 in e comprimento de 38 in e pesam aproximadamente 900 lb cada. Calços impedem o rolamento para trás dos rolos, mas não o deslizamento lateral. O reboque vazio pesa 14000 lb. O motorista afirma que ele estava dirigindo a menos

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Os problemas com números em **negrito** são estendidos a problemas similares em capítulos posteriores com a mesma numeração. Por exemplo, o Problema 4-4 é baseado no Problema 3-4, etc.

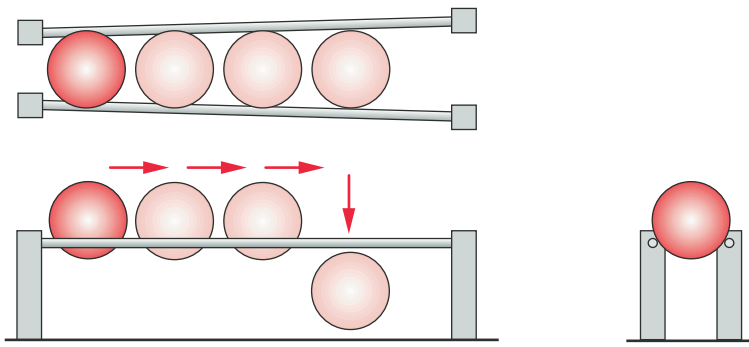



FIGURA P3-6

Problema 3-16.

de 15 mph e que a carga de papel se deslocou dentro do reboque, chocou-se contra a parede lateral e fez com que o caminhão capotasse. A companhia de papel que carregou o caminhão afirma que a carga foi armazenada adequadamente e que não se moveria a essa velocidade. Testes independentes do coeficiente de atrito entre rolos de papel similares e um assoalho de reboque similar fornecem um valor de 0,43 ± 0,08. Estima-se que o centro de gravidade do reboque carregado se localize a 7,5 ft acima do solo. Determine a velocidade do caminhão que faria com que ele começasse a tombar e a velocidade na qual os rolos começariam a deslizar lateralmente. O que você acha que causou o acidente?

3-19 Pressuponha que o CG dos rolos de papel no caminhão do Problema 3-18 está 2,5 ft acima do assoalho do reboque. Em qual velocidade na mesma curva a pilha de rolos tombará (não deslizará) em relação ao reboque?

3-20 Pressuponha que a carga de rolos de papel do Problema 3-18 deslize lateralmente quando o caminhão estiver a 20 mph na curva em questão. Estime a força de impacto da carga contra a parede do reboque. A relação força-deformação da parede do reboque foi medida como sendo aproximadamente de 400 lb/in.

3-21 A Figura P3-9 mostra uma roda de automóvel com dois tipos comuns de chave sendo usadas para apertar as porcas, uma chave com braço simples em (*a*) e uma chave com braço duplo em (*b*). Em cada caso, duas mãos são necessárias para fornecer forças respectivamente em *A* e em *B*, como mostrado. A distância entre os pontos *A* e *B* é de 1 ft nos dois casos. As porcas da roda requerem um torque de 70 ft-lb. Desenhe os diagramas de corpo livre para ambas as chaves e determine as magnitudes de todas as forças e momentos internos em cada chave. Há alguma diferença entre o modo com que essas chaves desempenham sua tarefa? Uma configuração é melhor do que a outra? Se for, por quê? Explique.

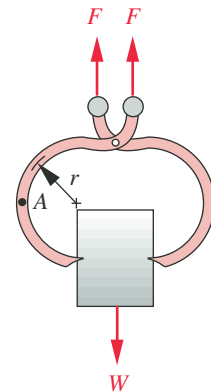



FIGURA P3-7

Problema 3-17.

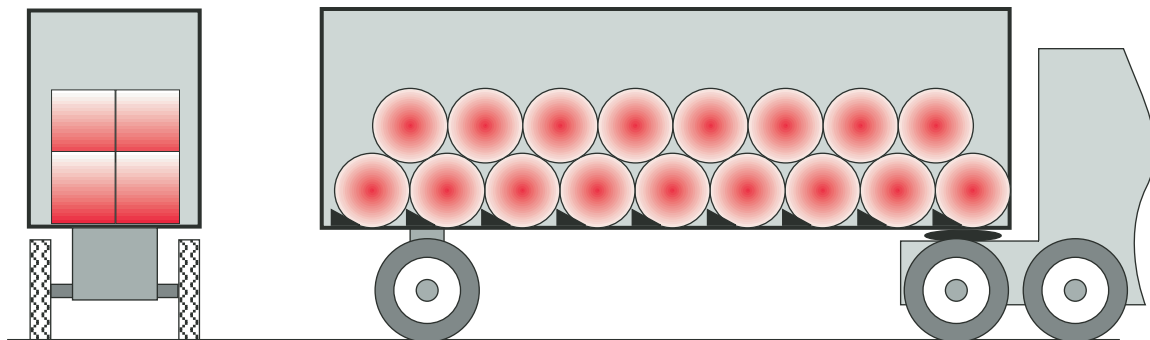



FIGURA P3-8

Problema 3-18.

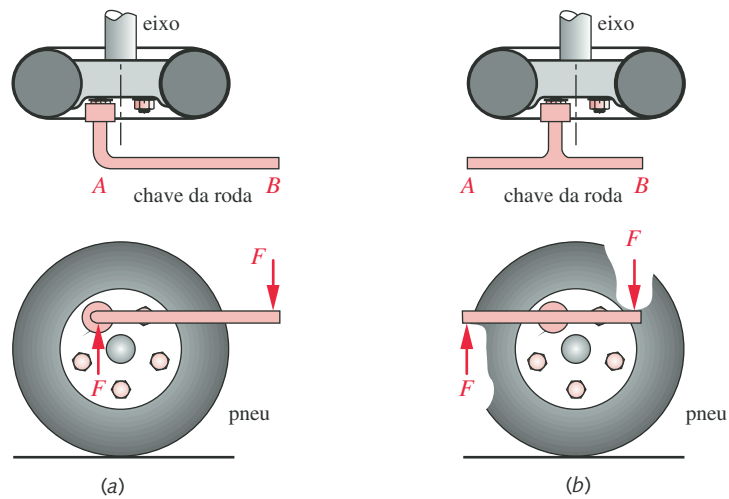



FIGURA P3-9

Problema 3-21.

FIGURA P3-10

Problema 3-22.

*3-22 Um patim *roller-blade* é mostrado na Figura P3-10. As rodas de poliuretano têm diâmetro de 72 mm. A combinação patim-bota-pé pesa 2 kg. O "coeficiente de mola" efetivo do sistema pessoa-patim é de 6000 N/m. Encontre as forças nos eixos das rodas para uma pessoa com 100 kg aterrissando de um salto de 0,5 m sobre um pé. (*a*) Pressuponha que as 4 rodas aterrissem simultaneamente. (*b*) Pressuponha que uma roda absorva toda a força de aterrissagem.

*3-23 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-11*a*. Encontre as reações de apoio, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-1.

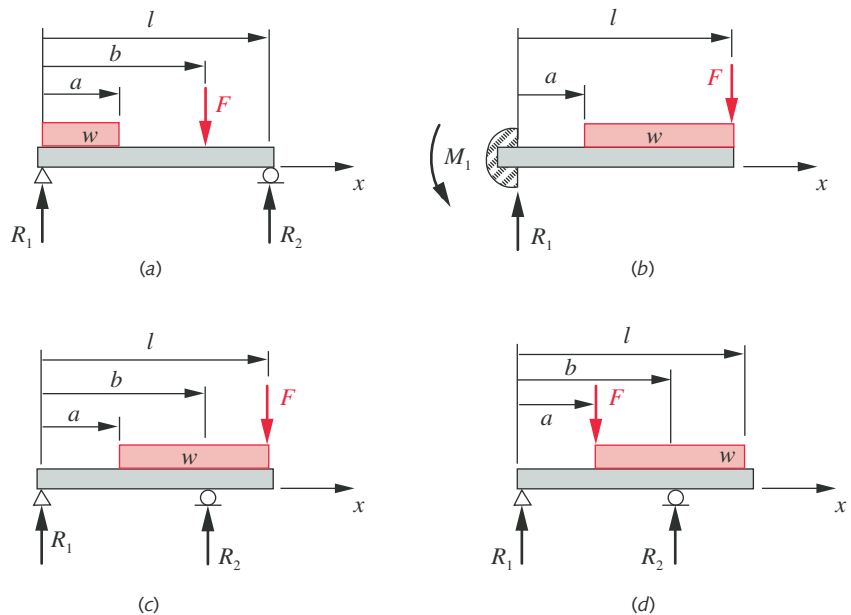



FIGURA P3-11

Vigas e carregamentos dos Problemas 3-23 a 3-26 – ver Tabela P3-1 para dados.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Os problemas com números em **negrito** são estendidos a problemas similares em capítulos posteriores com a mesma numeração. Por exemplo, o Problema 4-4 é baseado no Problema 3-4, etc.

Tabela P3-1 Dados dos problemas 3-23 a 3-26

Use somente dados relevantes para o problema em particular. Comprimentos em m, forças em N, *I* em m^4.

Linha	*l*	*a*	*b*	*w**	*F*	*I*	*c*	*E*
a	1,00	0,40	0,60	200	500	2,85*E*–08	2,00*E*–02	aço
b	0,70	0,20	0,40	80	850	1,70*E*–08	1,00*E*–02	aço
c	0,30	0,10	0,20	500	450	4,70*E*–09	1,25*E*–02	aço
d	0,80	0,50	0,60	65	250	4,90*E*–09	1,10*E*–02	aço
e	0,85	0,35	0,50	96	750	1,80*E*–08	9,00*E*–03	aço
f	0,50	0,18	0,40	450	950	1,17*E*–08	1,00*E*–02	aço
g	0,60	0,28	0,50	250	250	3,20*E*–09	7,50*E*–03	aço
h	0,20	0,10	0,13	400	500	4,00*E*–09	5,00*E*–03	alumínio
i	0,40	0,15	0,30	50	200	2,75*E*–09	5,00*E*–03	alumínio
j	0,20	0,10	0,15	150	80	6,50*E*–10	5,50*E*–03	alumínio
k	0,40	0,16	0,30	70	880	4,30*E*–08	1,45*E*–02	alumínio
l	0,90	0,25	0,80	90	600	4,20*E*–08	7,50*E*–03	alumínio
m	0,70	0,10	0,60	80	500	2,10*E*–08	6,50*E*–03	alumínio
n	0,85	0,15	0,70	60	120	7,90*E*–09	1,00*E*–02	alumínio

*Observe que *w* é uma força unitária N/m.

***3-24** Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-11*b*. Encontre as reações de apoio, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-1.

***3-25** Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-11*c*. Encontre as reações de apoio, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-1.

3-26 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-11*d*. Encontre as reações de apoio, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-1.

***3-27** Um suporte para o rolo de papel do Problema 3-18 é mostrado na Figura P3-12. Determine as reações no engastamento e desenhe os diagramas de força cortante e momento fletor para o mandril que se estende até 50% dentro do rolo.

3-28 A Figura P3-13 mostra uma empilhadeira transpondo uma rampa de 15° de inclinação em direção a uma plataforma de carregamento de 4 ft de altura. A empilhadeira pesa 5000 lb e tem uma distância entre eixos de 42 in. Determine as reações de apoio e desenhe os diagramas de força cortante e momento fletor para o pior caso de carregamento em que a empilhadeira sobe a rampa.

3-29 Utilize o modelo Case 1A para o Estudo de Caso 1A (no CD-ROM) e mova o ponto de aplicação da força manual ao longo da alavanca mudando os valores de $\mathbf{R}_{b2}$, recalcule e observe as mudanças nas forças e momentos.

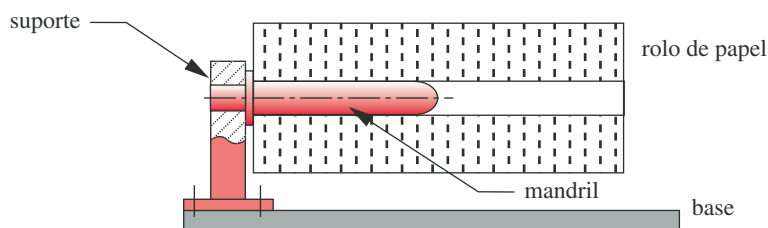



FIGURA P3-12

Problema 3-27.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

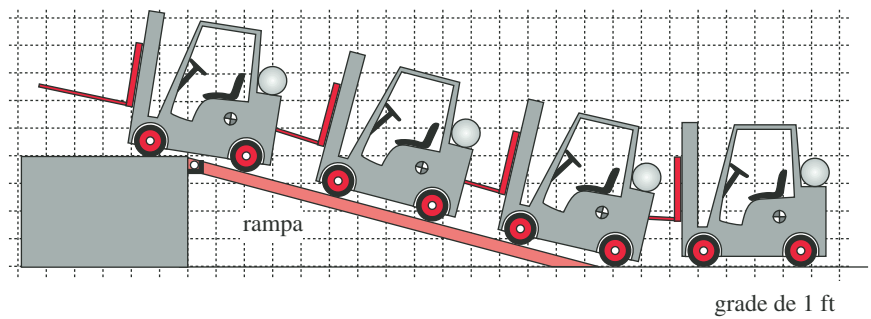



FIGURA P3-13

Problema 3-28.

3-30 Utilize o modelo Case 2A (no CD-ROM) para o Estudo de Caso 2A e mova o ponto de aplicação da força de aperto aplicada pela mão, mudando os valores de $\mathbf{R}_h$, recalcule e observe as mudanças nas forças e momentos.

3-31 Utilize o modelo Case 3A (no CD-ROM) para o Estudo de Caso 3A e mova o ponto de aplicação de **P** ao longo da direção *x*, recalcule e observe as mudanças nas forças e nos momentos nas conexões. O que acontece quando a força vertical **P** é centrada na conexão 3? Além disso, mude o ângulo da força aplicada **P** para criar uma componente *x* e observe os efeitos sobre as forças e momentos nos elementos.

3-32 A Figura P3-14 mostra o braço de um camo-seguidor. Se a carga é P = 200 lb, que força de mola é necessária na extremidade direita para manter uma carga mínima entre o camo e o seguidor de 25 lb? Encontre a máxima força cortante e o máximo momento fletor no braço do seguidor. Desenhe os diagramas de força cortante e momento fletor.

3-33 Escreva um programa de computador ou um modelo em um solucionador de equações para calcular todas as funções singularidade listadas nas Equações 3.17. Implemente-as como funções que possam ser chamadas a partir de qualquer outro programa ou modelo.

3-34 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-15. Encontre as reações de apoio, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

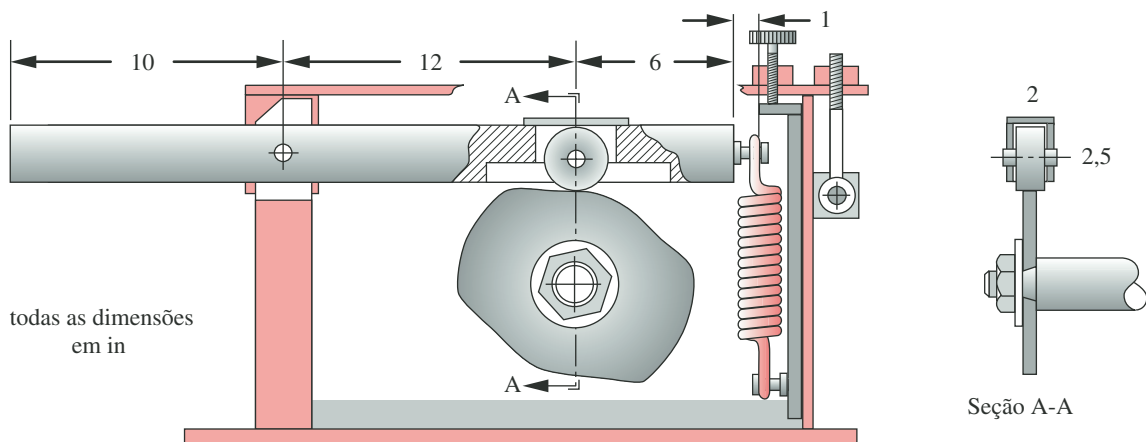



FIGURA P3-14

Braço de camo-seguidor com mola de retorno helicoidal.

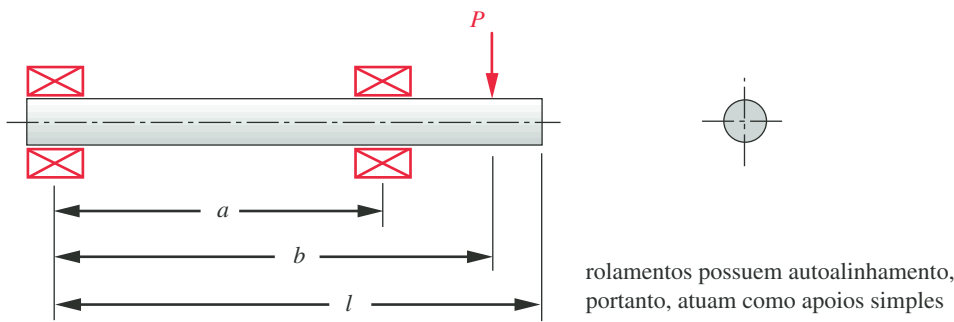



FIGURA P3-15

Problemas 3-34 e 3-35.

*3-35 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-15. Escreva um programa de computador ou modelo em um solucionador de equações para obter as reações de apoio e calcular e desenhar as funções carregamento, força cortante e momento fletor. Teste o programa com os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

3-36 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-16. Encontre as reações de apoio, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

3-37 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-16. Escreva um programa de computador ou modelo em um solucionador de equações para obter as reações e calcular e desenhar as funções carregamento, força cortante e momento fletor. Teste o programa com os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

3-38 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-17. Encontre as reações, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

3-39 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-17. Escreva um programa de computador ou modelo em um solucionador de equações para obter as reações e calcular e desenhar as funções carregamento, força cortante e momento fletor. Teste o programa com os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

3-40 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-18. Encontre as reações, a máxima força cortante e o máximo momento fletor para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

3-41 Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P3-18. Escreva um programa de computador ou modelo em um solucionador de equações para obter as reações e calcular e desenhar as funções carregamento, força cortante e momento fletor. Teste o programa com os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P3-2.

Tabela P3-2 Dados para os Problemas 3-34 a 3-41

Linha	*l* (in)	*a* (in)	*b* (in)	*P* (lb) ou *p* (lb/in)
a	20	16	18	1000
b	12	2	7	500
c	14	4	12	750
d	8	4	8	1000
e	17	6	12	1500
f	24	16	22	750

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

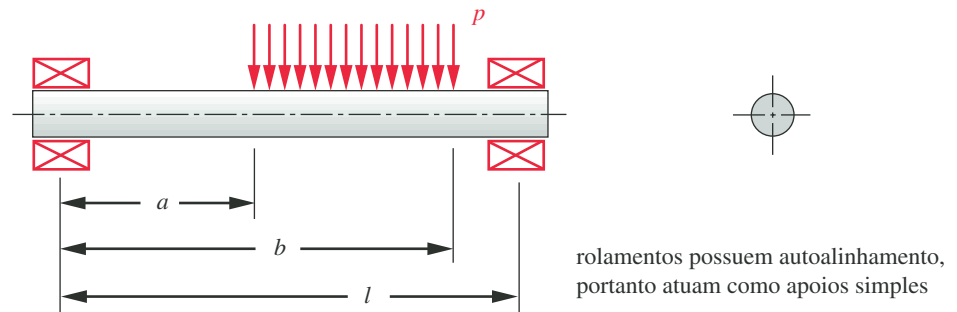



FIGURA P3-16

Problemas 3-36 e 3-37.

Tabela P3-3
Problema 3-44

R_{12}	13,20 in @ 135°
R_{14}	79,22 in @ 196°
R_{32}	0,80 in @ 45°
R_{34}	32,00 in @ 169°
R_P	124,44 in @ 185°
F_{cabo}	2970 lb
W_2	598 lb
W_4	2706 lb
θ_3	98,5°

3-42 Um barco de 1000 kg alcança a velocidade de 16 kph no instante em que é eliminado o afrouxamento da corda de 100 m de comprimento ligada a uma prancha de surfe carregando um passageiro de 100 kg. Se a corda tem $k = 5$ N/m, qual é a força dinâmica exercida na prancha?

3-43 A Figura P3-19 mostra uma bomba de vareta de sucção de petróleo. Na posição mostrada, desenhe diagramas de corpo livre da manivela (2), da biela (3) e da viga transportadora (4) similares àqueles utilizados nos Estudos de Caso 1A e 2A. Considere que a manivela se movimenta de forma lenta e despreze a aceleração. Inclua a ação do peso sobre o CG da viga transportadora e da manivela, mas não sobre a biela.

3-44 No Problema 3-43, considerando os dados da Tabela P3-3, determine a força do pino sobre a viga transportadora, a biela e a manivela e o torque de reação da manivela.

3-45 A Figura P3-20 mostra o mecanismo do compartimento de carga na cabine de um avião. Para a posição mostrada, desenhe um diagrama de corpo livre dos corpos 2 e 4 e da porta (3) usando nomes de variáveis similares àqueles utilizados nos Estudos de Caso 1A e 2A. Existem paradas para evitar movimentos no sentido horário do corpo (e do corpo idêntico atrás dele, na outra extremidade da porta), o que resulta em forças horizontais aplicadas à porta em diferentes pontos. Assuma que o mecanismo é simétrico, de forma que o conjunto dos corpos 2 e 4 carrega metade do peso da porta. Despreze o peso dos corpos 2 e 4.

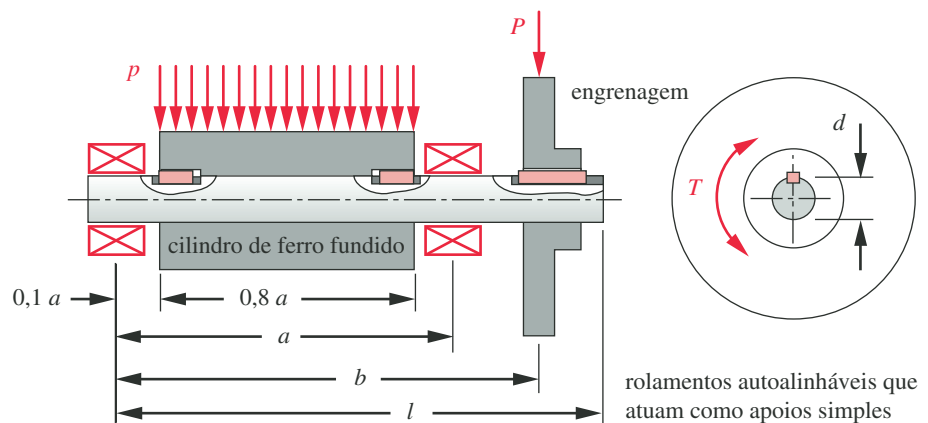



FIGURA P3-17

Problemas 3-38 e 3-39.

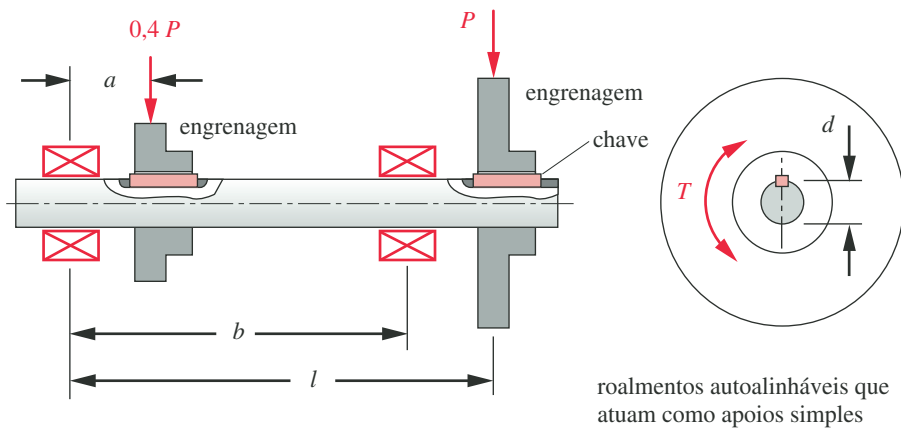



FIGURA P3-18

Problemas 3-40 e 3-41.

3-46 Considerando o mecanismo do compartimento superior de carga do Problema 3-45 e os dados da Tabela P3-4, determine a força do pino sobre a porta (3), os corpos 2 e 4 e a força de reativas em cada uma das paradas.

3-47 A suspensão das rodas de um determinado automóvel é composta por dois braços, a roda (com pneu), uma mola helicoidal e o amortecedor. A rigidez da suspensão é uma função da rigidez da mola helicoidal e da rigidez do pneu. Os braços A são projetados para dar à roda um deslocamento quase vertical à medida que o pneu passa por cima de buracos na rodovia. O conjunto inteiro pode ser modelado como um sistema mola-massa-amortecedor, como mostrado na Figura 3-15(b). Se a massa suspensa (massa de parte do veículo suportada pelo sistema de suspensão) pesa 675 lb, determine a rigidez de suspensão necessária para uma frequência natural não amortecida de 1,4 Hz. Qual é a deformação estática da suspensão à rigidez calculada?

Tabela P3-4
Problema 3-46

R_{23}	180 mm @ 160,345°
R_{43}	180 mm @ 27,862°
W_3	45 N
θ_2	85,879°
θ_4	172,352°

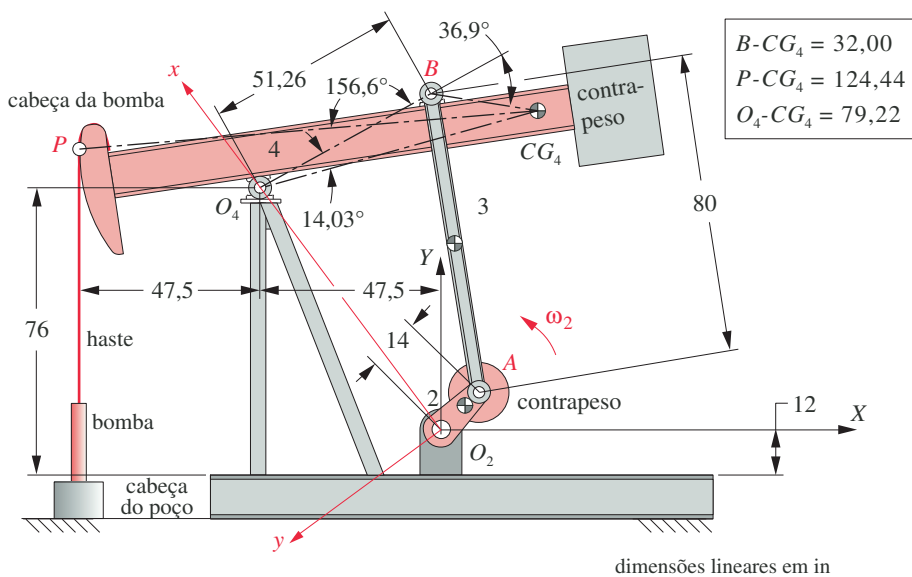



FIGURA P3-19

Problemas 3-43 e 3-44.

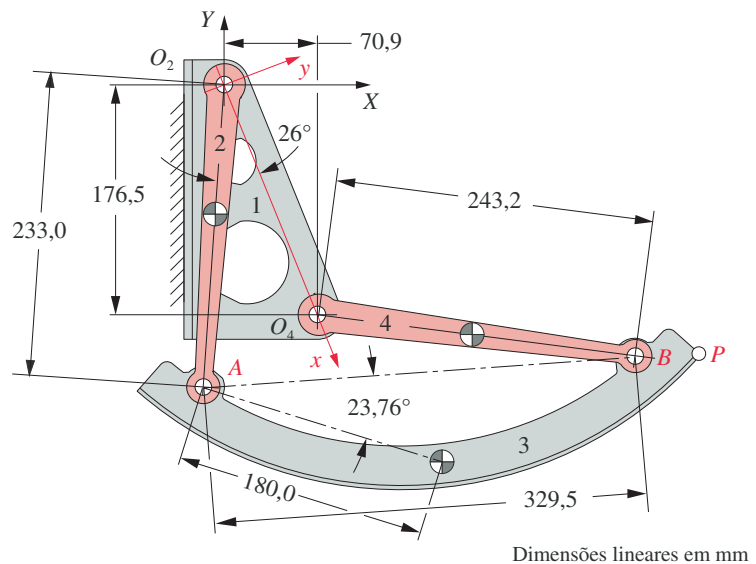



FIGURA P3-20

Problemas 3-45 e 46.

*3-48 O sistema de suspensão independente do Problema 3-47 tem um peso não suspenso (o peso do eixo, das rodas, dos braços A, etc.) de 106 lb. Calcule a frequência natural da massa não suspensa se a rigidez combinada dos pneus e da mola helicoidal (rigidez de suspensão) for de 1100 lb/in.

3-49 O sistema de suspensão independente do Problema 3-47 tem um peso suspenso de 675 lb e uma rigidez de suspensão de 135 lb/in. Calcule a frequência natural de amortecimento da massa suspensa se o coeficiente de amortecimento for uma constante de 12 lb-s/in.

3-50 A Figura P3-22 mostra um mecanismo de compactação de pó. Na posição mostrada, desenhe diagramas de corpo livro para o braço de entrada (2), a biela (3) e o calço de compactação (4) usando nomes de variáveis similares as dos Estudos

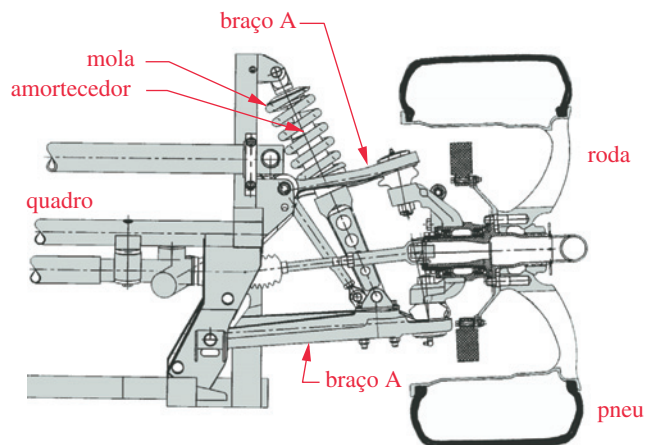
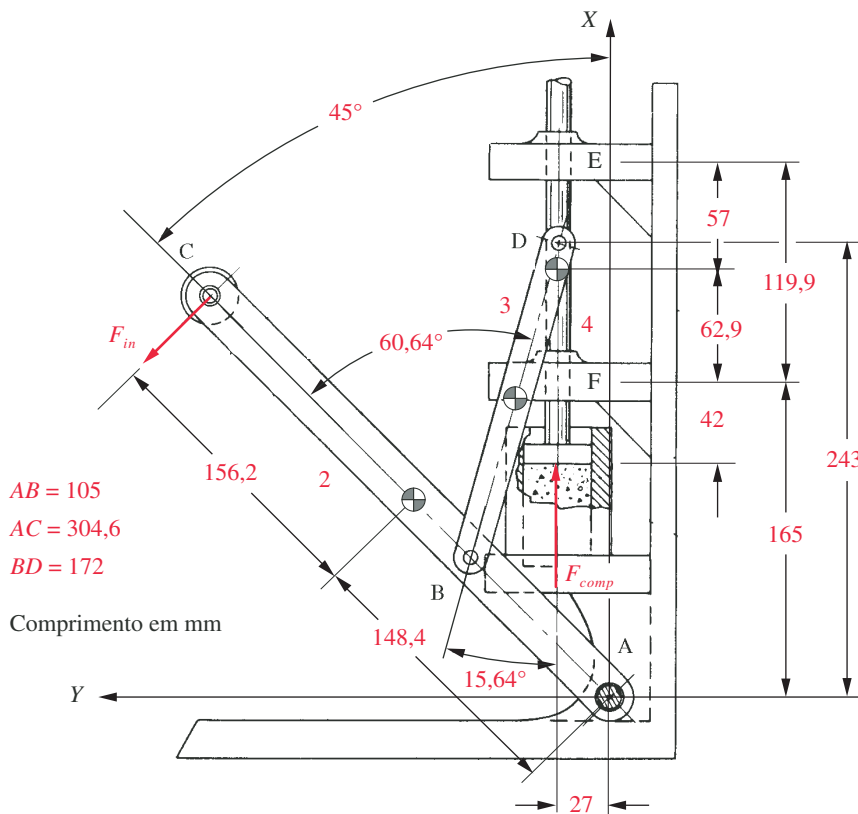



FIGURA P3-21

Problemas 3-47 a 49, Suspensão Viper - Cortesia de DaimlerChrysler Corporation

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

FIGURAA P3-22

Problemas 3-50 e 3-51.

	Tabela P3-5 Problema 3-51
R_{12}	148,4 mm @ 315°
R_{14E}	57,0 mm @ 90°
R_{14F}	62,9 mm @ 270°
R_{32}	42,9 mm @ 74,36°
R_{23}	87,6 mm @ 254,36°
R_{34}	15,0 mm @ 90°
R_{43}	87,6 mm @ 74,36°
R_{in}	152,6 mm @ 225°
R_P	105,0 mm @ 270°
F_{comp}	100 N
θ_3	254,36°

de Caso 1A e 2A. Assuma que o braço de entrada movimenta-se tão lentamente que a aceleração pode ser desprezada. Ignore o peso do braço, da biela e do calço de compactação. Despreze o atrito. Todos os corpos são simétricos com CG no centro.

3-51 Para o mecanismo de compactação do Problema 3-50 e os dados da Tabela P3-5, determine as forças de pinos na RAM de compactação, nabiela, e no braço de entrada. Os vetores de posição (R_{xx}) na tabela indicam pontos de aplicação de força em uma conexão em relação ao CG da conexão em que a força atua. Todos as conexões são simétricas com CG no centro.

3-52 A Figura P3-23 mostra uma barra de direção do mecanismo biela-manivela. Para a posição mostrada, desenhe diagramas de corpo livre das conexões 2 a 6, utilizando nomes de variáveis semelhantes aos utilizados nos Estudos de Caso 1A e 2A. Assuma que a manivela gira lentamente e que sua aceleração pode ser desprezada. Ignore os pesos das conexões e quaisquer forças de atrito ou torques. Todas as conexões são simétricas com CG no centro.

3-53 Com o mecanismo biela-manivela do Problema 3-52 e os dados da Tabela P3-6, determine as forças nos pinos da barra, das bielas e das manivelas e do binário de reação sobre a manivela. Os vetores de posição (R_{xx}) na tabela indicam pontos de aplicação de força em uma conexão em relação ao CG da conexão em que a força atua. Todos as conexões são simétricas com CG no centro.

	Tabela P3-6 Problema 3-53
R_{12}	63,5 mm @ 45,38°
R_{14}	93,6 mm @ –55,89°
R_{23}	63,5 mm @ 267,80°
R_{32}	63,5 mm @ 225,38°
R_{34}	103,5 mm @ 202,68°
R_{43}	63,5 mm @ 87,80°
R_{45}	190,5 mm @ 156,65°
R_{54}	103,5 mm @ 45,34°
R_{65}	190,5 mm @ –23,35°
F_P	85 N
θ_3	87,80°
θ_5	156,65°

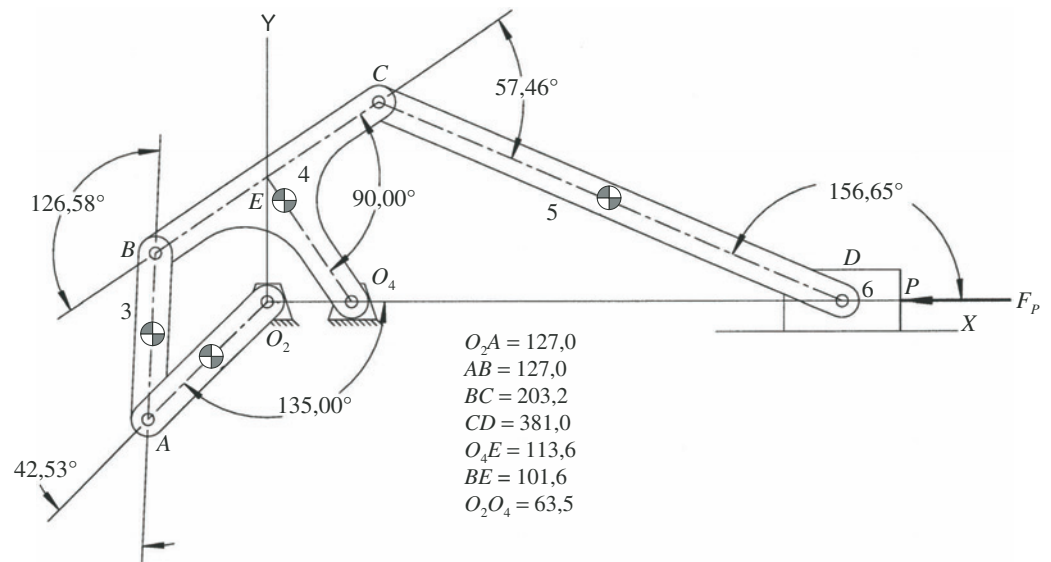



FIGURA P3-23

Problemas 3-52 e 3-53.

4

TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DEFLEXÃO

Não é conhecer muito, mas o que é útil, que torna um homem sábio.
Thomas Fuller, M.D.

4.0 INTRODUÇÃO

Você provavelmente já cursou uma disciplina de análise de tensões (talvez chamada de *Resistência dos Materiais* ou *Mecânica dos Materiais*) e, portanto, deve entender os fundamentos desse assunto. Entretanto, este capítulo apresenta uma revisão dos princípios básicos, de modo a servir de preparação prévia para o tópico de análise de fadiga dos capítulos posteriores. Tensão e deformação foram discutidas no Capítulo 2 com relação às propriedades dos materiais, mas foram parcialmente definidas naquela conjuntura. Neste capítulo, apresentaremos uma definição mais precisa sobre o que significam os termos tensão, deformação e deflexão.

A Tabela 4-0 mostra as variáveis utilizadas neste capítulo e faz referência às equações, tabelas ou seções nas quais elas são usadas. No final do capítulo, uma seção de resumo é incluída, a qual agrupa as equações significativas deste capítulo para fácil referência e identifica a seção na qual podem ser encontradas.

4.1 TENSÃO

A tensão foi definida no Capítulo 2 como força por unidade de área com unidades de psi ou MPa. Em um corpo sujeito a algumas forças, a tensão é geralmente distribuída segundo uma função continuamente variável dentro de uma porção contínua do material. Todo elemento infinitesimal do material pode concebivelmente experimentar diferentes tensões ao mesmo tempo. Portanto, devemos olhar as tensões atuando em elementos extremamente pequenos dentro do corpo. Esses elementos infinitesimais são tipicamente modelados como cubos, como mostra a Figura 4-1. Considera-se que as componentes de tensão atuam sobre as faces destes cubos de duas maneiras diferentes. As **tensões normais** atuam na direção perpendicular (isto é, normal) à face do cubo e tendem a puxá-lo (tensão

Tabela 4-0 Variáveis utilizadas neste capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área	in^2	m^2	Seções 4.7 - 4.9, 4.11
b	largura da seção transversal da viga	in	m	Seção 4.9
c	distância até a fibra externa – viga reta	in	m	Equação 4.11*b*
c_i	distância até a fibra interna – viga curva	in	m	Equação 4.12
c_o	distância até a fibra externa – viga curva	in	m	Equação 4.12
d	diâmetro da seção transversal	in	m	Seções 4.10, 4.11
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	Seções 4.7 - 4.12
e	excentricidade de uma coluna	in	m	Seção 4.14
e	deslocamento da linha neutra – viga curva	in	m	Seção 4.9, Equação 4.12*a*
F	força ou carga	lb	N	Seção 4.11
G	módulo de elasticidade transversal	psi	Pa	Seção 4.11
h	altura de seção transversal de viga	in	m	Seção 4.9
I	momento de inércia	in^4	m^4	Equação 4.11*a*
K	parâmetro geométrico – torção	in^4	m^4	Equação 4.26*b*, Tabela 4-7
k	raio de giração	in	m	Seção 4.16
K_t	fator geom. de conc. de tensão – tensão normal	nenhuma	nenhuma	Seção 4.15
K_{ts}	fator geom. de conc. de tensão – tensão de cisalham.	nenhuma	nenhuma	Seção 4.15
l	comprimento	in	m	Seções 4.7 - 4.12
M	momento, função momento	lb-in	N-m	Seção 4.9
P	força ou carga	lb	N	Seção 4.7
P_{cr}	carga crítica de flambagem	lb	N	Seção 4.16
q	função carregamento distribuído	lb	N	Seção 4.10
Q	momento estático de área, de primeira ordem	in^3	m^3	Equação 4.13
Q	parâmetro geométrico – torção	in^3	m^3	Equação 4.26*a*, Tabela 4-3
r	raio – geral	in	m	Seção 4.9, Equação 4.12
r_i	raio interno de viga curva	in	m	Equação 4.12
r_o	raio externo de viga curva	in	m	Equação 4.12
S_r	índice de esbeltez – coluna	nenhuma	nenhuma	Seção 4.16
S_y	limite de escoamento	psi	Pa	Seção 4.16
T	torque ou momento torçor	lb-in	N-m	Seção 4.12
V	função cortante de viga	lb	N	Seções 4.9, 4.10
x	variável generalizada de comprimento	in	m	Seção 4.10
y	distância até a linha neutra – viga	in	m	Equação 4.11*a*
y	deflexão – geral	in	m	Seções 4.10, 4.14
Z	módulo de resistência da seção	in^3	m^3	Equação 4.11*d*
x, y, z	coordenadas generalizadas	qualquer	qualquer	Seções 4.1, 4.2
ε	deformação relativa ou simplesmente deformação	nenhuma	nenhuma	Seção 4.2
θ	rotação ou inclinação da viga	rad	rad	Seção 4.10
θ	deformação angular, giro na torção	rad	rad	Seção 4.12

Tabela 4-0 Variáveis utilizadas neste capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
σ	tensão normal	psi	Pa	Seção 4.1
σ_1	tensão principal	psi	Pa	Seção 4.3
σ_2	tensão principal	psi	Pa	Seção 4.3
σ_3	tensão principal	psi	Pa	Seção 4.3
τ	tensão de cisalhamento	psi	Pa	Seção 4.1
τ_{13}	máxima tensão de cisalhamento	psi	Pa	Seção 4.3
τ_{21}	tensão de cisalhamento principal	psi	Pa	Seção 4.3
τ_{32}	tensão de cisalhamento principal	psi	Pa	Seção 4.3

normal de tração) ou a empurrá-lo (tensão normal de compressão). As **tensões de cisalhamento** atuam na direção paralela às faces dos cubos, em pares (binários) sobre faces opostas, o que tende a distorcer o cubo em um formato romboidal. Isso é o mesmo que a segurar duas fatias de pão de um sanduíche com manteiga e deslizá-los em direções opostas. A manteiga será então cisalhada. Essas componentes normal e cisalhante da tensão atuando em um elemento infinitesimal correspondem aos termos de um **tensor**.*

A tensão é um tensor de segunda ordem† e, portanto, requer nove valores ou componentes que o descrevam em três dimensões. O tensor de tensão 3D pode ser expresso como a matriz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.1a}$$

onde a notação para cada componente de tensão contém três elementos, uma magnitude (σ ou τ), a superfície onde atua, definida pela direção ao plano correspondente (primeiro subscrito), e uma direção de ação (segundo subscrito). Usaremos σ para denotar as tensões normais e τ para as tensões de cisalhamento.

Muitos elementos de máquinas estão sujeitos a estados de tensão tridimensionais e, portanto, requerem o tensor de tensão da Equação 4.1*a*. Entretanto, há alguns casos especiais que podem ser tratados como estados de tensão bidimensionais.

O tensor de tensão em 2D é:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{4.1b}$$

A Figura 4-1 mostra um cubo§ infinitesimal de material retirado de dentro de uma porção contínua do material de um corpo sujeito a algumas tensões 3D. As faces deste cubo infinitesimal são paralelas a um sistema de eixos *xyz* orientado convenientemente. A orientação de cada face é definida pelo vetor normal a sua superfície‡¶, como mostra a Figura 4-1*a*. A face *x* tem a normal a sua superfície paralela ao eixo *x*, etc. Note que há, portanto, duas faces *x*, duas faces *y* e duas faces *z*, sendo uma positiva e a outra negativa, definidas de acordo com o sentido do versor normal à superfície.

* Para uma discussão sobre notação de tensor, ver C. R. Wylie and L. C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1982.

† É mais precisamente um tensor para coordenadas Cartesianas retilíneas. A notação mais geral de tensor para sistemas de coordenada curvilínea não será usada aqui.

§ N. de R. T.: O autor está utilizando o termo "cubo" querendo dizer um paralelepípedo retangular. Isso porque, rigorosamente falando, um cubo tem arestas de mesmo comprimento, e este não é o caso aqui.

‡ Um vetor normal à superfície é definido como um vetor que "sai da superfície do sólido, na direção normal a essa superfície". Seu sinal é definido de acordo com o sentido desse vetor normal à superfície, no sistema de coordenadas local.

¶ N. de R. T.: A Equação 4.1a mostra de forma mais correta um tensor para coordenadas cartesianas retilineas. A notação de tensor mais comum para sistemas de coordenadas curvilineas não será usada aqui.

(*a*) Versores normais à superfície (*b*) Componentes de tensão negativas (*c*) Componentes de tensão positivas

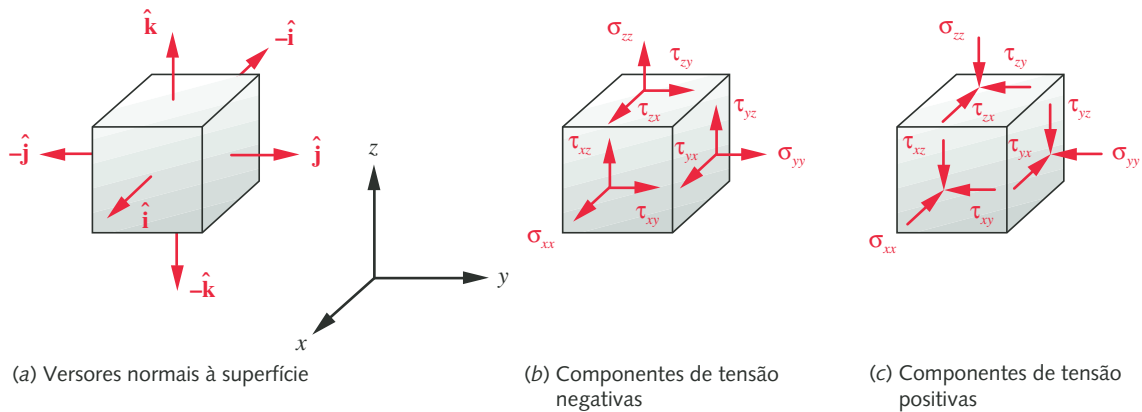



FIGURA 4-1

O cubo de tensão, seus versores normais à superfície e suas componentes de tensão.

As nove componentes de tensão atuam sobre as superfícies deste elemento infinitesimal como mostra a Figura 4-1*b* e *c*. As componentes σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{zz} são as tensões normais, assim chamadas porque atuam, respectivamente, nas direções normais às superfícies *x*, *y* e *z* do cubo. As componentes τ_{xy} e τ_{xz}, por exemplo, são tensões de cisalhamento que atuam na face *x* e cujas direções de ação são paralelas aos eixos *y* e *z*, respectivamente. O sinal de cada uma dessas componentes é definido como positivo se os sinais da normal à superfície e da direção da tensão forem os mesmos, e negativo se eles forem diferentes. Portanto, as componentes mostradas na Figura 4-1*b* são todas positivas, pois elas estão atuando em faces positivas do cubo e suas direções também são positivas. As componentes mostradas na Figura 4-1*c* são todas negativas, porque elas estão atuando em faces positivas do cubo e suas direções são negativas. Essa convenção de sinais faz com que tensões normais de tração sejam positivas e tensões normais de compressão sejam negativas.

Para o caso 2D, apenas uma face do cubo de tensão pode ser desenhada. Se as direções *x* e *y* são mantidas e a *z* é eliminada, olhamos na direção normal do plano *xy* do cubo da Figura 4-1 e vemos as tensões mostradas na Figura 4-2, atuando nas faces do cubo que não são vistas. O leitor poderia confirmar que as componentes de tensão mostradas na Figura 4-2 são todas positivas, de acordo com a convenção de sinais estabelecida acima.

FIGURA 4-2

Elemento de tensão bidimensional.

Observe que a definição da notação utilizando dois subscritos dada acima é consistente quando aplicada às tensões normais. Por exemplo, a tensão normal σ_{xx} atua sobre a face *x* e também está na direção *x*. Uma vez que os subscritos são simplesmente repetidos para tensões normais, é comum eliminar um deles e se referir às componentes normais simplesmente por σ_x, σ_y e σ_z. Ambos os subscritos são necessários para definir as componentes de tensão de cisalhamento e eles serão mantidos. Também pode ser mostrado[1] que o tensor de tensão é simétrico, o que significa que

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Isso reduz o número de componentes de tensão a serem calculadas.

4.2 DEFORMAÇÃO

Tensão e deformação[§] são linearmente relacionadas pela lei de Hooke na região elástica da maioria dos materiais de engenharia, como foi discutido no Capítulo 2. A deformação também é um tensor de segunda ordem e pode ser expressa para o caso 3D como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.3a}$$

e para o caso 2D como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \tag{4.3b}$$

onde ε representa uma deformação normal ou de cisalhamento, sendo as duas diferenciadas por seus subscritos. Também simplificaremos por conveniência os subscritos repetidos das deformações normais para ε_x, ε_y e ε_z, enquanto mantemos os dois subscritos para identificar deformações de cisalhamento. As relações simétricas de tensão de cisalhamento mostradas na Equação 4.2 também se aplicam aos componentes de tensão.

(*a*) Tensões aplicadas

(*b*) Tensões normais principais

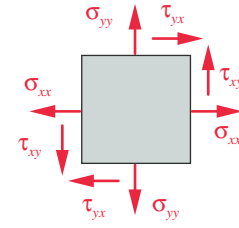
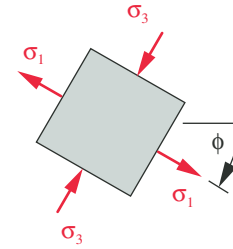
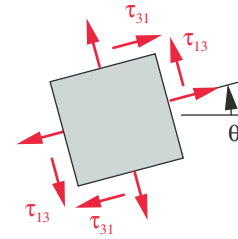
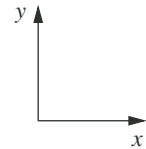
(*c*) Tensões de cisalhamento principais

FIGURA 4-3

Tensões principais em um elemento de tensão bidimensional.

4.3 TENSÕES PRINCIPAIS

Os sistemas de eixos empregados nas Figuras 4-1 e 4-2 são arbitrários e geralmente escolhidos por conveniência para calcular as tensões aplicadas. Para qualquer combinação particular de tensões aplicadas, haverá uma distribuição contínua deste campo de tensão em torno de qualquer ponto analisado. As tensões normal e de cisalhamento no ponto irão variar com a direção em qualquer sistema de coordenada escolhido. Haverá sempre planos nos quais as componentes de tensão de cisalhamento serão nulas. As tensões normais atuando nesses planos são chamadas de **tensões principais**. Os planos nos quais essas tensões principais atuam são chamados de **planos principais**. As direções da superfície normais aos planos principais são chamadas de **eixos principais**, e as tensões normais atuando nessas direções são as **tensões normais principais**. Haverá também outro conjunto de eixos mutuamente ortogonais, ao longo dos quais as tensões de cisalhamento serão máximas. As **tensões de cisalhamento principais** atuam em um conjunto de planos que formam ângulos de 45° com os planos das tensões normais principais. Os planos principais e as tensões principais para o caso 2D da Figura 4-2 são mostrados na Figura 4-3.

Considerando que, do ponto de vista da engenharia, estamos mais preocupados em projetar elementos de máquinas de modo que eles não falhem, e considerando também que falhas ocorrem quando a tensão em algum ponto excede certo valor de segurança, precisamos encontrar as maiores tensões (tanto normal como de cisalhamento) que ocorrem em qualquer lugar no contínuo do material do elemento de máquina. Estamos menos interessados nas direções dessas tensões do que nas suas magnitudes, contanto que o material possa ser considerado pelo menos macroscopicamente isotrópico, apresentando, desse modo, propriedades de resistência uniformes em todas as direções. A maioria dos metais e muitos outros materiais de engenharia estão de acordo com esse critério, embora madeira e materiais compósitos sejam exceções notáveis.

[§] N. de R. T.: O termo *strain* em inglês é deformação relativa ou específica ou unitária. Porém, frequentemente dizemos "deformação" apenas, quando não há possibilidade de confusão.

A expressão que relaciona as tensões aplicadas às tensões principais é

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4a}$$

onde σ é a magnitude da tensão principal e n_x, n_y e n_z são as componentes do versor **n**, que é normal ao plano principal:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 1 \\ \hat{\mathbf{n}} &= n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}} + n_z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{4.4b}$$

Para que a solução da Equação 4.4*a* exista, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser zero. Expandindo esse determinante e igualando a zero, obtemos

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0 \tag{4.4b}$$

onde

$$\begin{aligned} C_2 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ C_1 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \\ C_0 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

A Equação 4.4*c* é polinomial cúbica em σ. Os coeficientes C_0, C_1 e C_2 são chamados de invariantes de tensor, porque eles têm os mesmos valores, independentemente da escolha inicial dos eixos *xyz*, em relação aos quais as tensões aplicadas foram medidas ou calculadas. As unidades de C_2 são psi (MPa), de C_1 psi^2 (MPa^2) e de C_0 psi^3 (MPa^3). As três tensões principais (normais) σ_1, σ_2, σ_3 são as três raízes desse polinômio cúbico. As raízes desse polinômio são sempre reais[2] e são geralmente ordenadas de modo que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Se necessário, as direções dos versores das tensões principais podem ser obtidas substituindo cada raiz da Equação 4.4*c* em 4.4*a* e resolvendo para n_x, n_y e n_z para cada uma das três tensões principais. As direções das três tensões principais são mutuamente ortogonais.

As tensões de cisalhamento principais podem ser obtidas a partir dos valores das tensões normais principais usando

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \\ \tau_{21} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} \\ \tau_{32} &= \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Se as tensões normais principais tiverem sido ordenadas como mostrado acima, então $\tau_{max} = \tau_{13}$. As direções dos planos das tensões de cisalhamento principais estão a 45° das direções dos planos das tensões normais principais e também são mutuamente ortogonais.

A solução da Equação 4.4*c* para suas três raízes pode ser feita trigonometricamente pelo método de Viete* ou usando um algoritmo iterativo de obtenção de raízes. O arquivo fornecido STRESS3D resolve a Equação 4.4*c* e encontra as três raízes das tensões principais pelo método de Viete e as ordena conforme a convenção acima. O STRESS3D também computa a função tensão (Equação 4.4*c*) para uma lista de valores de σ definidos pelo usuário e então plota essa função. Os cruzamentos da função, que correspondem às raízes, podem ser vistos na plotagem. A Figura 4-4 mostra a função tensão para um conjunto arbitrário de

* Ver *Numerical Recipes* por W. H. Press et al., Cambridge Univ. Press, 1986, p. 146, ou *Standard Mathematical Tables*, CRC Press, 22nd ed., 1974, p. 104, ou qualquer coleção de fórmulas matemáticas padrão.

tensões aplicadas, plotada sobre um domínio de valores de σ que inclui todas as três raízes. A Tabela 4-1 mostra os resultados dos cálculos.

Para o caso especial de um estado de tensão bidimensional, as Equações 4.4*c* para tensão principal se reduzem a*

$$\sigma_a, \sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_c = 0 \tag{4.6a}$$

FIGURA 4-4

As três raízes da função de tensão para o estado plano de tensões.

As duas raízes não nulas calculadas a partir da Equação 4.6*a* são temporariamente nomeadas σ_a e σ_b, e a terceira raiz σ_c é sempre zero no caso 2D. Dependendo dos valores resultantes, as três raízes são então nomeadas de acordo com a convenção: raiz *algebricamente maior* = σ_1, *algebricamente menor* = σ_3 e *outra* = σ_2. Usando a Equação 4.6*a* para resolver o exemplo mostrado na Figura 4-4, seriam obtidos valores de $\sigma_1 = \sigma_a$, $\sigma_3 = \sigma_b$ e $\sigma_2 = \sigma_c = 0$, como nomeado na figura.† É claro que a Equação 4.4*c* para o caso 3D ainda pode ser usada para resolver qualquer caso bidimensional. Uma das três tensões principais encontradas seria, então, nula. O exemplo da Figura 4-4 é de um caso bidimensional resolvido com a Equação 4.4*c*. Observe a raiz em $\sigma = 0$.

Uma vez que as três tensões principais foram determinadas e ordenadas como descrito acima, a tensão de cisalhamento máxima é obtida a partir da Equação 4.5:

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \tag{4.6b}$$

4.4 ESTADO PLANO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

O estado genérico de tensão e deformação é tridimensional, mas existem algumas configurações geométricas particulares que podem ser tratadas de maneira diferente.

Estado plano de tensões

O estado de tensões bidimensional, ou biaxial, é também chamado de estado plano de tensões. O **estado plano de tensões** requer que uma das tensões principais seja igual a zero. Essa condição é bastante comum em algumas aplicações. Por

Tabela 4-1 Solução da função de tensão cúbica para o estado plano de tensões
Retirado do arquivo STRESS3D

Entrada	Variável	Saída	Unidade	Comentários
1000	σ_{xx}		psi	Tensão normal aplicada na direção x
–750	σ_{yy}		psi	Tensão normal aplicada na direção *y*
0	σ_{zz}		psi	Tensão normal aplicada na direção *z*
500	τ_{xy}		psi	Tensão de cisalhamento aplicada na direção *xy*
0	τ_{yz}		psi	Tensão de cisalhamento aplicada na direção *yz*
0	τ_{zx}		psi	Tensão de cisalhamento aplicada na direção *zx*
	C_2	250	psi	Coeficiente do termo σ_2
	C_1	1,0*E*6	psi	Coeficiente do termo σ_1
	C_0	0	psi	Coeficiente do termo σ_0
	σ_1	1133	psi	Tensão principal 1 (raiz #1)
	σ_2	0	psi	Tensão principal 2 (raiz #2)
	σ_3	–883	psi	Tensão principal 3 (raiz #3)

* As Equações 4.6 também podem ser usadas quando uma tensão principal é não nula mas tem a mesma direção de um dos eixos do sistema de coordenadas *xyz* escolhido para o cálculo. O cubo de tensão da Figura 4-2 é então rotacionado em relação a um eixo principal para se determinar os ângulos dos outros dois planos principais.

† Se a convenção de notação 3D for estritamente observada no caso 2D, então algumas vezes as duas tensões principais não nulas aparecerão como sendo σ_1 e σ_3, caso elas tenham sinais opostos (como no Exemplo 4-1). Outras vezes, elas serão σ_1 e σ_2, se ambas forem positivas e a menor (σ_3) for nula (como no Exemplo 4-2). Uma terceira possibilidade é aquela em que as duas tensões principais não nulas são negativas (compressão) e a tensão algebricamente maior (σ_1) é então zero. A Equação 4.6*a* chama arbitrariamente as duas tensões principais 2D não nulas de σ_a e σ_b, com a outra remanescente (σ_c) reservada para ser a tensão nula do trio. A aplicação da convenção padrão pode resultar em se chamar σ_a e σ_b como uma das possíveis combinações σ_1 e σ_2, σ_1 e σ_3 ou σ_2 e σ_3, dependendo dos seus valores relativos. Ver Exemplos 4-1 e 4-2.

exemplo, uma chapa ou casca fina podem apresentar um estado de tensão plano em regiões distantes de suas extremidades (contornos) ou pontos de fixação. Esses casos podem ser tratados pela abordagem mais simples das Equações 4.6.

Estado plano de deformações

Existem deformações principais associadas com as tensões principais. Se uma dessas deformações (por exemplo, ε_3) for zero e as deformações restantes não variarem ao longo do eixo principal, $\mathbf{n}_3$, então tem-se um **estado plano de deformações**. Essa condição ocorre para geometrias em particular. Por exemplo, se uma barra prismática sólida e longa encontra-se carregada somente em sua direção transversal, as regiões internas à barra, distantes de qualquer uma das extremidades desta, estarão, essencialmente, submetidas a um valor de deformação igual a zero, na direção ao longo do eixo da barra (direção longitudinal); isto é, encontra-se em um estado plano de deformações. (Entretanto, a tensão não se anula na direção de deformação igual a zero.) Uma represa bastante extensa também pode ser caracterizada por um estado plano de deformações nas regiões bem distantes de suas extremidades ou base, as quais se encontram ligadas a estruturas vizinhas.

4.5 CÍRCULOS DE MOHR

Os círculos de Mohr* têm fornecido, por muito tempo, um meio de se determinar uma solução gráfica para a Equação 4.6 e, também, de encontrar as tensões principais para os casos de estado plano de tensões. Muitos livros-texto de projeto de máquinas apresentam o método dos círculos de Mohr como uma técnica recomendada de solução para a determinação das tensões principais. Antes do advento das calculadoras programáveis e dos computadores, o método gráfico de Mohr era uma maneira prática e razoável para se resolver a Equação 4.6. Hoje em dia, no entanto, é mais prático determinar as tensões principais numericamente. Todavia, vamos apresentar o método gráfico por diversas razões. Primeiramente, ele serve como uma verificação rápida da solução numérica e é também o único método viável na ausência de energia elétrica para o computador ou se as baterias da calculadora perderem a carga. Além disso, o método gráfico é capaz de proporcionar uma apresentação visual do estado de tensões em um determinado ponto.

Os círculos de Mohr também são empregados nos casos de tensão tridimensional, mas o método de construção gráfica não se encontra disponível para criá-los diretamente a partir dos dados de tensão aplicada, a não ser no caso especial em que uma das tensões principais coincide com um dos eixos do sistema de coordenadas *xyz* escolhido, isto é, onde um dos planos é um plano de tensão principal. Entretanto, uma vez que as tensões principais são calculadas a partir da Equação 4.4*c*, utilizando uma técnica adequada para a obtenção de suas raízes, os círculos de Mohr 3D podem ser desenhados utilizando-se as tensões principais previamente calculadas. Um programa de computador chamado MOHR é fornecido no CD-ROM, em anexo, para este propósito. No caso especial das tensões 3D, no qual uma das tensões principais encontra-se ao longo de um dos eixos coordenados, os três círculos de Mohr podem ser construídos graficamente.

O plano de Mohr, no qual os círculos de Mohr são desenhados, é arranjado com os seus eixos mutuamente perpendiculares, apesar de o ângulo entre eles representar 180° no espaço real. Assim, todos os ângulos desenhados no plano de Mohr têm o seu valor dobrado em relação aos ângulos correspondentes no espaço real. A abscissa é o eixo de todas as tensões normais. As tensões normais aplicadas σ_x, σ_y e σ_z são plotadas ao longo desse eixo, e as tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 também têm seus valores determinados nesse eixo. O eixo das ordenadas corresponde ao eixo de todas as tensões de cisalhamento. O mesmo é utilizado para a representação das tensões de cisalhamento aplicadas τ_{xy}, τ_{yx} e τ_{xz}, além da

* Criados pelo engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918). Seus círculos também são utilizados para a transformação de coordenadas das deformações, momentos de inércia e produtos de inércia de figuras planas.

determinação da tensão de cisalhamento máxima.* Mohr utilizou uma convenção de sinal para as tensões de cisalhamento que considera positivo os binários cisalhantes que giram no sentido horário, *o que* ***não é consistente*** *com a regra, agora padronizada, da mão direita.* Entretanto, a convenção com a mão esquerda é ainda utilizada para os seus círculos. A melhor maneira de demonstrar o uso dos círculos de Mohr é por meio de exemplos.

EXEMPLO 4-1

Determinação das tensões principais usando os círculos de Mohr

Problema **Um elemento em estado plano de tensão, como o da Figura 4-2, tem $\sigma_x = 40000$ psi, $\sigma_y = -20000$ psi e $\tau_{xy} = 30000$ psi no sentido anti-horário. Utilize os círculos de Mohr para determinar as tensões principais. Confira os resultados obtidos com um método numérico.**

Solução **Ver Figuras 4-2 e 4-5.**

1 Construa os eixos do plano de Mohr, conforme a Figura 4-5*b,* e denomine-os de σ e τ.

2 Coloque a tensão aplicada dada σ_x (segmento *OA)* em uma escala conveniente ao longo do eixo da tensão normal (horizontal). Observe que σ_x é uma tensão de tração (positiva) neste exemplo.

3 Coloque a tensão aplicada dada σ_y (segmento *OB)* em uma escala conveniente ao longo do eixo da tensão normal (horizontal). Observe que σ_y é uma tensão de compressão (negativa) neste exemplo.

4 A Figura 4-2 mostra que o par de tensões de cisalhamento τ_{xy} cria um binário que gira no sentido anti-horário no elemento de tensão. Esse binário é equilibrado pelo binário que gira no sentido horário definido pelas tensões de cisalhamento τ_{yx}. Lembre que ambas as tensões de cisalhamento, τ_{xy} e τ_{yx}, são iguais em magnitude, de acordo com a Equação 4.2, e são positivas, segundo a convenção de sinal para as tensões. Mas, em vez de usar essa convenção de sinal, elas são representadas no círculo de Mohr de acordo com o sentido da rotação que impõem ao elemento, utilizando-se da convenção de sinal (regra da mão esquerda) de Mohr (*horário* + e *anti-horário* –).

5 Desenhe uma linha vertical para baixo (*anti-horário* –) partindo de σ_x (segmento *AC*) para representar a magnitude, em escala, de τ_{xy}. Desenhe uma linha vertical para cima (*horário* +) partindo de σ_y (segmento *BD*) para representar a magnitude, em escala, de τ_{yx}.

6 O diâmetro de um dos círculos de Mohr corresponde à distância do ponto *C* até o ponto *D.* O segmento *AB* intercepta o segmento *CD* no ponto médio. Desenhe o círculo usando essa intersecção como centro.

7 Duas das três tensões normais principais são, então, determinadas pelas duas intersecções que o círculo de Mohr desenhado faz com o eixo das tensões normais nos pontos P_1 e P_3: $\sigma_1 = 52426$ psi em P_1 e $\sigma_3 = -32426$ psi em P_3.

8 Já que não há nenhuma tensão aplicada na direção *z* neste exemplo, tem-se um estado plano de tensões (caso 2D). A tensão principal σ_2 tem valor nulo e localiza-se no ponto *O,* que também é chamado de P_2.

9 Existem, ainda, dois outros círculos de Mohr para serem desenhados. Os três círculos de Mohr são definidos através dos diâmetros (σ_1-σ_3), (σ_1-σ_2) e (σ_2-σ_3), os quais correspondem aos segmentos de reta P_1P_3, P_2P_1 e P_2P_3 respectivamente. Os três círculos de Mohr são mostrados na Figura 4-5*c*.

* O fato de Mohr ter utilizado os mesmos eixos para a plotagem de mais de uma variável é uma das fontes de dúvidas dos estudantes quando se deparam pela primeira vez com o método. Basta lembrar que todos os σ's são plotados no eixo horizontal, quer sejam tensões normais aplicadas (σ_x, σ_y e σ_z), quer sejam tensões principais (σ_1, σ_2 e σ_3); já todos os τ's são plotados no eixo vertical, quer sejam tensões de cisalhamento aplicadas (τ_{xy}, etc.), quer sejam tensões máximas de cisalhamento (τ_{12}, etc.). Os eixos de Mohr **não** são eixos cartesianos convencionais.

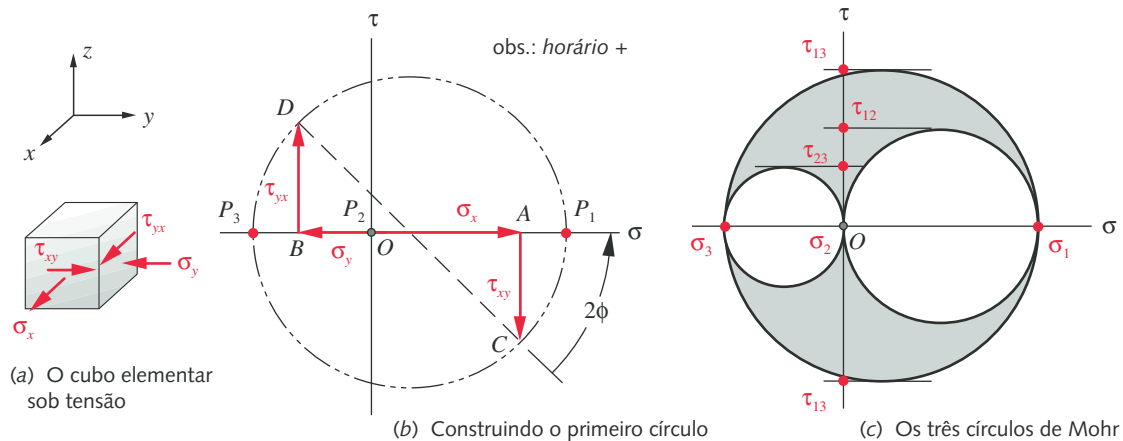



FIGURA 4-5

O cubo elementar sob tensão e os círculos de Mohr para o Exemplo 4-1.

10 Estenda linhas horizontais tangentes a partir dos pontos extremos superior e inferior de cada um dos círculos de Mohr até que interceptem o eixo das tensões de cisalhamento (eixo vertical). Isso determina os valores das tensões de cisalhamento principais associadas a cada par de tensão normal principal: $\tau_{13} = 42426$, $\tau_{12} = 26213$ e $\tau_{23} = 16213$ psi. Observe que apesar de existirem apenas duas tensões principais diferentes de zero, o número de tensões de cisalhamento principais não nulas é igual a três. Entretanto, somente a maior delas, $\tau_{max} = \tau_{13} = 42426$ psi, é de interesse para os propósitos de projeto.

11 Pode-se, também, determinar os ângulos (com relação aos eixos originais *xyz)* das tensões principais normais e de cisalhamento a partir do círculo de Mohr. Esses ângulos são apenas de interesse acadêmico se o material é considerado homogêneo e isotrópico. Se ele não for isotrópico, as propriedades do material dependem da direção e portanto passa a ser importante conhecer as direções das tensões principais. O ângulo $2\phi = -45°$ na Figura 4-5*a* representa a orientação do plano de tensão principal máxima com relação ao eixo *x* do sistema de coordenadas, definido no início deste exemplo. Observe que o segmento *DC* no plano de Mohr é o eixo *x* no espaço real e que os ângulos são medidos de acordo com a convenção da regra da mão esquerda de Mohr (*horário* +). Já que os ângulos no plano de Mohr são o dobro do valor no espaço real, o ângulo da tensão principal σ_1, com relação ao eixo *x* do espaço real, é $\phi = -22{,}5°$. A tensão σ_3 estará defasada 90° em relação a σ_1 e a tensão de cisalhamento máxima τ_{13} estará 45° defasada de σ_1 no espaço real.

Um programa de computador chamado MOHR foi escrito e está incluído no CD-ROM que acompanha este livro. O programa MOHR permite a entrada de qualquer conjunto de tensões aplicadas e calcula as tensões principais normais e de cisalhamento utilizando-se das Equações 4.4 e 4.5. O programa, então, desenha os círculos de Mohr e também exibe a função de tensão nas vizinhanças de suas três raízes, ou seja, as três tensões principais. Arquivos de dados que podem ser lidos por este programa também são fornecidos no disco. Abrindo-se o arquivo EX04-01 no MOHR é possível ver a solução analítica para o exemplo acima. Arquivos adicionais com o nome de EX04-01 podem ser usados com vários programas comerciais (identificados pelo sufixo) e também calculam as tensões principais e desenham o gráfico da função de tensão cúbica do Exemplo 4-1. Veja o CD que acompanha este livro.

A seguir, vamos alterar levemente o exemplo anterior para mostrar a necessidade de se desenhar os três círculos de Mohr, mesmo para os casos em que se tenha um estado plano de tensões. A mudança mais significativa faz com que as tensões aplicadas σ_x e σ_y sejam ambas positivas, em vez de terem sinais contrários.

EXEMPLO 4-2

Determinação das tensões principais em estado plano usando os círculos de Mohr

Problema **Um elemento em estado plano de tensão, como o da Figura 4-2, tem σ_x = 40000 psi, σ_y = 20000 psi e τ_{xy} = 10000 psi *anti-horário*. Utilize os círculos de Mohr para determinar as tensões principais. Confira os resultados obtidos com um método numérico.**

Solução **Ver Figuras 4-2 e 4-6.**

1 Construa os eixos do plano de Mohr, conforme a Figura 4-6, e chame-os de σ e τ.

2 Marque a tensão aplicada dada σ_x (segmento *OA*) em uma escala conveniente ao longo do eixo da tensão normal (horizontal). Observe que σ_x é uma tensão de tração (positiva) neste exemplo.

3 Marque a tensão aplicada dada σ_y (segmento *OB*) em uma escala conveniente ao longo do eixo da tensão normal (horizontal). Observe que σ_y também é uma tensão de tração (positiva) neste exemplo e que, portanto, encontra-se na mesma direção de σ_x, ou seja, ao longo do eixo σ.

4 A Figura 4-2 mostra que o par de tensões de cisalhamento τ_{xy} cria um binário que gira no sentido *anti-horário* no elemento de tensão. Esse binário é equilibrado pelo binário *horário* devido às tensões de cisalhamento τ_{yx}. Lembre que ambas as tensões de cisalhamento, τ_{xy} e τ_{yx}, são iguais em magnitude, de acordo com a Equação 4.2, e são positivas, segundo a convenção de sinal para as tensões. Mas, em vez de usar essa convenção de sinal, elas são indicadas no círculo de Mohr de acordo com a rotação que impõem ao elemento, utilizando-se da convenção de sinal (regra da mão esquerda) de Mohr (*horário* + e *anti-horário* –).

5 Desenhe uma reta vertical para baixo (*anti-horário* –) partindo de σ_x (segmento *AC*) para representar a magnitude, em escala, de τ_{xy}. Desenhe uma reta vertical para cima (*horário* +) partindo de σ_y (segmento *BD*) para representar a magnitude, em escala, de τ_{yx}.

6 O diâmetro de um dos círculos de Mohr corresponde à distância do ponto *C* até o ponto *D*. O segmento *AB* intercepta o segmento *CD* no ponto médio. Desenhe o círculo usando essa intersecção como centro.

7 Duas das três tensões normais principais são, então, determinadas pelas duas intersecções que o círculo de Mohr, desenhado, faz com o eixo das tensões normais nos pontos P_1 e P_2: σ_1 = 44142 psi e σ_2 = 15858 psi. Observe que, encerrando-se a solução neste ponto, a tensão máxima de cisalhamento parece ser aquela definida pela intersecção da reta horizontal, tangente ao círculo em seu ponto superior, com o eixo de τ, como mostra a Figura 4-6*b* (τ_{12} = 14142 psi).

8 Já que não há nenhuma tensão aplicada na direção *z* neste exemplo, tem-se um estado plano de tensões (caso 2D). A tensão principal σ_3 tem valor nulo (igual a zero) e localiza-se no ponto *O*, que também é chamado de P_3.

9 Existem, ainda, dois outros círculos de Mohr para serem desenhados. Os três círculos de Mohr são definidos através dos diâmetros (σ_1-σ_3), (σ_1-σ_2)

(a) O cubo elementar sob tensão (b) Construindo o primeiro círculo (c) Os três círculos de Mohr

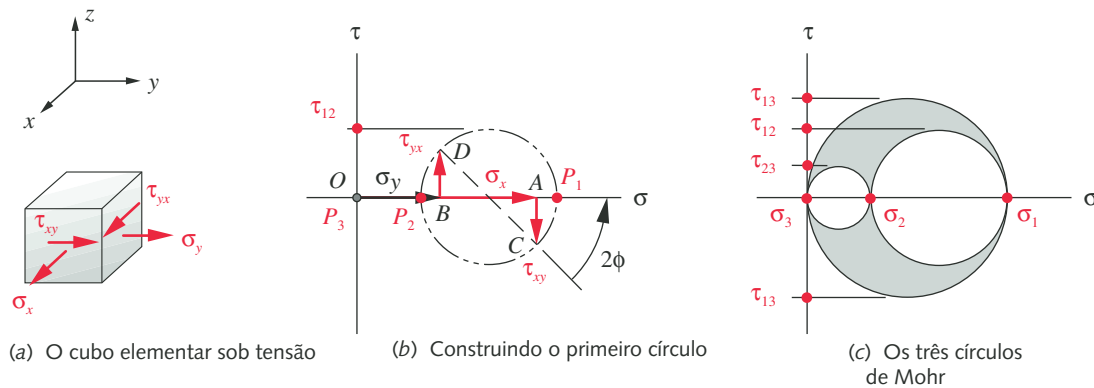



FIGURA 4-6

O cubo elementar sob tensão e os círculos de Mohr para o Exemplo 4-2.

e (σ_2-σ_3), os quais correspondem aos segmentos de reta P_1P_3, P_1P_2 e P_2P_3, respectivamente, como mostra a Figura 4-6.

10 Estendendo-se retas horizontais tangentes a partir dos pontos extremos superior e inferior de cada um dos círculos de Mohr que interceptam o eixo das tensões de cisalhamento (eixo vertical), determinam-se os valores das tensões de cisalhamento principais associadas com cada par de tensão normal principal: isto é, $\tau_{13} = 22071$, $\tau_{12} = 14142$ e $\tau_{23} = 7929$ psi. A maior delas é $\tau_{max} = 22071$ psi, e não o valor de 14142 citado na etapa 7 da solução.

11 Observe que é sempre o círculo que passa pelas tensões principais máxima e mínima que determina a máxima tensão de cisalhamento. No exemplo anterior, a tensão principal nula não era a menor das três, porque uma das tensões principais era negativa. No presente exemplo, a tensão principal de valor zero é a menor entre todas as três. Além disso, não desenhando por completo os três círculos de Mohr, poderíamos ter chegado a um sério erro no valor de τ_{max}.

12 Os arquivos EX04-02 podem ser abertos nos programas MOHR e outros. Veja o CD-ROM.

Os dois exemplos anteriores apontam alguns usos e limitações da utilização dos círculos de Mohr para os cálculos do estado plano de tensões. Do ponto de vista prático, assim que os recursos computacionais (ainda que na forma de calculadoras de bolso programáveis) se tornaram disponíveis para o engenheiro moderno, a solução analítica (Equação 4.4*c*) é o método preferido para a determinação das tensões principais. Trata-se de um método universal (serve para o estado plano de tensões, para o estado plano de deformações ou para qualquer estado genérico de tensão) e que gera todas as três tensões principais.

EXEMPLO 4-3

Determinação das tensões 3D usando métodos analíticos

Problema **Um elemento sob tensão tridimensional, como o da Figura 4-1, tem $\sigma_x = 40000$, $\sigma_y = -20000$, $\sigma_z = -10000$, $\tau_{xy} = 5000$, $\tau_{yz} = -1500$**

e τ_{zx} = 2500 psi. Determine as tensões principais utilizando um método numérico e desenhe os círculos de Mohr resultantes.

Solução **Ver Figuras 4-2 e 4-7.**

1 Calcule os invariantes do tensor de tensões C_0, C_1 e C_2 a partir da Equação 4.4*c*.

$$C_2 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40000 - 20\,000 - 10\,000 = 10\,000 \qquad (a)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \\ &= (5000)^2 + (-1500)^2 + (2500)^2 - (40000)(-20000) \\ &\quad -(-20000)(-10000) - (-10000)(40000) = 10{,}335E8 \qquad (b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \\ &= 40000(-20000)(-10000) + 2(5000)(-1500)(2500) \\ &\quad -40000(-1500)^2 - (-20000)(2500)^2 \\ &\quad -(-10000)(5000)^2 = 8{,}248E12 \qquad (c) \end{aligned}$$

2 Substitua os invariantes na Equação 4.4*c* e calcule as três raízes usando Viete ou um método numérico.

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0$$

$$\sigma^3 - 10000\,\sigma^2 - 10{,}335E8\,\sigma - 8{,}248E12 = 0 \qquad (d)$$

$$\sigma_1 = 40525; \qquad \sigma_2 = -9838; \qquad \sigma_3 = -20687$$

3 As tensões de cisalhamento principais agora podem ser encontradas da Equação 4.5.

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|40525 - (-20687)|}{2} = 30606 \\ \tau_{21} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} = \frac{|-9838 - 40525|}{2} = 25182 \qquad (e) \\ \tau_{32} &= \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} = \frac{|-20687 - (-9838)|}{2} = 5425 \end{aligned}$$

4 Os arquivos EX04-03 podem ser abertos nos programas MOHR e outros. Veja o CD-ROM.

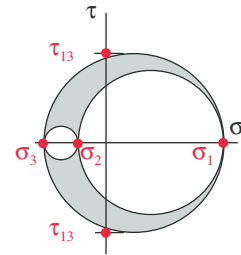



FIGURA 4-7

Círculos de Mohr para o Exemplo 4-3.

4.6 TENSÕES APLICADAS *VERSUS* TENSÕES PRINCIPAIS

Queremos agora resumir as diferenças entre as tensões **aplicadas em um elemento** e as tensões principais que podem ocorrer em outros planos como resultado das tensões aplicadas. As **tensões aplicadas** são as nove *componentes do tensor das tensões* (Equação 4.4*a*), que resultam do carregamento aplicado em um objeto com uma geometria particular, definidas em um sistema de coordenadas escolhido por conveniência. As **tensões principais** são as três *tensões normais principais* e as três *tensões de cisalhamento principais* definidas na Seção 4.3. Obviamente, muitos termos das tensões aplicadas podem ser nulos em um caso dado. Por exemplo, em um corpo de prova de um ensaio de tração, a única tensão

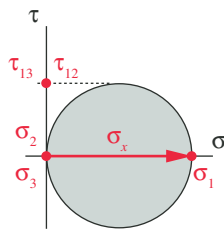



FIGURA 4-8

Círculos de Mohr para o estado uniaxial de tensão de tração (dois círculos são coincidentes e o terceiro é um ponto, pois $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

FIGURA 4-9

Uma barra sob tração pura.

não nula aplicada é o termo σ_x da Equação 4.4*a*, que é unidirecional e normal. Não existem tensões de cisalhamento aplicadas nas superfícies normais ao eixo da força no carregamento de tração pura. No entanto, as tensões principais são **tanto normais como de cisalhamento.**

A Figura 4-8 mostra o círculo de Mohr para um corpo de prova em um ensaio de tração. Neste caso, a tensão aplicada é tração pura e a máxima tensão normal principal é igual a sua magnitude e sentido. Mas uma tensão de cisalhamento principal igual à metade da magnitude da tensão de tração aplicada atua em um plano a 45° do plano da tensão normal principal. Assim, a tensão de cisalhamento principal será tipicamente não nula mesmo na ausência de tensões de cisalhamento aplicadas. Esse fato é importante para entender por que os corpos falham, e isso será discutido em mais detalhes no Capítulo 5. Os exemplos na seção anterior também reforçam este ponto. A tarefa mais difícil para o projetista de máquinas neste contexto é determinar corretamente os locais, tipos e magnitudes de todas as tensões aplicadas à peça. O cálculo das tensões principais é então *pro forma* usando as Equações 4.4 a 4.6.

4.7 TENSÃO NORMAL

A solicitação normal de tração (Figura 4-9) é um dos tipos mais simples de carregamento que podem ser aplicados em um elemento. Pressupõe-se que o carregamento é aplicado no centroide da área do elemento e que as duas forças opostas são colineares ao longo do eixo *x*. A uma certa distância das extremidades onde as forças são aplicadas, a distribuição de tensão na seção transversal do elemento é essencialmente uniforme, como mostrado na Figura 4-10. Esta é uma razão para utilizar este método de carregameto para testar as propriedades dos materiais, como descrito no Capítulo 2. A tensão normal aplicada na tração pura pode ser calculada por

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{4.7}$$

onde *P* é a força aplicada e *A* é a área da seção transversal no ponto de interesse. A tensão normal principal e a máxima tensão de cisalhamento podem ser encontradas da Equação 4-6. O círculo de Mohr para este caso foi mostrado na Figura 4-8. A carga admissível para uma barra solicitada à tração pode ser determinada comparando-se as tensões principais com a resistência apropriada do material. Por exemplo, se o material é dúctil, então a resistência ao escoamento, S_y, deve ser comparada à tensão normal principal e o coeficiente de segurança é calculado como $N = S_y / \sigma_1$. Critérios de falha serão tratados em detalhes no Capítulo 5.

A mudança no comprimento, Δs, de uma barra de seção transversal uniforme solicitada à tração pura é dado por

$$\Delta s = \frac{Pl}{AE} \tag{4.8}$$

onde *P* é a força aplicada, *A* é a área da seção transversal, *l* é o comprimento carregado e *E* é o módulo de elasticidade do material.

A solicitação de tração é muito comum, ocorrendo em cabos, suportes, pinos e muitos outros elementos solicitados axialmente. O projetista precisa verificar cuidadosamente a presença de outras solicitações na peça que, se presentes em combinação com a solicitação de tração, criará um estado de tensão diferente do estado de tração pura descrita aqui.

4.8 CISALHAMENTO PURO, TENSÃO DE ESMAGAMENTO E RASGAMENTO

Esses tipos de solicitações ocorrem principalmente em junções por pinos, parafusos ou rebites. Os possíveis modos de falha são cisalhamento puro do elemento de conexão (pino, parafuso ou rebite), falha por esmagamento do elemento de conexão ou do material circundante, ou rasgamento do material em torno do elemento de conexão. Veja os Estudos de Casos no final deste capítulo para exemplos de como calcular esses tipos de tensões.

FIGURA 4-10

Distribuição de tensões em uma barra sob tração pura.

Cisalhamento puro

O cisalhamento puro ocorre em situações em que não há flexão presente. Uma tesoura é projetada para produzir cisalhamento puro no material a ser cortado. Uma tesoura de baixa qualidade ou gasta não cortará bem (mesmo se afiada) se permitir a existência de folga entre as duas lâminas em uma direção perpendicular ao movimento delas. A Figura 4-11 mostra uma condição de cisalhamento puro e uma condição em que também ocorre flexão. Se a folga entre as duas lâminas ou superfícies de corte puder ser mantida próxima de zero, então o estado de cisalhamento puro pode ser assumido e a tensão média resultante na face de cisalhamento pode ser estimada por

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{cis}} \tag{4.9}$$

onde P é a carga aplicada e A_{cis} é a área de cisalhamento sendo cortada, isto é, a área da seção de corte sendo cisalhada. A suposição aqui é que a tensão de cisalhamento é uniformemente distribuída na seção transversal. Isso não é exatamente correto, pois maiores tensões locais ocorrem próximo à lâmina.

Na Figura 4-11*a*, a lâmina de corte está apertada contra os mordentes que seguram a peça de trabalho. Logo, as duas forças P estão no mesmo plano e não criam um momento. Isso proporciona uma condição de cisalhamento puro sem flexão. A Figura 4-11*b* mostra a mesma peça de trabalho com uma pequena folga (x) entre a lâmina de corte e os mordentes. Isso cria um braço de momento, tornando o par de forças P em um binário e assim flexionando a peça, em vez de apenas cisalhá-la diretamente. Obviamente, ainda haverá tensões de cisalhamento significativas desenvolvidas além das tensões de flexão neste caso. Observe que é difícil criar situações em que cisalhamento puro seja o único carregamento. Mesmo pequenas folgas, necessárias para o funcionamento, podem sobrepor tensões de flexão sobre as tensões de cisalhamento aplicadas. Discutiremos tensões devido à flexão na próxima seção.

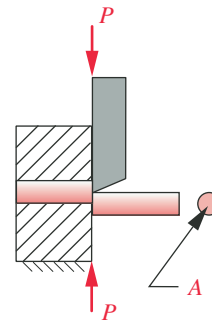
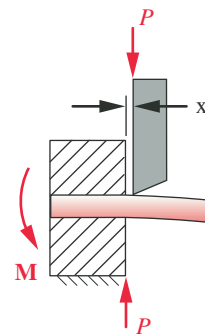
A situação representada nas Figuras 4-11*a* e 4-12*a* é também chamada de *cisalhamento simples*, pois uma única área da seção transversal da peça precisa ser cisalhada para rompê-la. A Figura 4-12*b* mostra um pino de articulação sob *cisalhamento duplo*. Duas áreas devem ser cisalhadas antes da separação. Isso é chamado de *pino de forquilha*, onde a barra em forma de "Y" é a *forquilha*. A área a ser usada na Equação 4-9 agora é $2A$. O cisalhamento duplo é preferido ao cisalhamento simples para projetos de pinos de articulação. Articulações em cisalhamento simples devem ser usadas somente onde for impossível apoiar ambas as extremidades do pino, como em alguns acoplamentos de manivelas, que devem passar por acoplamentos adjacentes de um lado. Junções aparafusadas ou rebitadas estão sob cisalhamento simples quando apenas duas peças chatas são conectadas uma à outra.

(*a*) Cisalhamento puro

(*b*) Cisalhamento com flexão

FIGURA 4-11

Carregamento cisalhante.

Tensão de esmagamento

Um pino de articulação em um furo, como representado na Figura 4-12, pode falhar de outros modos além de cisalhamento puro. As superfícies cilíndricas laterais do pino e do furo em contato estão sujeitas a *tensões de esmagamento*. Essas tensões tendem a esmagar o furo ou pino em vez de cortá-lo. A tensão de esmagamento é normal e de compressão, e pode ser calculada pela Equação 4-7. Se o pino fica justo no furo, sem qualquer folga, a área usada para esse cálculo é geralmente obtida como a **área de contato projetada** do pino ou furo e **não a área lateral do cilindro**. Isto é,

$$A_{esm} = l\,d \tag{4.10a}$$

onde l é o comprimento de contato em compressão e d é o diâmetro do pino ou furo. Se houver folga entre o pino e o furo, então o contato é reduzido. Grandin[7] mostrou que, para este caso, a área de esmagamento pode ser aproximada por

$$A_{esm} = \frac{\pi}{4} l\,d \tag{4.10b}$$

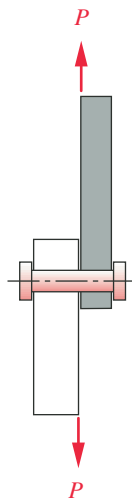
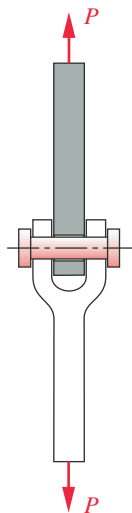
A Figura 4-13*a* mostra as áreas comprimidas para uma junção de pino e forquilha da Figura 4-12*b*. Cada uma das duas barras conectoras devem ser analisadas separadamente para falha de esmagamento, pois cada uma pode falhar independentemente da outra. O comprimento l (isto é, a espessura das barras), assim como o diâmetro do pino, pode ser ajustado para criar áreas de contato suficientes para evitar a falha.

(*a*) Pino de articulação em cisalhamento simples

(*b*) Pino de articulação em cisalhamento duplo

FIGURA 4-12

Cisalhamento simples e duplo.

Falha por rasgamento

Um outro modo possível de falha para junções por pinos é a ruptura por rasgamento do material em torno do furo. Isso ocorre se o furo estiver localizado muito perto da aresta. É uma falha por cisalhamento duplo, pois requer que haja deslizamento em ambos os lados do furo para que uma parte do material se separe do restante. A Equação 4-9 é aplicável neste caso, contanto que a área correta de cisalhamento seja utilizada. A Figura 4-13*b* mostra áreas de ruptura para a junção por pino tipo forquilha da Figura 4-12*b*. Parece que a área poderia ser calculada como produto da espessura da barra ou chapa e a distância entre o centro do furo e a aresta externa da chapa, multiplicada por dois para considerar ambos os lado do furo. No entanto, essa suposição implica que cunhas muito finas do material interior ao diâmetro do furo aumentam significativamente a resistência ao cisalhamento. Uma suposição mais comum e conservadora para a área de rasgamento é usar o dobro do produto da espessura da chapa pela dimensão entre a **borda do furo até a aresta externa da chapa**. É simples prover material suficiente, em torno dos furos, para prevenir falhas por rasgamento. Um mínimo de material entre a borda do furo e a aresta externa da peça é um diâmetro do pino e serve como ponto de partida razoável para seus cálculos de projeto.

4.9 VIGAS E TENSÕES NA FLEXÃO

Vigas são elementos muito comuns em estruturas e máquinas de todos os tipos. Qualquer peça apoiada sujeita a esforços transversais a seu comprimento atuará como uma viga. Estruturas de vigamento de pisos, caibros de telhados, eixos de máquinas, molas e chassis são alguns exemplos de elementos frequentemente carregados como vigas. As vigas geralmente são sujeitas a uma combinação de

(*a*) Áreas de tensão na flexão (*b*) Falha por rasgamento

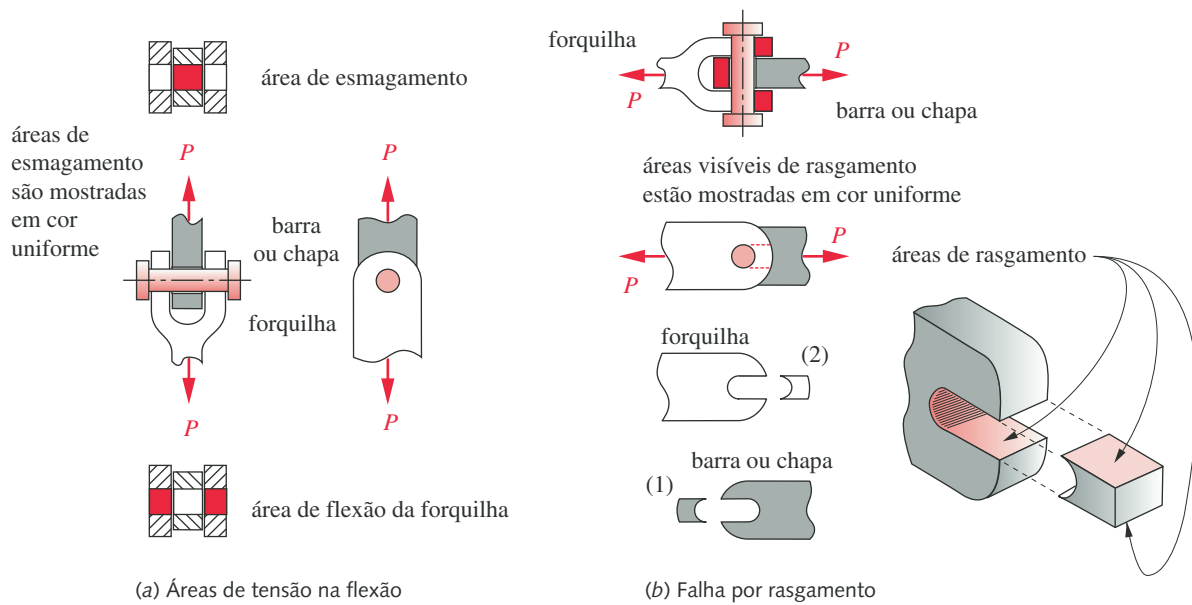



FIGURA 4-13

Falhas de esmagamento e por rasgamento.

tensões normais e de cisalhamento distribuídas em suas seções transversais. É importante para o projetista entender como essas tensões estão distribuídas no interior da viga a fim de escolher os locais corretos para calcular as tensões máximas. Memorizar as fórmulas de tensão em vigas, embora benéfico, não é suficiente sem compreender como e quando aplicá-las adequadamente.

Vigas em flexão pura

Apesar de ser raro encontrar uma viga que seja solicitada exclusivamente por flexão "pura", é útil explorar o caso com um carregamento mais simples como meio de desenvolver a teoria das tensões devido às cargas de flexão. A maioria das vigas reais também estão sujeitas a solicitações de cisalhamento combinadas com o momento fletor. Este caso será analisado na próxima seção.

Vigas retas Como exemplo do caso de flexão pura, considere uma viga reta biapoiada como mostra a Figura 4-14. Duas cargas idênticas e concentradas, P, são aplicadas nos pontos A e B, que estão cada um à mesma distância de cada uma das extremidades da viga. Os diagramas de força cortante e momento fletor para esse carregamento mostram que a seção central da viga, entre os pontos A e B, tem força cortante zero e momento fletor constante de magnitude M. A ausência de força cortante torna a flexão pura.

A Figura 4-15 mostra um segmento de viga removido e aumentado, extraído entre os pontos A e B. As suposições para a análise são as seguintes:

1 O segmento analisado está distante das cargas aplicadas ou vínculos externos da viga.

2 A viga está carregada em um plano de simetria.

3 As seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares à linha neutra durante a flexão.
4 O material da viga é homogêneo e obedece à lei de Hooke.
5 As tensões permanecem abaixo do limite elástico e as deflexões são pequenas.
6 O segmento está sujeito à flexão pura, sem cargas axiais ou cortantes.
7 A viga está inicialmente reta.

O segmento descarregado da Figura 4-15*a* é reto, mas, quando o momento fletor é aplicado na Figura 4-15*b*, o segmento torna-se curvado (mostrado exageradamente). A linha de *N* até *N* ao longo da linha neutra não muda de comprimento, mas todas as outras linhas ao longo do eixo *x* devem ou encurtar-se ou alongar-se, de forma a manter as seções transversais perpendiculares à linha neutra. A fibra mais externa da viga, em *A-A*, é encurtada, o que a põe em compressão, e a fibra externa, *B-B*, é alongada e colocada sob tração. Isso causa a distribuição da tensão de flexão mostrada na Figura 4-15*b*. A magnitude da tensão de flexão é zero na linha neutra e é linearmente proporcional à distância *y* da linha neutra. Essa relação é expressa pela conhecida fórmula da tensão na flexão:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.11a}$$

onde *M* é o momento fletor aplicado na seção em questão, *I* é o momento de inércia da área da seção transversal da viga em relação ao plano neutro (que passa pelo baricentro da seção transversal de uma viga reta) e *y* é a distância do plano neutro até o ponto onde a tensão é calculada.

A máxima tensão normal de flexão ocorre nas fibras externas e é expressa por:

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \tag{4.11b}$$

onde *c* é a distância do plano neutro até a fibra externa tanto na parte superior como na parte inferior da viga. Observe que essas duas distâncias somente serão iguais em seções que são simétricas em relação ao plano neutro. O valor de *c* é tomado geralmente como positivo para ambas as superfícies, superior e inferior,

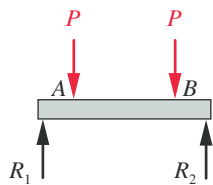



Diagrama de corpo livre

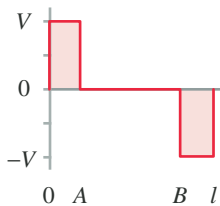



Diagrama de força cortante

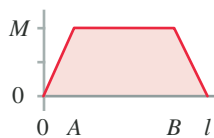



Diagrama de momento fletor

FIGURA 4-14

Flexão pura em uma viga.

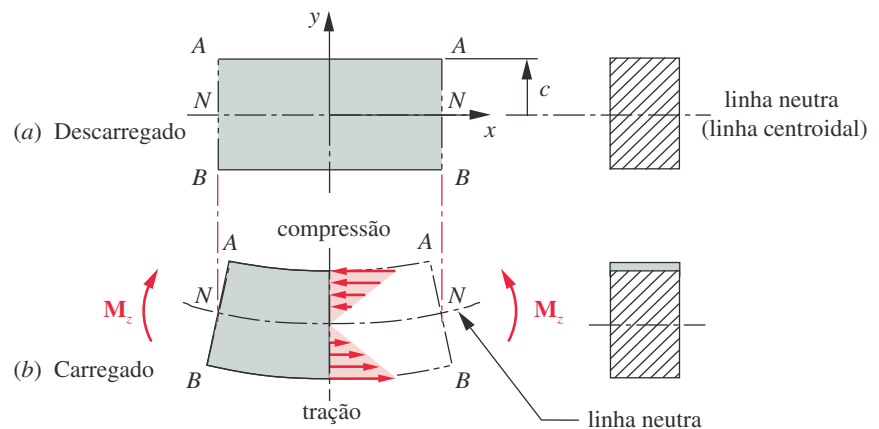



FIGURA 4-15

Segmento de uma viga reta sob flexão pura.

e o sinal adequado da tensão é obtido de acordo com a observação do carregamento da viga para determinar qual superfície está sob compressão (−) e qual está sob tração (+).

Uma forma alternativa da Equação 4.11*b* é frequentemente utilizada:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z} \tag{4.11c}$$

onde Z é o *módulo de resistência* da viga:

$$Z = \frac{I}{c} \tag{4.11d}$$

Essas fórmulas, embora desenvolvidas para o caso de flexão pura, também podem ser utilizadas em casos em que há a aplicação de outros carregamentos na viga, além do momento fletor, e a deformação devido ao cisalhamento é desprezível. Nas demais situações, os efeitos dos carregamentos combinados devem ser devidamente considerados. Isso será discutido em seções posteriores. Fórmulas para as propriedades geométricas (A, I, Z) de seções transversais típicas de vigas podem ser encontradas no Apêndice A e são também fornecidas como arquivos no CD.

Vigas curvas Muitos elementos de máquinas, como ganchos de guindaste, grampos-C, estruturas de prensa, etc., são submetidos a carregamentos como vigas, porém não são retos. Eles possuem um raio de curvatura. As seis primeiras suposições listadas acima para vigas retas ainda se aplicam. Se uma viga tem uma curvatura significativa, a linha neutra não coincidirá mais com a linha centroidal, e as Equações 4.11 não se aplicam diretamente. A linha neutra se desloca em direção ao centro de curvatura de uma distância e, conforme mostra a Figura 4-16.

$$e = r_c - \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \tag{4.12a}$$

onde r_c é o raio de curvatura da linha centroidal da viga curva, A é a área da seção transversal e r é o raio do centro de curvatura da viga até a área diferencial dA. Pode-se fazer uma estimativa numérica da integral para formas complexas.*

* Expressões para essa integral para diversas geometrias usuais de seção transversal podem ser encontradas na referência 4. Por exemplo, para uma seção transversal retangular, $e = r_c - (r_o - r_i) / \text{LN}\,(r_o / r_i)$.

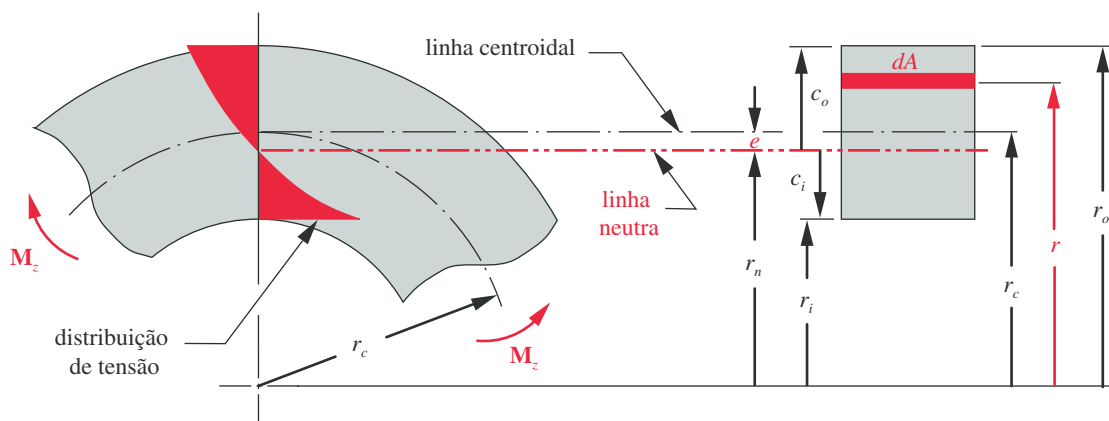



FIGURA 4-16

Segmento de uma viga curva sob flexão pura.

(*a*) Barra curva carregada por força

(*b*) Diagramas de corpo livre

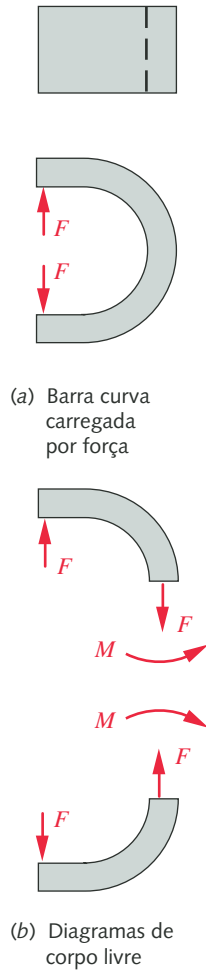



FIGURA 4-17

Uma viga curva carregada por uma força.

A distribuição de tensão ao longo da seção não é mais linear, mas sim hiperbólica, e ela é máxima na superfície interna de uma seção transversal retangular, como mostra a Figura 4-16. Como convenção, define-se um momento positivo como sendo aquele que tende a desentortar a viga. Obtém-se tração na superfície interna e compressão na superfície externa com a aplicação de um momento positivo e vice-versa. Para carregamentos com flexão pura, as expressões para as tensões máximas nas superfícies interna e externa de uma viga curva agora ficam

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) \tag{4.12b}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) \tag{4.12c}$$

onde o índice i corresponde à superfície interna e o à superfície externa, M é o momento aplicado na seção em questão, A é a área da seção transversal e r_i e r_o são os raios de curvatura das superfícies interna e externa. Essas expressões contêm a razão c/r. Se o raio de curvatura r é grande quando comparado a c, a viga parece mais "reta" do que "curva". Quando a razão c/r é menor do que aproximadamente 1:10, as tensões serão apenas em torno de 10% maiores do que aquelas presentes em uma viga reta com as mesmas dimensões e carregamento. (Observe que esta não é uma relação linear, uma vez que e também é função de c e de r.)

É mais usual ter forças aplicadas a barras curvas, como mostra a Figura 4-17*a*. Um exemplo é um grampo ou um gancho. Os diagramas de corpo livre da Figura 4-17*b* mostram que há agora uma força axial, assim como um momento fletor na seção de transversal. As expressões das tensões nas partes interna e externa da viga ficam

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) + \frac{F}{A} \tag{4.12d}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) + \frac{F}{A} \tag{4.12e}$$

O segundo termo nas Equações 4.12*d* e 4.12*e* representam a tensão devido à força normal na seção média da viga. O arquivo CURVBEAM fornecido calcula as Equações 4.12 para cinco geometrias usuais de seções transversais de vigas curvas: circular, elíptica, trapezoidal, retangular e em tê. Esse programa utiliza integração numérica para resolver a Equação 4.12*a* e para encontrar a área e o centroide da seção transversal.

Cisalhamento na flexão

A condição mais comum de solicitação de vigas é a combinação de força cortante e momento fletor aplicados a uma seção particular. A Figura 4-18 mostra um carregamento pontual em uma viga biapoiada e seus diagramas de força cortante e momento fletor. Agora precisamos considerar de que modo a força cortante influencia o estado de tensão nas seções transversais da viga.

A Figura 4-19*a* mostra um segmento retirado da viga em torno do ponto A da Figura 4-18. Um elemento nomeado P, removido da viga no ponto A, é

mostrado em detalhe. Esse elemento tem comprimento dx e é removido a partir da fibra externa em c até a distância y_1 da linha neutra. Observe que a magnitude do momento $M(x_1)$ no lado esquerdo de P (face b_1-c_1) é menor que o momento $M(x_2)$ no lado direito (face b_2-c_2), e a diferença é o diferencial de momento dM. A Figura 4-18 mostra que, no ponto A, o momento $M(x)$ aumenta em função do comprimento x, devido à presença da força cortante não nula V nesse ponto. As tensões normais nas faces verticais de P são encontradas a partir da Equação 4.11*a*. Uma vez que a tensão normal devido à flexão é proporcional a $M(x)$, a tensão σ na face esquerda de P é menor que na face direita, como mostra a Figura 4-19*b*. Para haver equilíbrio, essa diferença de tensões deve ser compensado por alguma outra componente de tensão, que é mostrada como a **tensão de cisalhamento** na Figura 4-19*b*.

A força atuando na face esquerda de P em qualquer distância y da linha neutra pode ser encontrada multiplicando-se a tensão pela área diferencial dA naquele ponto.

$$\sigma dA = \frac{My}{I} dA \tag{4.13a}$$

A força total atuando na face esquerda é obtida por integração

$$F_{1x} = \int_{y_1}^{c} \frac{My}{I} dA \tag{4.13b}$$

e analogamente para a face direita:

$$F_{2x} = \int_{y_1}^{c} \frac{(M + dM)y}{I} dA \tag{4.13c}$$

A força cortante na face superior à distância y_1 da linha neutra é encontrada por

$$F_{xy} = \tau b\, dx \tag{4.13d}$$

onde o produto bdx é a área da face superior do elemento P.

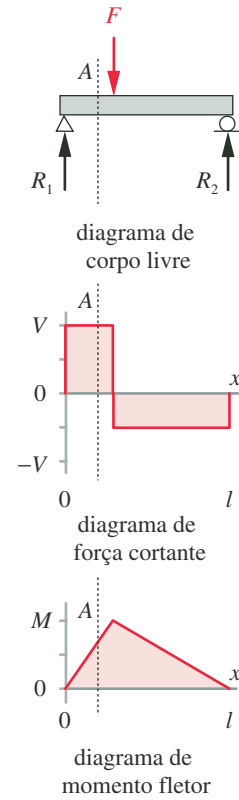



FIGURA 4-18

Força cortante e momento fletor em uma viga.

(*a*) Segmento da viga com elemento *P* removido

(*b*) Vista ampliada do elemento *P* removido

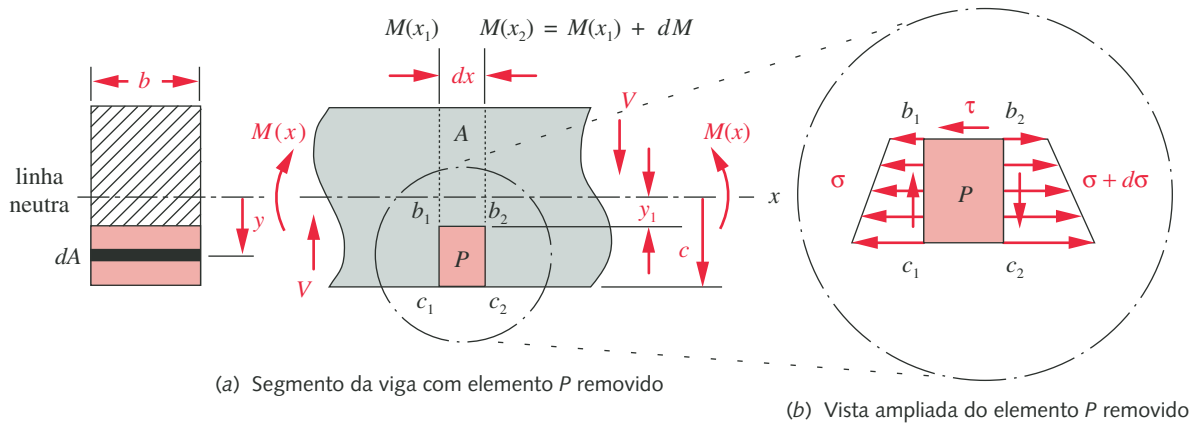



FIGURA 4-19

Segmento de uma viga sob flexão e força cortante – detalhe em torno do ponto *A* na Figura 4-18.

Para o equilíbrio, a soma das forças atuando em P deve ser nula,

$$
\begin{aligned}
F_{xy} &= F_{2x} - F_{1x} \\
\tau\, b\, dx &= \int_{y_1}^{c} \frac{(M + dM)\,y}{I}\, dA - \int_{y_1}^{c} \frac{My}{I}\, dA \\
\tau &= \frac{dM}{dx}\frac{1}{Ib}\int_{y_1}^{c} y\, dA
\end{aligned}
\tag{4.13e}
$$

que fornece uma expressão para a tensão de cisalhamento, τ, como uma função da variação do momento em relação a x, da distância y a partir da linha neutra, do momento de inércia I da seção transversal e da largura b da seção transversal em y_1. A Equação 3.16a mostra que a derivada da função momento fletor dM/dx é igual à magnitude da função força cortante V em qualquer ponto, portanto:

$$
\tau_{xy} = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{c} y\, dA \tag{4.13f}
$$

A integral na Equação 4.13f representa o momento de primeira ordem[§] em relação à linha neutra da porção da seção transversal que existe além do valor de y_1 para o qual a tensão de cisalhamento está sendo calculada. É comum denotar a variável Q como o valor dessa integral.[¶]

$$
Q = \int_{y_1}^{c} y\, dA
$$

e desse modo (4.13g)

$$
\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib}
$$

A integral Q obviamente variará com o formato da seção transversal da viga e também com a distância y_1 a partir da linha neutra. Portanto, para qualquer seção transversal particular, espera-se que a tensão de cisalhamento varie através da viga. Ela será nula nas fibras externas, pois Q se anula quando y_1 se iguala a c. Isso faz sentido, já que não há nenhum material que cause cisalhamento na fibra externa. A tensão de cisalhamento devido à força cortante será máxima na linha neutra. Esses resultados são bastante fortuitos, visto que a tensão normal devido à flexão é máxima nas fibras externas e nula na linha neutra. Desse modo, a combinação de tensões em qualquer elemento particular dentro da seção transversal raramente origina um estado de tensão pior que aquele existente nas fibras externas.

A tensão de cisalhamento devido à força cortante será pequena quando comparada à tensão de flexão Mc/I, no caso da viga ser longa em comparação à sua altura. A razão para isso pode ser observada na Equação 3.16 e nos diagramas de força cortante e momento fletor, como aqueles mostrados na Figura 4-18. Uma vez que a magnitude da função momento é igual à área abaixo da função força cortante, para qualquer valor dado de V na Figura 4-18, a área abaixo da função força cortante, e, portanto, o máximo momento fletor, aumentarão com o comprimento da viga. Desse modo, enquanto a máxima magnitude da tensão de cisalhamento permanece constante, a tensão de flexão aumenta com o comprimento da viga, ultrapassando em algum momento o valor da tensão de cisalhamento. Uma regra prática comumente usada diz que a tensão de cisalhamento devido à força cortante em uma viga será suficientemente pequena a ponto de poder ser ignorada se a razão comprimento-altura da viga for

[§] N. de R. T.: Também chamado de momento estático de figura plana.

[¶] N. de R. T.: No Brasil, a letra Q é frequentemente usada para a força cortante. O momento estático é frequentemente representado por S_x.

igual ou superior a 10. Barras curtas abaixo dessa razão devem ser analisadas em termos tanto de tensão de cisalhamento devido à cortante como de tensão normal de flexão.

Vigas retangulares O cálculo da tensão de cisalhamento devido à força cortante geralmente se torna um exercício de avaliação do momento estático, Q, para a seção transversal particular da viga. Uma vez que isso é feito, o máximo valor de τ é facilmente obtido. Para uma viga com uma seção transversal retangular de largura b e altura h, $dA = b\,dy$ e $c = h/2$.

$$Q = \int_{y_1}^{c} y\,dA = b\int_{y_1}^{c} y\,dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

e (4.14a)

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

A tensão de cisalhamento varia parabolicamente em uma viga retangular, conforme mostra a Figura 4-20a. Quando $y_1 = h/2$, $\tau = 0$, como esperado. Quando $y_1 = 0$, $\tau_{max} = Vh/8I$. Para um retângulo, $I = bh/12$, o que resulta em

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{4.14b}$$

Isso é válido **apenas para vigas com seção transversal retangular** e é mostrado na Figura 4-20a.

Vigas circulares As Equações 4.13g se aplicam para qualquer seção transversal. A integral Q para uma seção transversal circular é

$$Q = \int_{y_1}^{c} y\,dA = 2\int_{y_1}^{c} y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \frac{2}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.15a}$$

e a distribuição da tensão de cisalhamento é

$$\tau = \frac{VQ}{bI} = \frac{V\left[\frac{2}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]}{2\sqrt{r^2 - y^2}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi r^2}\left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) \tag{4.15b}$$

Essa também é uma distribuição parabólica, mas tem um valor de pico menor que a seção retangular, como mostra a Figura 4-20b. A máxima tensão de cisalhamento em uma **viga maciça, com seção transversal circular** é, na linha neutra:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A} \tag{4.15c}$$

Se a **viga circular é oca e com parede fina** (espessura da parede < aproximadamente 1/10 do raio externo), a máxima tensão de cisalhamento na linha neutra será aproximadamente

$$\tau_{max} \cong \frac{2V}{A} \tag{4.15d}$$

como mostra a Figura 4-20c.

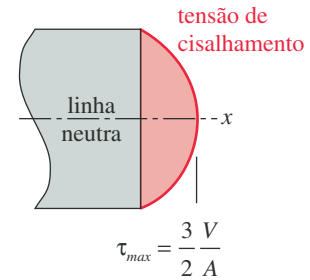
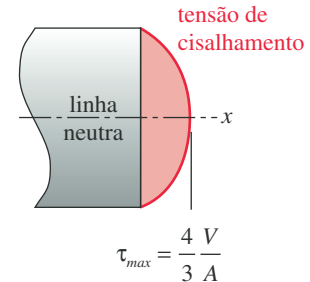
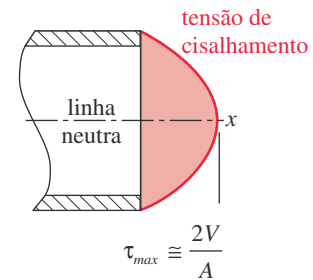
Vigas I Pode ser mostrado matematicamente que a configuração de viga I da Figura 4-21a é o formato de seção transversal ótimo para uma viga em termos da

(a) viga retangular

(b) viga circular maciça

(c) viga circular oca

FIGURA 4-20

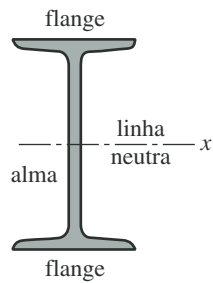
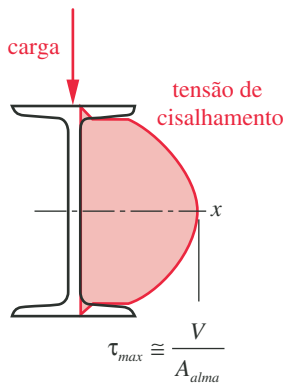
Distribuição da tensão de cisalhamento e tensão de cisalhamento máxima em vigas circulares, circulares ocas e retangulares.

(*a*) Formato da viga I

(*b*) Distribuição de tensão

FIGURA 4-21

Distribuição e máxima tensão de cisalhamento em uma viga I.

razão resistência/peso. Isso explica por que as vigas I são comumente utilizadas como vigas para piso e teto em grandes estruturas. Seu formato faz com que a maior parte do material se encontre nas fibras externas, onde a tensão de flexão é máxima. Isso propicia um grande momento de inércia para resistir ao momento de fletor. Como a tensão de cisalhamento é máxima na linha neutra, a estreita alma que conecta as flanges (chamada de alma de cisalhamento) serve para resistir às forças de cortantes na viga. Em uma viga longa, as tensões de cisalhamento devido à flexão são pequenas comparadas às tensões normais de flexão, o que permite que a alma seja estreita, reduzindo o peso. Uma expressão aproximada para a máxima tensão de cisalhamento em uma viga I usa apenas a área da alma e ignora as flanges.

$$\tau_{max} \cong \frac{V}{A_{alma}} \tag{4.16}$$

A Figura 4-21*b* mostra a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da seção da viga I. Observe as descontinuidades nas interfaces das flanges com a alma. A tensão de cisalhamento nas flanges é pequena devido à grande área. A tensão de cisalhamento salta para um valor alto ao adentrar a alma e então cresce parabolicamente até um valor máximo na linha neutra.

4.10 DEFLEXÃO EM VIGAS

Além das tensões em uma viga, um projetista também precisa levar em consideração as suas deflexões. Qualquer flexão aplicada causará uma deflexão na viga, uma vez que ela é feita de material elástico. Se a deflexão não causa deformações além do ponto de escoamento do material, a viga retornará ao seu estado não deformado quando a carga for removida. Se a deformação excede o ponto de escoamento do material, a viga escoará e deformará permanentemente se for dúctil, ou possivelmente fraturará se for frágil. Se a viga é dimensionada para evitar tensões que excedam o ponto de escoamento do material (ou outro critério de resistência apropriado), nenhuma deformação permanente ou fratura deve ocorrer. Entretanto, deflexões elásticas, com tensões bem abaixo dos níveis de falha do material, ainda podem causar sérios problemas em uma máquina.

Deflexões podem causar interferências entre partes móveis ou desalinhamentos que prejudicam a precisão requerida de um dispositivo. Em geral, projetar para minimizar a deflexão levará a maiores seções transversais da viga do que projetar apenas contra a falha por tensão. Mesmo em estruturas estáticas como edifícios, deflexões podem ser o critério limitante no dimensionamento das vigas do piso e do teto. Você provavelmente já caminhou sobre um piso residencial que deformasse notadamente com cada passo. Sem dúvida o piso era seguro contra o colapso por tensões excessivas, mas não foi projetado rígido o suficiente para evitar deflexões indesejadas sob cargas normais de trabalho.

A deflexão por flexão de uma viga é calculada pela dupla integração da equação da viga,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{4.17}$$

que relaciona o momento aplicado M, o módulo de elasticidade do material E e o momento de inércia I da seção à segunda derivada da deflexão da viga y. A variável independente x é a posição ao longo do comprimento da viga. A Equação 4.17 só é válida para deflexões pequenas, o que não é uma limitação na maioria dos casos de projeto de viga para aplicações estruturais e em máquinas. Em alguns casos, as vigas são utilizadas como molas, e suas deflexões podem então exceder as limitações dessa equação. O projeto de mola será abordado em

um capítulo posterior. A Equação 4.17 também não inclui os efeitos de deflexão devido a cargas cortantes transversais. A componente de deflexão devido à força cortante em vigas longas é pequena quando comparada à componente devido à flexão e é normalmente ignorada a menos que a razão comprimento/altura da viga seja < aproximadamente 10.

A Equação 4.17 pode ser derivada duas vezes e integrada duas vezes para originar o conjunto de cinco Equações 4.18 (incluindo a Equação 4.17, repetida como Equação 4.18*c*), que define o comportamento da viga. A Seção 3.9 mostrou a relação entre a função carregamento $q(x)$, a função força cortante $V(x)$ e a função momento fletor $M(x)$; V é a derivada primeira e q a derivada segunda da Equação 4.17 em relação a x. Integrando a Equação 4.17 uma vez, obtém-se a rotação da viga θ, e integrando uma segunda vez, obtém-se a deflexão da viga y. Essas relações formam o seguinte conjunto de equações de viga:

$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4 y}{dx^4} \tag{4.18a}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3 y}{dx^3} \tag{4.18b}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{4.18c}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{4.18d}$$

$$y = f(x) \tag{4.18e}$$

O único parâmetro de material nessas equações é o módulo de elasticidade, que define sua rigidez. Uma vez que a maioria das ligas de um determinado metal-base possui essencialmente o mesmo módulo de elasticidade, as Equações 4.18 mostram por que não há vantagem em se usar uma liga mais forte e mais cara quando se projeta para minimizar a deflexão. Ligas de alta resistência tipicamente fornecem apenas maior resistência ao escoamento ou à ruptura, e projetar com um critério de deflexão geralmente resulta em tensões relativamente baixas. Essa é a razão pela qual vigas I e outros formatos estruturais de aço são feitos primariamente em aços de baixa resistência e de baixo teor de carbono.

Determinar a função deflexão de uma viga é um exercício de integração. A função carregamento q é normalmente conhecida e pode ser integrada por diversos métodos, analítico, gráfico ou numérico. As constantes de integração são obtidas a partir das condições de contorno da configuração particular da viga. Variações no módulo de rigidez da seção ao longo da viga requerem a criação da função M/EI a partir do diagrama de momento, antes de se integrar para a obtenção da rotação da viga. Se o momento de inércia I da viga e o módulo de elasticidade do material E é uniforme ao longo do seu comprimento, a função momento pode ser dividida pela constante EI. Se a seção transversal da viga varia ao longo do seu comprimento, a integração deve ser feita por trechos, para considerar as mudanças em I. As integrais das equações de viga são

$$V = \int q\,dx + C_1 \qquad 0 < x < l \tag{4.19a}$$

$$M = \int V\,dx + C_1 x + C_2 \qquad 0 < x < l \tag{4.19b}$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \qquad 0 < x < l \tag{4.19c}$$

$$y = \int \theta \, dx + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \qquad 0 < x < l \qquad (4.19d)$$

As constantes C_1 e C_2 nas funções força cortante e momento fletor podem ser encontradas a partir das condições de contorno. Por exemplo, o momento será nulo na extremidade biapoiada de uma viga e também será nulo (ou conhecido se for aplicado) em uma extremidade livre, em balanço, da mesma. A força cortante será nula em uma extremidade livre descarregada. Observe que se as forças de reação são incluídas na função carga $q(x)$, então $C_1 = C_2 = 0$.

As constantes C_3 e C_4 nas funções rotação e deflexão podem ser encontradas a partir das condições de contorno. Por exemplo, a deflexão será nula em qualquer apoio rígido, e a rotação da viga será nula em um engastamento. Substitua duas combinações conhecidas de valores de x e y ou de x e θ juntamente com C_1 e C_2 nas Equações 4.19*c* e 4.19*d* e resolva para C_3 e C_4. Muitas técnicas para a solução dessas equações têm sido desenvolvidas, como a integração gráfica, o método da área dos momentos,[§] os métodos de energia e as funções de singularidade. Exploraremos as duas últimas dessas técnicas.

Deflexão por funções de singularidade

A Seção 3.9 apresentou o uso de funções de singularidade para representar cargas em uma viga. Essas funções tornam relativamente simples a resolução analítica da integral e podem ser facilmente programadas para solução computacional. A mesma seção também aplicou essa abordagem para obter as funções força cortante e momento fletor a partir da função carregamento. Extenderemos agora essa técnica para desenvolver as funções rotação e deflexão[¶] da viga. A melhor maneira de explorar esse método é por meio de exemplos. Assim, calcularemos as funções força cortante, momento fletor, rotação e deflexão das vigas mostradas na Figura 4-22.

EXEMPLO 4-4

Cálculo da rotação e da deflexão de uma viga biapoiada utilizando funções de singularidade

Problema **Determine e trace os gráficos das funções rotação e deflexão para a viga biapoiada da Figura 4-22*a*.**

Dados **A carga é uniforme sobre parte do comprimento da viga. O comprimento da viga é l = 10 in e a posição da carga é a = 4 in. As demais propriedades da viga são I = 0,163 in^4 e E = 30 Mpsi. A força distribuída é w = 100 lb/in.**

Hipóteses **O peso da viga é desprezível quando comparado à carga aplicada e, portanto, pode ser ignorado.**

Solução **Ver Figuras 4-22*a* e 4-23.**

1 Calcule a reação de apoio utilizando as Equações 3.3. Somando os momentos em relação à extremidade direita e somando as forças na direção y:

$$\sum M_z = 0 = R_1 l - \frac{w(l-a)^2}{2}$$

$$R_1 = \frac{w(l-a)^2}{2l} = \frac{100(10-4)^2}{2(10)} = 180 \qquad (a)$$

[§] N. de R. T.: No Brasil, o método da área dos momentos é mais conhecido como *método da analogia de Mohr.*

[¶] N. de R. T.: No Brasil, a deflexão de uma viga também é chamada de *flecha,* e a rotação, de *inclinação*.

(*a*) Viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído

(*b*) Viga engastada com carregamento concentrado

(*e*) Viga engastada com apoio redundante

(*c*) Viga biapoiada com extremidade em balanço com força concentrada e carregamento uniformemente distribuído

(*d*) Viga estaticamente indeterminada com carregamento uniformemente distribuído

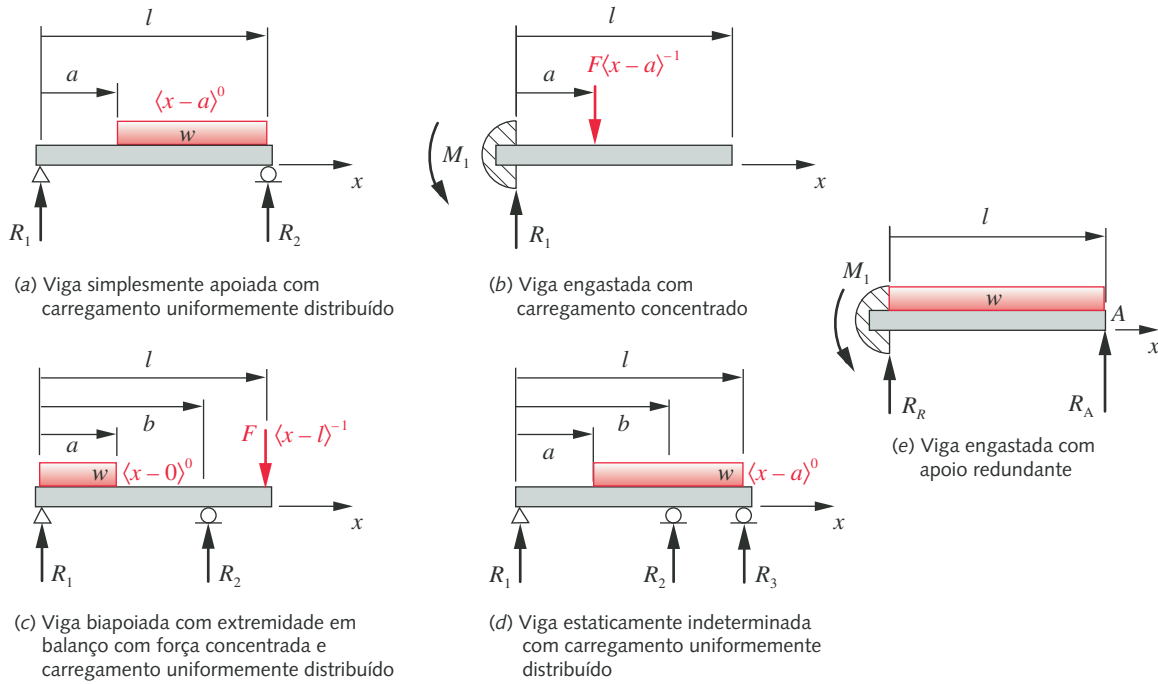



FIGURA 4-22

Diversas vigas e seus carregamentos.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 = R_1 - w(l-a) + R_2 \\ R_2 &= w(l-a) - R_1 = 100(10-4) - 180 = 420 \end{aligned} \qquad (b)$$

2 Escreva as equações para a função carga de acordo com as Equações 3.17 e integre a função resultante quatro vezes utilizando as Equações 3.18 para obter as funções força cortante, momento fletor, rotação e deflexão. Para a viga biapoiada com uma carga distribuída sobre parte do seu comprimento:

$$q = -M_1\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} \qquad (c)$$

$$V = \int q\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + C_1 \qquad (d)$$

$$M = \int V\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + C_1x + C_2 \qquad (e)$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{R_2}{2}\langle x-l\rangle^2 + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3\right) \qquad (f)$$

$$y = \int \theta\,dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle x-l\rangle^3 + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4\right) \qquad (g)$$

Diagrama de carregamento (lb)

Diagrama de força cortante (lb)

Diagrama de momento fletor (lb-in)

Diagrama de rotação (rad)

Diagrama de deflexão (in)

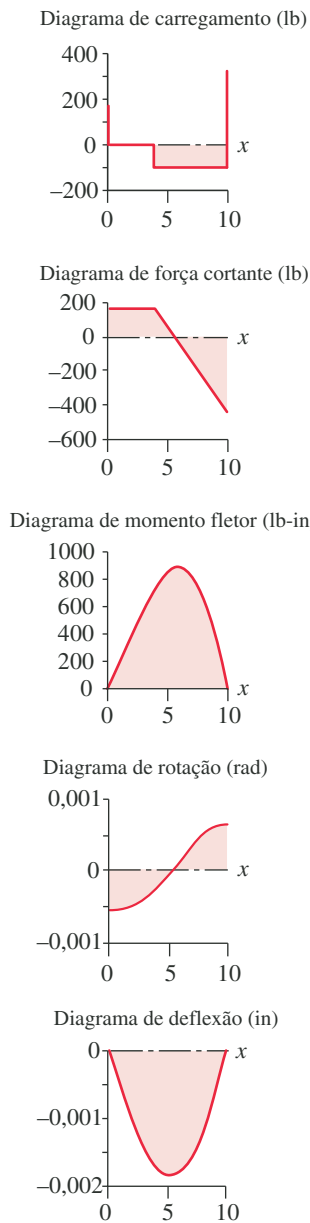



FIGURA 4-23

Gráficos do Exemplo 4-4.

3 Há quatro constantes de integração a serem determinadas. As constantes C_1 e C_2 são nulas porque as reações nos apoios atuando na viga estão incluídas na função carregamento. A deflexão y é zero nos apoios. As constantes C_3 e C_4 são encontradas substituindo as condições de contorno $x = 0$, $y = 0$ e $x = l$, $y = 0$ na Equação (g).

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle 0-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle 0-l\rangle \;\; + C_3(0) + C_4\right)$$

$$C_4 = -\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 + \frac{w}{24}\langle 0-4\rangle^4 - \frac{R_2}{6}\langle 0-10\rangle^3 - C_3(0) \tag{h}$$

$$C_4 = -\frac{R_1}{6}(0) + \frac{w}{24}(0) - \frac{R_2}{6}(0) - C_3(0) = 0$$

$$y(l) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle l-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle l-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle l-l\rangle^3 + C_3 l + C_4\right)$$

$$C_3 = \frac{w}{24l}\left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right] \tag{i}$$

$$C_3 = \frac{100}{24(10)}\left[(10-4)^4 - 2(10)^2(10-4)^2\right] = -2460$$

4 A substituição dos valores ou expressões de C_3, C_4, R_1 e R_2 das Equações (a), (b) (h) e (i) na Equação (g) fornece a equação de deflexão resultante para a viga do item (a) da Figura 4-22:

$$y = \frac{w}{24lEI}\left\{\left[2(l-a)^2\right]x^3 + \left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]x - l\langle x-a\rangle^4\right\} \tag{j}$$

5 A máxima deflexão ocorrerá no ponto em x onde a rotação da curva de deflexão[§] é zero. Iguale a equação de rotação da viga (f) a zero e calcule x:*

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}x^2 - \frac{w}{6}(x-a)^3 + C_3\right) = 0$$

$$0 = \frac{1}{3E7(0{,}163)}\left(90x^2 - 16{,}67(x-4)^3 - 2460\right)$$

$$x = 5{,}264 \tag{k}$$

Observe que é necessário o método de Viete ou um algoritmo numérico para cálculo de raízes para encontrar as raízes dessa equação cúbica.

6 Use esse valor de x na Equação (g) para encontrar a maior magnitude de deflexão, positiva ou negativa.

$$y_{max} = \frac{100}{24(10)(4{,}883E6)}\left\{\begin{matrix}\left[2(10-4)^2\right](5{,}264)^3 + \left[(10-4)^4 - 2(10)^2(10-4)^2\right](5{,}264) \\ -10(5{,}264-4)^4\end{matrix}\right\}$$

$$y_{max} = -0{,}00176 \text{ in} \tag{l}$$

7 Gráficos das funções carregamento, força cortante, momento fletor, rotação e deflexão para a parte (a) são mostrados na Figura 4-23. Abra o arquivo EX04-04 no programa escolhido para examinar o modelo e ver os gráficos em escala maior das funções da Figura 4-23.

[§] N. de R. T.: A curva de deflexão é também chamada de *linha elástica*.

* Como o valor de x para a máxima deflexão de uma viga biapoiada deve ser menor que o comprimento entre os apoios, l, o terceiro termo da Equação (f) é zero.

EXEMPLO 4-5

Cálculo da rotação e da deflexão de uma viga engastada utilizando funções de singularidade

Problema **Determine e trace os gráficos das funções rotação e deflexão para a viga da Figura 4-22*b* (repetida nesta página).**

Dados **A carga é a força concentrada mostrada na figura. O comprimento da viga é l = 10 in, e a posição da carga é a = 4 in. As demais propriedades da viga são I = 0,5 in^4 e E = 30 Mpsi. A magnitude da força aplicada é F = 400 lb.**

Hipóteses **Considere o peso da viga como desprezível quando comparado à carga aplicada.**

Solução **Ver Figuras 4-22*b* e 4-24.**

FIGURA 4-22B

Repetida.

1 Escreva as equações para a função carregamento de acordo com as Equações 3.17 e integre a função resultante duas vezes utilizando as Equações 3.18 para obter as funções força cortante e momento fletor. Observe o uso da função que representa o momento fletor no engastamento. Para a viga da Figura 4-22*b*,

$$q = -M_1\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} \qquad (a)$$

$$V = \int q\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + C_1 \qquad (b)$$

$$M = \int V\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + C_1 x + C_2 \qquad (c)$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{c} -M_1\langle x-0\rangle^{1} + \dfrac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} - \dfrac{F}{2}\langle x-a\rangle^{2} \\ + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \end{array}\right) \qquad (d)$$

$$y = \int \theta\,dx = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{c} -\dfrac{M_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} + \dfrac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^{3} - \dfrac{F}{6}\langle x-a\rangle^{3} \\ + \dfrac{C_1x^3}{6} + \dfrac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \end{array}\right) \qquad (e)$$

O momento reativo M_1 no engastamento está na direção z e as forças R_1 e F estão na direção y na Equação (b). Todos os momentos na Equação (c) estão na direção z.

2 Devido às reações de apoio terem sido incluídas na função carregamento, os diagramas de força cortante e momento fletor terminam no zero em cada extremidade da viga, fazendo com que $C_1 = C_2 = 0$.

3 A força reativa R_1 e o momento reativo M_1 são calculados a partir das Equações (b) e (c), respectivamente, substituindo as condições de contorno $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$. Observe que podemos substituir l por l^+ uma vez que sua diferença é desprezivelmente pequena.

$$\begin{aligned} V\left(l^+\right) = 0 &= R_1\langle l-0\rangle^0 - F\langle l-a\rangle^0 \\ 0 &= R_1 - F \\ R_1 &= F = 400 \text{ lb} \end{aligned} \qquad (f)$$

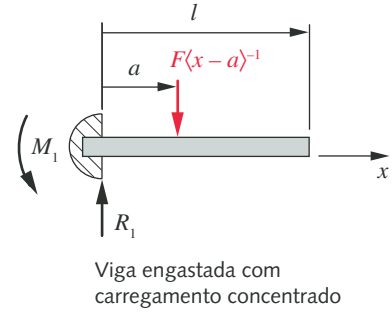
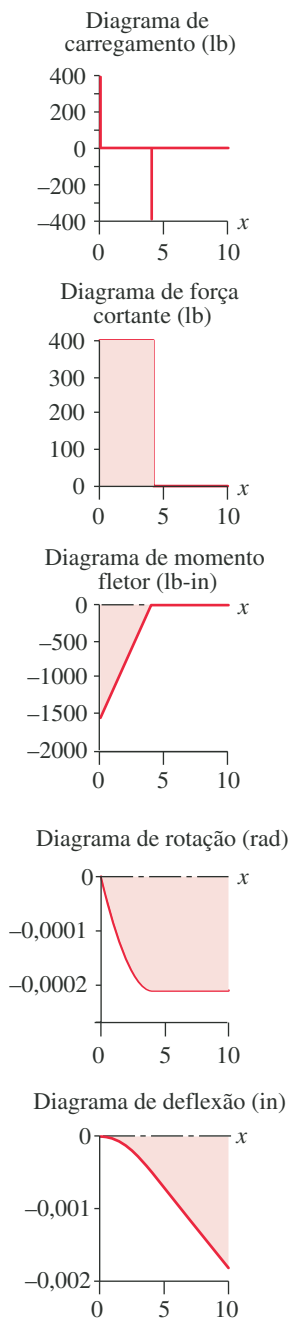



FIGURA 4-24

Gráficos do Exemplo 4-5.

$$M\left(l^{+}\right) = 0 = -M_1\langle l-0\rangle^0 + R_1\langle l-0\rangle^1 - F\langle l-a\rangle^1$$

$$0 = -M_1 + lR_1(l) - F(l-a) \tag{g}$$

$$M_1 = R_1(l) - F(l-a) = 400(10) - 400(10-4) = 1\,600 \text{ lb - in } cw$$

Uma vez que w, l e a são dados, a Equação (f) pode ser resolvida para R_1 e esse resultado substituído na Equação (g) para se encontrar M_1. Observe que a Equação (f) é apenas $\Sigma F_y = 0$, e a Equação (g) é $\Sigma M_z = 0$. M_1 não aparece na Equação (f) porque está em uma direção vetorial diferente da direção das forças y.

4 Substitua $x = 0$, $\theta = 0$ e $x = 0$, $y = 0$ em (d) e (e) e resolva para C_3 e C_4:

$$\theta(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(-M_1\langle 0-0\rangle^1 + \frac{R_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 - \frac{F}{2}\langle 0-a\rangle^2 + C_3\right)$$

$$C_3 = M_1\langle 0-0\rangle^1 - \frac{R_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 + \frac{F}{2}\langle 0-4\rangle^2 = 0 \tag{h}$$

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 + \frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle 0-a\rangle^3 + C_3(0) + C_4\right)$$

$$C_4 = \frac{M_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 - \frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 + \frac{F}{6}\langle 0-4\rangle^3 = 0 \tag{i}$$

5 A substituição das expressões de C_3, C_4, R_1 e M_1 de (f) (g), (h) e (i) na Equação (e) fornece a equação de deflexão da viga engastada da Figura 4-22b:

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right] \tag{j}$$

6 A deflexão máxima dessa viga engastada está em sua extremidade livre. Substitua $x = l$ na Equação (j) para encontrar y_{max}.

$$y_{max} = \frac{F}{6EI}\left[l^3 - 3al^2 - (l-a)^3\right] = \frac{Fa^2}{6EI}(a-3l)$$

$$y_{max} = \frac{400(4)^2}{6(3E7)(0{,}5)}\left[4 - 3(10)\right] = -0{,}001\,85 \text{ in} \tag{k}$$

7 Gráficos das funções carregamento, força cortante, momento fletor, rotação e deflexão são mostrados na Figura 4-24. Observe que a inclinação da viga é decrescente para o trecho da viga entre o apoio e a carga e então se torna constante à direita da carga. Embora não esteja muito aparente na escala pequena da figura, a deflexão da viga se torna uma reta à direita do ponto de aplicação da carga.

Abra o arquivo EX04-05 para examinar o modelo e ver os gráficos em escala maior das funções da Figura 4-24.

EXEMPLO 4-6

Cálculo da rotação e da deflexão de uma viga biapoiada com extremidade em balanço utilizando funções de singularidade

Problema **Determine e trace os gráficos das funções rotação e deflexão para uma viga biapoiada com extremidade em balanço com**

uma carga uniformemente distribuída sobre parte do seu comprimento e uma força concentrada na sua extremidade em balanço, como mostra a Figura 4-22*c*.

Viga biapoiada com extremidade em balanço com força concentrada e carregamento uniformemente distribuído

FIGURA 4-22C

Repetida.

Dados **O comprimento da viga é l = 10 in, e as posições das cargas são a = 4 in e b = 7 in. As demais propriedades da viga são I = 0,2 in^4 e E = 30 Mpsi. A magnitude da força concentrada é F = 200 lb e da força distribuída é w = 100 lb/in.**

Hipóteses **O peso da viga é desprezível quando comparado às cargas aplicadas e, portanto, pode ser ignorado.**

Solução **Ver Figuras 4-22*c* (repetida nesta página), 4-25 e 4-26.**

1 A carga distribuída não se estende sobre todo o comprimento desta viga. Todas funções de singularidade se estendem do ponto inicial até o final da viga. Desse modo, para zerar a função da carga uniforme em algum ponto que não seja o final da viga é necessário aplicar outra função de igual amplitude e sinal oposto, a fim de cancelar a função para todos os pontos além do comprimento a, como mostra a Figura 4-25. A soma das duas funções de sinais opostos é zero à direita da distância a.

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-0\rangle^{0} + w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-b\rangle^{-1} - F\langle x-l\rangle^{-1} \qquad (a)$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-0\rangle^{1} + w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-b\rangle^{0} - F\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \qquad (b)$$

$$M = \int V dx = \left(\begin{aligned} &R_1\langle x-0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-0\rangle^{2} + \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-b\rangle^{1} \\ &- F\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \end{aligned} \right) \qquad (c)$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned} &\frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} - \frac{w}{6}\langle x-0\rangle^{3} + \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^{3} + \frac{R_2}{2}\langle x-b\rangle^{2} \\ &- \frac{F}{2}\langle x-l\rangle^{2} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 \end{aligned} \right) \qquad (d)$$

$$y = \int \theta\,dx = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned} &\frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^{3} - \frac{w}{24}\langle x-0\rangle^{4} + \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^{4} + \frac{R_2}{6}\langle x-b\rangle^{3} \\ &- \frac{F}{6}\langle x-l\rangle^{3} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4 \end{aligned} \right) \qquad (e)$$

FIGURA 4-25

Funções de singularidade interrompidas são formadas pela combinação de funções de sinais opostos que começam em pontos diferentes ao longo da viga.

2 Devido às reações terem sido incluídas na função carregamento, os diagramas de cortante e momento terminam no zero em cada extremidade da viga, fazendo com que $C_1 = C_2 = 0$.

3 Como a força cortante e o momento fletor são nulos em $x = l^+$, as reações R_1 e R_2 podem ser calculadas simultaneamente a partir de (b) e (c) com $x = l^+ = l$:

$$\begin{aligned} V(l) = 0 &= R_1\langle l-0\rangle^{0} - w\langle l-0\rangle^{1} + w\langle l-a\rangle^{1} + R_2\langle l-b\rangle^{0} - F\langle l-l\rangle^{0} \\ 0 &= R_1 - wl + w(l-a) + R_2 - F \qquad (f) \\ R_2 &= -R_1 + wl - w(l-a) + F = 400 \text{ lb} \end{aligned}$$

Diagrama de carregamento (lb)

Diagrama de força cortante (lb)

Diagrama de momento fletor (lb-in)

Diagrama de rotação (rad)

Diagrama de deflexão (in)

FIGURA 4-26

Gráficos do Exemplo 4-6.

$$M(l) = 0 = \left(R_1 \langle l \rangle^1 - \frac{w}{2}\langle l \rangle^2 + \frac{w}{2}\langle l-a \rangle^2 + R_2 \langle l-b \rangle^1 - F\langle l-l \rangle^1 \right)$$

$$0 = R_1 l - \frac{wl^2}{2} + \frac{w(l-a)^2}{2} + R_2(l-b) \qquad (g)$$

$$R_1 = \frac{1}{l}\left[\frac{wl^2}{2} - \frac{w(l-a)^2}{2} - R_2(l-b) \right] = 200 \text{ lb}$$

Observe que as Equações (f) são apenas a soma de forças = 0 e a soma de momentos em relação ao ponto l igualada a 0.

4 Substitua $x = 0$, $y = 0$ e $x = b$, $y = 0$ na Equação (e) e resolva para C_3 e C_4:

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned} &\frac{R_1}{6}\langle 0-0 \rangle^3 - \frac{w}{24}\langle 0-0 \rangle^4 + \frac{w}{24}\langle 0-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle 0-b \rangle^3 \\ &- \frac{F}{6}\langle 0-l \rangle^3 + \frac{C_1}{6}(0)^3 + \frac{C_2}{2}(0)^2 + C_3(0) + C_4 \end{aligned} \right)$$

$$C_4 = 0 \qquad (h)$$

$$y(b) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned} &\frac{R_1}{6}\langle b-0 \rangle^3 - \frac{w}{24}\langle b-0 \rangle^4 + \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle b-b \rangle^3 \\ &- \frac{F}{6}\langle b-l \rangle^3 + \frac{C_1}{6}(b)^3 + \frac{C_2}{2}(b)^2 + C_3(b) + C_4 \end{aligned} \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{b}\left[-\frac{R_1}{6}b^3 + \frac{w}{24}b^4 - \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 \right]$$

$$= \frac{1}{7}\left[-\frac{200}{6}(7)^3 + \frac{100}{24}(7)^4 - \frac{100}{24}(7-4)^4 \right] = -252{,}4 \qquad (i)$$

5 A substituição das expressões de C_1, C_2, C_3, C_4, R_1 e R_2 das Equações (f), (g), (h) e (i) na Equação (e) fornece a equação da deflexão resultante

$$y = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned} &\frac{R_1}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + \frac{w}{24}\langle x-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle x-b \rangle^3 - \frac{F}{6}\langle x-l \rangle^3 \\ &+ \frac{1}{b}\left[-\frac{R_1}{6}(b)^3 + \frac{w}{24}(b)^4 - \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 \right] x \end{aligned} \right) \qquad (j)$$

6 Uma vez que uma viga em balanço é uma forma de viga engastada, a máxima deflexão frequentemente ocorre na extremidade livre. Substitua $x = l$ na Equação (f) para encontrar y_{max}.

$$y_{max} = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned} &\frac{R_1}{6}l^3 - \frac{w}{24}l^4 + \frac{w}{24}\langle l-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle l-b \rangle^3 - \frac{F}{6}\langle l-l \rangle^3 \\ &+ \frac{1}{b}\left[-\frac{R_1}{6}(b)^3 + \frac{w}{24}(b)^4 - \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 \right] l \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{1}{3E7(0{,}2)}\left(\begin{aligned} &\frac{200}{6}10^3 - \frac{100}{24}10^4 + \frac{100}{24}\langle 10-4 \rangle^4 + \frac{400}{6}(10-7)^3 \\ &- \frac{200}{6}0^3 + \frac{1}{7}\left[-\frac{200}{6}(7)^3 + \frac{100}{24}(7)^4 - \frac{100}{24}(7-4)^4 \right] 10 \end{aligned} \right)$$

$$y_{max} = -0{,}0006 \text{ in} \qquad (k)$$

7 Gráficos das funções carregamento, força cortante, momento fletor, rotação e deflexão para a parte (*c*) são mostrados na Figura 4-24. Abra o arquivo EX04-06 para examinar o modelo e ver os gráficos em escala maior das funções da Figura 4-26.

Vigas estaticamente indeterminadas

Quando uma viga tem apoios redundantes, como mostrado na Figura 4-22*d* (repetida nesta página), diz-se que ela é estaticamente indeterminada ou hiperestática. Este exemplo também é denominado viga contínua e é bastante comum. Vigas do piso de construções frequentemente possuem múltiplas colunas distribuídas sob um longo comprimento. As magnitudes de mais de duas forças de reação ou momentos não podem ser calculadas usando apenas as duas equações de equilíbrio estático, $\Sigma F = 0$ e $\Sigma M = 0$. Encontrar mais de duas reações requer equações adicionais, e a função deflexão pode ser utilizada com esse propósito. A deflexão pode ser considerada nula em cada apoio simples (como uma primeira aproximação), e a rotação da viga é conhecida ou pode ser precisamente estimada em um engastamento.* Isso fornece uma condição de contorno a mais para cada reação adicionada, permitindo que a solução seja calculada.

CÁLCULO DE VIGAS INDETERMINADAS UTILIZANDO FUNÇÕES DE SINGULARIDADE As funções de singularidade fornecem um meio conveniente para formular e calcular os valores das funções carregamento, força cortante, momento fletor, rotação e deflexão, como foi mostrado no exemplo anterior. Essa abordagem também pode ser utilizada para resolver o problema da viga indeterminada e é melhor demonstrada por outro exemplo.

Viga estaticamente indeterminada com carregamento uniformemente distribuído

FIGURA 4–22D

Repetida.

EXEMPLO 4-7

Cálculo de reações e deflexões de vigas estaticamente indeterminadas utilizando funções de singularidade

Problema **Determine e faça os gráficos das funções carregamento, força cortante, momento fletor, rotação e deflexão para a viga da Figura 4-22*d*. Encontre a deflexão máxima.**

Dado **A carga é uniformemente distribuída sobre parte da viga, como mostrado na figura. O comprimento é $l = 10$ in, $a = 4$ in e $b = 7$ in. As demais propriedades da viga são $I = 0{,}08$ in^4 e $E = 30$ Mpsi. A magnitude da força distribuída é $w = 500$ lb/in.**

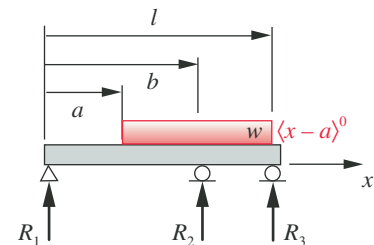
Hipóteses **Considere o peso da viga desprezível quando comparado ao carregamento aplicado.**

Solução **Ver as Figuras 4-22*d* e 4-27.**

1 Escreva uma equação para a função carregamento em termos das Equações 3.17 e integre a função resultante quatro vezes utilizando as Equações 3.18 para obter as funções força cortante, momento fletor, rotação e deflexão.

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-b\rangle^{-1} + R_3\langle x-l\rangle^{-1} \quad (a)$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-b\rangle^{0} + R_3\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \quad (b)$$

$$M = \int V\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-b\rangle^{1} + R_3\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \quad (c)$$

* Uma vez que nada é realmente rígido, os apoios da viga podem deformar-se (comprimir-se) com o carregamento aplicado. Entretanto, se os apoios forem suficientemente rígidos, essa deformação será pequena em comparação com a deflexão da viga e pode ser considerada nula para a análise.

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{R_2}{2}\langle x-b\rangle^2 + \frac{R_3}{2}\langle x-l\rangle^2 + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \right) \tag{d}$$

$$y = \int \theta dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle x-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle x-l\rangle^3 + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \right) \tag{e}$$

2 Há 3 reações de apoio e 4 constantes de integração para serem encontradas. As constantes C_1 e C_2 são nulas porque as reações de apoio atuando na viga estão incluídas na função carregamento. Isso deixa 5 incógnitas para serem encontradas.

3 Considerando as condições em um ponto infinitesimalmente à esquerda de $x = 0$ (denotado por $x = 0^-$), tanto a força cortante como o momento fletor são nulos. As mesmas condições são obtidas em um ponto infinitesimalmente à direita de $x = l$ (denotado por $x = l^+$). Além disso, a deflexão deve ser nula em todos os três apoios. Essas observações fornecem as 5 condições de contorno necessárias para o cálculo das 3 forças de reação e das 2 constantes de integração restantes: isto é, quando $x = 0^-$, $V = 0$, $M = 0$; quando $x = 0$, $y = 0$; quando $x = b$, $y = 0$; quando $x = l$, $y = 0$; quando $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$.

4 Substitua as condições de contorno $x = 0$, $y = 0$, $x = b$, $y = 0$ e $x = l$, $y = 0$ em (e).

para $x = 0$:

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle 0-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle 0-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle 0-l\rangle^3 + C_3(0) + C_4 \right)$$

$$C_4 = 0 \tag{f}$$

para $x = b$:

$$y(b) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle b-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle b-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle b-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle b-l\rangle^3 + C_3b + C_4 \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{b}\left(-\frac{R_1}{6}b^3 + \frac{w}{24}\langle b-a\rangle^4 \right) = \frac{1}{7}\left(-\frac{R_1}{6}7^3 + 100(7-4)^4 \right) = 385,7 - 8,17R_1 \tag{g}$$

para $x = l$:

$$y(l) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle l-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle l-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle l-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle l-l\rangle^3 + C_3l + C_4 \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{l}\left(-\frac{R_1}{6}l^3 + \frac{w}{24}\langle l-a\rangle^4 - \frac{R_2}{6}\langle l-b\rangle^3 \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{10}\left(-\frac{R_1}{6}10^3 + \frac{100}{24}\langle 10-4\rangle^4 - \frac{R_2}{6}\langle 10-7\rangle^3 \right) = 540 - 16,67R_1 - 4,5R_2 \tag{h}$$

Tabela 4-2
Exemplo 4-7
Dados calculados

Variável	Valor	Unidade
R_1	158,4	lb
R_2	2471,9	lb
R_3	369,6	lb
C_1	0,0	lb
C_2	0,0	lb-in
C_3	–1052,7	rad
C_4	0,0	in
V_{min}	–1291,6	lb
V_{max}	1130,4	lb
M_{min}	–1141,1	lb-in
M_{max}	658,7	lb-in
θ_{min}	–0,025	deg
θ_{max}	0,027	deg
y_{min}	–0,0011	in
y_{min}	0,0001	in

5 Mais duas equações podem ser escritas usando as Equações (c) e (b) e notando que no ponto l^+, infinitesimalmente à direita da extremidade direita de uma viga, tanto V como M são nulos. Podemos substituir l^+ por l, uma vez que a diferença entre eles é desprezivelmente pequena.

$$M(l) = 0 = R_1\langle l-0\rangle^1 - \frac{w}{2}\langle l-a\rangle^2 + R_2\langle l-b\rangle^1 + R_3\langle l-l\rangle^1$$

$$0 = R_1 l - \frac{w}{2}(l-a)^2 + R_2(l-b)$$

$$R_1 = \frac{1}{l}\left[\frac{w}{2}(l-a)^2 - R_2(l-b)\right]$$

$$R_1 = \frac{1}{10}\left[\frac{100}{2}(10-4)^2 - R_2(10-7)\right] = 180 - 0{,}3R_2 \qquad (i)$$

$$V(l) = 0 = R_1\langle l\rangle^0 - w\langle l-a\rangle^1 + R_2\langle l-b\rangle^0 + R_3\langle l-l\rangle^0 = 0$$

$$0 = R_1 - w(l-a) + R_2 + R_3$$

$$R_2 = w(l-a) - R_1 - R_3 = 600 - R_1 - R_3 \qquad (j)$$

6 As Equações (f) a (j) fornecem 5 equações para 5 incógnitas, R_1, R_2, R_3, C_3, C_4, e podem ser resolvidas simultaneamente. A função deflexão pode ser expressa em termos da geometria mais o carregamento e as reações de apoio, mas, neste caso, uma solução simultânea é necessária.

$$y = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{l} \frac{R_1}{6}x^3 + \frac{1}{b}\left(\frac{w}{24}\langle b-a\rangle^4 - \frac{R_1}{6}b^3\right)x - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4 \\ + \frac{R_2}{6}\langle x-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle x-l\rangle^3 \end{array}\right) \qquad (k)$$

7 Gráficos das funções carregamento, força cortante, momento fletor, rotação e deflexão são mostrados na Figura 4-27 e seus valores extremos, na Tabela 4.2. Abra o arquivo EX04-07 para examinar o modelo e ver os gráficos em escala maior das funções da Figura 4-27.

FIGURA 4-27

Gráficos do Exemplo 4-7.

Esse exemplo mostra que as funções de singularidade fornecem uma boa maneira de resolver problemas de viga, calculando simultaneamente as reações e deflexões quando há reações redundantes. As funções de singularidade permitem a obtenção de uma expressão para cada função que se aplica ao longo de toda a viga. Elas também podem ser inerentemente manipuladas no computador em conjunto com um programa que resolve sistemas de equações. O método de função de singularidade apresentado aqui é universal e resolverá quaisquer problemas dos tipos apresentados.

Há também outras técnicas para a solução de problemas de cálculo das deflexões e reações redundantes. A **análise por elementos finitos** (FEA) resolve esses problemas. O **método das analogias de Mohr** trata a função momento fletor como se ela fosse uma função "carregamento" que é integrada duas vezes para se obter a função deflexão. O leitor pode consultar a bibliografia deste capítulo para informações adicionais a respeito desses tópicos. O **método de Castigliano** utiliza equações da energia de deformação para determinar a deflexão em qualquer ponto.

4.11 MÉTODO DE CASTIGLIANO

Métodos de energia geralmente propiciam soluções simples e rápidas para problemas. Um método de energia útil para a solução de deflexões de vigas é o

FIGURA 3-17 Repetida

Energia armazenada em uma mola.

método de Castigliano. Ele também pode fornecer uma solução para problemas de viga indeterminada. Quando um elemento elástico é deformado devido à aplicação de uma força, momento torçor ou momento fletor, a energia de deformação é armazenada no elemento. Para pequenas deformações na maior parte das geometrias, a relação entre força, momento ou torque aplicados e a deformação resultante pode ser assumida como sendo linear, como mostrado na Figura 3-17 (repetida). Essa relação é frequentemente chamada de constante de mola k do sistema. A área abaixo do diagrama carga-deformação é igual à energia de deformação, U, armazenada no elemento. Para uma relação linear, essa é a área de um triângulo.

$$U = \frac{F\delta}{2} \tag{4.20}$$

onde F é a carga aplicada e δ é a deformação.

Castigliano observou que quando um corpo é elasticamente defletido por qualquer carga, a deformação na direção dessa carga é igual à derivada parcial da energia de deformação em relação à carga. Representando uma carga genérica por Q e uma deflexão genérica por Δ,

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial Q} \tag{4.21}$$

Essa relação pode ser aplicada para qualquer caso de solicitação, normal, momento fletor, força cortante ou momento torçor. Se mais de uma solicitação atua sobre a mesma parte, seus efeitos podem ser sobrepostos usando a Equação 4.21 para cada caso.

Energia de deformação devido à força normal Para a força normal, a energia de deformação é obtida substituindo a expressão da deformação axial (Equação 4.8) na Equação 4.20:

$$U = \frac{1}{2}\frac{F^2 l}{EA} \tag{4.22a}$$

que é válida somente se E e A não variam ao longo do comprimento l. Se eles variam com a distância x ao longo do elemento, então uma integração é necessária:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{F^2}{EA}\,dx \tag{4.22b}$$

Energia de deformação devido ao momento torçor Para momento torçor (ver na próxima seção) a energia de deformação é:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2}{GK}\,dx \tag{4.22c}$$

onde T é o torque ou momento torçor aplicado, G é o módulo de elasticidade transversal e K é uma propriedade geométrica da seção transversal, conforme definido na Tabela 4-2.

Energia de deformação devido ao momento fletor Para o momento fletor, a energia de deformação é

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx \tag{4.22d}$$

onde M é o momento fletor que pode ser uma função de x.

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DEVIDO À FORÇA CORTANTE Para a força cortante em uma viga, a energia de deformação será uma função da geometria da seção transversal, assim como da carga e do comprimento. Para uma viga com seção transversal retangular, a energia de deformação é

$$U = \frac{3}{5}\int_0^l \frac{V^2}{GA}\,dx \tag{4.22e}$$

onde V é a força cortante, que pode ser uma função de x. Para seções transversais que não são retangulares, a fração 3/5 será diferente.

Os efeitos de forças cortantes nas deflexões de vigas serão geralmente menores do que 1% dos efeitos devido a momentos fletores quando a razão comprimento-altura da viga é >10. Portanto, somente vigas curtas terão efeitos significativos de forças cortantes. Para seções transversais não retangulares, 1/2 é frequentemente utilizado na Equação 4.22*e* em vez de 3/5, para se obter uma aproximação da energia de deformação devido a forças cortantes. Esse cálculo grosseiro indicará se a ordem de grandeza da deflexão devido à força cortante é suficiente para justificar um cálculo mais preciso.

Deflexão pelo método de Castigliano

Este método é útil para calcular deflexões em pontos particulares de um sistema. A Equação 4.21 relaciona força e deflexão através da energia de deformação. Para um sistema deformado por mais de um tipo de solicitação, os efeitos individuais podem ser sobrepostos utilizando uma combinação das Equações 4.21 e 4.22. Quando cargas de flexão e torção estão presentes, suas componentes de deflexão serão frequentemente maiores que aquelas devido a qualquer carregamento axial presente. Por essa razão, os efeitos axiais são algumas vezes ignorados.

A deflexão em pontos em que não há carga real aplicada pode ser obtida aplicando-se uma "carga fictícia" no ponto e resolvendo a Equação 4.21 com a carga fictícia igualada a zero. O cálculo é simplificado se a diferenciação parcial da Equação 4.21 for realizada antes da integração definida nas Equações 4.22.

Para se obter a máxima deflexão é necessário ter algum conhecimento de sua posição ao longo da viga. O método de função de singularidade, por outro lado, fornece a função deflexão sobre toda a viga, de onde os máximos e mínimos são facilmente obtidos.

Cálculo de reações redundantes pelo método de Castigliano

O método de Castigliano também representa um meio conveniente para se resolver problemas estaticamente indeterminados. Por exemplo, reações nos apoios redundantes atuando em uma viga podem ser obtidas a partir da Equação 4.21, igualando a deflexão no apoio a zero e resolvendo para a força.

EXEMPLO 4-8

Encontrando reações de uma viga estaticamente indeterminada usando o método de Castigliano

Problema **Encontre as forças de reação para a viga indeterminada na Figura 4-22*e*.**

Viga engastada com apoio redundante

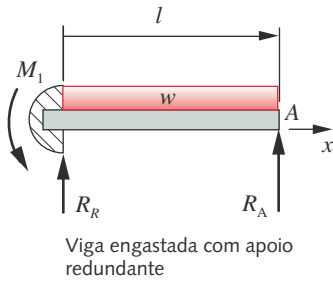



FIGURA 4-22E

Viga indeterminada.

Dados **A carga é uniformemente distribuída sobre a viga, como mostrado. O comprimento é *l*. A *magnitude* da força distribuída é *w*.**

Hipóteses **O peso da viga é insignificante comparado à carga aplicada.**

Solução **Ver Figura 4-22*e*.**

1 Considere que a força de reação em *A* seja redundante e remova-a temporariamente. A viga será, então, estaticamente determinada e irá defletir em *A*. Agora considere que a força de reação R_A seja uma carga aplicada desconhecida que forçará a deflexão a ser zero (como deve ser se o ponto *A* é suportado). Se escrevermos uma equação para a deflexão em A em termos de força R_A e então solucionarmos para R_A com a deflexão definida como zero, determinaremos a reação necessária R_A.

2 Escreva a Equação 4.21 para a deflexão y_A na carga aplicada desconhecida R_A em termos de energia de deformação na viga em tal ponto.

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} \tag{a}$$

3 Substitua a Equação 4.22*d* e diferencie:

$$y_A = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx\right)}{\partial R_A} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}dx \tag{b}$$

4 Escreva uma expressão para o momento da flexão a uma distância *x* de A:

$$M = R_A x - \frac{1}{2}wx^2 \tag{c}$$

5 Sua derivativa em relação a R_A é:

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \tag{d}$$

6 Substitua (*c*) e (*d*) em (*b*) para conseguir:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^l\left(R_A x^2 - \frac{1}{2}wx^3\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A l^3}{3} - \frac{wl^4}{8}\right) \tag{e}$$

7 Defina y_A e resolva R_A para conseguir:

$$R_A = \frac{3}{8}wl \tag{f}$$

8 Da soma de forças e soma de momentos, temos:

$$R_R = \frac{5}{8}wl \qquad M_1 = \frac{1}{8}wl^2 \tag{g}$$

4.12 TORÇÃO

Quando barras são solicitadas por um momento em relação ao seu eixo longitudinal, diz-se que estão sob torção, e o momento aplicado é então denominado **torque** ou **momento torçor**. Essa situação é comum em eixos que transmitem potência, em aparafusadores e em qualquer situação em que o vetor do momento aplicado seja paralelo ao eixo longitudinal de um corpo, em vez de ser transversal a ele como no caso da flexão. Muitos elementos de máquinas são carregados com combinações de torques e momentos fletores, e essas situações serão tratadas em capítulos posteriores. Neste capítulo vamos considerar apenas o caso simples de **solicitação puramente torcional**.

A Figura 4-28*a* mostra uma viga reta com seção transversal circular uniforme, com um torque aplicado de modo que nenhum momento fletor ou outras forças estão presentes. Isso pode ser executado com uma chave com cabo duplo, que permite que um conjugado puro seja aplicado sem nenhuma força transversal. A extremidade fixa da barra está engastada em uma parede rígida. A barra gira em torno de seu eixo longitudinal, está livre e gira em um ângulo θ. As hipóteses para esta análise são as seguintes:

1. O elemento analisado está distante de cargas aplicadas ou reações externas na barra.
2. A barra está sujeita à torção pura em um plano normal ao seu eixo, e nenhuma carga axial, de flexão ou cortante, está presente.
3. Seções transversais da barra permanecem planas e perpendiculares ao eixo.
4. O material da barra é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke.
5. As tensões se mantêm abaixo do limite elástico.
6. A barra está inicialmente reta.

Seções circulares Um elemento diferencial retirado de qualquer lugar da superfície externa está sujeito a tensões de cisalhamento devido ao momento torçor. A tensão é de cisalhamento puro e varia de zero no centro até um máximo no raio externo, como mostra a Figura 4-28*b*,

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{4.23a}$$

onde T = torque aplicado, ρ = raio até qualquer ponto e J = momento polar de inércia da seção transversal. A tensão é máxima na superfície externa, com raio r,

(*a*) Deflexão θ

(*b*) Distribuição da tensão de cisalhamento τ

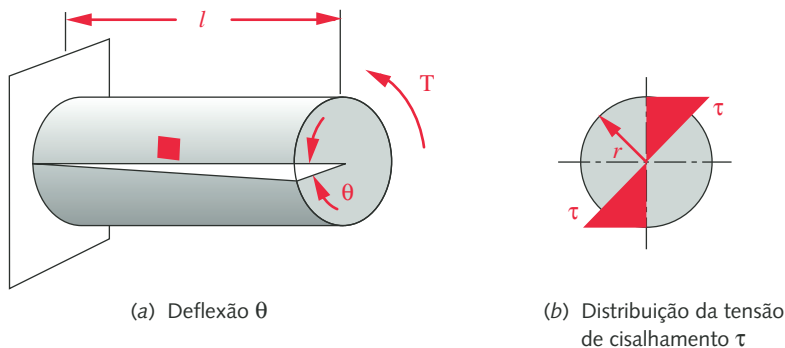



FIGURA 4-28

Uma barra circular puramente torcional.

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \tag{4.23b}$$

O giro angular devido ao torque aplicado é

$$\theta = \frac{Tl}{JG} \tag{4.24}$$

onde l é o comprimento da barra e G é o módulo de elasticidade transversal do material como definido na Equação 2.5.

Observe que **a Equação 4.24 se aplica somente para seções transversais circulares**. Qualquer outra forma de seção transversal terá comportamento bem diferente. O momento de inércia polar de uma seção transversal circular maciça de diâmetro d é

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \tag{4.25a}$$

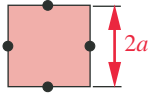
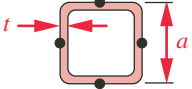
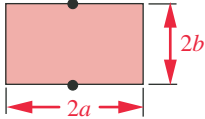
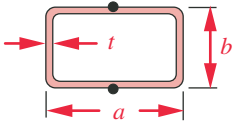
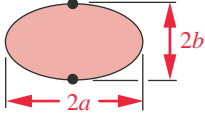
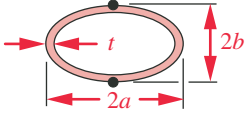
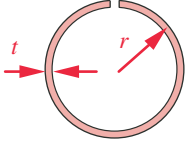
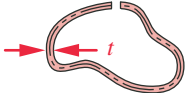
e para uma seção transversal circular oca de diâmetro externo d_o e interno d_i é

$$J = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32} \tag{4.25b}$$

A seção transversal circular é o formato ótimo para qualquer barra sujeita a carregamento torcional e, se possível, deve ser usada em todas as situações de torção.

Seções não circulares Em alguns casos, outros formatos podem ser necessários por razões de projeto. Seções transversais não circulares sujeitas à torção apresentam comportamento que viola algumas das hipóteses listadas anteriormente. As seções não se mantêm planas e vão se distorcer. Linhas radiais não permanecem retas, e a distribuição da tensão de cisalhamento não é necessariamente linear ao longo da seção. Uma expressão geral para a **máxima tensão de cisalhamento devido à torção em seções não circulares** é

$$\tau_{max} = \frac{T}{Q} \tag{4.26a}$$

onde Q é uma função da geometria da seção transversal. O giro angular da seção transversal é

$$\theta = \frac{Tl}{KG} \tag{4.26b}$$

onde K é uma função da geometria da seção transversal. Observe a similaridade entre essa equação e a Equação 4.24. Para uma seção circular fechada (somente), o fator de geometria K é o momento polar de inércia, J. Para qualquer outra forma de seção transversal fechada que não seja circular, o fator K será menor que J para a mesmas dimensões de seção, o que indica a vantagem de se usar uma seção circular fechada para o carregamento torcional. Esse fato será demonstrado no próximo exemplo.

Expressões para Q e K para diversas seções transversais podem ser obtidas na referência 3, assim como em outras fontes. A Tabela 4-2 mostra expressões para Q e K para algumas seções transversais usuais e também mostra as posições da máxima tensão de cisalhamento.

Tabela 4-3 Expressões para K e Q para algumas formas de seção transversal sob torção

Os pontos pretos indicam pontos de máxima tensão de cisalhamento (Fonte: Ref. 4, com permissão)

Formato	K	Q
quadrado maciço	$K = 2{,}25a^4$	$Q = \dfrac{a^3}{0{,}6}$
quadrado oco	$K = \dfrac{2t^2(a-t)^4}{2at-2t^2}$ cantos internos podem ter tensões mais altas se o raio do canto for pequeno	$Q = 2t(a-t)^2$
retângulo maciço	$K = ab^3\left[\dfrac{16}{3} - 3{,}36\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b^4}{12a^4}\right)\right]$	$Q = \dfrac{8a^2b^2}{3a+1{,}8b}$
retângulo oco	$K = \dfrac{2t^2(a-t)^2(b-t)^2}{at+bt-2t^2}$ cantos internos podem ter tensões mais altas se o raio do canto for pequeno	$Q = 2t(a-t)(b-t)$
elipse maciça	$K = \dfrac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$	$Q = \dfrac{\pi ab^2}{2}$
elipse oca	$K = \dfrac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}\left[1-\left(1-\dfrac{t}{a}\right)^4\right]$	$Q = \dfrac{\pi ab^2}{2}\left[1-\left(1-\dfrac{t}{a}\right)^4\right]$
tubo circular aberto	$K = \dfrac{2}{3}\pi rt^3; \quad t << r$	$Q = \dfrac{4\pi^2r^2t^2}{6\pi r+1{,}8t}; \quad t << r$
forma aberta arbitrária U = comprimento da linha média	$K = \dfrac{1}{3}Ut^3; \quad t << U$ t deve ser muito menor que raio mínimo de curvatura	$Q = \dfrac{U^2t^2}{3U+1{,}8t}; \quad t << U$

EXEMPLO 4-9

Projeto de uma barra de torção

Problema **Determine o melhor formato de seção transversal para uma barra de torção oca feita a partir de uma chapa de aço de dimensões conhecidas de modo a suportar uma carga puramente torcional com mínimo giro angular. Também encontre a máxima tensão de cisalhamento.**

Dados **O torque aplicado é de 10 N-m. A chapa de aço tem comprimento l = 1 m, largura w = 100 mm e espessura t = 1 mm. G = 80,8 GPa.**

Hipóteses **Tente quatro formatos diferentes de seção transversal: placa plana não conformada, seção circular aberta, seção circular fechada e seção quadrada fechada. O formato circular aberto é cilíndrico, mas sua junção não é soldada. As junções de formatos fechados são soldadas para formar uma seção transversal contínua. Assuma um diâmetro médio ou perímetro médio consistente com a largura da chapa.**

Solução **Ver Figura 4-29 e Tabela 4-2.**

(*a*) Placa plana

(*b*) Circular aberta

(*c*) Quadrada fechada

(*d*) Circular fechada

FIGURA 4-29

Seções transversais para o Exemplo 4-6.

1 As Equações 4.26 são válidas para todas as seções, sendo que substituimos K por J e Q por J/r no caso da seção circular fechada.

2 A placa plana não conformada se comporta como uma seção retangular maciça, como mostra a Figura 4-29*a* e a Tabela 4-2. Ela tem dimensões $a = w/2 = 0{,}05$ m e $b = t/2 = 0{,}0005$ m:

$$K = ab^3\left[\frac{16}{3} - 3{,}36\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right]$$

$$= (0{,}05)(0{,}0005)^3\left[5{,}333 - 3{,}36\frac{0{,}0005}{0{,}05}\left(1 - \frac{(0{,}0005)^4}{12(0{,}05)^4}\right)\right] \qquad (a)$$

$$K = 3{,}312E{-}11 \text{ m}^4 = 33{,}123 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8{,}08E10)(3{,}312E{-}11)} = 3{,}736 \text{ rad} = 214{,}1^\circ$$

Esse é obviamente um grande giro angular, indicando que a placa plana foi torcida como um saca-rolhas por esta carga torcional.

$$Q = \frac{8a^2b^2}{3a + 1{,}8b}$$

$$= \frac{8(0{,}05)^2(0{,}0005)^3}{3(0{,}05) + 1{,}8(0{,}0005)} \qquad (b)$$

$$Q = 3{,}313E{-}8 \text{ m}^3 = 33{,}13 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{3{,}313E{-}8} = 301{,}8 \text{ MPa} = 43\,772 \text{ psi}$$

A máxima tensão de cisalhamento é de 300 MPa, o que exigiria um material com um limite de escoamento na tração acima de 520 MPa (75000 psi) de modo a não escoar e não deformar plasticamente. Isso requer um aço de alta

resistência. (Ver Seção 5.1 para a discussão dessa relação entre a resistência à tração e a resistência ao cisalhamento como definido na Equação 5.9*b*.)

3 A forma circular aberta é então conformada em um tubo de 3,18 cm de diâmetro, mas sua junção longitudinal não é soldada e é deixada aberta, como mostra a Figura 4-29*b*. As expressões para K e Q a partir da Tabela 4-3 são:

$$K = \frac{2}{3}\pi r t^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi \frac{\left(\frac{w}{\pi} - t\right)}{2} t^3 = \frac{1}{3}\left(w - \pi t\right)t^3 = \frac{1}{3}\left(0{,}1 - 0{,}001\pi\right)0{,}001^3 \qquad (c)$$

$$K = 3{,}2286E\text{–}11 \text{ m}^4 = 32{,}286 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8{,}08E10)(3{,}2286E\text{–}11)} = 3{,}833 \text{ rad} = 219{,}6°$$

Este é um giro angular tão grande quanto o da placa plana.

$$Q = \frac{4\pi^2 r^2 t^2}{6\pi r + 1{,}8t}$$

$$= \frac{4\pi^2 (0{,}01542)^2 (0{,}001)^3}{6\pi(0{,}01542) + 1{,}8(0{,}001)} \qquad (d)$$

$$Q = 3{,}209E\text{–}8 \text{ m}^3 = 32{,}09 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{3{,}209E\text{–}8} = 311{,}6 \text{ MPa} = 45201 \text{ psi}$$

A tensão e o giro são inaceitáveis. Trata-se de um projeto tão ruim quanto o da placa plana.

4 O tubo com seção quadrada fechada é formado dobrando-se a chapa em uma seção quadrada cujo lado tem dimensão $s = a = w/4$. A junção é soldada como mostra a Figura 4-29*c*. Da Tabela 4-2, K e Q, e a tensão e o giro são agora

$$K = \frac{2t^2(a-t)^4}{2at - 2t^2} = \frac{2t^2\left(\frac{w}{4} - t\right)^4}{2\frac{w}{4}t - 2t^2} = \frac{2(0{,}001)^2\left(\frac{0{,}1}{4} - 0{,}001\right)^4}{2\left(\frac{0{,}1}{4}\right)(0{,}001) - 2(0{,}001)^2}$$

$$K = 1{,}382E\text{–}8 \text{ m}^4 = 1382 \text{ mm}^4 \qquad (e)$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8{,}08E10)(1{,}382E\text{–}8)} = 0{,}00895 \text{ rad} = 0{,}51°$$

$$Q = 2t(a-t)^2 = 2t\left(\frac{w}{4} - t\right)^2 = 2(0{,}001)\left(\frac{0{,}1}{4} - 0{,}001\right)^2$$

$$Q = 1{,}152E\text{–}6 \text{ m}^3 \qquad (f)$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{1{,}152E\text{–}6} = 8{,}7 \text{ MPa} = 1259 \text{ psi}$$

Este ângulo de giro do tubo quadrado é muito menor que aquele da seção aberta e a máxima tensão de cisalhamento é agora muito mais razoável.

5 A forma circular fechada é conformada em um tubo de 3,18 cm de diâmetro externo e sua junção longitudinal é soldada como mostra a Figura 4-29*d*. Podemos usar tanto as Equações 4.24 e 4.25 quanto as equações gerais 4.26 envolvendo K e Q, que são agora uma função de J para esta forma circular. Para o giro,

$$K = J = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32}; \quad d_o = \frac{w}{\pi}, \quad d_i = d_o - 2t$$

$$= \frac{\pi\left[\left(\frac{w}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{w}{\pi} - 2t\right)^4\right]}{32} = \frac{\pi\left[\left(\frac{0,1}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{0,1}{\pi} - 2\{0,001\}\right)^4\right]}{32} \tag{g}$$

$$K = J = 2{,}304E{-}8 \text{ m}^4 = 23\,041 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8{,}08E10)(2{,}304E{-}8)} = 0{,}0054 \text{ rad} = 0{,}31^\circ$$

e para a máxima tensão de cisalhamento na superfície externa,

$$Q = \frac{J}{r} = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32 r_o} = \frac{\pi\left[\left(\frac{w}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{w}{\pi} - 2t\right)^4\right]}{32\left(\frac{w}{2\pi}\right)}$$

$$= \frac{\pi\left[\left(\frac{0,1}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{0,1}{\pi} - 2\{0,001\}\right)^4\right]}{32\left(\frac{0,1}{2\pi}\right)}$$

$$Q = 1{,}448E{-}6 \text{ m}^3 \tag{h}$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{1{,}448E{-}6} = 6{,}91 \text{ MPa} = 1002 \text{ psi}$$

6 Este projeto com seção circular possui a menor tensão e rotação e é certamente a melhor escolha dos quatro projetos apresentados. A espessura da parede poderia ser aumentada para reduzir ainda mais a tensão e a rotação, caso fosse desejado. O projeto também precisa ser verificado para um possível empenamento torcional. Os arquivos EX04-09 podem ser abertos no programa de sua preferência.

O exemplo anterior aponta a vantagem de se usar seções circulares sempre que solicitações torcionais estejam presentes. Lembre-se de que a quantidade de material, e, portanto, o peso, é idêntica nos quatro projetos deste exemplo. A seção quadrada fechada tem 1,6 vezes a rotação angular da seção circular fechada (tubo). A placa plana tem 691 vezes a rotação do tubo circular fechado. Observe que a seção circular aberta não é melhor sob torção que a placa plana; ela tem 708 vezes a rotação angular do tubo fechado. Esse tipo de resultado é verdadeiro para qualquer seção aberta sob torção, quer seja para viga I, viga C, viga L, quadrado, círculo ou outra forma arbitrária. **Qualquer seção aberta é geralmente pior sob torção que uma placa plana com seção transversal de mesmas dimensões.** Obviamente, **seções abertas deveriam ser evitadas para todas as aplicações com cargas torcionais.** Mesmo seções fechadas não circulares devem ser evitadas, já que são menos eficientes sob torção que seções circulares fechadas. **Apenas seções circulares fechadas, tanto ocas como maciças, são recomendadas para aplicações com carregamento torcional.**

4.13 TENSÕES COMBINADAS

É muito comum em componentes de máquinas haver combinações de solicitações que originam tanto tensões normais como de cisalhamento no mesmo componente. Pode haver locais dentro do componente onde essas tensões aplicadas devem ser combinadas para se encontrar as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento. A melhor maneira de demonstrar isso é com um exemplo.

EXEMPLO 4-10

Tensões de flexão e de torção combinadas

Problema **Encontre os locais com as maiores tensões no suporte mostrado na Figura 4-30 e determine as tensões aplicadas e principais nestes locais.**

Dados **O comprimento da haste é l = 6 in e do braço é a = 8 in. O diâmetro externo da haste d = 1,5 in. Carga F = 1000 lb.**

Hipóteses **A carga é estática e o conjunto está sob temperatura ambiente. Considere as tensões de cisalhamento devido à força cortante assim como outras tensões.**

Solução **Ver Figuras 4-30 a 4-33.**

1 Limitaremos nossa análise à haste, que é solicitada tanto à flexão (como uma viga engastada) como à torção. (O braço também precisaria ser analisado para um projeto completo). Primeiramente, os esforços internos solicitantes sobre o comprimento da haste precisam ser determinados desenhando os diagramas de força cortante, momento fletor e momento torçor para a haste.

2 Os diagramas de força cortante e momento fletor são similares àqueles da viga engastada no Exemplo 4-5, com a diferença de que neste caso a força está na extremidade da viga em vez de se localizar em algum ponto intermediário. A Figura 4-31 mostra que a força cortante é uniforme ao longo do comprimento da viga e sua magnitude é igual à carga aplicada $V_{max} = F$ = 1000 lb. O momento máximo ocorre no engastamento e sua magnitude é $M_{max} = Fl = (1000)(6) = 6000$ lb-in. (Ver Exemplo 4-5 para deduções.)

O torque aplicado à haste se deve à força F atuando na extremidade do braço de 8 in e é $T_{max} = Fa = (1000)(8) = 8000$ lb-in. Observe que esse torque é uniforme sobre o comprimento da haste, já que ele pode sofrer reação oposta somente pela parede. A Figura 4-31 mostra todos esses três diagramas de esforços internos solicitantes. Fica claro por esses gráficos que a seção transversal mais solicitada é o engastamento, no qual todas as três solicitações são máximas.

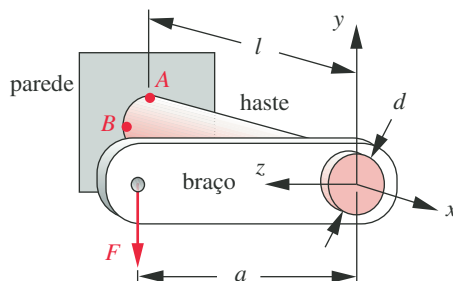



FIGURA 4-30

Suporte do Exemplo 4-9.

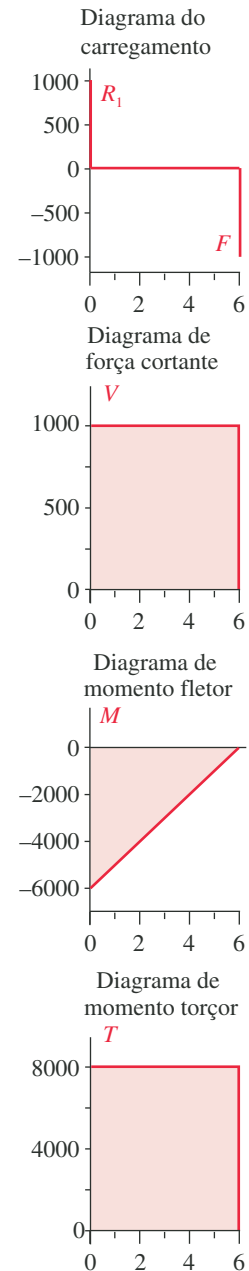



FIGURA 4-31

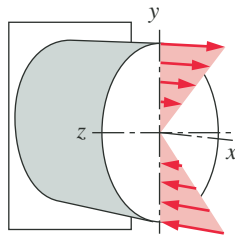
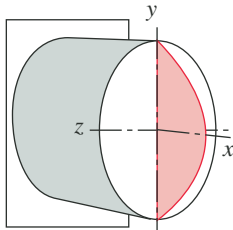
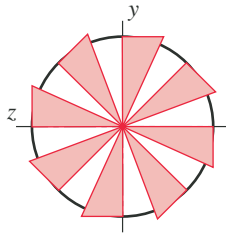
Diagramas do carregamento para viga, força cortante, momento fletor e momento torçor do Exemplo 4-10.

(*a*) Distribuição da tensão normal de flexão em uma seção transversal

(*b*) Distribuição da tensão de cisalhamento devido à força cortante em uma seção transversal

(*c*) Distribuição da tensão de cisalhamento devido ao momento torçor em uma seção transversal

FIGURA 4-32

Seções transversais da haste do Exemplo 4-10.

3 Vamos agora considerar uma seção da haste junto à parede e examinemos as distribuições de tensão nessa seção devido a essas solicitações. A Figura 4-32*a* mostra a distribuição das tensões normais de flexão através da seção, que atingem um máximo (+/–) nas fibras externas e zero na linha neutra. A tensão de cisalhamento devido à força cortante é máxima em todos os pontos no plano neutro (*xz*) e zero nas fibras externas (Figura 4-32*b*).

A tensão de cisalhamento devido à torção é proporcional ao raio, portanto é zero no centro e máxima em todos os pontos na superfície externa, como mostra a Figura 4-32*c*. Observe as diferenças entre as distribuições da tensão normal de flexão e da tensão de cisalhamento devido ao momento torçor. A magnitude da tensão de flexão é proporcional à distância *y* a partir do plano neutro e, portanto, é máxima somente nas partes superior e inferior da seção, enquanto que a tensão de cisalhamento devido ao momento torçor é máxima em torno de todo o perímetro.

4 Escolhemos dois pontos, *A* e *B* da Figura 4-30, para serem analisados (também mostrado na Figura 4-33*a*), pois eles possuem as piores combinações de tensões. A maior tensão de flexão ocorrerá na fibra externa superior no ponto *A*, e ela se combina com a maior tensão de cisalhamento torcional que se localiza em torno de toda a circunferência externa da haste. Um elemento diferencial tomado no ponto *A* é mostrado na Figura 4-33*b*. Observe que a tensão normal (σ_x) atua na face *x* na direção *x* e a tensão de cisalhamento devido ao momento torçor (τ_{xz}) atua na face *x* na direção +*z*.

No ponto *B*, a tensão de cisalhamento devido ao momento torçor possui a mesma magnitude que a do ponto *A*, mas a direção desta tensão de cisalhamento (τ_{xy}) no ponto *B* apresenta diferença de 90° em relação à do ponto *A*. A tensão de cisalhamento devido à força cortante (τ_{xy}) é máxima no ponto *B*. Observe que ambas as tensões de cisalhamento agem na direção –*y,* na face *x* no ponto *B*, como mostra a Figura 4-33*c*. Desse modo, as tensões de cisalhamento devido à força cortante e devido ao momento torçor se somam no ponto *B*.

5 Calcule a tensão normal de flexão e a tensão de cisalhamento devido ao momento torçor no ponto *A* usando as Equações 4.11*b* e 4.19*b*, respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1000(6)(0,75)}{0,249} = 18108 \text{ psi} \tag{a}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1000(8)(0,75)}{0,497} = 12072 \text{ psi} \tag{b}$$

6 Calcule a máxima tensão de cisalhamento e as tensões principais que resultam dessa combinação de tensões aplicadas usando as Equações 4.6.

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18108 - 0}{2}\right)^2 + 12072^2} = 15090 \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{max} = \frac{18108}{2} + 15090 = 24144 \text{ psi} \tag{c}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{max} = \frac{18108}{2} - 15090 = -6036 \text{ psi}$$

7 Calcule a tensão de cisalhamento devido à força cortante no ponto *B,* na linha neutra. A máxima tensão de cisalhamento devido à força cortante na linha neutra de uma haste circular é dada pela Equação 4.15*c*.

$$\tau_{flexão} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1000)}{3(1,767)} = 755 \text{ psi} \qquad (d)$$

O ponto *B* está sob cisalhamento puro. A tensão de cisalhamento total no ponto *B* é a soma algébrica da tensão de cisalhamento devido à força cortante e a tensão de cisalhamento devido ao momento torçor, já que ambas agem nos mesmos planos do elemento infinitesimal.

$$\tau_{max} = \tau_{torção} + \tau_{flexão} = 12072 + 755 = 12827 \text{ psi} \qquad (e)$$

que, a partir da Equação 4.6 ou pelo círculo de Mohr, pode ser mostrado ser igual a maior tensão principal para esse ponto.

8 O ponto *A* tem a maior tensão principal neste caso, mas observe que os valores relativos do torque e momento fletor aplicados determinam qual desses dois pontos terá a maior tensão principal. Ambos os pontos devem então ser verificados. Veja os arquivos EX04-10 no CD.

(*a*) Dois pontos de interesse para cálculos de tensões

(*b*) Elemento inifinitesimal de tensão no ponto *A*

(*c*) Elemento inifinitesimal de tensão no ponto *B*

FIGURA 4-33

Elementos infinitesimais de tensão nos pontos *A* e *B* em uma seção transversal da haste do Exemplo 4-10.

4.14 CONSTANTE DE MOLA

Todo elemento feito de material que tenha uma região de comportamento elástico pode se comportar como uma mola. Alguns elementos são projetados para funcionar como molas, fornecendo uma deformação controlada e previsível em resposta a uma carga aplicada ou vice-versa. A "característica de mola" de um elemento é definida por sua rigidez, ou constante de mola, *k*, que é a carga por unidade de deformação. Para molas com movimento linear,

$$k = \frac{F}{y} \qquad (4.27a)$$

onde *F* é a carga aplicada e *y* é a deformação resultante. Unidades típicas são lb/in ou N/m. Para molas com movimento angular, a expressão geral é

$$k = \frac{T}{\theta} \qquad (4.27b)$$

onde *T* é o torque aplicado e θ é a rotação angular resultante. Unidades típicas são in-lb/rad ou N-m/rad, ou às vezes expressas por in-lb/rev ou N-m/rev.

A expressão da constante de mola para qualquer elemento é facilmente obtida a partir da equação da deformação, que fornece uma relação entre força (ou torque) e deformação. Por exemplo, para uma barra uniforme sob tensão axial, a deformação é dada pela Equação 4.8, repetida aqui e rearranjada para definir sua constante de mola axial.

$$k = \frac{F}{y}: \qquad \text{mas } y = \frac{Fl}{AE}, \qquad \text{então } k = \frac{AE}{l} \qquad (4.28)$$

Isso é uma constante de mola, dependente apenas da geometria da barra e das propriedades de seu material.

Para uma barra de seção uniforme circular sob torção pura, a rotação é dada pela Equação 4.24, repetida aqui e rearranjada para definir sua constante de mola torcional:

$$k = \frac{T}{\theta}: \qquad \text{mas } \theta = \frac{Tl}{GJ}, \qquad \text{então}: k = \frac{GJ}{l} \qquad (4.29)$$

Esta também é constante de mola, dependente apenas da geometria da barra e das propriedades do material.

Viga engastada com carregamento concentrado

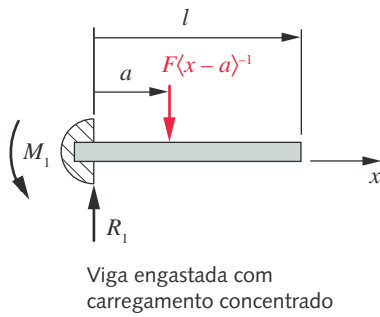



FIGURA 4-22B

Repetida.

Para uma viga engastada com uma carga pontual concentrada como mostra a Figura 4-22*b* (repetida nesta página), a deflexão é dada pela Equação (*j*) do Exemplo 4-5, repetida aqui e rearranjada para definir a constante de mola da viga com a força aplicada em sua extremidade ($a = l$):

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x - a\rangle^3\right]$$

mas, quando $a = l$,
$$y = \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3lx^2 - 0\right) = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l)$$

para F em $x = l$:
$$y = \frac{Fl^2}{6EI}(l - 3l) = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

então
$$k = \frac{F}{y} = \frac{3EI}{l^3} \tag{4.30}$$

Observe que a constante de mola, *k,* de uma viga depende dos tipos de apoios e da distribuição de carregamento, uma vez que *k* depende da equação particular de deflexão da viga e do ponto de aplicação da carga. Analisaremos o projeto de molas com mais detalhes em um capítulo posterior.

4.15 CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

Toda a discussão sobre distribuições de tensão em elementos carregados pressupôs, até agora, que as seções transversais dos elementos fossem totalmente uniformes. Entretanto, a maioria dos elementos de máquinas reais tem seções transversais não uniformes. Por exemplo, eixos são geralmente fabricados com diâmetros diferentes para acomodar rolamentos, engrenagens, polias, etc. Um eixo pode ter sulcos para anéis elásticos ou anéis de vedação, ou ter rasgos e furos para a fixação de outros elementos. Parafusos têm roscas e cabeças maiores que suas hastes. Qualquer uma dessas mudanças na geometria da seção transversal causará concentrações de tensão localizadas.

A Figura 4-34 mostra a concentração de tensão causada por entalhes e chanfros em uma barra plana sujeita a um momento fletor. Os efeitos de tensão, mostrados na Figura 4-34*b*, foram medidos usando técnicas de fotoelasticidade. A análise de tensão da fotoelasticidade exige a construção de um modelo físico da peça em um tipo de plástico transparente, que é então carregado e fotografado sob luz polarizada, o que leva ao surgimento da tensão sob forma de "franjas" que revelam a distribuição da tensão na peça. A Figura 4.34*c* mostra um modelo de elemento finito de uma peça com a mesma geometria que é carregada do mesmo jeito que o espécime fotoelástico. Suas linhas são isóbaras de níveis de tensão. Observe que na extremidade direita da peça, onde a seção transversal é uniforme, as linhas de franja da Figura 4.34*b* são retas, de largura uniforme e espaçamento equivalente. As isóbaras do modelo de elemento finito da Figura 4.24*c* têm padrão semelhante.* Isso indica uma distribuição de tensão linear nesse trecho da barra, distante dos entalhes, mas nas mudanças na geometria a distribuição de tensão é não linear e maior em magnitude. Nos chanfros em que a largura da parte é reduzida de *D* para *d*, as linhas de franja e as isóbaras de FEM apresentam uma dirupção e uma concentração de tensão indicativas da brusca mudança de geometria. O mesmo efeito é verificado na extremidade esquerda em torno dos dois entalhes. A Figura 4.34*b* oferece evidência experimental, e a Figura 4.34*c*, evidência computacional da existência de concentração de tensão em qualquer mudança da geometria. Tais mudanças geométricas em uma peça são frequentemente chamadas de "concentradores de tensão" e devem ser evitadas ou pelo menos minimizadas tanto quanto possível em um projeto. Infelizmente, não

* O modelo de elemento finito foi, na verdade, mais longo do que o mostrado e tinha as cargas aplicadas nas extremidades, bem longe da seção mostrada. Isso foi feito de modo a não mostrar as concentrações de tensão locais nos pontos de aplicação da carga e a coincidir com os campos de tensão do exemplo fotoelástico, o que provavelmente também foi mais longo do que o mostrado pela mesma razão.

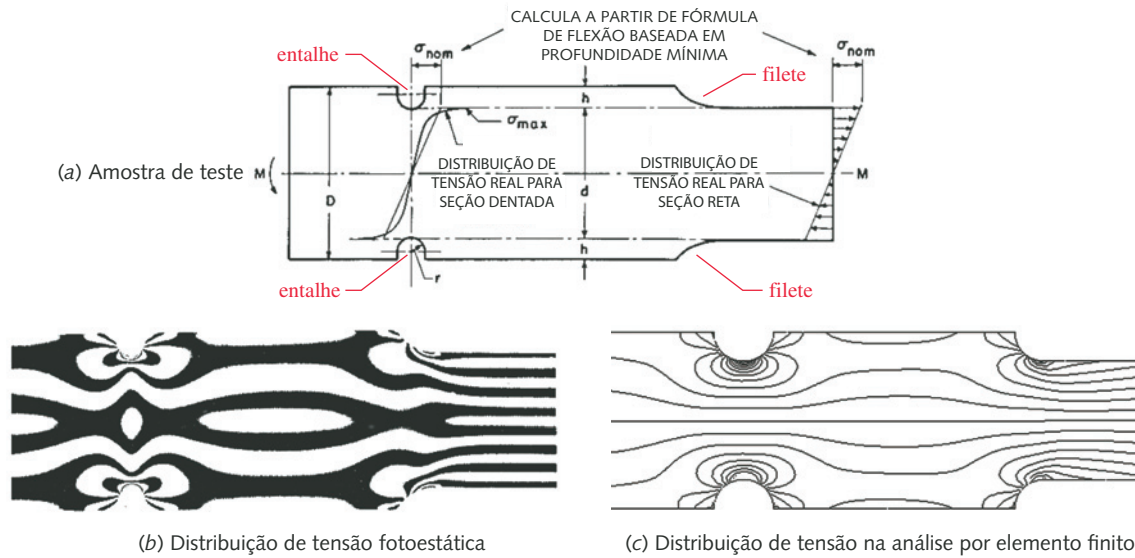



FIGURA 4-34

Concentrações de tensões medidas por fotoelasticidade em uma barra plana com degrau e entalhe solicitada à flexão. (Reproduzida da referência 5, Fig. 2, p. 3, reimpresso com permissão da John Wiley & Sons, Inc.)

é prático eliminar todos esses concentradores de tensão, uma vez que tais detalhes geométricos são necessários para acoplar peças e prover formas funcionais das peças.

O valor de concentração de tensão em qualquer geometria particular é denotado por um fator geométrico de concentração de tensão K_t para tensões normais, ou por K_{ts} para tensões de cisalhamento. A tensão máxima em um concentrador de tensão local é então definida por

$$\sigma_{max} = K_t \, \sigma_{nom}$$
$$\tau_{max} = K_{ts} \, \tau_{nom} \tag{4.31}$$

onde σ_{nom} e τ_{nom} são as tensões nominais calculadas para a situação particular de solicitação e seção transversal local, pressupondo uma distribuição das tensões sobre a seção transversal correspondente a uma geometria uniforme. Por exemplo, na viga da Figura 4.34, a distribuição nominal das tensões é linear e na fibra externa temos $\sigma_{nom} = Mc/I$. Então, nos entalhes, teriam um valor de $\sigma_{max} = K_t \, Mc/I$. Em um caso de tração axial, a distribuição das tensões nominais é como na Figura 4-10 e, para a torção, como definida na Figura 4-28. Observe que as tensões nominais são calculadas utilizando-se a **seção transversal local**, que é *diminuída devido à geometria do entalhe*, isto é, usando *d* em vez de *D* como largura da seção do entalhe na Figura 4-34.

Os fatores K_t e K_{ts} consideram apenas o efeito devido à geometria, e não consideram como o material se comporta diante de concentrações de tensões. A ductilidade ou fragilidade do material e o tipo de carregamento, se é estático ou dinâmico, também afetam o comportamento devido a concentrações de tensões.

Concentrações de tensões na solicitação estática

A ductilidade ou fragilidade do material têm um efeito conhecido na sua resposta à concentração de tensões em situações de solicitação estática. Vamos discutir cada um desses casos em separado.

Os **materiais dúcteis** escoam localmente em torno do ponto de aumento de tensão enquanto as partes do material distantes da descontinuidade geométrica permanecem abaixo do ponto de escoamento. Quando um material escoa localmente, a sua curva de tensão-deformação se torna não linear e com baixa declividade (ver Figura 2-2), isso previne aumentos significativos de tensão naquele ponto. Quando a solicitação aumenta, mais material escoa e uma parte maior da seção transversal é trazida para o ponto de escoamento. Apenas quando toda a seção transversal atingir o ponto de escoamento é que o diagrama σ–ε continuará até o ponto onde ocorre a falha por fratura. Assim, é comum ignorar os efeitos de concentração de tensões geométricas em *materiais dúcteis sob solicitação estática.* A tensão para a seção transversal local é calculada como se o concentrador de tensões não estivesse lá. Entretanto, a redução de sua seção transversal local ou momento de inércia devido à remoção de material **é** levada em conta, produzindo assim maiores tensões do que as que ocorrem em uma peça não entalhada com as mesmas dimensões globais.

Os **materiais frágeis** não escoam localmente, uma vez que eles não sofrem deformações plásticas significativas. Assim, concentrações de tensão têm efeitos em seu comportamento mesmo sob solicitação estática. Se a tensão no local concentrador de tensões exceder o limite de ruptura, uma trinca começará a se formar. Isso reduzirá o material disponível para resistir à solicitação e aumentará a concentração de tensões na estreita trinca. A peça então falhará rapidamente. Portanto, para materiais frágeis sob solicitações estáticas, o fator de concentração de tensões deve ser aplicado para aumentar a máxima tensão aparente de acordo com a Equação 4.31.

Uma exceção entre materiais frágeis é para materiais fundidos frágeis que tendem a possuir muitas heterogeneidades e descontinuidades em sua estrutura devido a flocos de grafita na liga, bolhas de ar, outros materiais estranhos, partículas de areia, etc., que entram no material liquefeito ainda no molde. Essas descontinuidades dentro do material criam concentradores de tensão, que também estão presentes nos corpos de prova desses materiais utilizados para estabelecer as resistências básicas do material. Assim, os dados de resistência publicados incluem os efeitos de concentração de tensão. Adicionar um concentrador de tensão geométrico à peça contribui pouco em termos estatísticos aos que já se encontram no material. Portanto, o fator de concentração de tensão é comumente ignorado quando se trata de materiais fundidos frágeis ou qualquer material com defeitos conhecidos, distribuídos em seu interior, mas deve ser aplicado para as tensões em outros materiais frágeis.

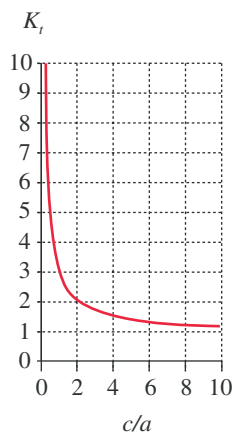
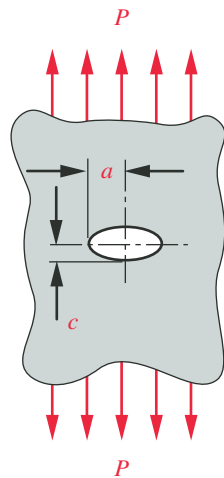



FIGURA 4-35

Concentração de tensões na aresta de um furo elíptico em uma placa.

Concentrações de tensões sob solicitações dinâmicas

Materiais dúcteis sob solicitações dinâmicas se comportam e falham como se fossem frágeis. Então, independentemente da ductilidade ou fragilidade do material, o fator de concentração de tensão deve ser aplicado quando cargas dinâmicas (fadiga ou impacto) estão presentes. Entretanto, ainda devem ser levados em conta parâmetros relacionados aos materiais. Embora todos os materiais sejam afetados pela concentração de tensão sob solicitações dinâmicas, alguns materiais são mais sensíveis que outros. Um parâmetro chamado sensibilidade ao entalhe, q, é definido para vários materiais e utilizado para modificar os fatores K_t e K_{ts} para um dado material sob solicitação dinâmica. Os procedimentos serão discutidos em detalhe no Capítulo 6.

Determinação dos fatores geométricos de concentração de tensões

A teoria da elasticidade pode ser usada para fornecer funções de concentração de tensões para algumas geometrias simples. A Figura 4.35 mostra um furo elíptico em uma placa **semi-infinita** submetida a uma carga axial. Assumindo que o furo

seja pequeno em comparação com a placa e que esteja longe das extremidades, a tensão nominal é calculada com base na força aplicada e na área total $\sigma_{nom} = P/A$. O fator teórico de concentração de tensão na ponta foi desenvolvido por Inglis em 1913* e é

$$K_t = 1 + 2\left(\frac{a}{c}\right) \tag{4.32a}$$

onde a é a metade da largura da elipse e c a metade da altura. Claramente, quando a altura do furo elíptico se aproxima de zero, criando uma trinca pontiaguda, a concentração de tensão vai para o infinito. Quando o furo é circular, $a = c$, $K_t = 3$. A Figura 4-35 também mostra um gráfico do K_t como função de c/a, o inverso da razão da Equação 4-32a. A função tende assintoticamente para $K_t = 1$ para grandes valores de c/a.

Medição de concentração de tensão A teoria da elasticidade pode fornecer valores de concentração de tensões para alguns casos. Outros fatores de concentração de tensões foram obtidos experimentalmente utilizando-se peças submetidas a cargas controladas. Medidas experimentais podem ser feitas com *strain gages*, técnicas fotoelásticas, holografia a *laser* ou outros meios. Os métodos de análise por elementos finitos (FEA) e análise com elementos de contorno (BEA) estão sendo cada vez mais usados para calcular fatores de concentração de tensões. Quando a análise de tensões é feita com essas técnicas numéricas, os fatores de concentração de tensões são obtidos automaticamente desde que a malha tenha sido feita suficientemente fina em torno das regiões de concentração de tensões (ver a Figura 4-51).

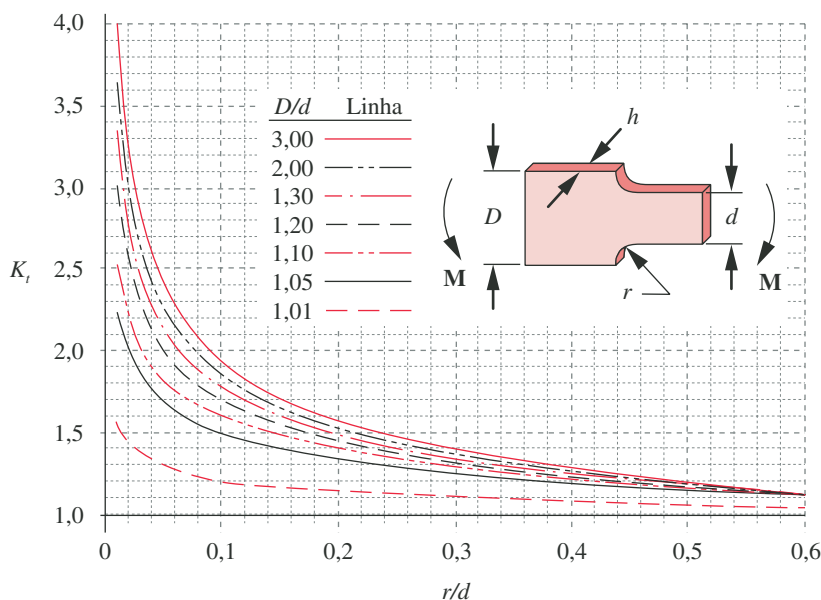
Efeito da relação comprimento-largura Observe que a clássica análise de Inglis, datada de 1913, do caso de concentração de tensão descrito acima, supõe uma "placa semi-infinita", significando que as cargas são aplicadas longe do orifício. Recentemente, análises de FEA do caso de furo circular em lâmina mostraram que o fator de concentração de tensão é maior para placas muito curtas, como definido pela relação do comprimento da placa na direção da carga até sua largura L/W. Troyani et al.[8] mostram que, para relações L/W de menos de 2 e uma carga de tensão uniforme aplicada sobre largura W, os valores de K_t de Inglis variam de 3 a 11 dependendo da razão do raio do furo em relação à largura da placa r/W em combinação com a razão L/W. Se seu projeto usa uma placa muito curta com furo(s) e está carregada com tensão, essa referência deve ser consultada em busca de um melhor valor de K_t. Este estudo também mostrou que se a carga de tensão aplicada à placa é o resultado de um deslocamento uniforme através da largura W em vez de uma força uniforme, então o valor de K_t é reduzido. Isso se dá porque as teias mais duras ao redor do furo são forçadas a carregar a carga quando a seção transversal da extremidade deslocada é mantida indeformada pelo deslocamento uniforme. Isso aponta o efeito de condições de contorno em tensões em uma parte. Outros estudos dos mesmos autores mostram sensibilidade semelhante de K_t à relação L/W da parte. A referência [9] analisa barras planas escalonadas em tensão, e [10] cobre barras planas redondas em tensão. Neste último caso, elas mostram que aplicar carga uniforme na extremidade de grande diâmetro e fixar a pequena extremidade de uma barra escalonada dá K_t decrescente com proporção L/W reduzida. Ainda que esses resultados sejam interessantes, as mudanças em K_t não ocorrem até a relação de L/W tornar-se pequena (< 2), caso em que a barra ou haste escalonada começa a adquirir a aparência de uma pilha de panquecas. Essa configuração geométrica raramente pode ser encontrada no projeto de máquinas.

Coletânea de concentração de tensão A mais conhecida e mais referenciada coletânea de fatores de concentração de tensões está em Peterson.[3] Este livro

* C. E. Inglis, 1913, "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners". *Engineering* (London), v. 95, p. 415.

mostra resultados teóricos e experimentais de muitos pesquisadores na forma de gráficos úteis, onde os valores de K_t e K_{ts} para vários parâmetros geométricos e tipos de solicitação podem ser encontrados. Roark e Young[4] também fornecem tabelas de fatores de concentração de tensões para inúmeros casos.

A Figura 4-36 e o Apêndice C contêm funções de concentração de tensões e seus gráficos, baseados na literatura técnica, para um conjunto de casos que representam as situações comumente encontradas no projeto de máquinas. Em alguns casos, expressões matemáticas aproximadas foram obtidas para representar satisfatoriamente as curvas empíricas. Em outros casos, funções baseadas em listas (tabela de consulta) foram criadas para permitir a interpolação e obtenção automática do valor de K_t no procedimento de cálculo das tensões. Enquanto essas funções de concentração de tensões (FCT) são aproximações da informação encontrada na literatura, elas são muito mais práticas que os originais, uma vez que são incorporadas em um modelo matemático do problema de projeto de máquinas. Estas FCT são fornecidas neste livro como arquivos do *TK Solver*, que podem ser unidos a outros modelos ou usados como uma ferramenta em separado para calcular K_t e K_{ts} para qualquer geometria. Isso é preferível a procurar em gráficos para cada cálculo.

Como um exemplo, a Figura 4-36 mostra a função de concentração de tensões para o caso de uma barra plana com um degrau sujeita a flexão (este e outros casos também são mostrados no Apêndice C). A redução na largura de D para d no degrau cria concentração de tensões, e a dimensão do raio r também é um fator. Esses fatores geométricos são representados pelos coeficientes adimensionais r/d e D/d. O primeiro destes é usado como a variável independente da equação e o segundo determina qual das curvas será usada. A função concentração de tensões é realmente uma superfície tridimensional com os eixos r/d, D/d e K_t. Na Figura 4-36 estamos olhando para linhas dessa superfície 3D tomadas para diferentes valores de D/d e plotadas no plano r/d *versus* K_t. A geometria da peça e a equação que calcula a tensão são definidas na figura, assim como a equação que

$$\sigma_{nom} = \frac{Mc}{I} \quad 6\frac{M}{hd^2}$$

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{non}$$

e:

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D / d	A	b
3,00	0,907 20	–0,333 33
2,00	0,932 32	–0,303 04
1,30	0,958 80	–0,272 69
1,20	0,995 90	–0,238 29
1,10	1,016 50	–0,215 48
1,05	1,022 60	–0,191 56
1,01	0,966 89	–0,154 17

FIGURA 4-36

Fatores geométricos de concentração de tensões e funções para uma barra plana com degrau solicitada à flexão – veja também o Arquivo APP_C-10. (Extraído da Fig. 73, p. 98, R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, 1975, com permissão da editora.)

define cada curva de concentração de tensões. Na Figura 4-36, ela é uma função exponencial da forma

$$K_t = Ax^b \tag{4.32b}$$

onde x representa a variável independente, ou r/d neste caso. Os valores do coeficiente A e do expoente b são determinados para qualquer valor de D/d por uma regressão não linear de vários pontos colhidos dos dados experimentais. Os valores de A e b para várias magnitudes da segunda variável independente, a variável D/d, são dados na tabela junto à figura. A e b para outros valores de D/d podem ser interpolados. O nome do arquivo que calcula essas funções e também as interpola também está indicado nessa figura e no Apêndice C para cada um dos 14 casos mostrados.

Esses gráficos de concentração de tensão fornecidos juntamente com os arquivos correspondentes serão úteis no projeto de elementos de máquinas neste livro e em sua prática como engenheiro. Para casos de solicitação e geometria não citados neste texto, veja as referências 3 e 4.

Projeto para evitar concentração de tensões

Geometrias complicadas geralmente são necessárias devido à função das peças da máquina. O projetista sempre encontra o problema de concentração de tensões em seções que possuem variações abruptas de forma ou dimensão. O melhor que se pode fazer é minimizar seus efeitos. O estudo das curvas de concentração de tensões para várias geometrias no Apêndice C mostra que, na maioria dos casos, quanto mais agudo for o canto e maior a magnitude da variação da dimensão, pior será a concentração de tensão. Para as barras com degrau na Figura 4-36, valores maiores da *relação D/d* e valores menores da *relação r/d* resultam em maiores concentrações de tensões. Partindo dessas observações, podemos afirmar algumas regras gerais para projetos que minimizam a concentração de tensões.

1 Evite variações abruptas e/ou de grandes dimensões da seção transversal, quando possível.

2 Evite cantos agudos e utilize o maior raio de transição possível entre as superfícies de diferentes contornos.

São boas regras para serem ditas e melhores ainda para serem seguidas, mas restrições práticas do projeto frequentemente impossibilitam segui-las à risca. Alguns exemplos de projetos bons e ruins, quanto à concentração de tensões, são mostrados da Figura 4-37 até a 4-39 com alguns macetes usados por projetistas experientes para melhorar a situação.

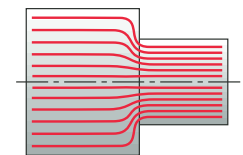
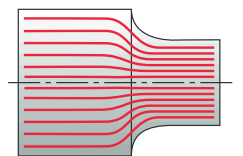
Analogia do fluxo de força A Figura 4-37*a* mostra um eixo com um grande rebaixo e um canto agudo, enquanto a Figura 4-37*b* mostra o mesmo eixo com um raio de transição maior. Uma boa maneira de visualizar os estados de tensão no contorno de peças como essas é usar a analogia do fluxo de força, na qual se consideram as forças (e portanto as tensões) como escoando em torno dos contornos em um modo similar ao do fluido incompressível ideal dentro de um cano ou duto com mudanças no contorno. (Ver a Figura 4-34.) Um repentino estreitamento do cano ou duto resulta em um aumento da velocidade do fluido naquela região a fim de manter o fluxo constante. O perfil de velocidades é então concentrado em uma região menor. Formas com variações suaves são utilizadas em canos e dutos (e em objetos que atuam em meios fluidos, como navios e aeronaves) para reduzir a turbulência e a resistência ao escoamento. Suavizar os contornos (pelo menos internamente) pode ter benefícios semelhantes na redução de concentração de tensões. O contorno do fluxo de forças no degrau abrupto da Figura 4-37*a* é mais concentrado do que no projeto da Figura 4-37*b*.

(*a*) Fluxo de força em torno de um canto agudo (canto vivo)

(*b*) Fluxo de força em torno de um canto arredondado

FIGURA 4-37

A analogia do fluxo de força para peças com variações em seu contorno.

(*a*) Concentração de tensões em um canto agudo

(*b*) Redução da concentração de tensões com raio de concordância

(*c*) Redução da concentração de tensões com ranhura

(*d*) Redução da concentração de tensões com raio de concordância e arruela especial

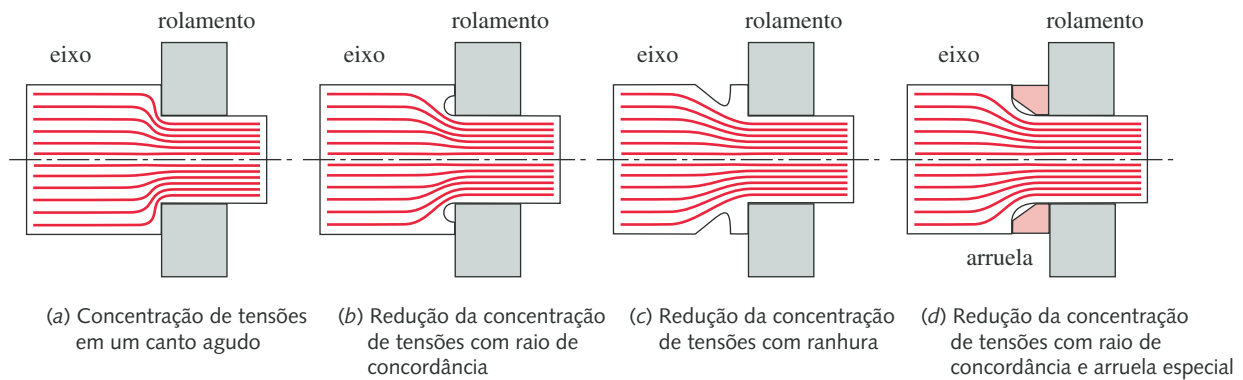



FIGURA 4-38

Modificações de projeto para reduzir a concentração de tensões em um canto agudo.

O exemplo da Figura 4-38 é um eixo rebaixado no qual um rolamento de esferas deve ser encaixado. O rebaixo é necessário para estabelecer a posição do rolamento axial e radialmente no diâmetro do eixo. Os rolamentos comerciais possuem raios de concordância bem pequenos em seus cantos, o que força o projetista a criar cantos bem agudos no rebaixo do eixo. Para reduzir a concentração de tensões no rebaixo (*a*), um raio maior do que o que o rolamento permite seria necessário. Três alternativas de projeto capazes de criar uma melhor situação de fluxo de forças são mostradas na figura. O primeiro projeto (*b*) remove material adicional do canto a fim de aumentar o raio de concordância e então "retorna" o contorno a fim de propiciar o posicionamento axial requerido pelo rolamento. Na segunda solução (*c*), remove-se material de trás do ressalto a fim de suavizar as linhas de força. A terceira solução (*d*) possui um grande raio de concordância e uma arruela especial que cobre o raio e permite assentar o rolamento. A concentração de tensão é reduzida em cada caso em comparação com o projeto original.

Uma solução similar de redução de material para melhorar o fluxo de força é vista na Figura 4-39*a*, que mostra um rebaixo para um anel elástico em um eixo, com rebaixos de alívio adicionais em cada lado para suavizar a efetiva transição na dimensão da seção transversal. Os efeitos nas linhas de força são similares àqueles mostrados na Figura 4-38*c*. Outra fonte comum de concentração de tensões é uma chaveta necessária para fixar engrenagens, polias, volantes, etc., em um eixo. O rasgo da chaveta cria cantos agudos em regiões de máximas tensões devido à flexão e torção. Existem diferentes chavetas, as mais comuns são as chavetas paralelas retangulares e a chaveta de Woodruff, que corresponde a um segmento circular, como mostrado nas Figuras 4-38*b* e 4-38*c*. Veja na Seção 10.10 mais informações sobre chavetas e rasgo de chavetas.

Outro exemplo (não mostrado) de redução de material para diminuição de concentração de tensões é a redução do diâmetro da parte não rosqueada de um parafuso para uma dimensão menor que o diâmetro de raiz da parte rosqueada. Uma vez que o contorno da parte rosqueada cria concentrações de tensões, a estratégia é manter as linhas de fluxo de força dentro da parte maciça (não rosqueada) do parafuso.

Os exemplos mostrados mostram a utilidade da analogia de fluxo de força para fornecer um modo de melhorar qualitativamente o projeto de elementos de máquinas por meio da redução de concentração de tensões. O projetista deve mi-

nimizar as variações abruptas nos contornos internos dos fluxos de força internos pela escolha adequada da sua forma.

4.16 COMPRESSÃO AXIAL – FLAMBAGEM

A Seção 4.7 discutiu tensão e deformação devido à força normal e apresentou equações para seus cálculos, que serão convenientemente repetidas aqui.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{4.7}$$

$$\Delta s = \frac{Pl}{AE} \tag{4.8}$$

Quando a carga axial é invertida de tal modo que a barra sofra compressão, a Equação 4.7 sozinha pode não ser suficiente para determinar a carga admissível para a barra. Trata-se agora de uma **coluna** que pode então falhar por flambagem em vez de por compressão. A **flambagem** ocorre repentinamente e sem aviso, mesmo nos materiais dúcteis e, portanto, é uma das maneiras mais perigosas de falha. Você poderá experimentar a flambagem segurando as extremidades de uma régua comum com suas mãos e gradualmente aumentando a força de compressão axial. Ela irá resistir à força até um certo ponto quando, de repente, vai flambar em um formato curvo seguido pelo colapso da régua. (Se você se achar forte o suficiente, pode tentar o mesmo com uma lata de refrigerantes de alumínio.)

Índice de esbeltez

Uma **coluna curta** *vai falhar por compressão* como mostrado na Figura 2-6, e sua tensão de compressão pode ser calculada pela Equação 4.7. Uma **coluna média** ou **longa** *vai falhar por flambagem* quando a carga axial exceder um valor crítico. A tensão de compressão pode estar bem abaixo da tensão de escoamento do material no momento da flambagem. O fator que determina se uma coluna é curta ou longa é o seu **índice de esbeltez** S_r,

$$S_r = \frac{l}{k} \tag{4.33}$$

onde l é o comprimento da coluna e k é o seu *raio de giração*. O **raio de giração** é definido por

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{4.34}$$

onde I é o menor *momento de inércia* da seção transversal da coluna e A é a *área da mesma seção transversal*.

Colunas curtas

Uma coluna curta é usualmente definida como uma coluna que possui um índice de esbeltez menor do que 10. Então a tensão de escamento do material é utilizada como fator limitante e deve ser comparada com a tensão calculada pela Equação 4.7.

Colunas longas

Nas colunas longas é preciso calcular a **carga crítica**. A Figura 4-40 mostra uma coluna esbelta com cantos arredondados onde atuam forças de compressão.

(*a*) Ranhuras de alívio podem reduzir a concentração de tensões em torno da ranhura de um anel elástico

(*b*) Rasgo para chaveta retangular gera concentração de tensões

(*c*) Rasgo para chaveta Woodruff gera concentração de tensões

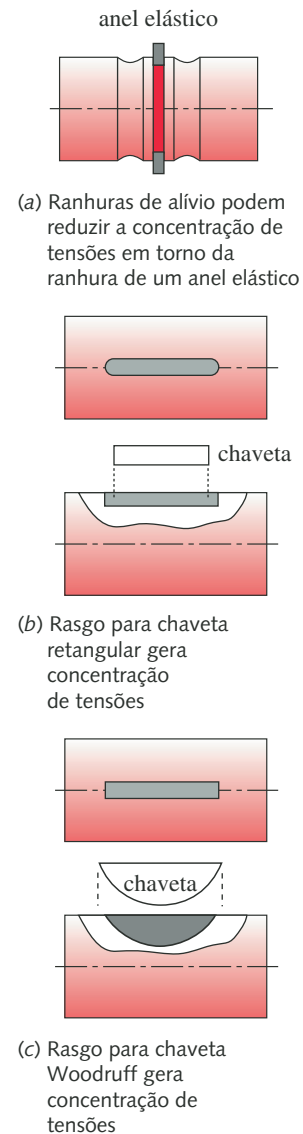



FIGURA 4-39

Concentração de tensões em eixos.

As forças são coaxiais e inicialmente atuam na direção do centroide de área da coluna (um trecho da coluna foi removido para mostrar os esforços solicitantes em seu interior). A coluna é mostrada na posição levemente flexionada no sentido positivo do eixo y, o que leva o centroide a sair da posição de colinearidade com as forças das extremidades. Essa mudança de posição do centroide cria um braço de momento para as forças atuantes e provoca flexão além de compressão. O momento fletor tende a aumentar a deflexão lateral, a qual tende a aumentar o braço de momento! Uma vez excedido o valor crítico P_{cr}, o retorno positivo desse mecanismo causa uma repentina e catastrófica flambagem. Não há um aviso visível.

O momento fletor é dado por:

$$M = Py \tag{4.35}$$

Para uma pequena deflexão da viga (repetição da Equação 4.17),

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{4.17}$$

Combinando 4.35 e 4.17, temos uma equação diferencial conhecida:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{4.36}$$

e que possui uma solução também bem conhecida:

$$y = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x \tag{4-37a}$$

onde A e B são constantes que dependem das condições de contorno definidas para a coluna da Figura 4-40 como $y = 0$ em $x = 0$; $y = 0$ em $x = l$. A substituição dessas condições mostra que $B = 0$ e

$$C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0 \tag{4.37b}$$

Essa equação é satisfeita se A for igual a zero, mas esta é a solução trivial. Portanto, A precisa ser diferente de zero e

$$\operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0 \tag{4.37c}$$

que é verdadeiro para

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}l = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots \tag{4.37d}$$

A primeira carga crítica ocorre para $n = 1$ e resulta em

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{4.38a}$$

Essa fórmula é conhecida como a **fórmula de Euler** para flambagem de colunas com extremidades arredondadas ou biarticuladas. Observe que a carga crítica é uma função apenas da geometria da seção transversal da coluna, I, seu comprimento l, e o módulo de elasticidade do material, E. **A resistência do material não é um fator**. Utilizar um aço mais resistente (com limite de escoamento mais alto), por exemplo, não resolverá o problema, porque todas

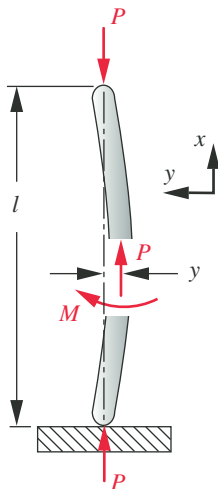



FIGURA 4-40

Flambagem em uma coluna de Euler.

as ligas de aço possuem essencialmente o mesmo módulo de elasticidade, e, assim, a falha ocorrerá com a mesma carga crítica independentemente da tensão de escoamento.

Substituindo a Equação 4.33 e a expressão $I = Ak^2$ da Equação 4.34 na 4.38*a*, temos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EAk^2}{l^2} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{l}{k}\right)^2} = \frac{\pi^2 EA}{S_r^2} \tag{4.38b}$$

Normalizando a Equação 4.38*b* pela área da seção transversal da coluna, obtemos a equação para a **tensão crítica de flambagem**,

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{S_r^2} \tag{4.38c}$$

que possui as mesmas unidades de tensão, ou resistência. É a **força por unidade de área** que causa flambagem em uma coluna com extremidades arredondadas ou biarticuladas. Assim ela representa a resistência de uma coluna particular em vez da resistência do material do qual ela é feita.

Substituindo 4.38*a* em 4.37*a*, temos a curva de deflexão desta coluna:

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \tag{4.39}$$

que é meio-período de uma senoide. Observe que diferentes **condições de contorno**, ou de extremidades, resultam em diferentes curvas de deflexão e cargas crítica diferentes.

Condições de contorno

Na Figura 4-41 são mostradas diversas condições de contorno possíveis. A coluna com as *extremidades arredondadas* e a *biarticulada* das Figuras 4-41*a* e 4-41*b* são essencialmente a mesma. Ambas apresentam forças de reação e não apresentam momentos em suas extremidades. Como foi citado acima, suas condições de contorno são idênticas. Suas cargas críticas são definidas pela Equação 4.38*c* e suas deflexões, pela Equação 4.39.

A coluna da Figura 4-41*c*, com *uma extremidade engastada e outra livre*, apresenta forças e momentos reativos em sua base controlando assim a deflexão y e a rotação y' nessa extremidade, mas não controla o movimento em x nem em y de sua extremidade livre. Suas condições de contorno são $y = 0$ e $y' = 0$ em $x = 0$. Substituindo essas condições na Equação 4.37*a*, temos,

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{4S_r^2} \tag{4.40a}$$

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l} \tag{4.40b}$$

A curva de deflexão da coluna de Euler engastada livre é um quarto de uma senoide e ela corresponde à parte de uma coluna biarticulada com o dobro de seu comprimento e mesma seção transversal. Essa coluna pode suportar apenas 1/4 da carga crítica de uma coluna biarticulada. Essa redução pode ser calculada pela utilização do comprimento efetivo, l_{ef}, para uma coluna com condições de contorno diferentes das da coluna biarticulada utilizada para achar as equações da carga crítica.

(*a*) Biarredondado (*b*) Biarticulado (*c*) Engastado livre (*d*) Engastado articulado (*e*) Biengastado

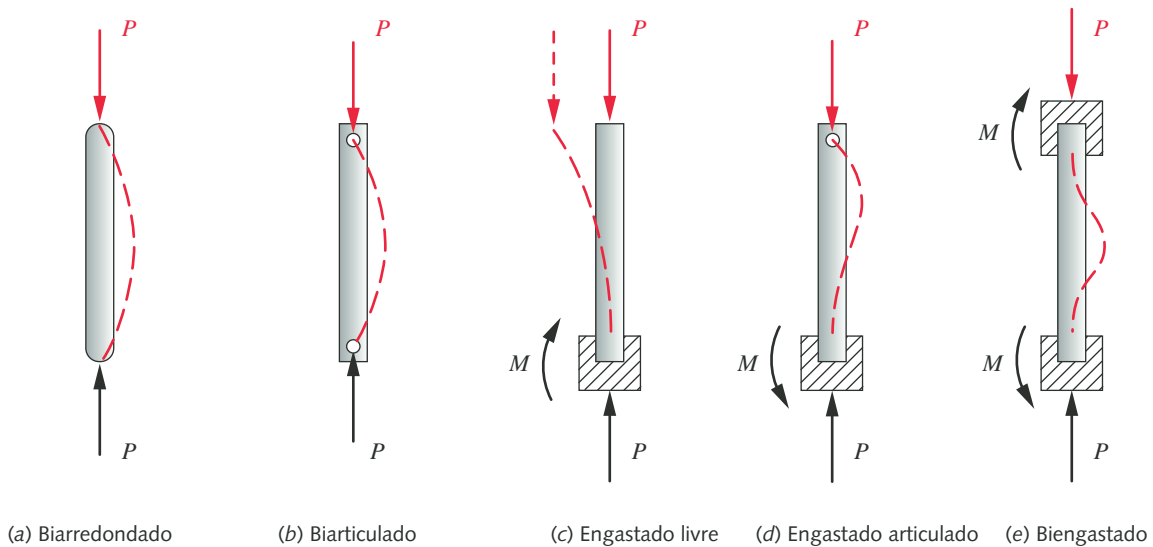



FIGURA 4-41

Várias condições de contorno e suas curvas de deflexão (forças aplicadas em cor e forças reativas em preto).

A coluna com uma extremidade engastada e a outra articulada (Figura 4-41*d*) tem um comprimento efetivo $l_{ef} = 0{,}707l$, e a coluna biengastada, $l_{ef} = 0{,}5l$. Condições de contorno dessas colunas mais rígidas fazem com que seu comportamento seja similar ao de colunas biarticuladas mais curtas e, portanto, são capazes de suportar cargas maiores. Substitua o comprimento efetivo apropriado na Equação 4.33 para obter o índice de esbeltez adequado para se usar em qualquer uma das fórmulas de carga crítica:

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} \tag{4.41}$$

onde o valor de l_{ef} é definido na Tabela 4-3 para várias condições de contorno. Observe que as colunas com uma *extremidade engastada e outra articulada* e a *biengastada* possuem valores teóricos de l_{ef} de $0{,}707l$ e $0{,}5l$, respectivamente, mas esses valores são raramente usados porque dificilmente se consegue um engastamento que impeça **qualquer** movimento angular na extremidade da coluna. Juntas soldadas geralmente permitem alguma rotação angular, o que vai depender da rigidez da estrutura na qual a coluna está soldada.

Tabela 4-4 Comprimentos efetivos relacionados às condições de contorno

Condições de contorno	Valor teórico	Recomendação do AISC*	Valor conservador
Biarredondado	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$
Biarticulado	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$
Engastado livre	$l_{ef} = 2l$	$l_{ef} = 2{,}1l$	$l_{ef} = 2{,}4l$
Engastado articulado	$l_{ef} = 0{,}707l$	$l_{ef} = 0{,}80l$	$l_{ef} = l$
Biengastado	$l_{ef} = 0{,}5l$	$l_{ef} = 0{,}65l$	$l_{ef} = l$

A análise teórica também supõe que as forças estão perfeitamente alinhadas com o eixo da coluna. Essa condição raramente se realiza na prática. Qualquer excentricidade no carregamento causará um momento e, assim, maiores deflexões que as esperadas pelo modelo. Por essa razão, o AISC* sugere valores maiores para l_{ef} que os valores teóricos, e alguns projetistas usam valores ainda mais conservadores mostrados na terceira coluna da Tabela 4-3. O problema de colunas sob cargas excêntricas será discutido posteriormente.

Colunas intermediárias

Gráficos das Equações 4.7 e 4.38*c* são apresentados na Figura 4-42 como função do índice de esbeltez. O limite de escoamento na compressão do material, S_{yc}, é usado como o valor de σ_x na Equação 4.7, e a tensão crítica de flambagem da Equação 4.38*c* foi plotada no mesmo eixo da resistência do material. A região *OABCO* definida por essas duas linhas e os eixos pareceria ser uma região segura para a tensão de compressão da coluna. Porém, experiências mostram que colunas nessas condições algumas vezes falham. O problema ocorre quando a carga está na região *ABDA* e perto da intersecção das duas curvas no ponto *B*. J. B. Johnson sugeriu ajustar uma parábola entre o ponto *A* e a tangente no ponto *D* da curva de Euler (Equação 4.38*c*), que exclui a zona de falha empírica. O ponto *D* é normalmente tomado como a intersecção da curva de Euler e a linha horizontal em $S_{yc}/2$. O valor de $(S_r)_D$ correspondente ao ponto *D* pode ser encontrado na Equação 4.38*c*.

$$\frac{S_{yc}}{2} = \frac{\pi^2 E}{S_r^2}$$

$$\left(S_r\right)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_{yc}}} \tag{4.42}$$

* O American Institute of Steel Construction (Instituto Americano da Construção em Aço), em seu *Manual of Steel Construction* (Manual de Construção em Aço).

(*a*) Construção da curva de falha de colunas

(*b*) Curvas de falha para condições de contorno diferentes

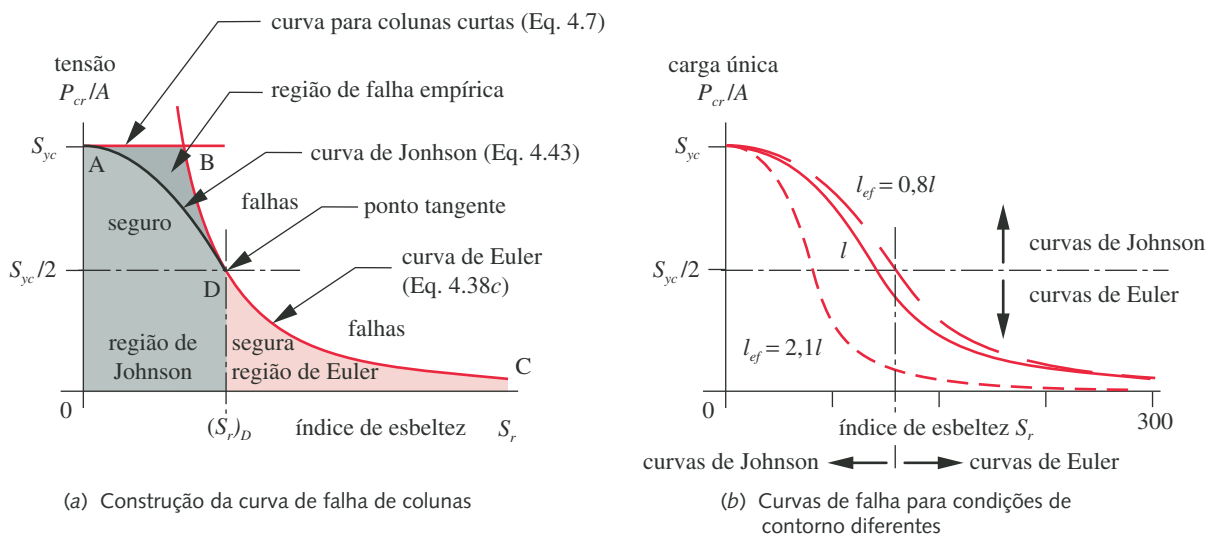



FIGURA 4-42

Curvas de Euler, Johnson e de coluna curta para falhas em colunas.

A equação da parábola ajustada entre os pontos A e D é

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_{yc} - \frac{1}{E}\left(\frac{S_y S_r}{2\pi}\right)^2 \tag{4.43}$$

Utilizando as Equações 4.38c e 4.43 sobre suas regiões correspondentes, temos um modelo razoável para a falha em colunas carregadas concentricamente. Se o índice de esbeltez é $\leq (S_r)_D$, use a Equação 4.43; senão, use a Equação 4.38c. Observe que a Equação 4.43 é válida e conservativa para colunas curtas. As Equações 4.38c e 4.43 preveem tensões críticas de falha calculadas, portanto é preciso utilizar um coeficiente de segurança adequado para encontrar a tensão admissível.

O arquivo COLMPLOT calcula a carga crítica e desenha as curvas de falha da coluna da Figura 4-42 para qualquer escolha de S_{yc}, S_r, E e condições de contorno. Ele pode ser usado para conferir o projeto de qualquer coluna carregada concentricamente ou para examinar projetos alternativos. O leitor pode experimentar o programa alterando os valores dos parâmetros citados e observando os efeitos nas curvas plotadas.

EXEMPLO 4-11

Projeto de colunas com carregamento concêntrico

Problema **Uma casa em frente à praia deve ser elevada 10 ft acima de seu nível e colocada sobre um conjunto de colunas de aço. O peso que cada coluna deve suportar é estimado em 200000 lb. Dois projetos são considerados, um usando tubos quadrados e outro usando tubos redondos de aço.**

Dados **Projete as colunas com um coeficiente de segurança 4. Determine as dimensões externas dos tubos, assumindo a espessura das paredes dos tubos como sendo de 0,5 in, para ambos os casos. A liga de aço tem tensão de escoamento em compressão igual a S_{yc} = 60 kpsi.**

Hipóteses **O carregamento é concêntrico e as colunas são verticais. Suas bases estão engastadas no concreto e os topos estão livres, criando uma condição de contorno *engastado-livre*. Use os fatores de condição de contorno recomendados pela AISC.**

Solução **Ver Tabela 4-5, partes 1 e 2.**

1 Esse problema, conforme dito, requer uma solução iterativa, pois a carga admissível é especificada e são pedidas as dimensões das secções transversais das colunas. Se fosse o inverso, as Equações 4.38c, 4.42 e 4.43 poderiam ser diretamente resolvidas para determinação das cargas admissíveis para a geometria escolhida.

2 Para resolver este problema usando apenas uma calculadora, é necessário estimar um valor para uma dimensão da seção transversal, como por exemplo o diâmetro externo, calcular as propriedades dessa seção (a área A, o momento de inércia I, o raio de giração k e o índice de esbeltez l_{ef}/k) e então usá-las nas Equações 4.38c, 4.42 e 4.43 para determinar a carga admissível com o coeficiente de segurança. Não se sabe em princípio se a coluna é uma coluna de Euler ou de Johnson, então o índice de esbeltez $(S_r)_D$ do ponto de concordância deve ser determinado pela Equação 4.42 e comparado ao S_r real da coluna para decidir se será usada a fórmula de Euler ou a de Johnson.

3 Assuma o diâmetro externo do tubo redondo como sendo 8 in, como primeira tentativa. A área A, o momento de inércia I e o raio de giração k para um tubo redondo de espessura de parede de 0,5 in então são

$$A = \frac{\pi\left(d_o^2 - d_i^2\right)}{4} = \frac{\pi(64 - 49)}{4} = 11{,}781 \text{ in}^2$$

$$I = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{64} = \frac{\pi(4096 - 2401)}{64} = 83{,}203 \text{ in}^4 \qquad (a)$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{83{,}203}{11{,}781}} = 2{,}658 \text{ in}$$

4 Calcule o índice de esbeltez S_r para essa coluna e compare-o ao valor $(S_r)_D$ correspondente ao ponto de concordância entre as curvas de Euler e Johnson (Equação 4.42). Use o valor recomendado pelo AISC (Tabela 4-4) para uma coluna *engastada livre* de $l_{ef} = 2{,}1l$.

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} = \frac{120(2{,}1)}{2{,}658} = 94{,}825$$

$$(S_r)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_y}} = \pi\sqrt{\frac{2(30E6)}{60\,000}} = 99{,}346 \qquad (b)$$

5 O índice de esbeltez para essa coluna está à esquerda do ponto de concordância e, logo, está na região de Johnson da Figura 4-42. Então deve ser usada a Equação 4.43 para se encontrar a carga crítica P_{cr} e aplicar o coeficiente de segurança para determinação da carga admissível P_{adm}.

$$P_{cr} = A\left[S_y - \frac{1}{E}\left(\frac{S_y S_r}{2\pi}\right)^2\right] = 11{,}8\left\{6E4 - \frac{1}{3E7}\left[\frac{6E4(94{,}83)}{2\pi}\right]^2\right\} = 384866 \text{ lb}$$

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{SF} = \frac{384866}{4} = 96217 \text{ lb} \qquad (c)$$

6 Esse carregamento é consideravelmente menor que o carregamento de 200000 lb requerido, e, portanto, os cálculos dos passos 3-5 devem ser repetidos, usando maiores valores para o diâmetro externo (ou maiores espessuras do tubo), até que se obtenha uma carga admissível adequada. O problema também pede o projeto de uma coluna usando tubos quadrados, o que alterará apenas as Equações (*a*) do passo 3 acima.

7 Este é claramente um processo entediante quando a solução do problema é feita com uma calculadora e clama por uma abordagem melhor. Um solucionador de equações ou uma planilha de cálculo podem ser utilizados como ferramentas para tal tarefa. Um solucionador iterativo é necessário para esse problema. Pode-se especificar a carga admissível desejada e deixar que o programa faça as iterações até convergir ao valor do diâmetro externo (D_{ext}) que suporte o carregamento desejado, dada a espessura do tubo. É necessário, porém, prover os programas com valores de estimativa iniciais para os parâmetros desconhecidos a fim de dar início à iteração. Os arquivos EX04-10 estão no CD-ROM.

8 Os programas fornecem a solução do problema tanto para colunas de seção quadrada como para colunas de seção redonda e escolhe entre as fórmulas de Euler e Johnson baseado nos valores relativos dos índices de esbeltez calculados no passo 4 acima. A solução completa leva apenas alguns segundos em

Tabela 4-5 Exemplo 4-11 projeto de colunas
Parte 1 Projeto de colunas tubulares redondas

Dados	Variável	Resultados	Unidade	Comentário
				Dados do problema
'circle	*Shape*			forma da coluna: 'square ou 'circle
120	*L*		in	comprimento da coluna
0,5	*Wall*		in	espessura de parede da coluna
2,1	*End*			fator de condição de contorno da AISC
30*E*6	*E*		psi	módulo de elasticidade
60 000	*Sy*		psi	tensão de escoamento em compressão
4	*FS*			coeficiente de segurança
200 000	*Allow*		lb	carregamento admissível desejado
				Resultados calculados
G*	*Dout*	11,35	in	diâmetro externo da coluna
	Leff	252	in	comprimento efetivo da coluna
	Sr	65,60		índice de esbeltez
	Srd	99,35		S_r no ponto de concordância
	Load	46921	lb	carregamento unitário crítico
	Johnson	46921	lb	carregamento unitário de Johnson
	Euler	68811	lb	carregamento unitário de Euler
	Din	10,35	in	diâmetro interno da coluna
	k	3,84	in	raio de giração
	I	251,63	in^4	momento de inércia
	A	17,05	in^2	área da seção transversal

*Indica que uma estimativa inicial é requerida para iniciar a iteração.

ambos os programas. A Tabela 4-5 parte 1 mostra a solução para a coluna de seção circular, enquanto a Tabela 4-5 parte 2, para a de seção quadrada.

9 Uma coluna redonda de 11,3 in diâmetro e 0,5 in de espessura é adequada para suportar o carregamento especificado. Trata-se de uma coluna Johnson com índice de esbeltez efetivo de 65,6 e peso 579 lb. Nesse caso, a fórmula de Euler prevê uma carga crítica aproximadamente 1,5 vezes maior que a prevista pela fórmula de Johnson, de modo que esta coluna estaria na "região de perigo" correspondente à região *ABDA* na Figura 4-42 caso se utilize a fórmula de Euler. Se fosse escolhido o tubo quadrado com parede de espessura 0,5 in, o comprimento externo de seu lado seria de 9,3 in para o mesmo índice de esbeltez e carga admissível, mas a coluna seria mais pesada: 600 lb. Uma coluna tubular de seção quadrada será sempre mais resistente do que uma redonda de mesmos diâmetro externo e espessura de parede porque suas propriedades (área, momento de inércia e raio de giração) serão maiores devido ao fato de o material localizado nos cantos estar em raios maiores. No entanto, o peso adicional implica em maiores custos com relação a uma coluna redonda com mesma resistência.

Tabela 4-5 Exemplo 4-11 projeto de colunas
Parte 2 Projeto de colunas tubulares quadradas

Dados	Variável	Resultados	Unidade	Comentário
				Dados do problema
'square	*Shape*			forma da coluna: 'square ou 'circle
120	*L*		in	comprimento da coluna
0,5	*Wall*		in	espessura de parede da coluna
2,1	*End*			fator de condição de contorno da AISC
30E6	*E*		psi	módulo de elasticidade
60000	*Sy*		psi	tensão de escoamento em compressão
4	*FS*			coeficiente de segurança
200000	*Allow*		lb	carregamento admissível desejado
				Resultados calculados
G*	*Dout*	9,34	in	diâmetro externo da coluna
	Leff	252	in	comprimento efetivo da coluna
	Sr	69,69		índice de esbeltez
	Srd	99,35		S_r no ponto de concordância
	Load	45235	lb	carregamento unitário crítico
	Johnson	45235	lb	carregamento unitário de Johnson
	Euler	60956	lb	carregamento unitário de Euler
	Din	8,34	in	diâmetro interno da coluna
	k	3,62	in	raio de giração
	I	231,21	in^4	momento de inércia
	A	17,69	in^2	área da seção transversal

*Indica que uma estimativa inicial é requerida para iniciar a iteração.

Colunas excêntricas

A discussão acima sobre falha da coluna foi feita considerando-se que a carga aplicada era concêntrica à coluna e passava exatamente através de seu centroide. Embora essa condição seja desejável, é raramente obtida na prática, pois as tolerâncias de fabricação vão fazer com que a carga seja de alguma forma excêntrica ao eixo centroidal da coluna. Em outros casos, o projeto pode deliberadamente introduzir uma excentricidade e, conforme mostra a Figura 4-43. Qualquer que seja o caso, a excentricidade muda a situação do carregamento de forma significativa pela superposição de um momento fletor Pe ao carregamento axial P. O momento fletor provoca uma deflexão lateral y, que por sua vez aumenta o braço de momento para $e + y$. A somatória dos momentos em torno de A dá:

$$\sum M_A = -M + Pe + Py = -M + P(e + y) = 0 \qquad (4.44a)$$

Substituindo a Equação 4.17, chega-se à equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI} \qquad (4.44b)$$

As condições de contorno são $x = 0$, $y = 0$ e $x = l/2$, $dy/dx = 0$, as quais levam à seguinte solução para a deflexão na metade do comprimento da coluna:

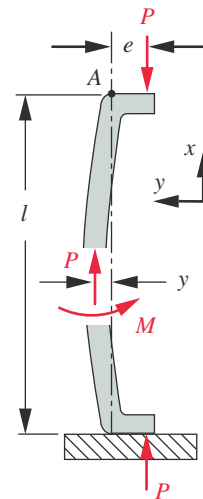



FIGURA 4-43
Uma coluna com carregamento excêntrico.

$$y = e\left[\sec\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right] \tag{4.45a}$$

e para o momento fletor máximo

$$M_{max} = -P(e + y) = -Pe\sec\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \tag{4.45b}$$

A tensão de compressão é

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2} \tag{4.46a}$$

Substituindo a expressão para o momento máximo da Equação 4.45*b*:

$$\sigma_c = \frac{P}{A}\left[1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right] \tag{4.46b}$$

Ocorrerá falha na metade do comprimento da coluna quando a tensão de compressão máxima exceder a tensão de escoamento do material se este for dúctil, ou a tensão de ruptura, se este for frágil. Fixando σ_c igual à tensão de escoamento à compressão para um material dúctil, chega-se a uma expressão para o carregamento unitário crítico de uma coluna excêntrica:

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l_{ef}}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} \tag{4.46c}$$

Esta é chamada de **fórmula da secante para colunas**. O fator de condição de contorno apropriado da Tabela 4-4 é usado para obter um comprimento efetivo l_{ef} que leva em consideração as condições de contorno da coluna. O raio de giração k para a Equação 4.46*c* é calculado em relação ao eixo em torno do qual o momento fletor aplicado age. Se a seção transversal da coluna é assimétrica e o momento fletor não age em torno do eixo mais fraco, deve-se verificar tanto se não há falha pelo carregamento concêntrico em torno do eixo com menor k como se não há falha devido à carga excêntrica no plano de flexão.

A fração ec/k^2 na Equação 4.46*c* é chamada **razão de excentricidade** E_r da coluna. Um estudo de 1933* concluiu que o valor 0,025 é um valor razoável para a razão de excentricidade considerando variações típicas de carregamento em colunas Euler concentricamente carregadas. Porém, se a coluna estiver na região de Johnson, a fórmula de Johnson aplicar-se-á para valores de E_r menores, em torno de 0,1 (ver a Figura 4-44 e sua discussão).

A Equação 4.46*c* é função difícil de se avaliar. Ela não só requer uma solução iterativa, como também a função secante vai para $\pm\infty$, o que causa problemas computacionais. Ela também produz resultados incorretos quando a função secante fica negativa. O arquivo denominado SECANT computa e gera o gráfico da Equação 4.46*c* (tanto para a fórmula de Euler quanto para a de Johnson) dentro de uma faixa de índices de esbeltez para qualquer variedade de valores para razão de excentricidade e para os parâmetros para colunas de seção transversal circular. Colunas não circulares também podem ser calculadas por esse programa, especificando a área A e o momento de inércia I como entradas, em vez de usar as dimensões lineares da coluna. Ao usar esse programa, é importante tomar cuidado para gerar o gráfico da função resultante e observar as regiões nas quais os resultados estão incorretos devido ao comportamento da secante, se houver algum. Esses resultados incorretos são evidentes no gráfico.

* Relatório de um comitê de pesquisa sobre colunas de aço, *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs.*, 98 (1933).

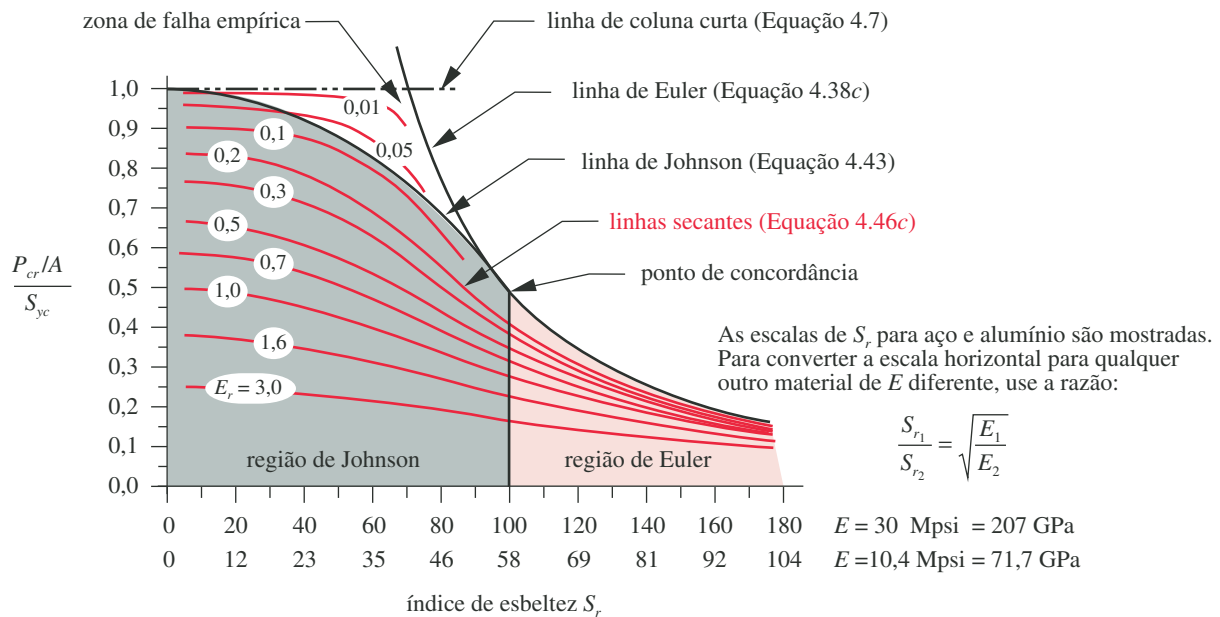



FIGURA 4-44

Linhas secantes (coloridas) superpostas às linhas de Euler, Johnson e de coluna curta.

A Figura 4-44 mostra gráficos da Equação 4.46*c* gerados pelo programa SECANT (dentro de regiões válidas[†]), superpostas aos gráficos da Figura 4-42. Essas curvas estão normalizadas pela resistência de escoamento na compressão do material. As formas da curva são as mesmas para qualquer módulo de elasticidade E; somente as escalas horizontais do gráfico mudam. A relação entre a razão das escalas de S_r com a razão dos valores de E para diferentes materiais é mostrada na figura.

As curvas secantes são todas assintóticas à curva de Euler para altos valores de S_r. Quando a razão de excentricidade é igual a zero, a curva secante coincide com a curva de Euler até quase o nível da linha correspondente a coluna curta. Quando a razão de excentricidade se torna menor do que aproximadamente 0,1, as funções secantes projetam-se na região de falha empírica para colunas concêntricas, denominada *ABDA* na Figura 4-42, isto é, elas se movem acima da linha de Johnson. Isso indica que **para colunas intermediárias excêntricas com pequenas razões de excentricidade**, *a fórmula para colunas concêntricas de Johnson* (*preferivelmente à formula da secante*) *pode ser usada como critério de falha* e deve também ser calculada.

4.17 TENSÕES EM CILINDROS

Os cilindros são frequentemente usados como recipientes pressurizados ou em tubulações que podem estar sujeitos a pressões internas e/ou externas, conforme mostrado na Figura 4-45. Algumas aplicações comuns são cilindros pneumáticos ou hidráulicos, tanques ou silos de armazenamento de fluidos e cano de armas. Alguns desses dispositivos possuem suas extremidades abertas, outros são totalmente fechados. Se abertos, as paredes do cilindro estarão submetidas a um estado de tensão bidimensional, com componentes de tensão nas direções tangencial (circunferencial) e radial. Se fechados, uma tensão na terceira dimensão, chamada longitudinal ou axial, também estará presente. Essas três tensões aplicadas são mutualmente ortogonais e são principais, uma vez que não há cisalhamento para pressões uniformemente distribuídas ao longo das paredes do cilindro.

[†] Observe na Figura 4-44 que as curvas secantes para razões de excentricidade iguais a 0,01, 0,05 e 0,1 terminam abruptamente próximo à linha de Euler. Esse é o local onde ocorre a primeira descontinuidade na função secante, e os dados além desse ponto são inválidos até que a secante se torne positiva novamente. Ver os gráficos no arquivo SECANT para maiores esclarecimentos.

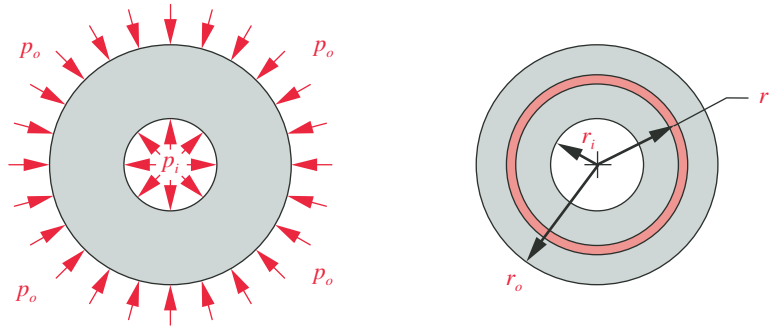



FIGURA 4-45

Um cilindro submetido a pressões interna e externa.

Cilindros de parede espessa

Na Figura 4-45, um elemento diferencial anular de raio r é mostrado. As tensões radial e tangencial que agem sobre esse elemento, para um cilindro aberto, são dadas pelas equações de Lame:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_o^2 \left(p_i - p_o\right)}{r^2\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{4.47a}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 r_o^2 \left(p_i - p_o\right)}{r^2\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{4.47b}$$

onde r_i e r_o são, respectivamente, os raios interno e externo, p_i e p_o, as pressões interna e externa, respectivamente, e r é o raio no local de interesse. Observe que essas tensões não variam linearmente ao longo da espessura da parede do cilindro.

Se as extremidades do cilindro são fechadas, a tensão axial nas paredes é:

$$\sigma_a = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{4.47c}$$

Observe a falta da variável r nesta equação, pois a tensão axial é uniforme por toda a espessura da parede.

Se a pressão externa $p_o = 0$, então as equações se reduzem a:

$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right) \tag{4.48a}$$

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_o^2}{r^2}\right) \tag{4.48b}$$

e para cilindros fechados:

$$\sigma_a = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{4.48c}$$

As distribuições dessas tensões através da espessura da parede para $p_o = 0$ são mostradas na Figura 4-46. Quando submetidas à pressão interna, ambas as tensões do cilindro são máximas no raio interno. A tensão tangencial (circunferencial) é de tração, enquanto a radial é de compressão. Quando duas peças cilíndricas, uma oca e outra maciça, são montadas com interferência, as tensões desenvolvidas entre as duas partes são definidas pelas Equações 4.47. Suas mútuas deformações elásticas criam uma pressão interna na parte externa, e uma pressão externa na parte interna. Ajustes com interferência são discutidos mais detalhadamente na Seção 10.12.

(*a*) Tensão tangencial (circunferencial)

(*b*) Tensão radial

FIGURA 4-46

Distribuições das tensões radial e tangencial nas paredes de cilindros internamente pressurizados.

Cilindros de parede fina

Quando a espessura da parede é menor que 1/10 do raio, o cilindro pode ser considerado como de parede fina. A distribuição das tensões ao longo da espessura da parede pode ser considerada uniforme e, portanto, têm suas expressões simplificadas a

$$\sigma_t = \frac{pr}{t} \tag{4.49a}$$

$$\sigma_r = 0 \tag{4.49b}$$

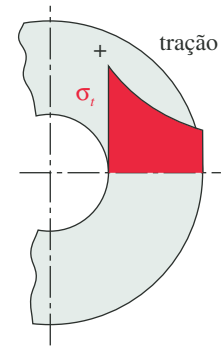
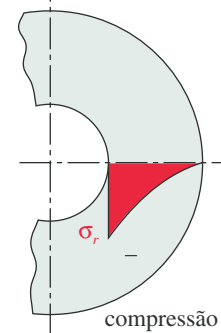
e se o cilindro for fechado:

$$\sigma_a = \frac{pr}{2t} \tag{4.49c}$$

Todas essas equações são válidas apenas no caso de não haver qualquer tipo de concentração de tensões ou mudanças na seção. Para o projeto de vasos de pressão reais, consultar o Código sobre Caldeiras da ASME para informações mais completas, incluindo diretrizes para projeto com segurança. Vasos de pressão podem ser extremamente perigosos, mesmo para pressões relativamente pequenas, se o volume armazenado é grande e a substância pressurizada é compressível. Grandes quantidades de energia podem ser liberadas repentinamente em caso de falha, o que pode causar sérios acidentes.

4.18 ESTUDOS DE CASO DE ANÁLISE DE DEFORMAÇÃO E TENSÃO ESTÁTICAS

Serão apresentados a seguir alguns estudos de caso que são, de fato, continuações dos projetos dos estudos de caso do Capítulo 3. Os mesmos números serão designados para os estudos de caso de um mesmo projeto ao longo de todo o texto, os quais serão diferenciados por uma série sucessiva de letras. Por exemplo, no Capítulo 3 foram apresentados seis estudos de caso denominados 1A, 2A, 3A, 4A, 5A e 5B. Neste capítulo, serão continuados os estudos de 1 a 4, que serão denominados 1B, 2B, 3B e 4B. Alguns deles terão continuidade nos capítulos seguintes, onde serão dadas designações sucessivamente dessa forma. Assim, o leitor pode rever os estudos anteriores a um estudo de caso para um dado projeto procurando estudos com o mesmo número nos capítulos anteriores. Ver lista de estudos de caso no sumário para localizar as partes de um projeto.

Uma vez que as tensões variam continuamente através de uma peça, deverão ser feitos alguns julgamentos de engenharia como para intuir onde elas serão

máximas e então calculá-las nesse local. Não há tempo para calcular tensões em uma infinidade de lugares. Como a geometria dessas partes é razoavelmente complicada, se não for feita uma análise completa das tensões usando elementos finitos, devem ser feitas simplificações razoáveis para modelá-los. A meta é obter rapidamente algumas informações a respeito do estado de tensões do projeto para criar certas informações que permitam determinar sua viabilidade antes de investir mais tempo em uma análise completa.

ESTUDO DE CASO 1B

Análise de tensão e deformação em uma alavanca para freio de bicicleta

Problema **Determine as tensões e deformações nos pontos críticos da alavanca de freio mostrada nas Figuras 3-1 (repetida nesta página) e 4-47.**

Dados **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 1A. O pino de articulação tem 8 mm de diâmetro. A mão humana comum pode gerar uma força de aperto em torno de 267 N (60 lb) na posição mostrada da alavanca.**

Hipóteses **Os pontos de falha mais prováveis são os dois furos em que os pinos são inseridos e na base da viga engastada da manopla. A seção transversal da manopla é essencialmente circular.**

Solução **Ver Figuras 4-47 e 4-48.**

1 A porção da manopla de 14,3 mm de diâmetro pode ser modelada como uma barra engastada com um carregamento concentrado intermediário, conforme mostrado na Figura 4-48, se for considerado que o bloco mais maciço à sua esquerda sirva como "parede". A localização mais provável da falha é a origem da manopla, na qual a força cortante e o momento fletor são máximos, como mostrado na Figura 4-24, para esse modelo em que foram analisadas suas reações, momentos e deformações nos Exemplos 3-3 e 4-5. Aplicando $\sum F = 0$ e $\sum M = 0$, encontra-se que $R_1 = 267$ N e $M_1 = 20{,}5$ N-m. A tensão normal devido à flexão no engastamento é máxima na fibra externa (no ponto P mostrado na Figura 4-47) e é determinado pela Equação 4.11b:

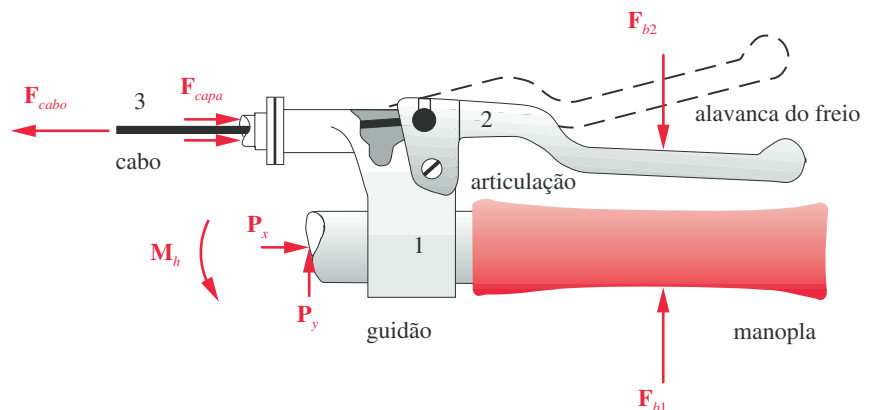



FIGURA 3-1 Repetida

Conjunto da alavanca do freio de uma bicicleta.

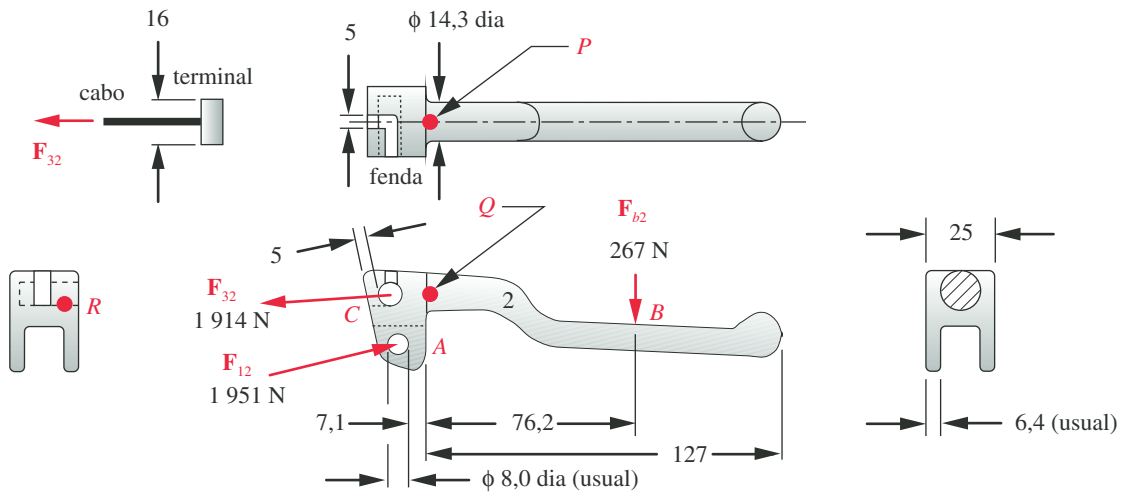



FIGURA 4-47

Diagrama de corpo livre para a alavanca de freio de bicicleta, com forças em N e dimensões em mm.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(F \cdot a)c}{I} = \frac{(267\ \text{N} \cdot 0.0762\ \text{m})\left(\frac{0{,}0143}{2}\right)\text{m}}{\frac{\pi(0{,}0143)^4}{64}\ \text{m}^4} = 70{,}9\ \text{MPa} \qquad (a)$$

Esta é uma tensão relativamente baixa para esse material. Há um pouco de concentração de tensão devido ao pequeno raio de curvatura no engastamento da viga, mas como ela é feita de material fundido marginalmente dúctil (5% de elongação na ruptura), podem-se ignorar as concentrações de tensão considerando que o escoamento no local deve aliviá-las.

2 A razão efetiva entre o comprimento e a profundidade dessa viga é pequena, dada por 76,2/14,3 = 5,3. Como essa razão é menor do que 10, a tensão de cisalhamento devido à força cortante deve ser calculada. Para a seção circular maciça, ela pode ser encontrada pela Equação 4.15*c*:

$$\tau_{xy} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(267)\ \text{N}}{3\pi\frac{(14{,}3)^2}{4}\ \text{mm}^2} = 2{,}22\ \text{MPa} \qquad (b)$$

A tensão de cisalhamento é máxima na linha neutra (ponto *Q*) e a tensão normal na flexão é máxima na fibra externa (ponto *P*). A maior tensão principal (Equação) no topo da fibra externa é então $\sigma_1 = \sigma_x = 71{,}2$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e $\tau_{max} = 35{,}6$ MPa. O círculo de Mohr para esse elemento de tensão é parecido ao apresentado na Figura 4-8 (repetida nesta página por conveniência).

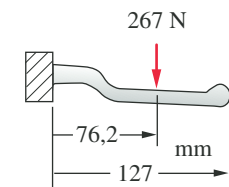
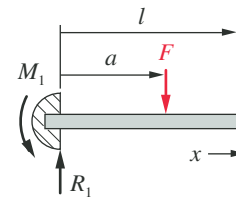
3 O cálculo da deflexão para a manopla é complicado pela sua geometria curva e pela ligeira conicidade. Uma primeira aproximação da deflexão pode ser obtida simplificando-se o modelo para uma barra reta de seção transversal constante, como mostrado na Figura 4-48*b*. A deflexão devido à força cortante também é desprezada. Isso provoca um pequeno erro contra a segurança, mas fornece uma indicação da ordem de grandeza da deflexão. Se esse resultado indicar que há um problema de deflexão excessiva, será necessário melhorar o modelo. A Equação (*i*) do Exemplo 4-5 fornece a equação de deflexão para o modelo simplificado. Neste caso, $l = 127$ mm, $a = 76{,}2$ mm e $x = l$ para a máxima deflexão que é dada na extremidade da barra.

(*a*) A manopla como barra engastada

(*b*) O modelo de barra engastada

FIGURA 4-48

Modelo de barra engastada para a manopla.

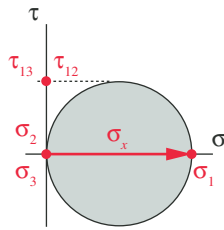



FIGURA 4-8 Repetida

Círculos de Mohr para tensão de tração unidimensional (dois círculos são coincidentes e o terceiro é um ponto, uma vez que $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

$$\begin{aligned} y &= \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a \rangle^3\right] \\ &= \frac{267}{6(71{,}7E3)(2{,}04E3)}\left[127^3 - 3(76{,}2)127^2 - (127-76{,}2)^3\right] \\ &= -0{,}54 \text{ mm} \end{aligned} \qquad (c)$$

Isso significa uma deflexão por volta de 0,02 in na extremidade da manopla, que não é considerada excessiva para esta aplicação. Ver Figura 4-24 para um gráfico da forma geral da curva de deflexão para essa barra, embora os valores sejam diferentes naquele exemplo.

4 Outras localizações de prováveis falhas devem também ser verificadas. O material em torno dos dois furos pode estar sujeito a qualquer um dos diversos tipos de falha devido a tensão de esmagamento, tensão de cisalhamento puro ou rasgamento. O furo no ponto *A* da Figura 4-47 contém um pino de articulação que aplica sobre a manopla uma força de 1100 N, como mostrado. A seguir, vamos verificar se os três modos de falha, listados acima, suportam esse esforço.

5 A tensão de esmagamento é de compressão e pressupõe-se que age sobre a área projetada do furo, que, neste caso, tem diâmetro de 8 mm vezes o comprimento total do mancal (duas flanges de 6,4 mm de espessura).

$$\begin{aligned} A_{rasgamento} &= \text{diâmetro} \cdot \text{ espessura} = 8(2)(6.4) = 102{,}4 \text{ mm}^2 \\ \sigma_{rasgamento} &= \frac{F_{12}}{A_{rasgamento}} = \frac{1\,951 \text{ N}}{102{,}4 \text{ mm}^2} = 19{,}1 \text{ MPa} \end{aligned} \qquad (d)$$

6 A ruptura por cisalhamento ou rasgamento da chapa neste caso requer que quatro seções de 6,4 mm de espessura falhem por cisalhamento ao longo dos 5 mm de comprimento de material entre o furo e a borda (ver também a Figura 4-13, para uma definição de área de rasgamento).

$$\begin{aligned} A_{rasgamento} &= \text{comprimento} \cdot \text{ espessura} = 7{,}1(4)(6{,}4) = 181{,}8 \text{ mm}^2 \\ \tau_{rasgamento} &= \frac{F_{12}}{\tau A_{rasgamento}} = \frac{1\,951 \text{ N}}{181{,}8 \text{ mm}^2} = 10{,}7 \text{ MPa} \end{aligned} \qquad (e)$$

7 Essas tensões são muito baixas para o material especificado, porém vale lembrar que a força aplicada usada para os cálculos foi baseada na capacidade de aperto da mão humana e não prevê outras forças maiores devido a impactos ou qualquer outra situação.

8 O terminal do cabo é inserido em um furo cego que é entalhado pela metade para permitir que o cabo passe através da montagem, conforme mostra a Figura 4-47. Essa fenda enfraquece a peça e torna a seção em *C* a mais propensa a falha nessa junta. Vamos pressupor que uma falha na metade aberta (entalhada) do material já é suficiente para inutilizar a peça, uma vez que o terminal do cabo poderia então escapar. A pequena seção que retém o pino do cabo pode ser modelada em uma primeira aproximação como uma barra engastada de seção transversal com largura de (25 – 5)/2 = 10 mm e altura de 5 mm. Esta é uma consideração a favor da segurança, uma vez que não considera o aumento da altura devido ao raio do furo. O braço de momento da força será admitido ser igual ao raio do pino ou 4 mm. A força na metade entalhada da largura é tomada como metade da força total de 1049 N no cabo. A tensão de flexão na fibra externa no ponto *C* é, então,

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{\frac{1\,914}{2}\left(\frac{5}{2}\right)(4)}{\frac{10(5)^3}{12}} = 91{,}9 \text{ MPa} \qquad (f)$$

e a tensão de cisalhamento no eixo neutro devido à força cortante é (Equação 4.14*b*)

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(957)}{2(10)(5)} = 28{,}7 \text{ MPa} \qquad (g)$$

9 A tensão normal é principal aqui, como mostra a Figura 4-8, e a tensão de cisalhamento máxima é então metade da tensão normal principal. Essas são as maiores tensões encontradas nas três seções verificadas. Uma análise de falha dessa parte será feita na continuação deste estudo de caso no próximo capítulo.

10 Essa análise preliminar mostra algumas das áreas que podem ser beneficiadas com uma investigação mais profunda. Uma análise mais completa deste estudo de caso é feita no Capítulo 8 usando a análise por elementos finitos. O leitor pode examinar o modelo para este estudo de caso no arquivo CASE1B no programa de sua preferência.

ESTUDO DE CASO 2B

Análise de deflexão e tensão em alicate de pressão

Problema: **Determine as tensões e deflexões nos pontos críticos do alicate de pressão mostrado na Figura 3-3 (repetida nesta página) e 4-49.**

Dados: **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 2A. A espessura do elo 1 é 0,313 in, a espessura dos elos 2 e 3 é 0,125 in e do 4 é 0,187 in. Todos os elos são feitos de aço 1095 laminado com $E = 30$ Mpsi.**

Hipóteses: **Os pontos mais prováveis de falha são o elo 3, como uma coluna, os furos onde os pinos são inseridos, os próprios pinos, por cisalhamento, e o elo 4, por flexão. O número de ciclos esperados ao longo da vida útil da ferramenta é baixo, então uma análise estática é aceitável. Concentrações de tensão podem ser ignoradas devido à ductilidade do material e à hipótese de carregamento estático.**

Solução: **Ver Figuras 3-3, 4-49 a 4-51.**

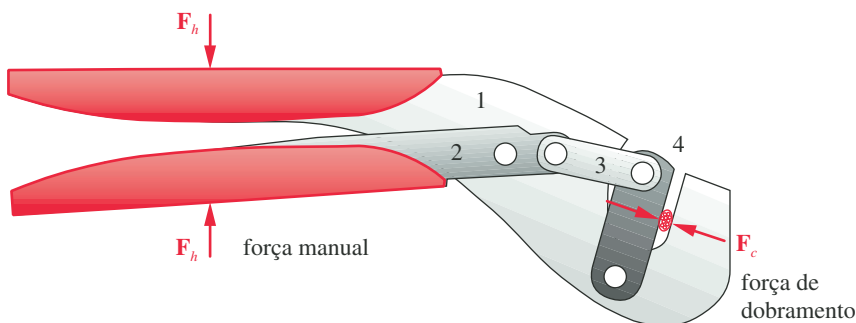



FIGURA 3-3 Repetida

Alicate de pressão para conexão de fios.

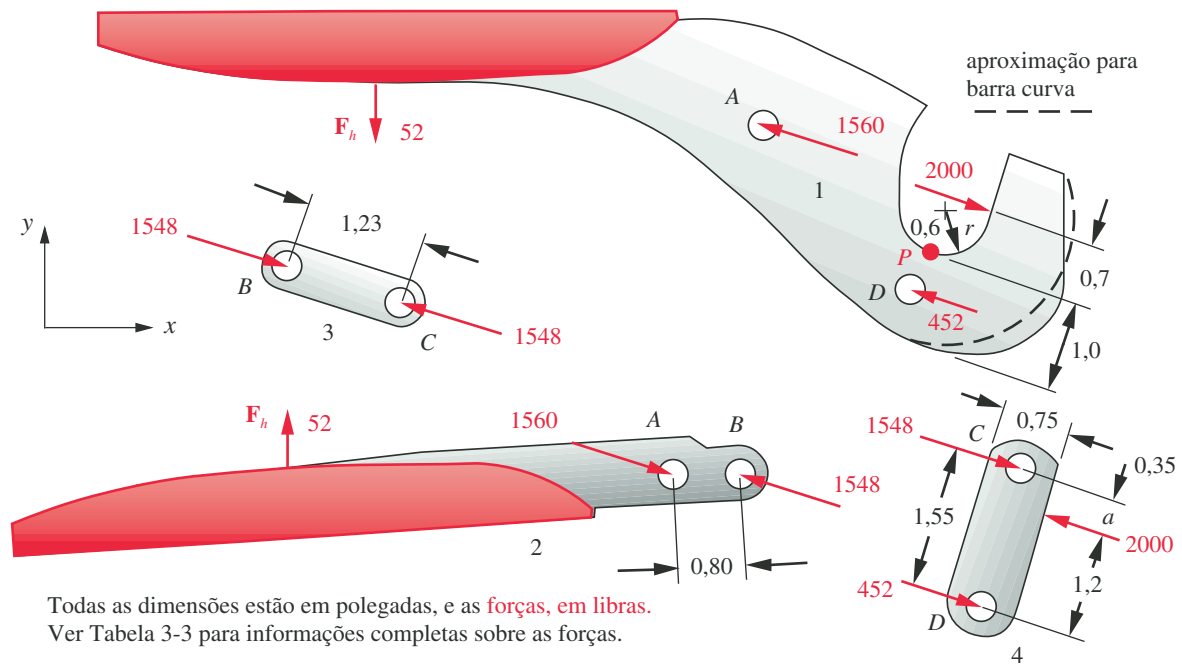



FIGURA 4-49

Diagramas de corpo livre, dimensões e magnitude das forças em alicate de pressão.

1 O elo 3 é uma coluna com condição de contorno do tipo biarticulada, carregada com F_{43} = 1548 lb, conforme calculado no Estudo de Caso 2A e mostrado na Figura 4-49. Observe pela Tabela 4-4 que $l_{ef} = l$. Primeiramente, é necessário calcular seu índice de esbeltez (Equação 4.41). Isso requer o cálculo do raio de giração (Equação 4.34) na direção de flambagem mais fraca (a direção z, neste caso).*

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \sqrt{\frac{0{,}125^2}{12}} = 0{,}036 \text{ in} \qquad (a)$$

O índice de esbeltez para flambagem na direção de z é, então,

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} = \frac{1{,}228}{0{,}036} = 34 \qquad (b)$$

que é maior que 10, o que elimina a hipótese de coluna curta. Calcule o índice de esbeltez do ponto de concordância entre as curvas de Johnson e Euler da Figura 4-42.

$$(S_r)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_y}} = \pi\sqrt{\frac{2(30E6)}{83E3}} = 84{,}5 \qquad (c)$$

O índice de esbeltez dessa coluna é menor que o do ponto de concordância entre as curvas de Euler e Johnson mostradas na Figura 4-42. Trata-se então de uma coluna intermediária, para a qual deve ser usada a fórmula de flambagem de Johnson (Equação 4.43) para determinação do carregamento crítico.

* Mesmo uma pequena folga nos furos impede que os pinos ajam com uma junta de momento ao longo de seus eixos, criando assim uma conexão biarticulada efetiva em duas dimensões.

$$P_{cr} = A\left[S_y - \frac{1}{E}\left(\frac{S_y S_r}{2\pi}\right)^2\right]$$
$$= 0{,}125(0{,}5)\left[83000 - \frac{1}{30E6}\left(\frac{83000(34)}{2\pi}\right)^2\right] = 4765 \text{ lb} \qquad (d)$$

O carregamento crítico é 3,1 vezes maior que a carga aplicada. Há, portanto, segurança com relação à falha por flambagem. O elo 2 é uma coluna (*AB*) mais curta e larga em relação ao elo 3, e é sujeito a uma força de compressão menor, portanto pode ser considerado seguro contra flambagem, baseado nos cálculos do elo 3.

2 Uma vez que não flamba, a deformação normal no elo 3 em compressão é (Equação 4.7):

$$x = \frac{Pl}{AE} = \frac{1\,548(1{,}23)}{0{,}0625(30E6)} = 0{,}001 \text{ in} \qquad (e)$$

3 Qualquer um dos elos poderia também falhar por esmagamento dos furos de 0,25 in de diâmetro. A maior força exercida sobre qualquer um dos pinos é de 1560 lb. A tensão de esmagamento para este pior caso (Equações 4.7 e 4.10) é, então,

$$\sigma_b = \frac{P}{A_{esm}} = \frac{P}{comprimento\ (\phi)} = \frac{1560}{0{,}125(0{,}25)} = 49920 \text{ psi} \qquad (f)$$

Não há perigo de falha por rasgamento (cisalhamento) nos elos 2 ou 3, uma vez que o carregamento é no sentido do centro da peça. O elo 1 possui grande quantidade de material em torno dos furos para prevenir o rasgamento.

4 Os pinos de diâmetro 0,25 in estão sujeitos ao cisalhamento puro. A tensão de cisalhamento para o pior caso é calculado pela Equação 4.9, dada por:

$$\tau = \frac{P}{A_{cis}} = \frac{1\,560}{\frac{\pi(0{,}25)^2}{4}} = 31780 \text{ psi} \qquad (g)$$

5 O elo 4 é uma viga de 1,55 in de comprimento, com apoios simples nos pinos e carregada pela força de 2000 lb de dobramento, localizada a 0,35 in do ponto *C*. Escreva as equações para o carregamento, cortante, momento, rotação e deflexão usando funções de singularidade, observando que as constantes de integração C_1 e C_2 serão iguais a zero:

$$\begin{aligned} q &= R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \\ V &= R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{0} \\ M &= R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{1} \end{aligned} \qquad (h)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{F}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{R_2}{2}\langle x-l\rangle^2 + C_3\right) \\ y &= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle x-l\rangle^3 + C_3x + C_4\right) \end{aligned} \qquad (i)$$

6 As forças de reação podem ser encontradas fazendo $\sum M = 0$ e $\sum F = 0$. (Ver Apêndice B.)

$$R_1 = \frac{F(l-a)}{l} = \frac{2\,000(1{,}55-0{,}35)}{1{,}55} = 1548 \text{ lb} \qquad (j)$$

$$R_2 = \frac{Fa}{l} = \frac{2000(0{,}35)}{1{,}55} = 452 \text{ lb} \qquad (k)$$

O momento máximo é de 1548(0,35) = 541,8 lb-in no local onde a carga está aplicada. Os diagramas de momento e cortante para o elo 4 são mostrados na Figura 4-50.

7 A altura da viga no ponto de máximo momento é 0,75 in e a espessura é 0,187 in. A tensão de flexão é então

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{541{,}8\left(\dfrac{0{,}75}{2}\right)}{\dfrac{0{,}187\left(0{,}75\right)^3}{12}} = 30905 \text{ psi} \qquad (l)$$

8 As funções rotação e deflexão da viga requerem o cálculo das constantes de integração C_3 e C_4, que são encontradas pela substituição das condições de contorno $x = 0$, $y = 0$ e $x = l$ e $y = 0$ na equação de deflexão.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle 0-a\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle 0-l\rangle^3 + C_3(0) + C_4\right) \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (m)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle l-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle l-a\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle l-l\rangle^3 + C_3(l)\right) \\ C_3 &= \frac{1}{6l}\left[F(l-a)^3 - R_1 l^3\right] = \frac{1}{6(1{,}55)}\left[2000(1{,}55-0{,}35)^3 - 1548(1{,}55)^3\right] = -248{,}4 \end{aligned} \qquad (n)$$

9 A equação da deflexão é encontrada combinando as Equações i, j, k, m e n:

$$y = \frac{F}{6lEI}\left\{(l-a)\left(x^3 + \left[(l-a)^2 - l^2\right]x\right) - l\langle x-a\rangle^3 + a\langle x-l\rangle^3\right\} \qquad (o)$$

e a deflexão máxima ocorre em $x = 0{,}68$ in e é

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{Fa(l-a)}{6lEI}\left(a^2 + (l-a)^2 - l^2\right) \\ &= \frac{2\,000(0{,}35)(1{,}55-0{,}35)}{6(1{,}55)(30E6)(0{,}006\,6)}\left[0{,}35^2 + (1{,}55-0{,}35)^2 - 1{,}55^2\right] = 0{,}000\,5 \text{ in} \end{aligned} \qquad (p)$$

Pouca deflexão é permitida neste local para garantir que o dobramento se dê de forma apropriada, e este valor encontrado é aceitável. Os diagramas de rotação e deflexão são mostrados na Figura 4-50. Ver também o arquivo CASE2B-1.

10 O elo 1 é relativamente maciço, se comparado aos outros, e a única área de interesse é o mordente, que é carregado pela força de dobramento de 2000 lb e tem um furo na seção transversal em sua base. Embora o formato desse elemento não seja exatamente o de uma viga curva, com raios interno e externo concêntricos, essa hipótese é seguramente aceitável se for usado o raio externo igual ao da menor dimensão da seção, conforme mostrado na Figura 4-49. Logo, será adotado para o raio interno o valor 0,6 in, e para o externo 1,6 in. A excentricidade e do eixo neutro da viga curva *versus* o eixo centroidal da viga rc é encontrado pela Equação 4.12a, levando em conta o furo da seção na integração.

$$e = r_c - \frac{A}{\displaystyle\int_0^{r_o}\frac{dA}{r}} = 1{,}1 - \frac{0{,}313(1-0{,}25)}{0{,}313\left(\displaystyle\int_{0{,}600}^{0{,}975}\frac{dr}{r} + \int_{1{,}225}^{1{,}600}\frac{dr}{r}\right)} = 0{,}103 \qquad (q)$$

Diagrama de carregamento (lb)

Diagrama de cortante (lb)

Diagrama de momento fletor (lb-in)

Diagrama de rotação (rad)

Diagrama de deflexão (in)

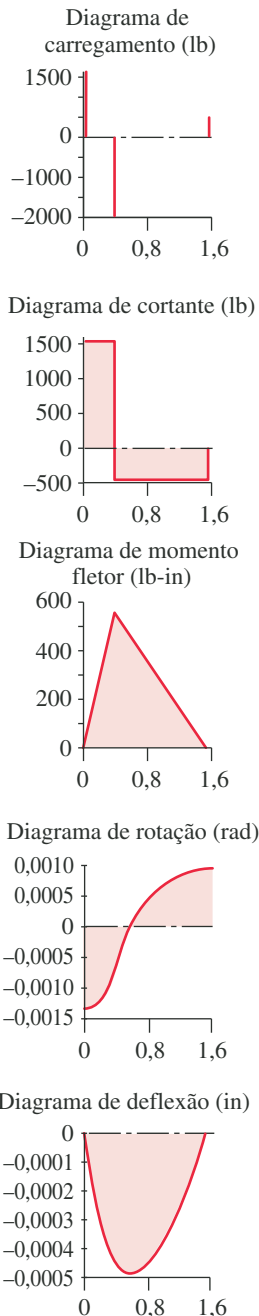



FIGURA 4-50

Gráficos do elo 4 – Caso 2B.

O raio até o eixo neutro (r_n) e as distâncias (c_i e c_o) das fibras interna e externa definidas pelos raios (r_i e r_o) ao eixo neutro são então (ver Figura 4-16)

$$\begin{aligned} r_n &= r_c - e = 1{,}10 - 0{,}103 = 0{,}997 \\ c_i &= r_n - r_i = 0{,}997 - 0{,}600 = 0{,}397 \\ c_o &= r_o - r_n = 1{,}600 - 0{,}997 = 0{,}603 \end{aligned} \tag{r}$$

11 O momento fletor aplicado sobre a seção da viga curva é calculado pela força aplicada

$$M = Fl = 2000(0{,}7 - 0{,}6 + 1{,}1) = 2400 \text{ lb-in} \tag{s}$$

12 As tensões nas fibras interna e externa são calculadas pelas Equações 4.12*b* e 4.12*c*. A área da seção transversal da barra é reduzida pela área do furo.

$$\begin{aligned} \sigma_i &= +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{2400}{0{,}103\left[(1{,}0 - 0{,}25)(0{,}313)\right]}\left(\frac{0{,}397}{0{,}60}\right) = 65 \text{ kpsi} \\ \sigma_o &= -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) = -\frac{2400}{0{,}103\left[(1{,}0 - 0{,}25)(0{,}313)\right]}\left(\frac{0{,}603}{1{,}60}\right) = -37 \text{ kpsi} \end{aligned} \tag{t}$$

13 Há também uma tensão de tração devido à força normal, que se soma à tensão de flexão nas fibras interna e externa no ponto P:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{F}{A} = \frac{2\,000}{(1{,}0 - 0{,}25)(0{,}313)} = 8{,}5 \text{ kpsi} \\ \sigma_{max} &= \sigma_a + \sigma_i = 65 + 8{,}5 = 74 \text{ kpsi} \end{aligned} \tag{u}$$

Essa é a tensão principal no ponto P, uma vez que não há tensão de cisalhamento aplicada ou outra tensão normal nesse ponto de aresta. A tensão máxima de cisalhamento no ponto P é metade desta tensão principal ou 37 psi. A tensão de flexão na fibra externa é de compressão, portanto deve ser subtraída da tensão de tração devido à força normal, resultando em $-37 + 8{,}5 = -28{,}5$ psi.

14 Há uma concentração de tensões significativa no furo. O fator de concentração de tensão teórico para o caso de furo circular em uma chapa infinita é $K_t = 3$, como definido pela Equação 4.32*a* e pela Figura 4-35. Para furo circular em lâmina finita, K_t é função da razão entre o diâmetro do furo e a largura da chapa. Peterson fornece uma tabela de fatores de concentração de tensão para furos redondos em chapas planas sob tensão,[5] da qual se encontra o valor $K_t = 2{,}42$ para razão diâmetro/largura igual a 1/4. A tensão de tração local no furo, devido à força normal, é então 2,42(8,5) = 20,5 kpsi, que é menor que a tensão de tração na fibra interna.

15 Embora esta análise esteja longe de ser uma análise completa de tensão e deflexão para essas peças, os cálculos feitos são direcionados às áreas que se julgam ser as mais propensas a falha, ou a ter problemas de deflexão. As tensões e deflexões no elo 1 foram também calculadas usando o programa de análise de elementos finitos ABAQUS, que estimou a máxima tensão principal no ponto P em 81 kpsi, enquanto a estimativa feita aqui foi de 74 kpsi. A malha da análise de elementos finitos e a distribuição de tensões calculada pelo modelo em FEA estão mostradas na Figura 4-51. O Estudo de Caso 2D, no Capítulo 8, apresenta a análise FEA completa desse conjunto.

A análise aqui desenvolvida foi feita simplificando a geometria da peça para permitir o uso de um modelo conhecido de uma forma fechada (a viga curva), enquanto o modelo em FEA incluiu todo o material da peça real, discretizada a sua geometria. Ambas as análises devem ser reconhecidas apenas como estimativas dos estados de tensão, e não como soluções exatas.

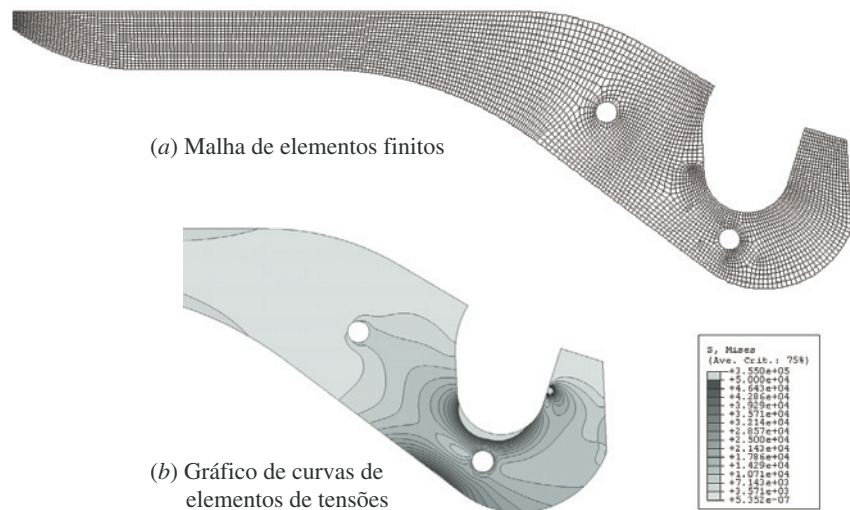



FIGURA 4-51

Análise de elementos finitos das tensões no alicate de pressão do Estudo de Caso 2B.

16 O reprojeto pode ser necessário para reduzir as tensões e deflexões, baseado em uma análise de falha. Este estudo de caso será revisto no próximo capítulo após a apresentação de diversas teorias de falha. O leitor pode examinar os modelos deste estudo de caso através dos arquivos CASE2B-1, CASE2B-2 e CASE2B-3 no programa de sua escolha. Uma análise de tensão deste estudo de caso é feita no Capítulo 8 utilizando FEA.

ESTUDO DE CASO 3B

Análise de deflexão e tensão em macaco tipo sanfona para automóvel

Problema **Determinar as tensões e deflexões nos pontos críticos do macaco tipo sanfona mostrado na Figura 3-5 (repetida na próxima página) e 4-52.**

Dados **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 3A. O macaco foi projetado para resistir a um carregamento de até 2000 lb no total, 1000 lb em cada lado. A largura dos elos é 1,032 in e suas espessuras, 0,15 in. O parafuso tem rosca 1/2-13 UNC com diâmetro da raiz de 0,406 in. Todas as peças são de aço dúctil com E = 30 Mpsi e S_y = 60 kpsi.**

Hipóteses **Os pontos mais prováveis de falha são os elos por flambagem, os furos nos mancais onde são inseridos os pinos, os pinos de conexão por cisalhamento, os dentes das engrenagens por flexão e o parafuso por tração. Há dois conjuntos de elos: um conjunto de cada lado. Considere que os dois lados compartilham o carregamento igualmente. Um macaco é tipicamente usado por poucos ciclos durante sua vida útil, e portanto uma análise estática é apropriada.**

Solução **Ver Figuras 4-52 e 4-53 e os arquivos CASE3B-1 e CASE3B-2.**

1 As forças sobre o macaco para a posição mostrada foram calculadas na parte anterior deste Estudo de Caso (3A) no Capítulo 3. Ver seção correspondente e Tabela 3-4 para informações adicionais com relação às forças.

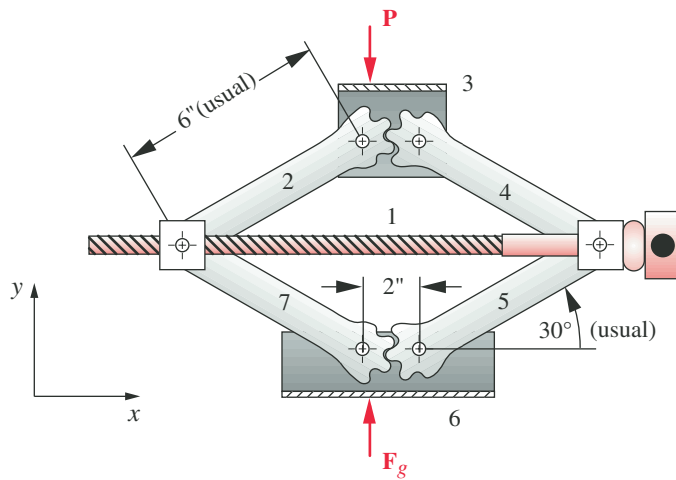



FIGURA 3-5 Repetida

Macaco tipo sanfona para automóvel.

2 A força no parafuso do macaco é quatro vezes a componente F_{21x} de 878 lb no ponto A, porque aquela força é originária da metade superior do macaco em apenas um plano. A metade de baixo exerce uma força igual no parafuso, e a parte de trás dobra a sua soma. Essas forças colocam o parafuso em tração na direção axial. A tensão de tração é encontrada pela Equação 4.7 usando o diâmetro da raiz da rosca, que é de 0,406 in, para calcular a área da seção transversal. Essa é uma hipótese a favor da segurança, como será visto quando forem analisados parafusos de fixação no Capítulo 15.

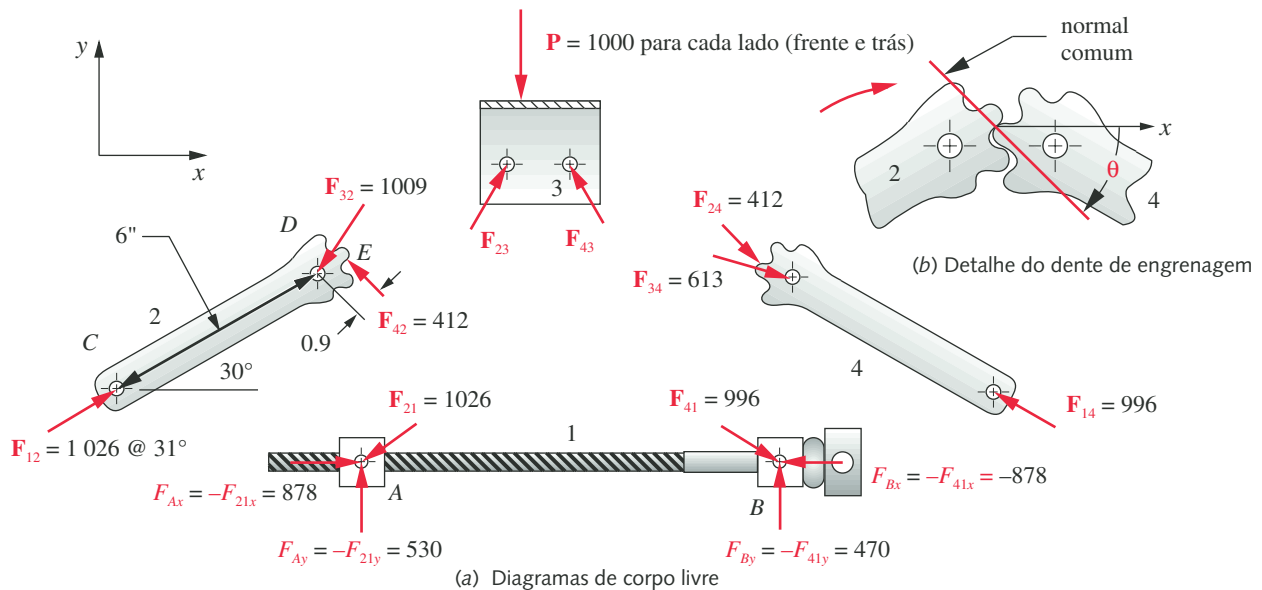



FIGURA 4-52

Diagramas de corpo livre, dimensões e forças dos elementos do macaco.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4(878)}{\frac{\pi(0{,}406)^2}{4}} = \frac{3512}{0{,}129} = 27128 \text{ psi} \qquad (a)$$

A deformação axial do parafuso é encontrada pela Equação 4.8.

$$x = \frac{Pl}{AE} = \frac{4(878)(12{,}55)}{0{,}129(30E6)} = 0{,}011 \text{ in} \qquad (b)$$

3 O elo 2 é o mais carregado dos elos, pois a carga aplicada P está ligeiramente deslocada do centro para a esquerda, então serão calculadas suas tensões e deflexões. Esse elo é carregado como uma coluna-viga, com uma força de compressão P entre os pontos C e D e um momento fletor aplicado entre D e E. Observe que a força F_{12} é praticamente colinear ao eixo do elo. O carregamento axial é igual a $F_{12}\cos(1°) = 1026$ lb e o binário fletor, criado por F_{42} agindo sobre o ponto D, é dado por $M = 412(0{,}9) = 371$ lb-in. Esse binário é equivalente a uma excentricidade e do carregamento axial no ponto D de distância $e = M/P = 371/1026 = 0{,}36$ in.

A fórmula da secante para flambagem (Equação 4.46*c*) pode ser usada, utilizando esta excentricidade para levar em consideração o binário no plano de flexão; c é metade da largura do elo, 1,032 in. Como se trata de uma coluna biarticulada, da Tabela 4-4 sabe-se que $l_{ef} = l$. O raio de giração k é tomado no plano de flexão xy para este cálculo (Equação 4.34):

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \sqrt{\frac{0{,}15(1{,}032)^3}{12(0{,}15)(1{,}032)}} = 0{,}298 \qquad (c)$$

O índice de esbeltez é $l_{ef}/k = 20{,}13$. A fórmula da secante pode agora ser aplicada e iterada para obter o valor de P (ver Figura 4-53).

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l_{ef}}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} = 18975 \text{ psi}$$

$$P_{cr} = 0{,}155(18975) = 2\,937 \text{ lb} \qquad (d)$$

A coluna também deve verificar se há falha por flambagem de coluna concêntrica na direção mais fraca (z) com $c = 0{,}15 / 2$. O raio de giração na direção z é calculado por

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \sqrt{\frac{1{,}032(0{,}15)^3}{12(1{,}032)(0{,}15)}} = 0{,}043 \qquad (e)$$

O índice de esbeltez na direção z é

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} = \frac{6}{0{,}043} = 138{,}6 \qquad (f)$$

Isso precisa ser comparado ao índice de esbeltez $(S_r)_D$ no ponto de concordância entre as curvas de Euler e Johnson para determinar qual equação de flambagem utilizar para esta coluna:

$$(S_r)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_y}} = \pi\sqrt{\frac{2(30E6)}{60\,000}} = 99{,}3 \qquad (g)$$

O S_r para esta coluna é maior que $(S_r)_D$, portanto utiliza-se a fórmula de Euler (ver Figura 4-53). A carga crítica de Euler é então encontrada pela Equação 4.38*a*.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 (30E6)(1{,}032)(0{,}15)^3}{12(6)^2} = 2387 \text{ lb} \quad (h)$$

Então é mais provável a flambagem na direção mais fraca (z) do que no plano do momento aplicado. O fator de segurança à flambagem é 2.3.

4 Todos os pinos têm 0,437 in de diâmetro. A tensão de esmagamento no furo de maior carregamento em C é

$$\sigma_{esm} = \frac{P}{A_{esm}} = \frac{1026}{0{,}15\,(0{,}437)} = 15652 \text{ psi} \quad (i)$$

Os pinos estão sujeitos ao cisalhamento puro e a maior tensão neles é

$$\tau = \frac{P}{A_{cis}} = \frac{1026}{\dfrac{\pi(0{,}437)^2}{4}} = 6841 \text{ psi} \quad (j)$$

5 O dente de engrenagem no elo 2 está sujeito à força de 412 lb aplicada em um ponto a 0,22 in da raiz do dente, considerado como uma viga engastada em balanço. O dente tem uma altura de 0,44 in da raiz e uma espessura de 0,15 in. O momento fletor é 412(0,22) = 91 lb-in e a respectiva tensão na raiz é

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{91(0{,}22)}{\dfrac{0{,}15(0{,}44)^3}{12}} = 18727 \text{ psi} \quad (k)$$

6 Esta análise poderia continuar procurando por tensões em outros pontos do conjunto e, principalmente, pelas tensões nos mesmos pontos, mas para posições diferentes do macaco. Neste Estudo de Caso, a análise está sendo feita para uma posição arbitrária, porém quando o macaco se move para a posição mais baixa, as forças nos pinos e nos elos aumentarão devido a piores ângulos de transmissão. Uma análise de tensões completa deve ser feita para múltiplas posições.

Este Estudo de Caso será revisado no próximo capítulo com o propósito de análise de falhas. Você pode examinar os modelos para este Estudo de Caso abrindo os arquivos CASE3B-1 e CASE3B-2 no programa de sua escolha.

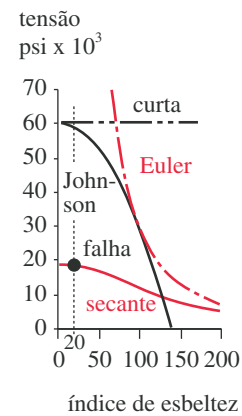



FIGURA 4-53

Solução para a coluna excêntrica no Estudo de Caso 3B.

ESTUDO DE CASO 4B

Análise de tensões no braço de um freio de bicicleta

Problema **Determine as tensões nos pontos críticos de um braço de freio de bicicleta mostrado nas Figuras 3-9 (repetida na próxima página) e 4-54.**

Dados **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 4A e estão mostrados na Tabela 3-5. O braço de alumínio fundido é uma viga curva com seção em "T" cujas dimensões estão mostradas na Figura 4-54. O pino é de aço dúctil. O carregamento é tridimensional.**

Hipóteses **Os pontos de falha mais prováveis são o braço como uma viga engastada dupla (das quais uma extremidade é curva), por es-**

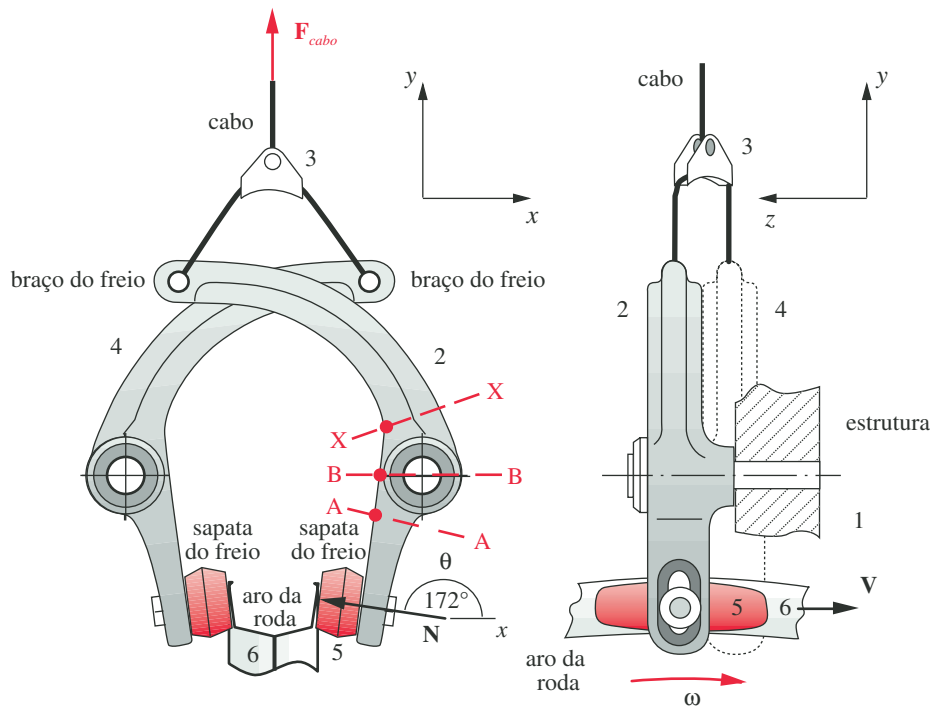



FIGURA 3-9 Repetida

Conjunto de um braço de freio de bicicleta puxado pelo centro.

magamento do furo no mancal e o pino de conexão por flexão como uma viga engastada. Como o material é fundido e marginalmente dúctil (5% de elongação na ruptura), podemos ignorar a concentração de tensões na base, uma vez que o escoamento local a aliviará.

Solução **Ver Figuras 4-54 a 4-56.**

1 O braço do freio é uma viga engastada dupla. Cada extremidade pode ser tratada separadamente. A parte curva da viga tem uma seção transversal em "T", conforme é mostrado na Seção X-X da Figura 4-54. O eixo neutro de uma viga curva se desloca do eixo centroidal no sentido do centro de curvatura de uma distância e, conforme descrito na Seção 4-9 e na Equação 4.12a. Encontrar e requer uma integração da seção transversal da viga e o conhecimento do raio do centroide. A Figura 4-55 mostra a seção em "T" repartida em dois segmentos retangulares, flange e alma. O raio do centroide da seção em "T" é encontrado pela soma dos momentos de área de cada segmento em relação ao centro de curvatura:

$$\sum M = A_1 r_{c_1} + A_2 r_{c_2} = A_t r_{c_t}$$

$$r_{c_t} = \frac{A_1 r_{c_1} + A_2 r_{c_2}}{A_t} = \frac{A_1\left(r_i + y_1\right) + A_2\left(r_i + y_2\right)}{A_1 + A_2} \qquad (a)$$

$$r_{c_t} = \frac{(20)(7,5)(58+3,75)+(10)(7,5)(58+11,25)}{(20)(7,5)+(10)(7,5)} = 64,25 \text{ mm}$$

Veja as Figuras 4-53 e 4-54 para dimensões e nomes das variáveis. A integral dA/r para a Equação 4.12a pode ser calculada, neste caso, pela soma das integrais para a alma e para a flange.

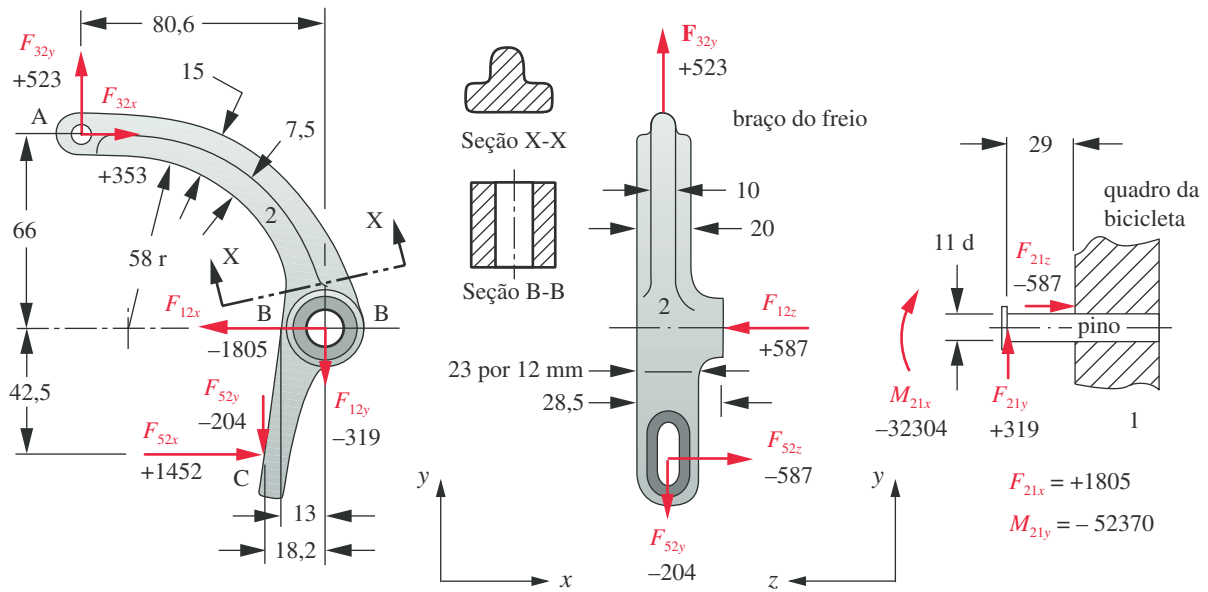



FIGURA 4-54

Diagramas de corpo livre do braço do freio, forças em N, momentos em N-mm e dimensões em mm.

$$\int_0^{r_o} \frac{dA}{r} = \frac{A_1}{r_{c_1}} + \frac{A_2}{r_{c_2}} = \frac{(20)(7{,}5)}{58 + 3{,}75} + \frac{(10)(7{,}5)}{58 + 11{,}25} = 3{,}51 \text{ mm} \qquad (b)$$

O raio da linha neutra e a distância e são, então,

$$r_n = \frac{A_t}{\displaystyle\int_0^{r_o} \frac{dA}{r}} = \frac{225}{3{,}51} = 64{,}06 \text{ mm} \qquad (c)$$

$$e = r_c - r_n = 64{,}25 - 64{,}06 = 0{,}187 \text{ mm}$$

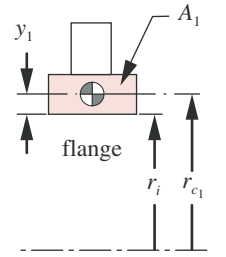
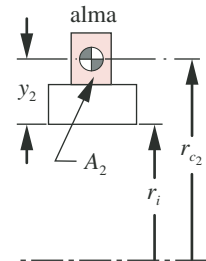
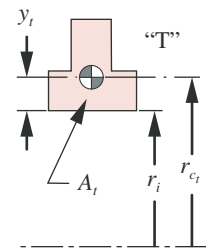
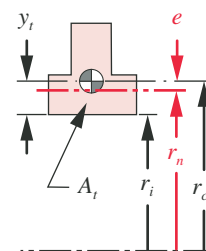
A magnitude do momento fletor atuante na seção curva da viga da Seção X-X pode ser aproximada fazendo o produto vetorial da força F_{32} pelo seu vetor posição R_{AB} referente à articulação em B na Figura 4-54.

$$|M_{AB}| = \left|R_{AB_x} F_{32_y} - R_{AB_y} F_{32_x}\right| = |-80{,}6(523) - 66(353)| = 65452 \text{ N - mm} \qquad (d)$$

As tensões nas fibras internas e externas podem agora ser encontradas utilizando as Equações 4.12*b* e 4.12*c* (com comprimentos em mm e momentos em N-mm para consistência de unidades):

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{65452(6{,}063)}{(0{,}1873)(225)(58)} = 162 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) = \frac{65452(8{,}937)}{(0{,}1873)(225)(73)} = -190 \text{ MPa} \qquad (e)$$

2 A seção transversal do cubo, mostrada na Seção B-B na Figura 4-54, é um possível local de falha, uma vez que há nele uma combinação de tensões devidas à flexão e à força normal e que o furo do pino remove uma quantidade substancial de material. A tensão de flexão se deve ao máximo momento atuante na raiz da viga curva e a tensão normal de tração se deve à componente y da força em A. Há

também uma tensão de cisalhamento devido à força cortante, mas esta é nula nas fibras externas onde a soma das tensões devido à flexão e força normal são máximas. A área e o momento de inércia da seção transversal do cubo são necessários:

$$A_{cubo} = comprimento\left(d_{externo} - d_{interno}\right) = 28{,}5\left(25 - 11\right) = 399 \text{ mm}^2$$

$$I_{cubo} = \frac{comprimento\left(d_{externo}^3 - d_{interno}^3\right)}{12} = \frac{28{,}5\left(25^3 - 11^3\right)}{12} = 33948 \text{ mm}^4 \tag{f}$$

A tensão na metade esquerda da Seção B-B é a soma das tensões que se devem à flexão e à força normal:

$$\sigma_{cubo} = \frac{Mc}{I_{cubo}} + \frac{F_{32_y}}{A_{cubo}} = \frac{65452(12{,}5)}{33948} + \frac{523}{399} = 25{,}4 \text{ MPa} \tag{g}$$

A tensão na metade direita da Seção B-B é menor, já que a compressão devida à flexão é subtraída da tensão de tração devido à força normal.

3 A parte reta do braço do freio é uma viga engastada carregada em duas direções, no plano xy e no plano yz. Os módulos de resistência em momentos de inércia da seção são diferentes nessas direções de flexão. O momento em torno de z, no plano xy, é igual e oposto ao momento na seção curva. A seção transversal da raiz da viga engastada é um retângulo de 23 por 12 mm, conforme mostrado na Figura 4-54. A tensão devido à flexão nas fibras externas do lado de 23 mm devida a este momento é

$$\sigma_{y_1} = \frac{Mc}{I} = \frac{65452\left(\frac{12}{2}\right)}{\frac{23(12)^3}{12}} = 118{,}6 \text{ MPa} \tag{h}$$

O momento em torno de x se deve à força F_{52z} atuando no raio de 42,5, flexionando a barra na direção z. A tensão devido à flexão na superfície de lado 12 mm é

$$\sigma_{y_2} = \frac{Mc}{I} = \frac{589 \cdot 42{,}5\left(\frac{23}{2}\right)}{\frac{12(23)^3}{12}} = 23{,}7 \text{ MPa} \tag{i}$$

Essas duas tensões normais na direção y se somam nos cantos das duas faces para dar

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} = 118{,}6 + 23{,}7 = 142{,}2 \text{ MPa} \tag{j}$$

4 Um outro ponto de falha possível é o rasgo no braço engastado. Apesar de possuir momento nulo, uma força cortante está presente e pode causar cisalhamento na direção z. A área de rasgamento é a área de cisalhamento entre o rasgo e a borda.

$$A_{rasgamento} = espessura\left(largura\right) = 8\left(4\right) = 32 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{F_{52_z}}{A_{rasgamento}} = \frac{589}{32} = 18{,}4 \text{ MPa} \tag{k}$$

5 O pino de articulação está sujeito à força F_{21}, que possui componentes x e y, e ao momento M_{21} devido às forças F_{12z} e F_{52z}. A força F_{21} cria um momento fletor de componentes $F_{21x}l$ e $F_{21y}l$ nos planos yz e xz, respectivamente, onde $l = 29$ mm é o comprimento do pino.

(a) Centroide da flange

(b) Centroide da alma

(c) Centroide da seção em "T"

(d) Linha neutra da seção em "T"

FIGURA 4-55

Cálculo da linha neutra de uma viga curva com seção em "T" – Estudo de Caso 4B.

$$\begin{aligned} M_{pino} &= \sqrt{\left(M_{21_x} - F_{12_y} \cdot l\right)^2 + \left(-M_{21_y} + F_{12_x} \cdot l\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-32304 + 319 \cdot 29\right)^2 + \left(52370 - 1805 \cdot 29\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-32304 + 9\,251\right)^2 + \left(52370 - 52\,345\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-23053\right)^2 + \left(25\right)^2} = 23053 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned} \tag{l}$$

$$\theta_{M_{pino}} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{25}{-23053}\right) \cong 0° \tag{m}$$

A Figura 4-56*a* mostra o momento do binário M_{21} e a Figura 4-56*b* mostra o momento da força F_{21}. A resultante de ambos é mostrada na Figura 4-56*c*.

É esta combinação de momentos que cria as maiores tensões devidas à flexão no pino a 0° e 180° em torno da sua circunferência. A máxima tensão devida à flexão no pino (com comprimentos em mm e momentos em N-mm para consistência de unidades) é

$$\sigma_{pino} = \frac{M_{pino} c_{pino}}{I_{pino}} = \frac{23053\left(\frac{11}{2}\right)}{\frac{\pi(11)^4}{64}} = \frac{23053(5{,}5)}{718{,}7} = 176 \text{ MPa} \tag{n}$$

6 Uma análise mais completa poderia ser feita usando o método de elementos finitos para determinar as tensões e deformações em muitos outros pontos da peça. Você pode examinar o modelo para este estudo de caso abrindo o arquivo CASE4B no programa de sua escolha. Uma análise de tensão deste estudo de caso também é feita no Capítulo 8 utilizando FEA.

4.19 RESUMO

As equações usadas para análise de tensões são relativamente poucas e normalmente fáceis de se lembrar (ver o resumo das equações no final desta seção). A maior fonte de confusão por parte dos alunos parece ser no entendimento de quando usar cada uma das equações de tensões e como determinar na peça onde calcular as tensões, uma vez que elas variam no interior da mesma.

Há dois tipos de tensões aplicadas que interessam, **tensão normal** σ e **tensão de cisalhamento** τ. Ambas podem estar presentes no mesmo elemento infinitesimal de tensões, que combinadas criam um conjunto de tensões normais principais e tensões de cisalhamento máximas, como é evidenciado pelos círculos de Mohr. São, finalmente, essas tensões principais que precisamos calcular de modo a determinar a segurança do projeto. Então, independentemente da fonte de carregamento ou do tipo de tensão que deve estar aplicada à peça, devemos sempre determinar as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento que resulta da combinação delas (ver as Seções 4.3 e 4.5).

Há apenas poucos tipos de carregamentos que normalmente ocorrem em peças de máquinas, mas eles podem ocorrer em combinação na mesma peça. Tipos de carregamento que criam **tensões normais aplicadas** são **momento fletor**, **forças normais** e **força de esmagamento**. Momento fletores sempre criam tensões normais de tração e de compressão em diferentes pontos da peça. As vigas constituem o exemplo mais comum de peças sujeitas a flexão (ver a Seção 4.9).

(*a*) Momento do binário $F_{12z} - F_{52z}$

(*b*) Momento da força F_{21}

(*c*) Momento resultante

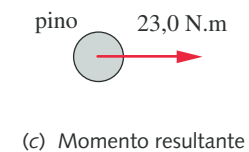
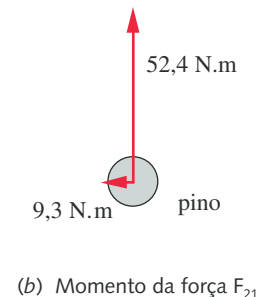
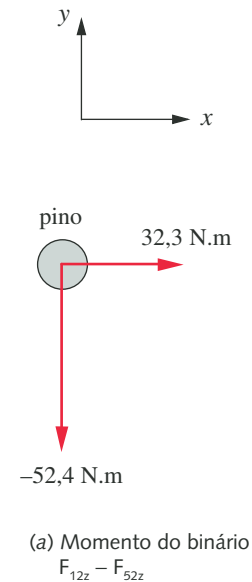



FIGURA 4-56

Momentos fletores no pino de articulação – Estudo de Caso 4B.

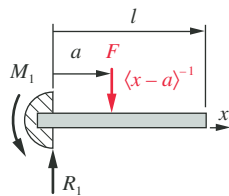
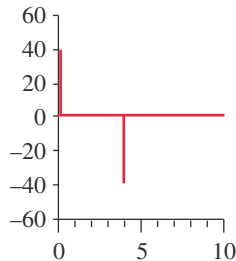
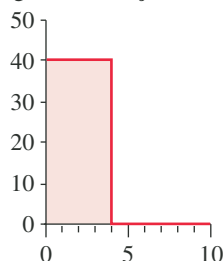
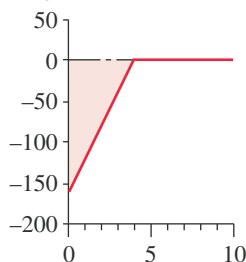



FIGURA 4-57

Viga engastada com carregamento concentrado.

Forças normais criam tensões normais que podem ser tanto de tração quanto de compressão (mas não ambas de uma só vez), dependendo se a força normal é de tração ou de compressão (ver Seção 4.7). Elementos de fixação, como parafusos, frequentemente estão sujeitos a tensões de tração significativas.

Se a força normal for de compressão, então pode haver um perigo de **flambagem**, e as Equações da Seção 4.16 também devem ser empregadas. Forças de esmagamento criam tensões normais de compressão no eixo e na bucha (mancal).

Tipos de carregamentos que criam **tensões aplicadas de cisalhamento** são **momento torçor**, **força cortante pura** e **força cortante na flexão**. O momento torçor provoca a torção (rotação) de uma peça em torno de seu eixo. Um eixo de transmissão é um exemplo típico de uma peça que é sujeita a torção. (O Capítulo 9 lida com o projeto de eixos de transmissão.)

O cisalhamento puro pode ser causado por forças que tendem a cortar a peça transversalmente. Elementos de fixação, como rebites ou pinos, às vezes estão sujeitos a forças de cisalhamento puro. Um pino tentando rasgar para fora de seu furo também causa cisalhamento puro na área de rasgamento (ver Seção 4.8). A variação do momento fletor em uma viga também causa tensões de cisalhamento na seção transversal da viga (ver Seção 4.9).

As tensões podem variar continuamente no interior de um peça e são calculadas como se atuassem em um elemento infinitesimal dessa região contínua. Fazer uma análise completa das tensões em todos os infinitos pontos interiores à peça exigiria um tempo infinito de que obviamente não dispomos. Então, devemos selecionar inteligentemente poucas regiões para os cálculos, de tal forma que elas representem as piores situações.

O aluno precisa entender como as diversas tensões variam no interior da peça contínua que está sendo solicitada. Existem dois aspectos na determinação dos locais apropriados para se fazer cálculos de tensões em uma peça dada. O primeiro aspecto envolve a distribuição das solicitações ao longo da peça e o segundo envolve a distribuição das tensões na seção transversal da peça. Por exemplo, considere uma viga reta engastada carregada com uma força aplicada em um ponto qualquer de sua extensão, conforme é mostrado na Figura 4-57. O primeiro passo requer algum conhecimento de como variam os esforços internos na viga em resposta à força aplicada. Isso vem da análise dos diagramas de força cortante e momento fletor da viga, conforme é mostrado na Figura 4-58, que indica que, nesse caso, a seção com maior carregamento está no engastamento. Concentraríamos então nossa atenção em um segmento infinitesimal, como o de uma fina "fatia de presunto" tirada desta viga no engastamento. Observe que a presença de concentrações de tensões em outros locais da viga que têm tensões nominais menores exigiriam seus estudos também.

O segundo aspecto é, então, determinar onde na seção transversal da "fatia de presunto" as tensões serão máximas. Figuras nas seções correspondentes deste capítulo mostram as distribuições de tensões nas seções para vários tipos de solicitação. Esses diagramas de distribuição de tensões são mostrados na Figura 4-59, que também mostra as equações de tensões correspondentes para cada caso. Uma vez que o carregamento neste exemplo gera tensões de flexão, devemos entender que haverá uma tensão normal que será de compressão máxima em uma fibra externa e de tração máxima na outra fibra externa, conforme é mostrado nas Figuras 4-15 e 4-59*c*. Então devemos tomar um elemento infinitesimal

Diagrama do carregamento

60
40
20
0
–20
–40
–60
0 5 10

FIGURA 4-58

Distribuições dos esforços internos.

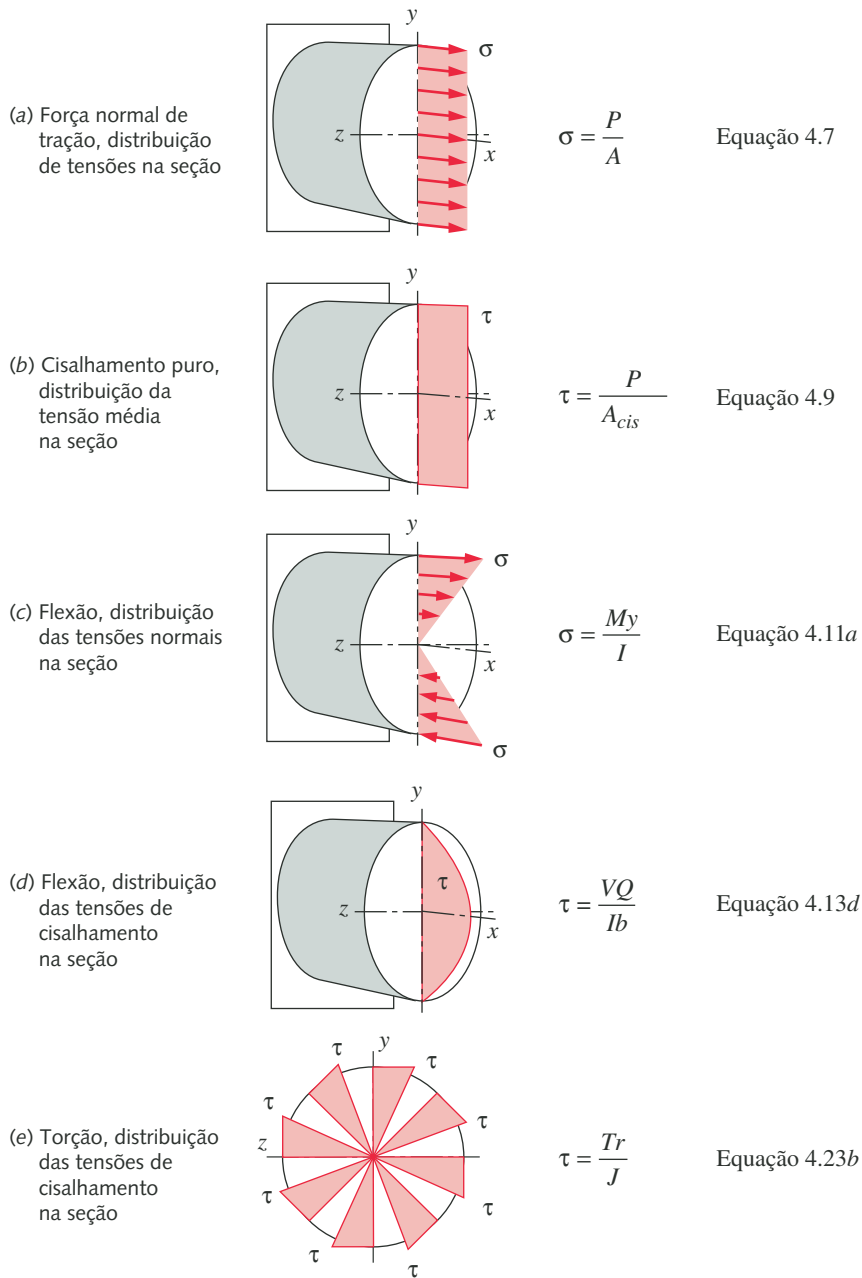
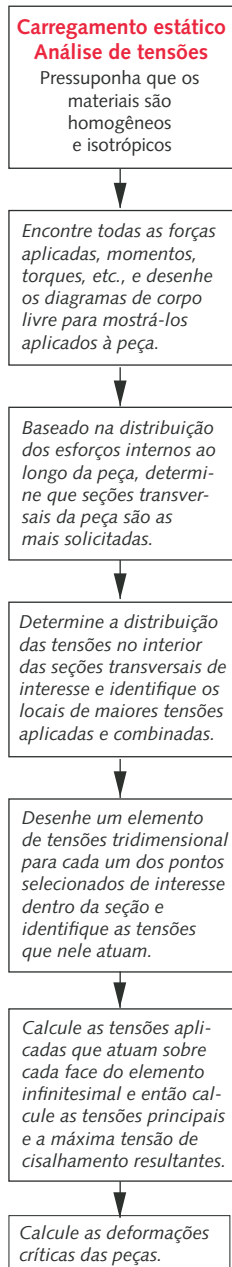



FIGURA 4-59

Distribuição de tensões em uma seção transversal sob vários tipos de solicitação.

de tensão em uma fibra externa dessa seção da viga para calcular o pior caso de tensão normal de flexão pela Equação 4.11*b*.

A variação do momento fletor também causa tensões de cisalhamento, mas sua distribuição é máxima no plano neutro e nula nas fibras externas conforme é

mostrado nas Figuras 4-49 e 4-59*d*. Assim, um elemento inifinitesimal de tensões diferente é utilizado no plano neutro da seção transversal para o cálculo da tensão de cisalhamento devido à força cortante, usando a equação apropriada como a Equação 4.14*b* para uma seção transversal retangular. Cada um desses dois elementos infinitesimais de tensões tem seu próprio conjunto de tensões principais e tensão de cisalhamento máxima, que podem ser calculados pela Equação 4.6*a* para este caso bidimensional.

Solicitações mais complicadas em geometrias mais complicadas podem ter múltiplas tensões aplicadas ao mesmo elemento infinitesimal. É muito comum em peças de máquinas termos carregamentos que criam flexão e torção na mesma peça. O Exemplo 4-9 lida com tal caso e deve ser estudado cuidadosamente.

A tensão é apenas uma das considerações de projeto. As deformações das peças devem também ser controladas para que a peça desempenhe sua função apropriadamente. Frequentemente, uma exigência de pequenas deformações domina o projeto e exige seções mais espessas que as que seriam necessárias para evitar o excesso de tensão. As deformações da peça projetada, assim como suas tensões, devem ser verificadas sempre. As equações para deformações devido às várias solicitações são dadas nas seções correspondentes e também estão colocadas no Apêndice B para vigas de vários tipos e carregamentos.

A Figura 4-60 mostra um fluxograma representando um conjunto de passos que podem ser seguidos para analisar tensões e deformações sob carregamento estático.

Carregamento estático
Análise de tensões
Pressuponha que os materiais são homogêneos e isotrópicos

Encontre todas as forças aplicadas, momentos, torques, etc., e desenhe os diagramas de corpo livre para mostrá-los aplicados à peça.

Baseado na distribuição dos esforços internos ao longo da peça, determine que seções transversais da peça são as mais solicitadas.

Determine a distribuição das tensões no interior das seções transversais de interesse e identifique os locais de maiores tensões aplicadas e combinadas.

Desenhe um elemento de tensões tridimensional para cada um dos pontos selecionados de interesse dentro da seção e identifique as tensões que nele atuam.

Calcule as tensões aplicadas que atuam sobre cada face do elemento infinitesimal e então calcule as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento resultantes.

Calcule as deformações críticas das peças.

FIGURA 4-60

Fluxograma para análise estática de tensões.

Equações importantes usadas neste capítulo

Veja as seções referidas para informações sobre o uso apropriado destas equações.

O estado cúbico de tensões – suas raízes são as tensões principais tridimensionais (Seção 4.3):

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0 \tag{4.4c}$$

onde

$$C_2 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$C_1 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x$$
$$C_0 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

Tensões de cisalhamento máximas (Seção 4.3):

$$\tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \qquad \tau_{21} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} \qquad \tau_{32} = \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} \tag{4.5}$$

Tensões principais bidimensionais (Seção 4.3):

$$\sigma_a, \sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{4.6a}$$

$$\sigma_c = 0$$

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \tag{4.6b}$$

Tensão normal (Seção 4.7):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{4.7}$$

Deformação longitudinal (Seção 4.7):

$$\Delta s = \frac{Pl}{AE} \tag{4.8}$$

Tensão de cisalhamento puro (Seção 4.8):

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{cis}} \tag{4.9}$$

Área de esmagamento (Seção 4.8):

$$A_{esmagamento} = \frac{\pi}{4}\, ld \tag{4.10b}$$

Máxima tensão de flexão – vigas retas (Seção 4.9):

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} \tag{4.11b}$$

Máxima tensão de flexão – vigas curvas (Seção 4.9):

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) \tag{4.12b}$$

Tensão de cisalhamento em vigas – fórmula geral (Seção 4.9):

$$\tau_{xy} = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{4.13f}$$

Máxima tensão de cisalhamento – viga retangular (Seção 4.9):

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{4.14b}$$

Máxima tensão de cisalhamento – viga circular (Seção 4.9):

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A} \tag{4.15c}$$

Máxima tensão de cisalhamento – viga em I (Seção 4.9):

$$\tau_{max} \cong \frac{V}{A_{alma}} \tag{4.16}$$

Equações gerais de vigas (Seção 4.9):

$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4y}{dx^4} \tag{4.18a}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} \tag{4.18b}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{4.18c}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{4.18d}$$

$$y = f(x) \tag{4.18e}$$

Máxima tensão de cisalhamento devido ao momento torçor – seção circular (Seção 4.12):

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \tag{4.23b}$$

Máxima rotação na torção – seção circular (Seção 4.12):

$$\theta = \frac{Tl}{JG} \tag{4.24}$$

Máxima tensão de cisalhamento na torção – seção não circular (Seção 4.12):

$$\tau_{max} = \frac{T}{Q} \tag{4.26a}$$

Máxima rotação na torção – seção não circular (Seção 4.12):

$$\theta = \frac{Tl}{KG} \tag{4.26b}$$

Constante de mola – linear (*a*), angular (*b*) (Seção 4.14):

$$k = \frac{F}{y} \tag{4.27a}$$

$$k = \frac{T}{\theta} \tag{4.27b}$$

Tensão com concentração de tensões (Seção 4.15):

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= K_t \sigma_{nom} \\ \tau_{max} &= K_{ts} \tau_{nom} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Raio de giração da seção (Seção 4.16):

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{4.34}$$

Índice de esbeltez da coluna (Seção 4.16):

$$S_r = \frac{l}{k} \tag{4.33}$$

Tensão crítica de flambagem – fórmula de Euler (Seção 4.16):

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{S_r^2} \tag{4.38c}$$

Tensão crítica de flambagem – fórmula de Johnson (Seção 4.16):

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_{yc} - \frac{1}{E}\left(\frac{S_{yc} S_r}{2\pi}\right)^2 \tag{4.43}$$

Tensão crítica de flambagem – fórmula secante (Seção 4.16):

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right) \sec\left(\frac{l_{ef}}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} \tag{4.46c}$$

Cilindro sob pressão (Seção 4.17):

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_o^2 (p_i - p_o)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \tag{4.47a}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 r_o^2 (p_i - p_o)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \tag{4.47b}$$

$$\sigma_a = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{4.47c}$$

4.20 REFERÊNCIAS

1 **I. H. Shames and C. L. Dym**, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. Hemisphere Publishing: New York, Sect. 1.6, 1985.

2 **I. H. Shames and F. A. Cossarelli**, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., pp. 46-50, 1991.

3 **R. E. Peterson**, *Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons: New York, 1974.

4 **R. J. Roark and W. C. Young**, *Formulas for Stress and Strain*. 6th ed. McGraw-Hill: New York, 1989.

5 **R. E. Peterson**, *Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons: New York, p. 150, 1974.

6 **W. D. Pilkey**, *Peterson's Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons: New York, 1997.

7 **H. T. Grandin and J. J. Rencis**, *Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons: New York, pp. 144-147, 2006.

8 **N. Troyani, C. Gomes, and G. Sterlacci,** "Theoretical Stress Concentration Factors for Short Rectangular Plates With Centered Circular Holes." *ASME J. Mech*. Design, V. 124, pp. 126-128, 2002.

9 **N. Troyani, et al.**, "Theoretical Stress Concentration Factors for Short Shouldered Plates Subjected to Uniform Tensions." *IMechE J. Strain Analysis*, V. 38, pp. 103-113, 2003.

10 **N. Troyani, G. Sterlacci, and C. Gomes**, "Simultaneous Considerations of Length and Boundary Conditions on Theoretical Stress Concentration Factors." *Int. J. Fatigue*, V. 25, pp. 353-355, 2003.

4.21 BIBLIOGRAFIA

Para informações gerais sobre tensões e deformações, ver:

F. P. Beer and E. R. Johnston, *Mechanics of Materials*. 2nd ed. McGraw-Hill: New York, 1992.

J. P. D. Hartog, *Strength of Materials*. Dover: New York, 1961.

R. J. Roark and W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*. 6th ed. McGraw-Hill: New York, 1989.

Tabela P4-0†
Matriz de problemas/tópicos

Seções 4.1, 4.2 Tensão, deformação
4-55, 4-56, 4-57, 4-58

Seção 4.5 Círculos de Mohr
4-1, 4-79

Seção 4.7 Tensão normal
4-2, 4-18, 4-61, 4-74a

Seção 4.8 Cisalhamento puro, esmagamento e rasgamento
4-4, **4-5**, **4-6**, ***4-7***, **4-9**, *4-15*, *4-19*, *4-20*, **4-22**, 4-47, 4-59, 4-60, 4-74f

Seção 4.9 Vigas retas
4-10, **4-11**, **4-12**, **4-13**, ***4-14***, **4-27**, *4-40*, 4-43a, 4-64, *4-65*, *4-66*, *4-67*, *4-68*, 4-74b,4-74 c, 4-74g

Seção 4.9 Vigas curvas
4-17, 4-37, 4-62, 4-63, **4-69 to 4-72**, *4-73*, 4-74e

Seção 4.10 Deflexão
4-8, **4-16**, **4-23**, **4-24**, **4-25**, **4-26**, ***4-28***, 4-43b, **4-44**, **4-48**

Sect. 4.11 Método de Castigliano
4-84, 4-85, 4-86

Seção 4.12 Torção
4-21, 4-34, 4-46, 4-74d, 4-74h, 4-81, 4-82

Seção 4.13 Tensões combinadas
4-3, 4-34, 4-46

Seção 4.14 Constantes de mola
4-29, 4-30, 4-31, 4-32, 4-35, **4-38**, **4-39**

Seção 4.15 Concentração de tensões
4-36, 4-75 to 4-78

Seção 4.16 Flambagem
4-45, 4-49, 4-50, 4-51, 4-52, *4-53*, 4-54

Seção 4.17 Cilindros
4-41, 4-42, 4-80, 4-83

I. H. Shames, *Introduction to Solid Mechanics*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1989.

I. H. Shames and F. A. Cossarelli, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1991.

S. Timoshenko and D. H. Young, *Elements of Strength of Materials*. 5th ed. Van Nostrand: New York, 1968.

4.22 PROBLEMAS

*4-1 Um elemento de tensões infinitesimal tem um conjunto de tensões nele aplicadas conforme é indicado em cada linha da Tabela P4-1. Para a(s) linha(s) designada(s), desenhe o elemento infinitesimal de tensões mostrando as tensões aplicadas, encontre as tensões principais e a máxima tensão de cisalhamento analiticamente e verifique os resultados através da construção dos círculos de Mohr para o correspondente estado de tensões.

4-2 Um lustre de 400 lb está sustentado por dois cabos de aço de 10 ft sob tração. Escolha um diâmetro apropriado para o cabo de forma que a tensão atuante não exceda a tensão admissível de 5000 psi. Qual será a deformação dos cabos? Apresente todas as hipóteses utilizadas.

†**4-3** Para o braço do pedal da bicicleta mostrado na Figura P4-1 com uma força aplicada pelo ciclista de 1500 N no pedal, determine a tensão principal no braço do pedal se sua seção transversal possui um diâmetro de 15 mm. O pedal é ligado ao seu braço por um parafuso de rosca de 12 mm. Qual é a tensão no parafuso do pedal?

†***4-4** O engate de reboque mostrado nas Figuras P4-2 e 1-1 tem cargas aplicadas iguais às definidas no Problema 3-4. O ponta de lança do reboque exerce uma força de 100 kgf para baixo e a força horizontal necessária para puxar o reboque é de 4905 N. Usando as dimensões do engate esférico mostrado na Figura 1-5, determine:

(a) As tensões principais na menor seção da esfera, próximo a sua conexão com o suporte.
(b) A tensão de esmagamento no furo que suporta a esfera.
(c) A tensão de rasgamento no suporte da esfera.
(d) As tensões normais e de cisalhamento nos parafusos de fixação, sabendo-se que eles têm um diâmetro de 19 mm.
(e) As tensões principais no suporte da esfera considerando-o como uma viga engastada.

†**4-5** Resolva o Problema 4-4 para as condições de carregamento do Problema 3-5.

†***4-6** Resolva o Problema 4-4 para as condições de carregamento do Problema 3-6.

†****4-7*** Projete o pino de articulação do Problema 3-7 considerando que a máxima tensão principal admissível é 20 kpsi se o pino for vazado e tiver duas seções em cisalhamento puro.

†****4-8*** Uma fábrica de papel processa rolos de papel que têm uma densidade de 984 kg/m^3. O rolo tem 1,50 m de diâmetro externo × 22 cm de diâmetro interno × 3,23 m de comprimento e está sobre um eixo de aço vazado e biapoiado. Encontre o diâmetro interno necessário para obter uma deflexão máxima no centro de 3 mm se o diâmetro externo do eixo possui 22 cm. Pressuponha que o eixo tem o mesmo comprimento entre os suportes que o comprimento de um rolo de papel.

4-9 Para o alicate de pressão (ViseGrip®) desenhado em escala na Figura P4-3, e para as forças que são analisadas no Problema 3-9, calcule as tensões em cada pino para uma força de aperto $P = 4000$ N na posição mostrada. Os pinos têm 8 mm de diâmetro e estão todos sob cisalhamento duplo.

***4-10** O trampolim do Problema 3-10 é mostrado na Figura P4-4*a*. Pressuponha que as dimensões da seção transversal sejam de 305 mm × 32 mm. O material tem um módulo de elasticidade $E = 10{,}3$ GPa. Encontre a maior tensão principal que ocorre no trampolim quando uma pessoa de 100 kg está de pé sobre a extremidade livre. Qual é a deflexão máxima?

* As respostas para esses problemas estão no Apêndice D.
† Problemas cujos números estão em **negrito** são uma extensão de um problema similar de capítulos anteriores com o mesmo número. Problemas cujos números estão em *itálico* são projetos.

Tabela P4-1 Dados para o problema 4-1

Linhas *a*-*g* e *k*-*m* são para problemas bidimensionais; as outras, para tridimensionais.

Linha	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
a	1000	0	0	500	0	0
b	–1000	0	0	750	0	0
c	500	–500	0	1000	0	0
d	0	–1500	0	750	0	0
e	750	250	0	500	0	0
f	–500	1000	0	750	0	0
g	1000	0	–750	0	0	250
h	750	500	250	500	0	0
i	1000	–250	–750	250	500	750
j	–500	750	250	100	250	1000
k	1000	0	0	0	0	0
l	1000	0	0	0	500	0
m	1000	0	0	0	0	500
n	1000	1000	1000	500	0	0
o	1000	1000	1000	500	500	0
p	1000	1000	1000	500	500	500

FIGURA P4-1

Problema 4-3. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

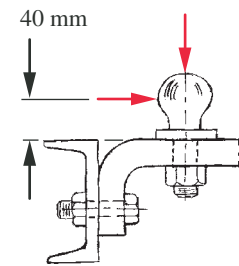



FIGURA P4-2

Problemas 4-4, 4-5 e 4-6. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

***4-11** Refaça o Problema 4-10 usando as condições de carregamento do Problema 3-11. Pressuponha que a prancha tenha uma massa de 29 kg e que ela deforme 13,1 cm estaticamente quando uma pessoa está sobre ela. Encontre a maior tensão principal que ocorre no trampolim quando a pessoa de 100 kg do Problema 4-10 pula 25 cm e retorna ao trampolim. Encontre a deformação máxima.

4-12 Refaça o Problema 4-10 usando o projeto de trampolim engastado da Figura P4-4*b*.

4-13 Refaça o Problema 4-11 usando o projeto de trampolim mostrado na Figura P4--4*b*. Pressuponha que a prancha tenha uma massa de 19 kg e que ela deforme 8,5 cm estaticamente quando uma pessoa está sobre ela.

4-14 A Figura P4-5 mostra um brinquedo de criança chamado de pula-pula. A criança fica sobre o suporte para os pés, aplicando metade do seu peso em cada lado. Ela

FIGURA P4-3

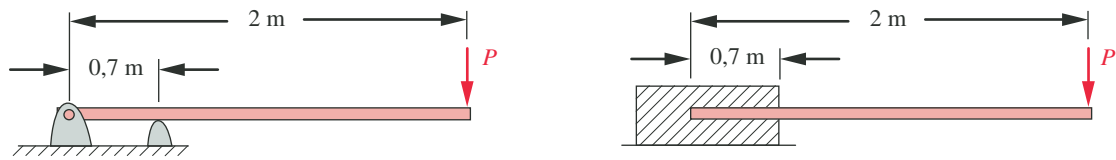
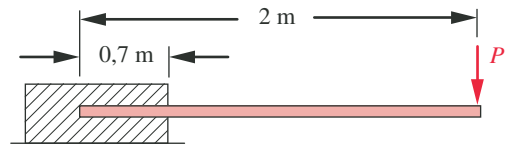
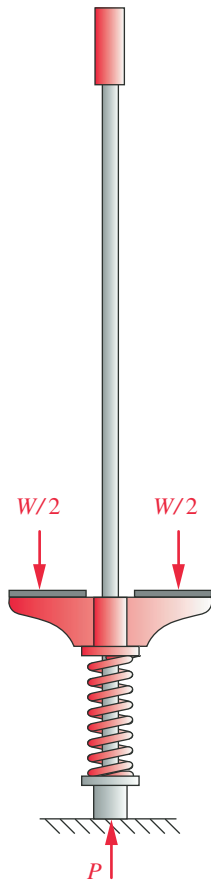
Problema 4-9. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

(a) Trampolim biapoiado com uma extremidade em balanço

(b) Trampolim engastado

FIGURA P4-4

Problemas 4-10 a 4-13.

salta do chão, mantendo os pés sobre os apoios. Uma mola absorve o impacto na aterrissagem e armazena energia para ajudar no próximo salto. Assuma que a criança pese 60 lb e que a constante da mola seja de 100 lb/in. O pula-pula pesa 5 lb. Projete as seções da viga engastada de alumínio que suporte saltos de 2 in de altura do chão. Assuma uma tensão admissível de 20 kpsi. Defina a forma da viga e seu tamanho apropriadamente.

**4-15* Projete um pino[§] em cisalhamento puro para o eixo da hélice de um motor de popa se o eixo através do qual o pino é colocado tem 25 mm de diâmetro, a hélice tem 200 mm de diâmetro e o pino deve falhar quando uma força > 400 N é aplicada na extremidade da hélice. Pressuponha que a tensão de cisalhamento na ruptura para o material do pino seja de 100 Mpa.

4-16 Uma trilha para guiar bolas de boliche é projetada com duas hastes como mostrado na Figura P3-6. As hastes não são paralelas entre si, apresentando um pequeno ângulo entre elas. As bolas rolam sobre as hastes até cair entre elas, alcançando uma outra trilha. O ângulo entre as hastes é modificado para que as bolas desemboquem em diferentes posições. O comprimento de cada haste descarregada é de 30 in e o ângulo entre elas é de 3,2°. As bolas apresentam 4,5 in de diâmetro e peso de 2,5 lb. A distância entre os centros das hastes de 1 in de diâmetro é de 4,2 in na extremidade estreita. Ache a tensão e a deflexão máximas nas hastes.

(a) Pressuponha que as hastes estejam biapoiadas nas extremidades.
(b) Pressuponha que as hastes estejam engastadas nas extremidades.

4-17 Uma pinça para gelo é mostrada na Figura P4-7. O gelo pesa 50 lb e tem 10 in de extensão entre as garras da pinça. A distância entre as alças é de 4 in, e o raio médio das garras da pinça é de 6 in. As dimensões da seção transversal retangular são 0,75 in de altura × 0,312 de largura. Encontre a tensão na pinça.

*4-18 Um conjunto de barras de aço para reforço está para ser esticado longitudinalmente em tração para criar uma tensão de tração de 30 kpsi antes de ser moldado em concreto para formar uma viga. Determine quanta força será requerida para esticá-las e qual a deformação requerida. Existem 10 barras, cada uma com 0,75 in de diâmetro e 30 ft de comprimento.

**4-19* A garra do dispositivo usado para puxar as barras do Problema 4-18 está conectado a uma prensa hidráulica através de uma junta como a mostrada na Figura P4-8. Determine o tamanho do pino da junta necessário para resistir à força aplicada. Pressuponha uma tensão de cisalhamento admissível de 20000 psi e uma tensão de tração admissível de 40000 psi. Determine o raio externo da extremidade da junta de modo a não exceder as tensões admissíveis ao rasgamento ou esmagamento se as hastes da junta têm 0,8 in de espessura cada.

4-20 Repita o Problema 4-19 para 12 barras de 1 cm de diâmetro e 10 m de comprimento cada. A tensão desejada nas barras é 200 MPa. A tensão normal admissível na junta e no pino é 280 MPa, e a tensão de cisalhamento admissível é 140 MPa. Cada haste da junta tem 2 cm de espessura.

4-21 A Figura P4-9 mostra uma roda de automóvel com dois estilos comuns de chave de rodas usada para apertar as porcas das rodas, uma chave de roda de haste simples em (*a*) e uma chave de roda de haste dupla em (*b*). Em cada caso, as duas mãos são necessárias para prover as forças, mostradas respectivamente em *A* e *B*.

FIGURA P4-5

Problema 4-14.

[§] N. de R. T.: O pino é normal ao eixo e funciona como uma chaveta, conectando o cubo da hélice com o eixo. Pressuponha uma única área de cisalhamento.

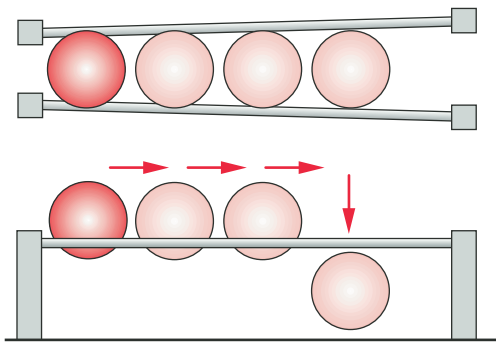



FIGURA P4-6

Problema 4-16.

FIGURA P4-7

Problema 4-17.

FIGURA P4-8

Problemas 4-19 e 4-20.

A distância entre os pontos *A* e *B* é 1 ft em ambos os casos e o diâmetro da haste é 0,625 in. As porcas da roda requerem um torque de 70 lb-ft. Encontre a tensão máxima principal e a máxima deflexão em cada projeto de chave de roda.

*__4-22__ Um patim *roller-blade* é mostrado na Figura P4-10. As rodas de poliuretano têm diâmetro de 72 mm e são espaçadas de 104 mm entre os centros. A combinação patim-bota-pé pesa 2 kg. A constante de mola efetiva do sistema patim-patinador é de 6000 N/m. Os eixos das rodas são pinos de 10 mm de diâmetro sob cisalhamento duplo. Encontre as tensões nos pinos para uma pessoa com 100 kg aterrissando de um salto de 0,5 m sobre um pé. (*a*) Pressuponha que todas as 4 rodas aterrissem simultaneamente. (*b*) Pressuponha que uma roda absorva toda a força de aterrissagem.

*__4-23__ Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P4-11*a*. Encontre as reações, a máxima força cortante, o máximo momento fletor, a máxima rotação, a máxima tensão de flexão e a máxima deflexão para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P4-2.

*__4-24__ Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P4-11*b*. Encontre as reações, a máxima força cortante, o máximo momento fletor, a máxima rotação, a máxima tensão de flexão e a máxima deflexão para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P4-2.

FIGURA P4-9

Problema 4-21.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas cujos números estão em *itálico* são projetos. Problemas cujos números estão em **negrito** são uma extensão de problemas similares em capítulos anteriores com o mesmo algarismo final. Alguns problemas nos capítulos seguintes podem continuar e estender esses problemas.

FIGURA P4-10

Problema 4-22.

*__4-25__ Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P4-11*c*. Encontre as reações, a máxima força cortante, o máximo momento fletor, a máxima rotação, a máxima tensão de flexão e a máxima deflexão para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P4-2.

*__4-26__ Uma viga é apoiada e carregada como mostra a Figura P4-11*d*. Encontre as reações, a máxima força cortante, o máximo momento fletor, a máxima rotação, a máxima tensão de flexão e a máxima deflexão para os dados fornecidos na(s) linha(s) da Tabela P4-2.

4-27 Um dispositivo para armazenamento deve ser projetado para segurar rolos de papel do Problema 4-8 como mostra a Figura P4-12. Determine valores apropriados para as dimensões *a* e *b* da figura. Considere as tensões devido à flexão, ao cisalhamento e de esmagamento. Pressuponha que a tensão de tração/compressão admissível seja 100 MPa e que a tensão de cisalhamento admissível seja de 50 MPa tanto para o batente como para o mandril, que são de aço. O mandril é maciço e entra até a metade do rolo de papel. Balanceie o projeto para usar toda a resistência do material. Calcule a deflexão na extremidade do rolo.

†**4-28** A Figura P4-13 mostra uma empilhadeira transpondo uma rampa com 15° de inclinação para subir uma plataforma de carregamento de 4 ft de altura. A empilhadeira pesa 5000 lb e tem uma distância entre eixos de 42 in. Projete duas rampas de aço (uma para cada lado) com 1 ft de largura que tenham não mais que 1 in de deflexão no pior caso de carregamento enquanto a empilhadeira anda sobre elas. Minimize o peso da rampa usando uma geometria de seção transversal sensata.

*4-29 Encontre a constante de rigidez da viga do Problema 4-23 sob a carga concentrada aplicada para a(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P4-2.

*4-30 Encontre a constante de rigidez da viga do Problema 4-24 sob a carga concentrada aplicada para a(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P4-2.

*4-31 Encontre a constante de rigidez da viga do Problema 4-25 sob a carga concentrada aplicada para a(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P4-2.

*4-32 Encontre a constante de rigidez da viga do Problema 4-26 sob a carga concentrada aplicada para a(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P4-2.

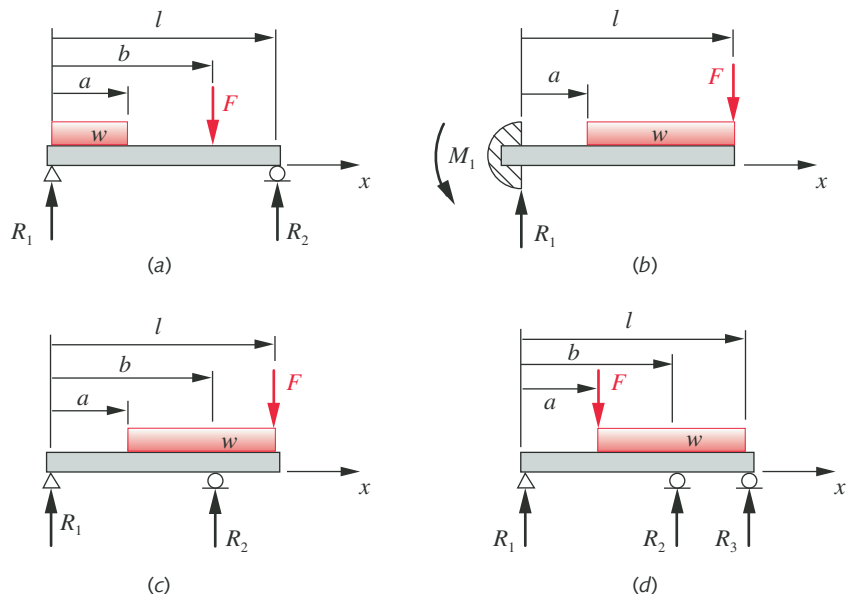



FIGURA P4-11

Vigas e seus carregamentos para os problemas 4-23 a 4-26 e 4-29 a 4-32 – Ver Tabela P4-2 para os dados.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

† Problemas cujos números estão em *itálico* são projetos. Problemas cujos números estão em **negrito** são uma extensão de problemas similares em capítulos anteriores com o mesmo algarismo final. Alguns problemas nos capítulos seguintes podem continuar a estender esses problemas.

Tabela P4-2 Dados para os problemas 4-23 a 4-26 e 4-29 a 4-32

Use apenas os dados relevantes para o problema em questão. Comprimento em m, forças em N, *I* em m^4

Linha	*l*	*a*	*b*	*w**	*F*	*I*	*c*	*E*
a	1,00	0,40	0,60	200	500	2,85*E*–08	2,00*E*–02	aço
b	0,70	0,20	0,40	80	850	1,70*E*–08	1,00*E*–02	aço
c	0,30	0,10	0,20	500	450	4,70*E*–09	1,25*E*–02	aço
d	0,80	0,50	0,60	65	250	4,90*E*–09	1,10*E*–02	aço
e	0,85	0,35	0,50	96	750	1,80*E*–08	9,00*E*–03	aço
f	0,50	0,18	0,40	450	950	1,17*E*–08	1,00*E*–02	aço
g	0,60	0,28	0,50	250	250	3,20*E*–09	7,50*E*–03	aço
h	0,20	0,10	0,13	400	500	4,00*E*–09	5,00*E*–03	alumínio
i	0,40	0,15	0,30	50	200	2,75*E*–09	5,00*E*–03	alumínio
j	0,20	0,10	0,15	150	80	6,50*E*–10	5,50*E*–03	alumínio
k	0,40	0,16	0,30	70	880	4,30*E*–08	1,45*E*–02	alumínio
l	0,90	0,25	0,80	90	600	4,20*E*–08	7,50*E*–03	alumínio
m	0,70	0,10	0,60	80	500	2,10*E*–08	6,50*E*–03	alumínio
n	0,85	0,15	0,70	60	120	7,90*E*–09	1,00*E*–02	alumínio

* Observe que ***w*** é uma força distribuída de N/m.

*4-33 Para o suporte mostrado na Figura P4-14 e com os dados da(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P4-3, determine a tensão de flexão no ponto *A* e a tensão de cisalhamento devido à força cortante no ponto *B*. Encontre também a tensão de cisalhamento devido à torção em ambos os pontos. Depois, determine as tensões principais nos pontos *A* e *B*.

*4-34 Para o suporte mostrado na Figura P4-14 e com os dados da(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P4-3, determine a deflexão no ponto de aplicação da carga *F*.

*4-35 Para o suporte mostrado na Figura P4-14 e com os dados da(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P4-3, determine a constante de rigidez do tubo sob flexão, a constante de rigidez do braço sob flexão e a constante de rigidez do tubo sob torção. Combine esses dados numa constante de rigidez global em termos da força *F* e a deflexão linear devido a esta.

4-36 Para o suporte mostrado na Figura P4-14 e com os dados da(s) coluna(s) designada(s) na Tabela P4-3, refaça o Problema 4-33 considerando uma concentração de tensão nos pontos *A* e *B*. Pressuponha um fator de concentração de tensão igual a 2,5 na flexão e na torção.

*4-37 Uma viga curva em forma de um semicírculo, mostrada na Figura P4-15, possui as seguintes dimensões: Diâmetro externo (DE) = 150 mm, Diâmetro interno

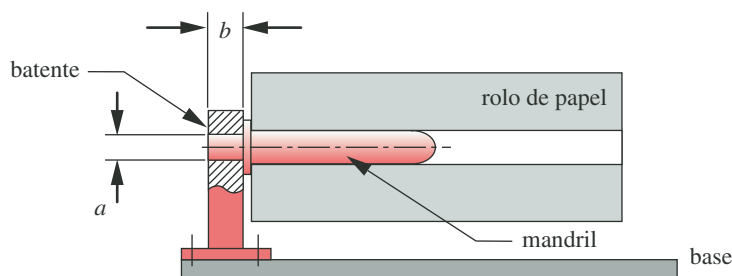



FIGURA P4-12

Problema 4-27.

* As repostas para estes problemas estão no Apêndice D.

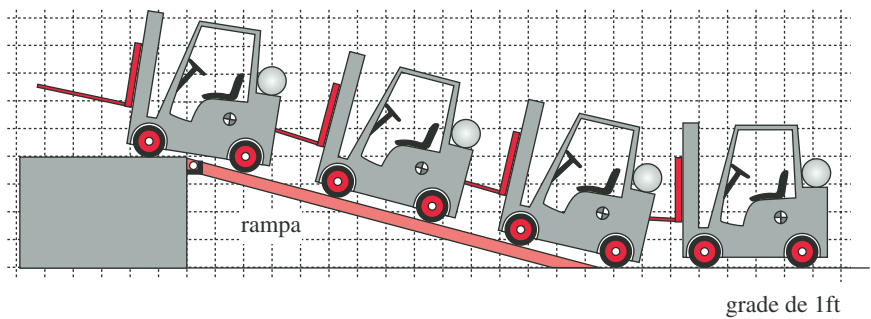



FIGURA P4-13

Problema 4-28.

(DI) = 100 mm e t = 25 mm. Para um par de força F = 14 kN, aplicado ao longo do diâmetro, determine a excentricidade da linha neutra e as tensões nas fibras internas e externas.

4-38 Projete uma barra de torção sólida e retilínea, de aço, que tenha uma constante de mola (rigidez) de 10000 lb-in/rad/ft. Compare os projetos para seções transversais sólidas circulares e quadradas. Qual das duas é mais eficiente em termos do material utilizado?

4-39 Projete uma mola formada por uma viga reta engastada, de aço, com 1 ft de comprimento, carregada na extremidade livre, que tenha uma constante elástica de 10000 lb/in. Compare os projetos para seções transversais sólidas circulares e quadradas. Qual das duas é mais eficiente em termos do material utilizado?

4-40 Projete novamente o suporte de rolo do Problema 4-8 para a configuração ilustrada na Figura P4-16, sabendo que os mandris encontram-se inseridos em 10% do comprimento do rolo em cada uma de suas extremidades. Escolha valores apropriados para as dimensões a e b, visando à utilização total da resistência do material, que é a mesma do Problema 4-27. Ver o Problema 4-8 para mais informações.

*4-41 Um tubo de aço de diâmetro interno igual a 10 mm transporta líquido a 7 MPa. Determine as tensões principais na parede do tubo se ele tem uma espessura de: (a) 1 mm, (b) 5 mm.

4-42 Um tanque cilíndrico de fundo hemisférico é necessário para armazenar ar pressurizado, na temperatura ambiente, a 150 psi. Determine as tensões principais na parede da estrutura se o tanque tem um diâmetro de 0,5 m, uma espessura de parede de 1 mm e um comprimento de 1 m.

4-43 A Figura P4-17 mostra uma estação de descarga no final de uma máquina que processa rolos de papel. Os rolos de papel acabados têm 0,9 m de diâmetro externo por 0,22 m de diâmetro interno por 3,23 m de comprimento e uma densidade de 984 kg/m^3. Os rolos são transferidos da máquina transportadora

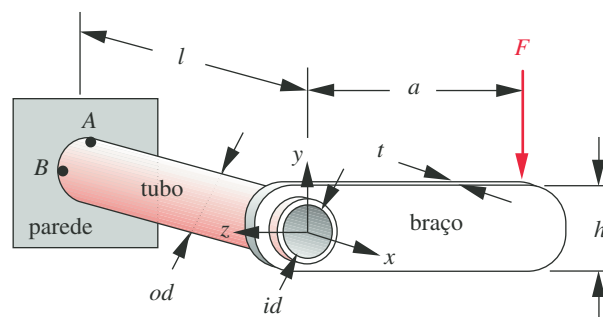



FIGURA P4-14

Problemas 4-33 a 4-36. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas para esses problemas estão no Apêndice D. Problemas cujos números estão em *itálico* são projetos.

Tabela P4-3 Dados para os Problemas 4-33 até 4-36 e 4-49 até 4-52
Use somente os dados relevantes para o problema em questão. Comprimentos em mm e forças em N.

Linha	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*OD*	*ID*	*E*
a	100	400	10	20	50	20	14	aço
b	70	200	6	80	85	20	6	aço
c	300	100	4	50	95	25	17	aço
d	800	500	6	65	160	46	22	alumínio
e	85	350	5	96	900	55	24	alumínio
f	50	180	4	45	950	50	30	alumínio
g	160	280	5	25	850	45	19	aço
h	200	100	2	10	800	40	24	aço
i	400	150	3	50	950	65	37	aço
j	200	100	3	10	600	45	32	alumínio
k	120	180	3	70	880	60	47	alumínio
l	150	250	8	90	750	52	28	alumínio
m	70	100	6	80	500	36	30	aço
n	85	150	7	60	820	40	15	aço

(não mostrada na figura) para a empilhadeira através do acoplador articulado na forma de V da estação de descarregamento que rotaciona de 90° devido a um cilindro pneumático. Em seguida, os cilindros de papel rolam em direção aos garfos da empilhadeira, que têm 38 mm de espessura, 100 mm de largura, 1,2 m de comprimento e uma inclinação de 3° em relação à horizontal. Determine as tensões atuantes nos dois garfos da empilhadeira quando os rolos de papel caem em cima deles para os seguintes casos (especifique todas as hipóteses adotadas):

(a) Os garfos não estão apoiados em suas extremidades.
(b) Os garfos encontram-se em contato com a mesa no ponto *A*.

4-44 Determine a espessura adequada para o acoplador articulado em forma de V da estação de descarregamento da Figura P4-17 de modo a limitar a sua deflexão na extremidade em 10 mm para qualquer posição, durante o seu movimento de rotação. Assuma que existem dois "braços" (acoplados em V) que suportam os rolos de papel ao longo de seu comprimento nas posições equivalentes a 1/4 e 3/4 do comprimento do rolo. Cada um dos braços tem 10 cm de largura por 1 m de comprimento e está soldado a um tubo de aço que é rotacionado pelo pistão pneumático. Veja o Problema 4-43 para maiores informações.

4-45 Determine a força crítica atuante na haste do cilindro pneumático da Figura P4-17. O braço de manivela, que rotaciona o cilindro, tem um comprimento igual a 0,3 m, enquanto a haste possui um curso máximo de 0,5 m, um diâmetro de 25

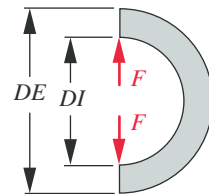
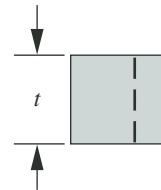



FIGURA P4-15

Problema 4-37. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

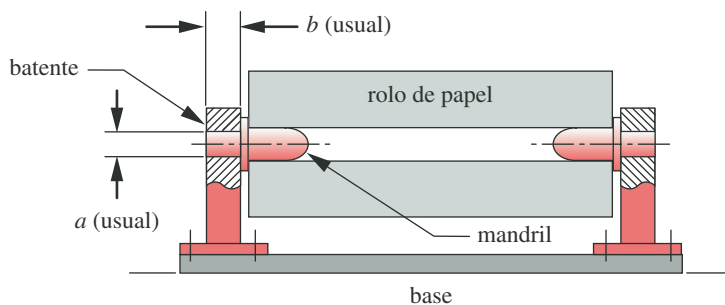



FIGURA P4-16

Problema 4-40. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

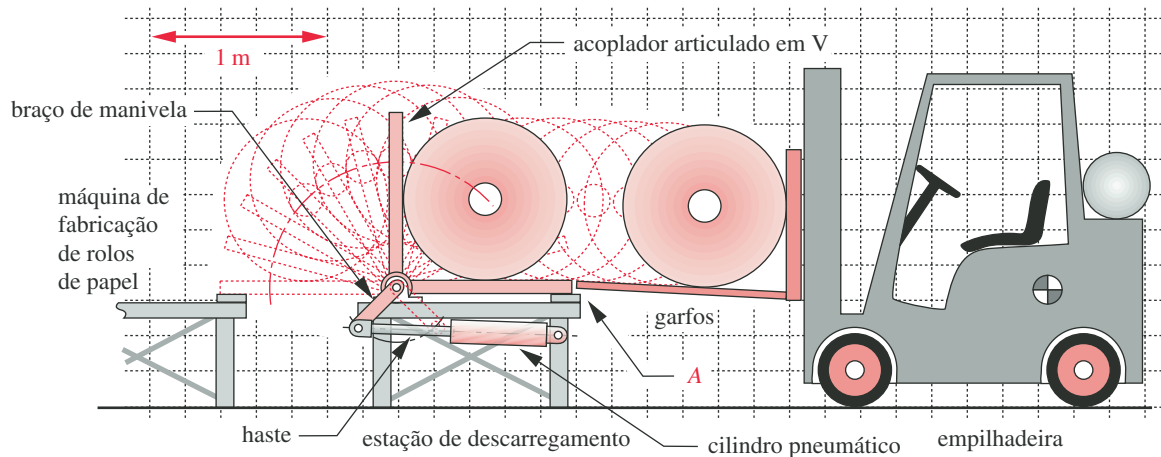



FIGURA P4-17

Problemas 4-43 até 4-47.

mm e o seu material é um aço com limite de resistência ao escoamento de 400 MPa. Especifique todas as hipóteses adotadas.

4-46 As posições do acoplador articulado em forma de V, ilustradas na Figura P4-17, são alteradas através do movimento de rotação do braço de manivela ligado a um eixo de 60 mm de diâmetro e 3,23 m de comprimento. Determine o torque máximo aplicado neste eixo durante o movimento do acoplador e o valor da tensão máxima e deflexão no eixo. Ver o Problema 4-43 para maiores informações.

4-47 Determine as forças máximas nos pinos localizados nas extremidades do cilindro pneumático da Figura P4-17 e o valor da tensão atuante neles se têm um diâmetro de 30 mm e apenas uma área de cisalhamento puro.

4-48 Um maratonista de 100 kg, que utiliza cadeira de rodas para a prática deste esporte, necessita de um aparelho de exercícios que permita a realização de treinamentos em ambientes fechados. O projeto proposto encontra-se ilustrado na Figura P4-18. Dois cilindros, livres para girar em torno dos mancais, suportam as rodas traseiras, enquanto uma plataforma suporta as rodas dianteiras. Dimensione os cilindros de 1 m de comprimento como tubos ocos de alumínio para minimizar o peso da plataforma e, também, limitar as deflexões do cilindro em 1 mm para a pior situação (maior solicitação). A cadeira de rodas possui rodas motrizes de 65 cm de diâmetro separadas por 70 cm. As flanges dos cilindros limitam o movimento lateral da cadeira durante a execução dos exercícios e, além disso, permitem que as rodas girem livremente no espaço entre elas. Especifique o diâmetro dos eixos de aço adequados para suportar os tubos nos mancais. Calcule todas as tensões significativas para este problema.

*4-49 Uma coluna quadrada e oca tem um comprimento igual a l e é constituída do material E, conforme as linhas listadas na Tabela P4-3. As dimensões de sua seção transversal são: 4 mm (externamente) e 3 mm (internamente). Utilize S_y = 150 MPa para o alumínio e 300 MPa para o aço. Determine se é uma coluna na região de Johnson ou de Euler e qual é a carga crítica:

(a) Se as condições de contorno são biarticulada.
(b) Se as condições de contorno são engastada-articulada.
(c) Se as condições de contorno são biengastada.
(d) Se as condições de contorno são engastada-livre.

*4-50 Uma coluna circular e oca tem um comprimento igual a 1,5 m, é constituída do material E e as dimensões de sua seção transversal OD e ID seguem os valores listados nas colunas da Tabela P4-3. Utilize S_y = 150 MPa para o alumínio e 300 MPa para o aço. Determine se é uma coluna na região de Johnson ou de Euler e qual é a carga crítica:

* As respostas destes problemas encontram-se no Apêndice D. Números em *itálico* indicam problemas de projeto.

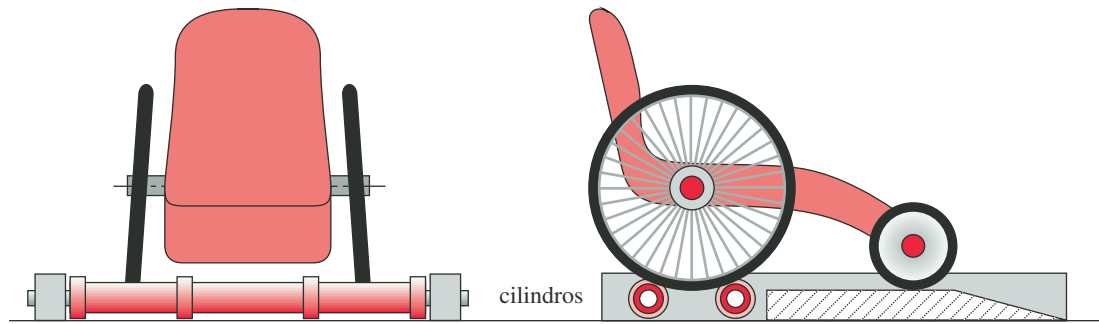



FIGURA P4-18

Problema 4-48.

(a) Se as condições de contorno são biarticulada.
(b) Se as condições de contorno são engastada-articulada.
(c) Se as condições de contorno são biengastada.
(d) Se as condições de contorno são engastada-livre.

*4-51 Uma coluna retangular maciça tem um comprimento igual a *l*, é constituída do material *E* e as dimensões de sua seção transversal (*h* e *t*) seguem os valores listados nas colunas da Tabela P4-3. Utilize S_y = 150 MPa para o alumínio e 300 MPa para o aço. Determine se é uma coluna na região de Johnson ou de Euler e qual é a carga crítica:

(a) Se as condições de contorno são biarticulada.
(b) Se as condições de contorno são engastada-articulada.
(c) Se as condições de contorno são biengastada.
(d) Se as condições de contorno são engastada-livre.

*4-52 Uma coluna circular maciça tem um comprimento igual a *l*, é constituída do material *E*, possui um diâmetro *OD* e uma excentricidade *t* conforme os valores listados nas colunas da Tabela P4-3. Utilize S_y = 150 MPa para o alumínio e 300 MPa para o aço. Determine se é uma coluna na região de Johnson ou de Euler e qual é a carga crítica:

(a) Se as condições de contorno são biarticulada.
(b) Se as condições de contorno são engastada-articulada.
(c) Se as condições de contorno são biengastada.
(d) Se as condições de contorno são engastada-livre.

4-53 Projete uma coluna circular e oca de alumínio com as seguintes características: comprimento de 3 m, espessura de parede de 5 mm, carga concêntrica de 900 N, material com resistência ao escoamento de 150 MPa e um fator de segurança igual a 3.

(a) Se as condições de contorno são biarticulada.
(b) Se as condições de contorno são engastada-livre.

4-54 Três barras circulares de diâmetro igual a 1,25 in cada são constituídas de aço SAE 1030 laminado a quente, mas possuem diferentes comprimentos: 5 in, 30 in e 60 in, respectivamente. Todas estão carregadas axialmente sob compressão. Compare a capacidade de suportar carga das três barras se suas extremidades são (condição de contorno):

(a) biarticulada.
(b) engastada-articulada.
(c) biengastada.
(d) engastada-livre.

4-55 A Figura P4-19 ilustra uma haste de aço de 30 in de comprimento e 1,5 in de diâmetro sujeita a forças de tração (P = 10000 lb) aplicadas em cada uma de suas extremidades, atuando ao longo de seu eixo longitudinal Y e através do centróide de sua seção transversal circular. O ponto A localiza-se 12 in abaixo da extremi-

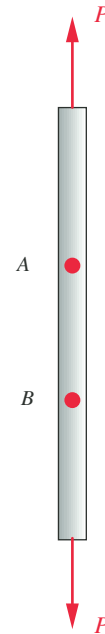



FIGURA P4-19

Problemas 4-55 e 4-56.

* As respostas destes problemas encontram-se no Apêndice D. Números em *itálico* indicam problemas de projeto.

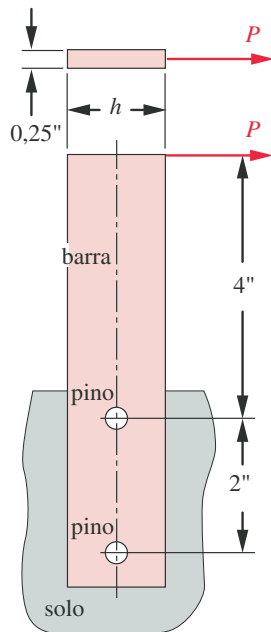



FIGURA P4-20

Problemas 4-57 e 4-58. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD).

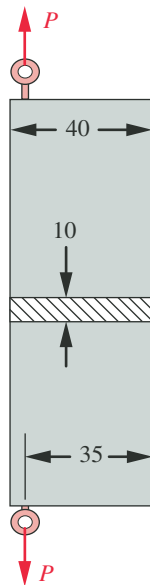



FIGURA P4-21

Problema 4-59. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD).

dade superior e o ponto B, a 8 in abaixo de A. Para esta barra e respectivo carregamento, determine:

(a) Todos as componentes do tensor de tensões (Equação 4.1a) para o ponto médio entre A e B.
(b) O deslocamento do ponto B em relação ao ponto A.
(c) A deformação elástica da seção entre os pontos A e B.
(d) A deformação total na seção entre os pontos A e B.

4-56 A haste na Figura P4-19, sob o carregamento do Problema 4-55, é sujeita a uma redução de temperatura de 80°F para 20°F após a aplicação da carga. O coeficiente de expansão térmica para o aço é de aproximadamente 6 min/in/°F. Determine:

(a) Todos as componentes do tensor de tensões (Equação 4.1a) para o ponto médio entre A e B.
(b) O deslocamento do B em relação ao ponto A.
(c) A deformação elástica da seção entre os pontos A e B.
(d) A deformação total na seção entre os pontos A e B.

4-57 A Figura P4-20 ilustra uma barra de aço presa ao solo (plano rígido) por dois pinos-guia de aço endurecido. Para $P = 1500$ lb, determine:

(a) A tensão de cisalhamento em cada pino.
(b) A tensão de esmagamento nos pinos e mancais em cada furo.
(c) O valor mínimo da dimensão h, para prevenir uma falha por rasgamento, se a barra de aço tem uma resistência ao cisalhamento de 32,5 kpsi.

4-58 Repita o Problema 4-57 para $P = 2200$ lb.

4-59 A Figura P4-21 mostra uma barra de alumínio de seção retangular sujeita a forças "fora-de-centro" $P = 4000$ N aplicadas conforme a ilustração.

(a) Calcule a máxima tensão normal na região do meio da barra, bem distante das alças onde as cargas são aplicadas.
(b) Plote a distribuição de tensão normal ao longo da seção transversal próxima a região do meio da barra.
(c) Esboçe, de maneira "razoável", a distribuição de tensão normal ao longo da seção transversal nas extremidades da barra, próximo ao local de aplicação das cargas.

4-60 A Figura P4-22 ilustra um suporte usinado a partir de um aço plano, em estoque, de 0,5 in de espessura. O mesmo está rigidamente ligado a uma base (engastado) e carregado com uma força $P = 5000$ lb no ponto D. Determine:

(a) A magnitude, a localização e a orientação do plano de máxima tensão normal na seção **A-A**.
(b) A magnitude, a localização e a orientação do plano de máxima tensão de cisalhamento na seção **A-A**.
(c) A magnitude, a localização e a orientação do plano de máxima tensão normal na seção **B-B**.
(d) A magnitude, a localização e a orientação do plano de máxima tensão de cisalhamento na seção **B-B**.

4-61 Para o suporte do Problema 4-60, determine a deflexão e a rotação do ponto C.

4-62 A Figura P4-23 mostra uma barra de aço de diâmetro igual a 1 in, suportada e sujeita a uma carga aplicada de 500 lb (força P). Determine a deflexão no ponto de aplicação da carga e a rotação no apoio de rolo.

4-63 A Figura P4-24 mostra um cilindro de aço maciço de diâmetro 1,25 in com vários momentos torçores aplicados nos sentidos indicados. Para $T_A = 10000$ lb-in, $T_B = 20000$ lb-in, $T_C = 30000$ lb-in, descubra:

(a) A magnitude e a posição da máxima tensão de cisalhamento devido à torção no cilindro.
(b) As correspondentes tensões principais para a posição determinada na parte (a).
(c) A magnitude e a posição da máxima deformação específica de cisalhamento no cilindro.

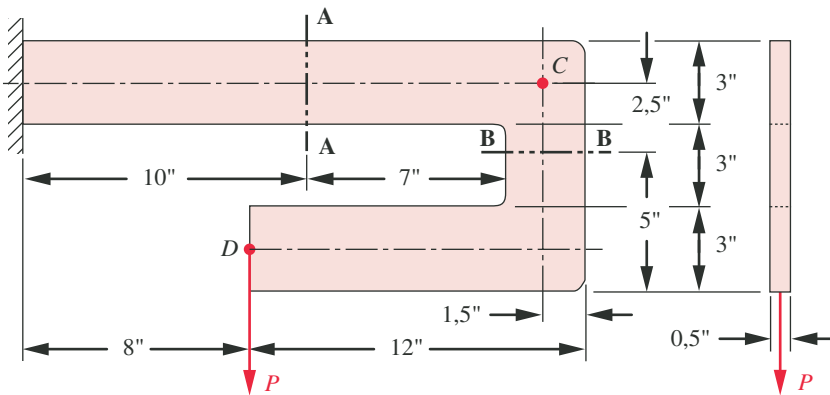



FIGURA P4-22

Problemas 4-60 e 4-61. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

4-64 Se o cilindro do Problema 4-63 estiver rigidamente conectado a suportes fixos em cada extremidade (A e D) e submetido apenas aos momentos torçores T_B e T_C, então descubra:

(a) As reações T_A e T_D em cada extremidade do cilindro.
(b) A rotação da seção B com relação à seção C.
(c) A magnitude e a posição da máxima deformação específica de cisalhamento.

[†]*4-65* A Figura P4-25 mostra um pino de articulação com ajuste forçado na parte A e com ajuste deslizante na parte B. Se $F = 100$ lb e $l = 1{,}5$ in, qual o diâmetro do pino necessário para limitar a tensão máxima no pino a 50 kpsi?

4-66 A Figura P4-25 mostra um pino de articulação com ajuste forçado na parte A e com ajuste deslizante na parte B. Se $F = 100$ N e $l = 64$ mm, qual o diâmetro do pino necessário para limitar a tensão máxima no pino a 250 MPa?

[†]*4-67* A Figura P4-25 mostra um pino de articulação com ajuste forçado na parte A e com ajuste deslizante na parte B. Determine a fração l/d que tornará o pino igualmente resistente ao cisalhamento e à flexão se a resistência ao cisalhamento é igual à metade da resistência à flexão.

4-68 Escreva um programa computacional em qualquer linguagem, ou use *Mathcad*, *TK Solver*, ou qualquer outro programa de resolução de equações para calcular e plotar a variação na área da seção transversal, momento de inércia, raio de giração, índicie de esbeltez e carga crítica, com relação ao diâmetro interno de colunas de Euler e Johnson com seção transversal anelar. Pressuponha que o diâmetro externo de cada coluna é de 1 in. O comprimento equivalente da coluna de Euler é de 50 in. O comprimento equivalente da coluna de Johnson é de 10 in. Ambas são feitas de aço com $S_y = 36000$ psi. Deixe o diâmetro interno variar de 10% até 90% do diâmetro externo para o estudo paramétrico. Comente as vantagens da coluna circular oca em relação à coluna circular maciça de cada tipo (Euler e Johnson) que tenham os mesmos diâmetros externos, respectivos comprimentos e materiais.

FIGURA P4-24

Problemas 4-63 e 4-64.

FIGURA P4-23

Problema 4-62.

[†] Números em *itálico* indicam problemas de projeto.

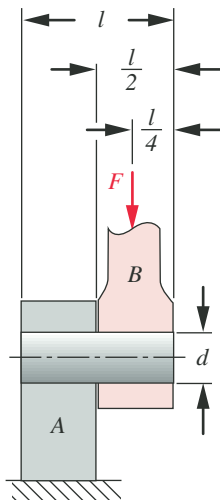



FIGURA P4-25

Problemas 4-65 a 4-67.

*4-69 A Figura P4-26a mostra uma braçadeira em C com um corpo elíptico, dimensionado como mostrado abaixo. A braçadeira possui um corte em T com espessura uniforme de 3,2 mm na garganta, como mostrado na Figura P4-26b. Encontre a tensão de flexão nas fibras internas e externas da garganta se a força da braçadeira for de 2,7 kN.

4-70 Uma braçadeira em C, como a da Figura P4-26a, possui uma seção transversal retangular, como na Figura P4-26c. Encontre a tensão de flexão nas fibras internas e externas da garganta se a força da braçadeira for de 1,6 kN.

4-71 Uma braçadeira em C possui um corte transversal elíptico como o da Figura P4-26d. As dimensões dos eixos maiores e menores da elipse são dadas. Determine a tensão de flexão nas fibras internas e externas da garganta se a força da braçadeira for de 1,6 kN.

4-72 Uma braçadeira em C, como a da Figura P4-26a, possui uma seção transversal trapezoidal, como na Figura P4-26e. Determine a tensão de flexão nas fibras internas e externas da garganta se a força da braçadeira for de 1,6 kN.

4-73 Queremos projetar uma braçadeira em C com corte em T como a das Figuras P4-26a e b. A profundidade da seção será de 31,8 mm, como mostrado, mas a largura do flange (mostrada como sendo de 28,4 mm) deve ser determinada. Supondo uma espessura uniforme de 3,2 mm e um fator de segurança contra rendimento estático de 2, determine um valor adequado para a largura do flange se a braçadeira em C for feita de 60-40-18 de ferro dúctil em situação de carga máxima de 1,6 kN.

4-74 Uma barra redonda de aço possui 10 polegadas de comprimento e 1 polegada de diâmetro.

(a) Calcule a tensão na barra quando estiver sujeita a uma força de tensão de 1000 lb.

(b) Calcule a tensão de flexão da barra se estiver fixada em uma extremidade (como uma viga engastada) e possui uma carga transversa de 1000 lb na outra extremidade.

(c) Calcule a tensão de cisalhamento transversal na barra da parte (b).

(d) Determine o quão curta deve ser a barra quando estiver carregada, como uma viga engastada, por sua tensão máxima de flexão e sua tensão máxima de cisalhamento transversal para fornecer igual tendência a falhas.

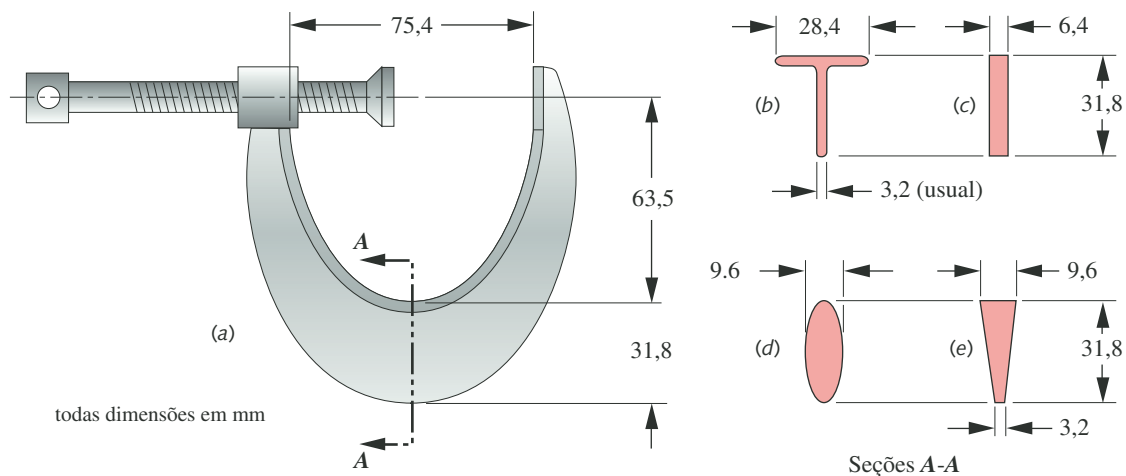



FIGURE P4-26

Problemas 4-69 a 4-73. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD).

Encontre o comprimento como uma fração do diâmetro se a tensão de falha no cisalhamento for metade da tensão de falha na flexão.

(e) Calcule a tensão de cisalhamento torcional quando uma força de 10.000 libras em par for aplicada sobre a linha central (eixo) da viga engastada como sua extremidade livre.

(f) Se a força na viga engastada em (b) for excêntrica, incluindo a tensão torcional, bem como a de flexão, em qual fração do diâmetro a excentricidade precisaria estar para dar uma tensão torcional igual à tensão de cisalhamento transversal?

(g) Calcule a tensão de cisalhamento direto que resultaria na barra de (a) se essa fosse o pino numa conexão pino-forquilha como a da Figura P4-8, sujeita a uma força de empurro de 1000 lb.

(h) Calcule a tensão de esmagamento resultante na barra se (a) ela fosse o pino em uma conexão pino-forquilha como a da Figura P4-8, sujeita a uma carga de 1000 lb, se a parte central (o olho ou a língua) possui a largura de 1-in.

(i) Calcule a tensão máxima de flexão na barra se ela for um semicírculo com um raio centroidal de $10/\pi$ e 1000 lb em forças opostas são aplicadas nas extremidades e no plano das extremidades similar à Figura P4-15. Suponha que não haja distorção da seção transversal durante a flexão.

*4-75 Para uma barra plana em filetes carregada em tensão similar àquela mostrada na Figura C-9 (Apêndice C) e os dados da(s) fileira(s) assinalada(s) na Tabela P4-4, determine a máxima tensão axial e a tensão axial nominal na barra.

4-76 Para uma barra plana em filetes carregada em tensão similar àquela mostrada na Figura C-10 (Apêndice C) e os dados da(s) fileira(s) assinalada(s) na Tabela P4-4, determine a máxima tensão axial e a tensão axial nominal na barra.

4-77 Para um eixo, com um filete de ombro, carregada com tensão similar àquela mostrada na Figura C-1 (Apêndice C) e os dados da(s) fileira(s) assinalada(s) na Tabela P4-4, determine a máxima tensão axial e a tensão axial nominal na barra.

4-78 Para um eixo, com um filete de ombro, carregada com tensão similar àquela mostrada na Figura C-2 (Apêndice C) e os dados da(s) fileira(s) assinalada(s) na Tabela P4-4, determine a máxima tensão axial e a tensão axial nominal na barra.

Tabela P4-4 Dados para os problemas 4-75 até 4-78
Use somente os dados relevantes para o problema em questão.
Comprimentos em mm, forças em N e momentos em N-m

Linhas	*D*	*d*	*r*	*h*	*M*	*P*
a	40	20	4	10	80	8000
b	26	20	1	12	100	9500
c	36	30	1,5	8	60	6500
d	33	30	1	8	75	7200
e	21	20	1	10	50	5500
f	51	50	1,5	7	80	8000
g	101	100	5	8	400	15000

* As respostas destes problemas encontram-se no Apêndice D.

4-79 Um elemento de tensão diferencial possui um conjunto de tensões aplicadas em si, como mostrado na Figura 4-1. Para $\sigma_x = 850$, $\sigma_y = -200$, $\sigma_z = 300$, $\tau_{xy} = 450$, $\tau_{yz} = -300$ e $\tau_{zx} = 0$, encontre as principais tensões e a tensão de cisalhamento máxima e desenhe o diagrama do círculo de Mohr para estado de tensão tridimensional.

4-80 Escreva expressões para a tensão tangencial normalizada (tensão/pressão) como uma função da espessura da parede normalizada (espessura da parede/raio externo) na parede interna de um cilindro de parede fina, as duas com pressão interna apenas. Trace a diferença percentual entre essas duas expressões e determine a variação da espessura da parede para a relação do raio externo, para a qual a tensão prevista pela expressão da parede fina é pelo menos 5% maior do que a prevista pela expressão da parede fina.

4-81 Uma barra sob torção em um quadrado oco, como aquele mostrado na Tabela 4-3, tem as seguintes dimensões $a = 5$ mm, $t = 3$ mm e l = 300 mm. Se for feito de aço com um módulo de rigidez de $G = 80{,}8$ GPa, determine a tensão máxima de cisalhamento na barra e a deflexão angular sob uma carga torcional de 500 N-m.

4-82 Projete uma barra de torção em retângulo oco como aquele mostrado na Tabela 4-3 com dimensões $a = 45$ mm, $b = 20$ mm e $l = 500$ mm. Use aço com limite de escoamento de 90 MPa e uma carga torcional de 135 N-m. Use um fator 2 de segurança contra escoamento.

4-83 Uma veia de pressão com extremidades fechadas possui as seguintes dimensões: diâmetro externo $OD = 450$ mm e espessura da parede $t = 6$ mm. Se a pressão interna é de 690 kPa, encontre as principais tensões na superfície interna longe das extremidades. Qual é a tensão de cisalhamento máxima no ponto analisado?

4-84 Uma viga de aço simplesmente suportada com extensão l e uma carga concentrada F atuando na metade do comprimento da coluna tem uma seção transversal retangular de largura b e profundidade h. Se a energia de deformação em razão da força cortante é U_s e no momento fletor é U_b, derive uma expressão para a razão U_s / U_b e plote-a como uma função de h / l sobre uma região de 0,0 to 0,10.

4-85 Uma viga é carregada e suportada como mostrada na Figura P4-27a. Encontre as reações para os dados fornecidos na linha a da Tabela P4-2.

4-86 Uma viga é carregada e suportada como mostrada na Figura P4-27b. Encontre as reações para os dados fornecidos na linha a da Tabela P4-2.

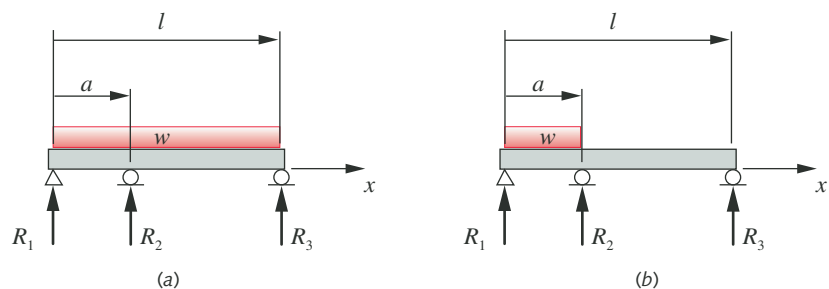
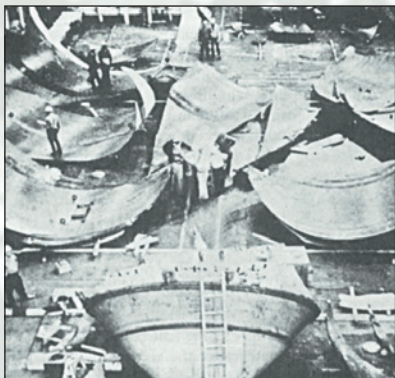



FIGURA P4-27

Vigas e seus carregamentos para os Problemas 4-85 e 4-86 – veja dados na Tabela P4-2.

5

TEORIA DAS FALHAS ESTÁTICAS

Toda ciência nada mais é que o refinamento de pensamentos cotidianos.

ALBERT EINSTEIN

5.0 INTRODUÇÃO

Por que as peças falham? Essa é uma pergunta que tem ocupado cientistas e engenheiros por séculos. Hoje em dia, compreende-se muito mais sobre vários mecanismos de falha do que algumas décadas atrás, em grande parte devido a testes e técnicas de medições aperfeiçoados. Se a você fosse pedido para responder a pergunta acima baseado no que aprendeu até agora, você provavelmente diria algo como "peças falham porque suas tensões excederam sua resistência", e você estaria certo até certo ponto. A pergunta subsequente é fundamental: que tipo de tensão causa a falha: Tração? Compressão? Cisalhamento? E a resposta é a clássica, "depende". Depende do material em questão e da sua relativa resistência na compressão, na tração e no cisalhamento. Também depende do tipo de carregamento (se estático ou dinâmico) e da presença ou não de trincas no material.

A Tabela 5-0 mostra as variáveis usadas neste capítulo e referências das equações ou seções na qual são usadas. No final do capítulo, é fornecido um resumo que reúne as equações significativas deste capítulo para facilitar a consulta e identifica as seções na qual suas discussões podem ser encontradas.

A Figura 5-1*a* mostra o círculo de Mohr para as tensões que ocorrem em um corpo de prova durante um teste de tração. O teste de tração (ver Seção 2.1) aplica lentamente um carregamento de tração pura, causando uma tensão normal de tração. No entanto, o círculo de Mohr mostra que também existe tensão de cisalhamento, cujo valor máximo é exatamente a metade da máxima tensão normal. Qual das tensões causou a falha, a tensão normal ou a de cisalhamento?

A Figura 5-1*b* mostra o círculo de Mohr para as tensões que ocorrem em um corpo de prova durante um teste de torção. O teste de torção aplica lentamente

Tabela 5-0 Variáveis usadas neste capítulo

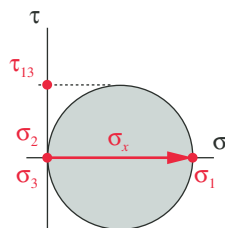
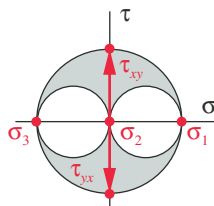
Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
a	metade do comprimento da trinca	in	m	Seção 5.3
b	metade da largura da placa trincada	in	m	Seção 5.3
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	Seção 5.1
K	fator de intensidade de tensão	kpsi-$in^{0,5}$	MPa-$m^{0,5}$	Seção 5.3
K_c	tenacidade à fratura	kpsi-$in^{0,5}$	MPa-$m^{0,5}$	Seção 5.3
N	coeficiente de segurança	nenhuma	nenhuma	Seção 5.1
N_{FM}	coeficiente de segurança à falha pela mecânica da fratura	nenhuma	nenhuma	Seção 5.3
S_{uc}	máxima resistência à compressão	psi	Pa	Seção 5.2
S_{ut}	máxima resistência à tração	psi	Pa	Seção 5.2
S_y	tensão normal de escoamento	psi	Pa	Equações 5.8*a*, 5.9*b*
S_{ys}	tensão de cisalhamento no escoamento	psi	Pa	Equações 5.9*b*, 5.10*b*
U	energia total de deformação	in-lb	Joules	Equação 5.1
U_d	energia de deformação de distorção	in-lb	Joules	Equação 5.2
U_h	energia de deformação hidrostática	in-lb	Joules	Equação 5.2
β	fator geométrico de intensificação de tensão	nenhuma	nenhuma	Equação 5.14*c*
ε	deformação específica	nenhuma	nenhuma	Seção 5.1
ν	coeficiente de Poisson	nenhuma	nenhuma	Seção 5.1
σ_1	tensão principal	psi	Pa	Seção 5.1
σ_2	tensão principal	psi	Pa	Seção 5.1
σ_3	tensão principal	psi	Pa	Seção 5.1
$\tilde{\sigma}$	tensão equivalente de Mohr modificada	psi	Pa	Equação 5.12
σ'	tensão equivalente de von Misses	psi	Pa	Equação 5.7

(*a*)

(*b*)

FIGURA 5-1

Círculo de Mohr para tensão de tração unidirecional (*a*) e torção pura (*b*).

um momento de torção puro, causando uma tensão de cisalhamento. No entanto, o círculo de Mohr mostra que uma tensão normal também está presente, que é exatamente igual a tensão de cisalhamento. Qual das tensões causou a falha, a tensão normal ou a de cisalhamento?

Em geral, materiais dúcteis e isotrópicos submetidos a carregamentos estáticos são limitados pelas suas tensões de cisalhamento, enquanto materiais frágeis são limitados pela tensão normal (embora existam exceções a esta regra quando materiais dúcteis se comportam como frágeis). Essa situação requer que tenhamos diferentes teorias de falha para as duas classes de materiais. Relembre do Capítulo 2 que a ductilidade pode ser definida de diversas maneiras, a mais comum sendo o percentual de elongação do material até a ruptura, que, se > 5%, é considerado dúctil. A maioria dos metais dúcteis tem elongação até a ruptura > 10%.

O mais importante é definir claramente o que queremos dizer com falha. Uma peça pode falhar se suas deformações e distorções forem grandes o suficiente para que não fucione adequadamente. Uma peça pode falhar também sofrendo ruptura e separando-se. Ambas as condições são falhas, mas os mecanismos que as causam são muito diferentes. Apenas materiais dúcteis podem deformar significativamente antes de romperem. Materiais frágeis rompem sem mudanças significativas na forma. As curvas tensão-deformação de cada

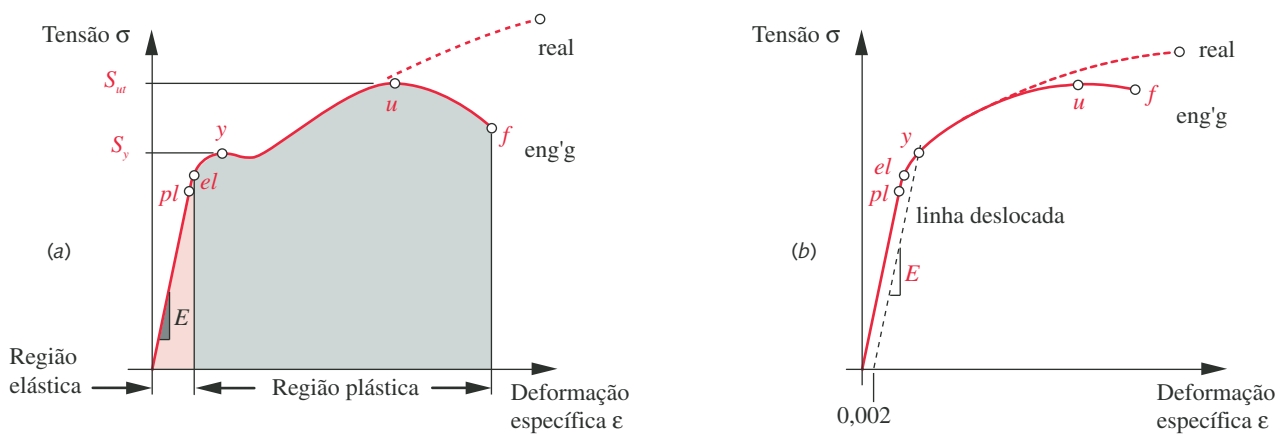



FIGURA 2-2 Repetida

Diagramas tensão-deformação real e de engenharia: (*a*) aço de baixo carbono; (*b*) aço de alto carbono temperado.

tipo de material refletem essa diferença, como mostram as Figuras 2-2 e 2-4, que são reproduzidas nesta página para sua comodidade. Observe que se há presença de trincas em um material dúctil, este pode fraturar subitamente a níveis de tensão nominal bem abaixo da tensão de escoamento, mesmo em carregamentos estáticos.

Um outro fator significativo na falha é o tipo do carregamento, se estático ou dinâmico. Cargas estáticas são aplicadas lentamente e permanecem essencialmente constantes no tempo. Cargas dinâmicas podem ser tanto aplicadas subitamente (carga de impacto) como variadas repetidamente no tempo (carga de fadiga), ou ambas. Os mecanismos de falha são totalmente diferentes em cada caso. A Tabela 3-1 define quatro classes de carregamentos baseadas no movimento das peças carregadas e na dependência do carregamento do tempo. Por definição, apenas o carregamento de Classe 1 é estático. As outras três classes são dinâmicas em maior ou menor grau. Quando o carregamento é dinâmico, a distinção entre o comportamento de material dúctil e frágil desaparece, e materiais dúcteis falham de maneira "frágil". Devido a essas diferenças significativas nos mecanismos de falha sob carregamento estático e dinâmico, vamos considerar cada um separadamente, discutindo falhas devido aos carregamentos estáticos neste capítulo e falhas devido aos carregamentos dinâmicos no próximo capítulo. Para o caso do carregamento estático (Classe 1), vamos considerar as teorias de falha separadamente para cada tipo de material, dúctil e frágil.

5.1 FALHA DE MATERIAIS DÚCTEIS SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO

Enquanto materiais dúcteis rompem se tensionados estaticamente acima de suas tensões limite de ruptura, suas falhas em peças mecânicas geralmente ocorrem quando escoam sob carregamento estático. A tensão de escoamento dos materiais dúcteis é apreciavelmente menor que a tensão limite de ruptura.

Historicamente, várias teorias foram formuladas para explicar esta falha: *a teoria da máxima tensão normal, a teoria da máxima deformação normal, a teoria da energia total de deformação, a teoria da energia de distorção (von Mises-Hencky) e a teoria da máxima tensão de cisalhamento*. Destas, apenas as duas últimas concordam com dados experimentais para este caso, e, das duas, a teoria de von Mises-Hencky é a mais precisa. Discutiremos apenas as

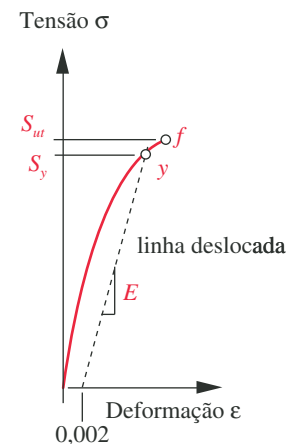



FIGURA 2-4 Repetida

Diagrama tensão-deformação de um material frágil.

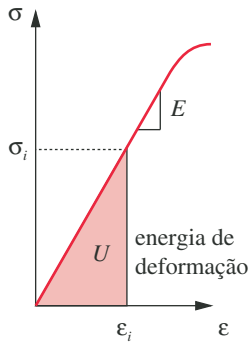



FIGURA 5-2

Energia de deformação interna armazenada em uma peça deformada.

duas últimas detalhadamente, começando com a aproximação mais precisa (e preferida).

A teoria da energia de distorção de von Mises-Hencky

O mecanismo de deformação microscópico é atualmente entendido como sendo devido ao deslizamento relativo dos átomos do material dentro da sua estrutura cristalina. O deslizamento é causado pela tensão de cisalhamento e é acompanhado pela distorção na forma da peça. A energia acumulada na peça devido a essa distorção é um indicador da magnitude da tensão de cisalhamento presente.

Energia total de deformação Uma vez se pensou que a energia total de deformação armazenada no material fosse a causa da falha, mas evidências experimentais não confirmaram essa hipótese. A energia de deformação U em uma unidade de volume associada a uma tensão qualquer é a área abaixo da curva de tensão-deformação, como mostra a Figura 5-2 para um estado unidirecional de tensão. Assumindo que a curva tensão-deformação seja essencialmente linear até o ponto alcançado, então podemos expressar a energia total de deformação em uma unidade de volume em qualquer ponto nesta faixa como

$$U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{5.1a}$$

Estendendo isso ao estado triplo de tensões, tem-se

$$U = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right) \tag{5.1b}$$

usando as tensões principais e as deformações principais que atuam nos planos de tensão cisalhante zero.

Essa expressão pode ser expressa em termos das tensões principais apenas ao substituir as relações

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right)\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3\right)\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2\right)
\end{aligned} \tag{5.1c}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, dando

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] \tag{5.1d}$$

Carregamento hidrostático Grande quantidade de energia de deformação pode ser armazenada nos materiais sem causar falha se estes estiverem carregados hidrostaticamente para criar tensões que sejam uniformes em todas as direções. Isso pode ser feito facilmente em compressão colocando a amostra em uma câmara de pressão. Muitos experimentos mostraram que os materiais podem ser hidrostaticamente tensionados a níveis muito acima da tensão máxima de compressão sem falhar, pois eles apenas diminuem de volume sem mudar a forma. P. W. Bridgman sujeitou gelo à compressão hidrostática de 1 Mpsi sem causar falha. A explicação é que tensões uniformes em todas as direções, enquanto criam a mudança no volume e na energia de deformação potencialmente alta, não causam distorção na peça e, portanto, nenhuma tensão de cisalhamento. Considere o círculo de Mohr de uma amostra sujeita a tensões de compressão $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 1$

Mpsi. O "círculo" de Mohr é um **ponto**, localizado no eixo dos σ em -1 Mpsi e $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. A tensão de cisalhamento é zero, logo não há distorção nem falha. Isso é verdadeiro para materiais dúcteis e frágeis quando as tensões principais são idênticas em magnitude e sinal.

Den Hartog[1] descreve a condição das rochas a grandes profundidades na crosta terrestre, onde elas resistem a tensões de compressão uniforme de 5.500 psi/milha de profundidade devido ao peso da rocha acima. Isso excede a tensão de compressão máxima de 3.000 psi medida em um teste de compressão. Se por um lado é muito mais difícil criar tensão de tração hidrostática, Den Hartog também descreve tal experimento feito pelo cientista russo Joffe no qual ele resfriou lentamente uma esfera de vidro em ar líquido, permitindo-lhe equilibrar-se em um estado livre de tensões à baixa temperatura, e então removendo-a para um ambiente aquecido. Como a esfera esquentou de fora para dentro, o diferencial de temperatura *versus* seu núcleo frio criaram uma tensão de tração uniforme calculada como muito acima da tensão máxima de tração do material, mas a esfera de vidro não trincou. Assim, aparentemente a distorção é também a responsável pela falha sob tração.

Componentes da energia de deformação Pode-se pensar que a energia total de deformação em uma peça carregada (Equação 5.1*d*) consiste em duas componentes – uma devido ao carregamento hidrostático, que muda seu volume, e outra devido à distorção, que muda sua forma. Se separarmos as duas componentes, a parcela **energia de distorção** vai dar uma medida da tensão de cisalhamento presente. Deixando U_h representar a componente hidrostática ou volumétrica e U_d a **componente energia de distorção**, então

$$U = U_h + U_d \tag{5.2}$$

Também podemos expressar cada uma das tensões principais em termos de uma componente hidrostática (ou volumétrica) σ_h que é comum a todas as faces e à componente de distorção σ_{id} que é única para cada face, onde o índice i representa a direção da tensão principal, 1, 2 ou 3:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_h + \sigma_{1_d} \\ \sigma_2 &= \sigma_h + \sigma_{2_d} \\ \sigma_3 &= \sigma_h + \sigma_{3_d} \end{aligned} \tag{5.3a}$$

Somando as três tensões principais na Equação 5.3*a*, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= \sigma_h + \sigma_{1_d} + \sigma_h + \sigma_{2_d} + \sigma_h + \sigma_{3_d} \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 3\sigma_h + \left(\sigma_{1_d} + \sigma_{2_d} + \sigma_{3_d}\right) \\ 3\sigma_h &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \left(\sigma_{1_d} + \sigma_{2_d} + \sigma_{3_d}\right) \end{aligned} \tag{5.3b}$$

Para uma mudança volumétrica sem distorção, os termos dentro dos parênteses na Equação 5.3*b* devem ser zero, dando uma expressão para a componente de tensão hidrostática ou volumétrica σ_h:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{5.3c}$$

que nada mais é do que a média das três tensões principais.

Agora, a energia de deformação U_h associada à mudança hidrostática do volume pode ser encontrada substituindo cada tensão principal na Equação 5.1*d* com σ_h:

$$U_h = \frac{1}{2E}\left[\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2 - 2\nu\left(\sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2E}\left[3\sigma_h^2 - 2\nu\left(3\sigma_h^2\right)\right] \tag{5.4a}$$
$$U_h = \frac{3}{2}\frac{\left(1-2\nu\right)}{E}\sigma_h^2$$

e substituindo a Equação 5.3c:

$$U_h = \frac{3}{2}\frac{\left(1-2\nu\right)}{E}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3\right)\right] \tag{5.4b}$$

Energia de distorção A energia de distorção U_d é encontrada agora subtraindo a Equação 5.4b da 5.1d de acordo com a Equação 5.2:

$$U_d = U - U_h$$
$$= \left\{\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3\right)\right]\right\}$$
$$-\left\{\frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3\right)\right]\right\}$$
$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3\right] \tag{5.5}$$

Para obter um critério de falha, vamos comparar a energia de distorção por unidade de volume dada pela Equação 5.5 com a energia de distorção por unidade de volume presente em um corpo de prova em um ensaio de tração, pois este ensaio é nossa principal fonte de informação sobre a resistência do material. A tensão de falha de interesse aqui é a tensão de escoamento S_y. O teste de tração é um estado uniaxial de tensão onde, no escoamento, $\sigma_1 = S_y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. A energia de distorção associada ao escoamento no teste de tração é encontrada substituindo-se esses valores na Equação 5.5:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}S_y^2 \tag{5.6a}$$

e o critério de falha é obtido igualando a expressão geral 5.5 à expressão específica da falha para obter:

$$\frac{1+\nu}{3E}S_y^2 = U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3\right]$$
$$S_y^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3 \tag{5.6b}$$
$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3}$$

que se aplica para o estado triplo de tensões.

Para o estado duplo de tensão, $\sigma_2 = 0$* e a Equação 5.6b se reduz a:

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \tag{5.6c}$$

A equação da energia de distorção para o estado duplo de tensão 5.6c descreve uma elipse, que quando plotada nos eixos σ_1 e σ_3 é como mostra a Figura 5-3. O interior dessa elipse define a região de combinação de tensões biaxiais segura contra o escoamento sob carregamento estático.

A Equação 5.6b da energia de distorção no caso tridimensional descreve um cilindro circular inclinado dos eixos σ_1, σ_2, σ_3 no qual cada um dos três ângulos de Euler é 45°, como mostra a Figura 5-4. O interior desse cilindro define a re-

* Observe que essa suposição é consistente com a ordenação convencional das tensões principais no caso 3D ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) apenas se $\sigma_3 < 0$. Se ambas as tensões principais não nulas forem positivas, então a suposição de que $\sigma_2 = 0$ viola a ordenação convencional. Contudo, vamos usar σ_1 e σ_3 para representar as duas tensões principais não nulas no caso 2D negligenciando seus sinais para simplificar as representações em figuras e equações.

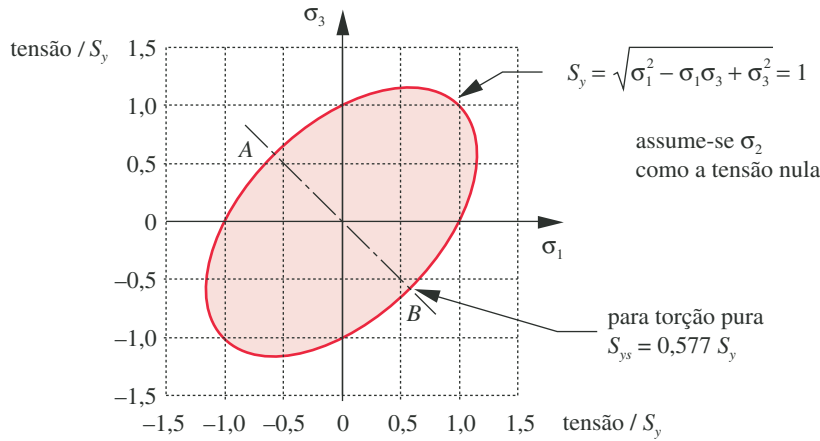



FIGURA 5-3

Elipse da energia de distorção no caso 2D normalizada para a tensão de escoamento do material.

gião segura contra o escoamento para a combinação de tensões σ_1, σ_2, σ_3. O eixo do cilindro é o local de todas as tensões hidrostáticas e se estende a ± infinito, confirmando que apenas tensão hidrostática não causa a falha de material dúctil. As interseções do cilindro com cada um dos três planos principais são elipses, como mostram as Figuras 5-3 e 5-4*b*.

Tensão equivalente de von Mises Com frequência, é conveniente, em situações envolvendo tensões combinadas normal e de cisalhamento no mesmo ponto, definir uma tensão equivalente que possa ser usada para representar a combinação de tensões. A utilização da energia de distorção nos dá um bom meio para fazê-lo para materiais dúcteis. A **tensão equivalente de von Mises** σ' é definida como *a tensão de tração uniaxial que criaria a mesma energia de distorção que é criada pela combinação atual das tensões aplicadas*. Esse procedimento nos permite tratar casos de tensão multiaxial combinada a tensões de cisalhamento como se fossem devidos a um carregamento de tração pura.

A tensão equivalente de von Mises para o caso tridimensional é encontrada a partir da Equação 5.6*b*:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \qquad (5.7a)$$

Isso também pode ser expresso em termos das tensões aplicadas:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \qquad (5.7b)$$

e para o caso bidimensional da Equação 5.6*c* (com $\sigma_2 = 0$):

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \qquad (5.7c)$$

e se expresso em termos das tensões aplicadas:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \qquad (5.7d)$$

Use essas tensões equivalentes para qualquer situação de tensões combinadas. (Ver Exemplo 5-1.) Essa tensão equivalente de von Mises será usada posteriormente quando exemplos de tensões combinadas forem apresentados.

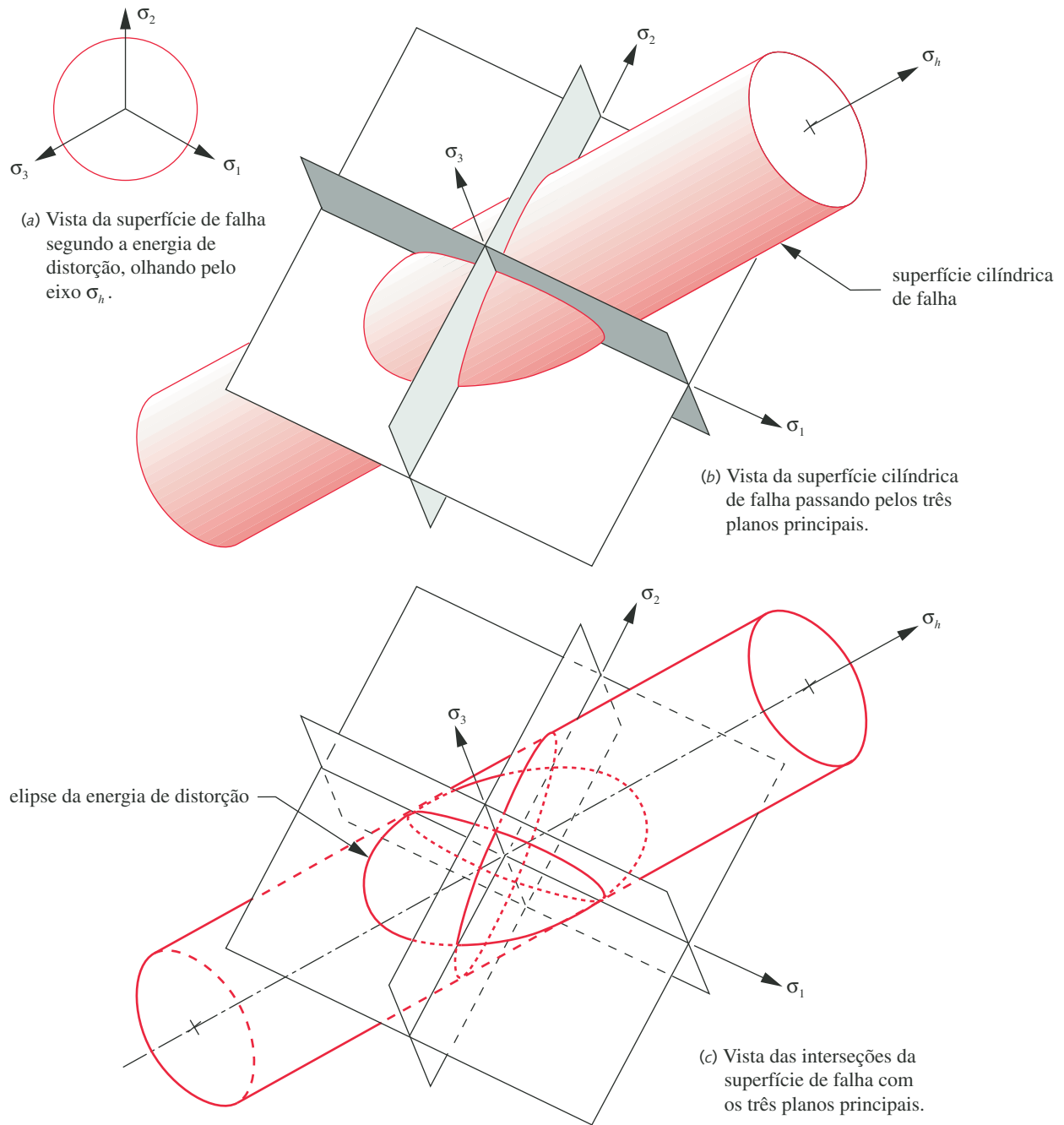



FIGURA 5-4

Local tridimensional de falha para a teoria da energia de distorção.

Coeficiente de segurança As Equações 5.6*b* e 5.6*c* definem as condições para falha. Para fins de projeto, é conveniente incluir um coeficiente de segurança N escolhido de modo que o estado de tensões esteja seguramente dentro da elipse de falha por tensão da Figura 5-3.

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} \tag{5.8a}$$

Para o estado tridimensional de tensões, decorre

$$\frac{S_y}{N} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \tag{5.8b}$$

e para o estado duplo de tensões:

$$\frac{S_y}{N} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \tag{5.8c}$$

Cisalhamento puro Para o caso de cisalhamento puro encontrado em carregamentos de torção pura, as tensões principais são $\sigma_1 = \tau = \sigma_3$ e $\sigma_2 = 0$, como mostrado na Figura 5-1*b*. A Figura 5-3 também mostra o estado de tensão devido à torção pura plotado nos eixos σ_1 e σ_3. O lugar da tensão de cisalhamento devido à torção pura é uma linha reta a partir da origem a –45°. Essa linha intercepta a elipse de falha em dois pontos, *A* e *B*. Os valores absolutos de σ_1 e σ_3 nesses pontos são encontrados a partir da Equação 5.6*c* para o caso bidimensional.

$$S_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_1 + \sigma_1^2 = 3\sigma_1^2 = 3\tau_{max}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,S_y = \tau_{max} \tag{5.9a}$$

Essa relação define a **tensão de cisalhamento no escoamento** S_{ys} de qualquer material dúctil como uma fração da tensão normal de escoamento S_y determinada no teste de tração.

$$S_{ys} = 0{,}577\,S_y \tag{5.9b}$$

Teoria da falha dúctil Podemos agora responder a pergunta proposta no primeiro parágrafo deste capítulo sobre se a tensão de cisalhamento ou a tensão normal era responsável pela falha do corpo de prova dúctil em um teste de tração. Baseado nos experimentos e na teoria da energia de distorção, considera-se que *a falha nos casos de materiais dúcteis submetidos a carregamentos estáticos de tração se deve à tensão de cisalhamento*.

Uma nota histórica A utilização da energia de distorção para análise de falha tem muitos pais. De fato, as Equações 5.7 podem ser deduzidas de cinco maneiras diferentes.[2] O método da energia de distorção apresentado aqui foi originalmente proposto por James Clerk Maxwell[3] em 1856, mas não foi mais desenvolvido até que contribuições adicionais fossem feitas em 1904 por Hueber, em 1913 por von Mises e em 1925 por Hencky. Hoje em dia é mais frequentemente creditado a von Mises e Hencky, e algumas vezes somente a von Mises. A tensão equivalente definida nas Equações 5.7 é comumente chamada de tensão de von Mises. Eichinger (em 1926) e Nadai (em 1937) desenvolveram independentemente as Equações 5.7 por um método diferente envolvendo **tensões octaédricas**, e outros chegaram ao mesmo resultado por diferentes caminhos. O número de desenvolvimentos independentes desta teoria usando enfoques diferentes, combinado com a forte correlação entre os dados experimentais e seus prognósticos, fazem desta *a melhor escolha para prever falhas nos casos de carregamento estático de materiais dúcteis nos quais a resistência à tração e à compressão são iguais*.

A teoria da tensão máxima de cisalhamento

O papel da tensão de cisalhamento em falhas estáticas foi reconhecido antes do desenvolvimento da aproximação de von Mises sobre análise de falhas de materiais dúcteis sob carregamentos estáticos. A teoria da máxima tensão de cisalhamento foi proposta primeiro por Coulomb (1736-1806) e depois descrita por Tresca em uma publicação em 1864. Na virada do século 20, J. Guest realizou experimentos na Inglaterra que confirmaram a teoria. Esta teoria é chamada às vezes de teoria de Tresca-Guest.

A **teoria da tensão máxima de cisalhamento** afirma que *a falha ocorre quando a tensão máxima de cisalhamento em uma região excede a tensão máxima de cisalhamento de um corpo de prova sob tração em escoamento (metade da tensão normal de escoamento)*. Isso pressupõe que a tensão de cisalhamento no escoamento de um material dúctil é:

$$S_{ys} = 0,50\,S_y \tag{5.10}$$

Observe que este é um limite mais conservador do que o da teoria da energia de distorção, apresentada na Equação 5.9*b*.

A Figura 5-5 mostra o envoltório hexagonal de falha para o caso bidimensional devido à teoria da máxima tensão de cisalhamento superposto à elipse da energia de distorção. A tensão está inscrita na elipse e em contato com ela em seis pontos. Combinações das tensões principais σ_1 e σ_3 que se encontram dentro desse hexágono são consideradas seguras, e considera-se que a falha ocorre quando o estado combinado de tensões atinge a borda hexagonal. Esta é obviamente uma teoria de falha mais conservadora que a teoria da energia de distorção, pois está contida dentro da última. As condições para o cisalhamento devido à torção pura estão mostradas nos pontos *C* e *D*.

Para o estado triplo de tensões, as Figuras 5-6*a* e 5-6*b* mostram o prisma hexagonal da teoria da máxima tensão de cisalhamento ajustado dentro do cilindro da energia de distorção. As interseções do hexágono da tensão de cisalhamento com os três planos das tensões principais são mostrados na Figura 5-6*c*, inscritas nas elipses da energia de distorção.

Para usar esta teoria em materiais dúcteis, homogêneos e isotrópicos no estado duplo ou triplo de tensões estáticas, primeiro compute as três tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 (uma delas será zero para o caso 2D) e a **tensão máxima de cisalhamento**, τ_{13}, como definida na Equação 4.5. A seguir, compare a tensão má-

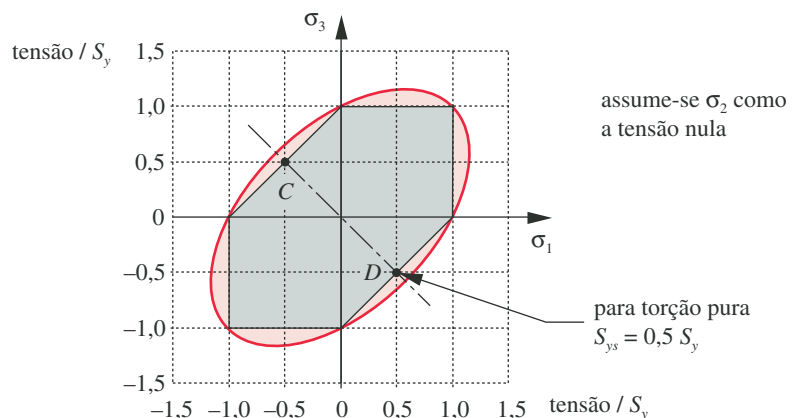



FIGURA 5-5

O hexágono 2D da teoria da tensão de cisalhamento inscrito na elipse da energia de distorção.

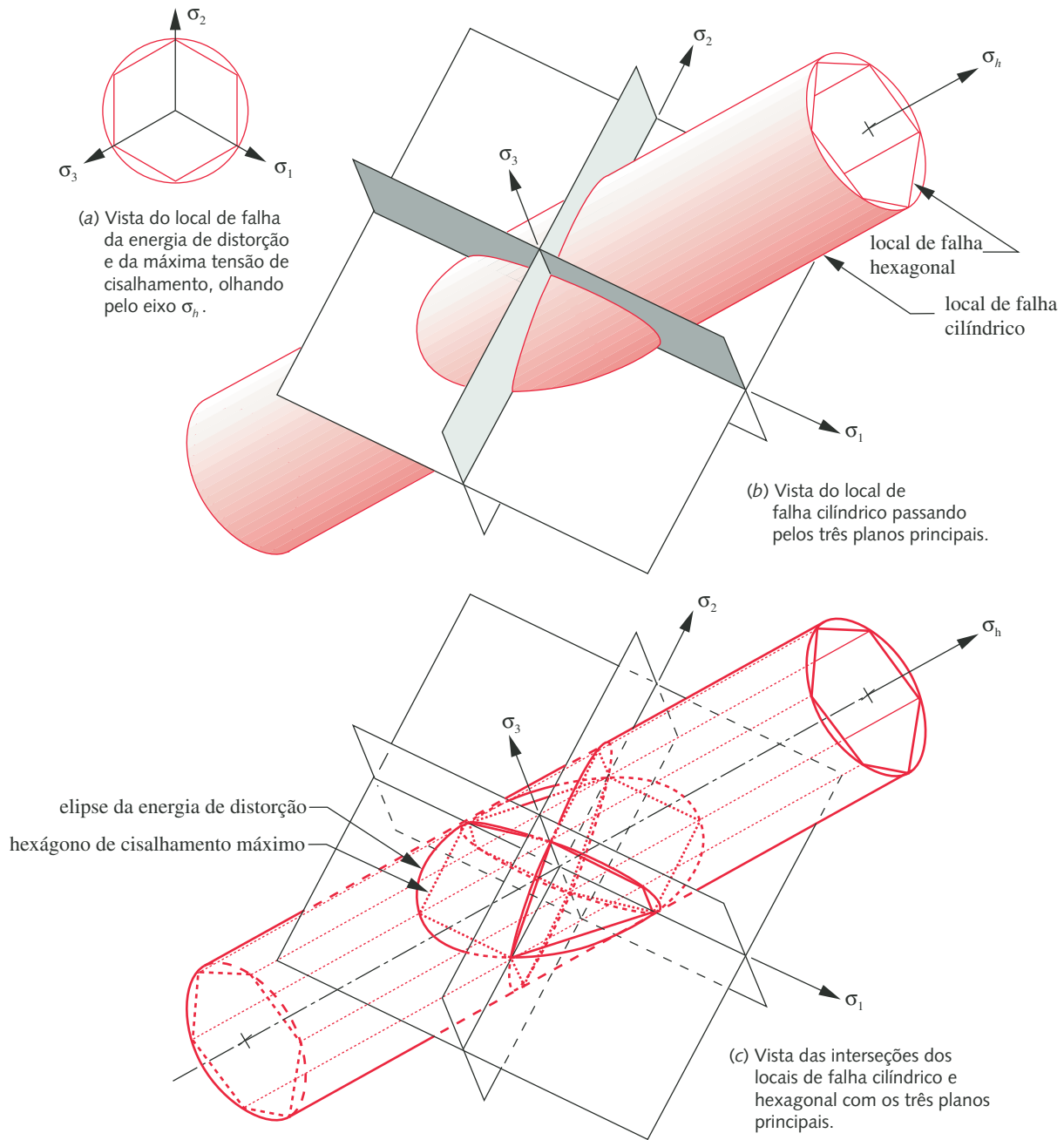



FIGURA 5-6

O local de falha tridimensional pela teoria da energia de distorção e pela teoria da tensão máxima de cisalhamento.

xima de cisalhamento com o critério de falha na Equação 5.10. O **coeficiente de segurança** para a **teoria da tensão máxima de cisalhamento** é encontrado por

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0,50\,S_y}{\tau_{max}} = \frac{S_y/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{S_y}{(\sigma_1 - \sigma_3)} \tag{5.11}$$

onde τ_{max} é o maior resultado da Equação 4.5. Lembre-se de que, mesmo no caso bidimensional de tensões aplicadas, podem existir três tensões de cisalhamento principais, a maior delas sendo τ_{max}.

Teoria da máxima tensão normal

Essa teoria é apresentada por interesse histórico e para se ter uma ideia mais completa, **mas deve-se notar que não é uma teoria segura para materiais dúcteis**. Modificações desta teoria serão rapidamente discutidas, pois são válidas para materias frágeis cujas tensões limite de ruptura na tração são menores que suas tensões limites de ruptura no cisalhamento e na compressão. A **teoria da máxima tensão normal** afirma que *a falha ocorrerá quando a tensão normal em uma peça atingir algum limite de resistência normal, como tensão normal de escoamento ou tensão normal de ruptura*. Para materiais dúcteis, a tensão de escoamento é o critério desejado.

A Figura 5-7 mostra a envoltória de falha para a teoria da tensão normal para o caso bidimensional. Compare essa envoltória quadrada àquela mostrada na Figura 5-5. No primeiro e no quarto quadrantes, a envoltória da teoria da máxima tensão normal coincide com a da teoria da tensão máxima de cisalhamento. Mas no segundo e no terceiro quadrantes, a envoltória da teoria da tensão normal está bem fora tanto da elipse da energia de distorção quanto do hexágono inscrito da teoria do cisalhamento máximo. Como experimentos mostraram que materiais dúcteis falham em carregamentos estáticos quando seus estados de tensões estão fora da elipse, a teoria da tensão normal é um critério de falha inseguro no segundo e no quarto quadrantes. **O projetista sábio evitará usar a teoria da tensão normal com materiais dúcteis.**

Comparação dos dados experimentais com as teorias de falha

Muitos testes de tração foram feitos em vários materiais. Os dados mostram uma dispersão estatística, mas no total tendem a ajustar-se bem à elipse de falha da energia de distorção. A Figura 5-8 mostra os dados experimentais para dois aços dúcteis, duas ligas de alumínio dúcteis e um ferro fundido frágil superpostos aos contornos de falha das três teorias de falha discutidas acima. Observe como os dados do escoamento dos materiais dúcteis aglomeram-se na elipse da energia de distorção (indicada como *tensão de cisalhamento octaédrica*), ou próximos a ela, com alguns pontos incidindo entre o hexágono da teoria da máxima tensão de cisalhamento e a elipse, ambas normalizadas pela tensão de escoamento do material. Os dados de ruptura (e não escoamento) do ferro fundido frágil são vistos aglomerados mais próximos do contorno (quadrado) da máxima tensão

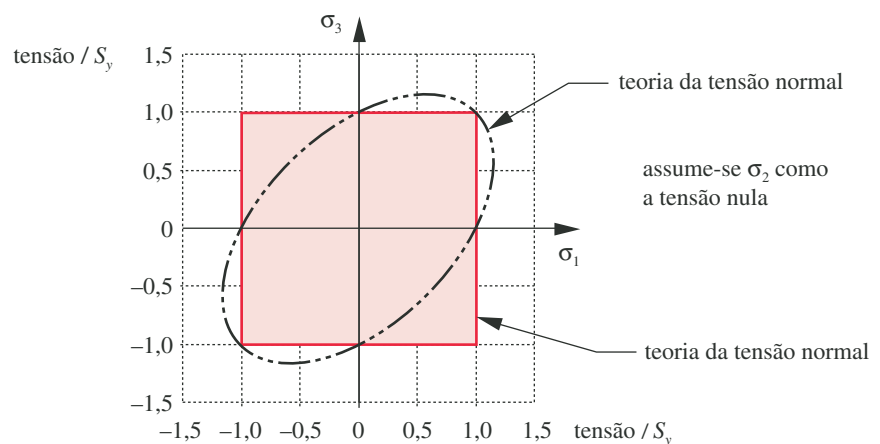



FIGURA 5-7

A teoria da máxima tensão normal – incorreta para materiais dúcteis no 2° e no 4° quadrantes.

normal, que na figura está normalizada pela tensão limite de ruptura e não pela tensão de escoamento.

Esses dados são típicos. A partir deles, podemos ver que a teoria da energia de distorção aproxima com maior precisão os dados de escoamento dúctil e que a teoria da tensão máxima de cisalhamento nos dá um critério mais conservador que está seguramente dentro de praticamente todos os pontos experimentais para o escoamento de materiais dúcteis. Uma vez que um coeficiente de segurança será sempre aplicado, é de se esperar que o estado de tensão atuante esteja dentro dessas linhas de falha, com alguma margem de segurança.

Era comum, no passado, recomendar-se a utilização da teoria da tensão máxima de cisalhamento em projetos, em detrimento da teoria mais precisa da energia de distorção, pois era considerado mais fácil calcular os resultados utilizando-se a primeira teoria. Esse argumento pode ter sido (ou não) justificado nos tempos das réguas de cálculo, mas não é mais aceitável na era das calculadoras programáveis e dos computadores. O método da energia de distorção é muito fácil de usar, mesmo com apenas uma calculadora de bolso, e provê resultados teoricamente mais apurados. Todavia, como alguns dados experimentais incidem dentro da elipse, mas fora do hexágono de cisalhamento, alguns projetistas preferem a aproximação mais conservadora da teoria da tensão máxima de cisalhamento. Como engenheiro responsável, a escolha é, no fim, uma decisão sua.

Tanto a teoria da energia de distorção como a teoria da máxima tensão de cisalhamento são critérios de falha aceitáveis no caso de carregamento estático de materiais dúcteis, homogêneos e isotrópicos, cujas resistências à tração e à compressão são da mesma magnitude. A maioria dos metais forjados utilizados na engenharia e alguns polímeros estão nessa categoria dos chamados **materiais uniformes**. **Materiais não uniformes**, como metais fundidos frágeis e compósitos, não exibem essas propriedades uniformes e requerem teorias de falha mais complexas, algumas delas descritas em seções posteriores e algumas na referência 4. Ver próxima seção para a discussão de materiais uniformes e não uniformes.

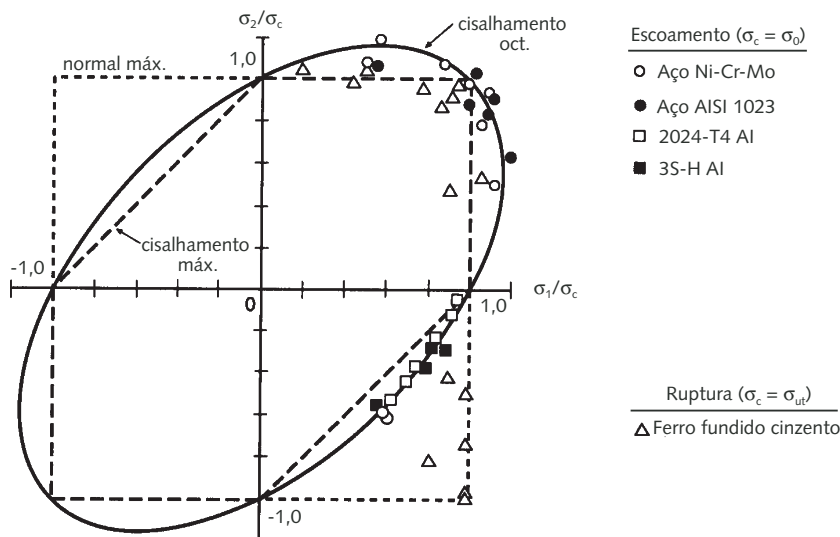



FIGURA 5-8

Dados experimentais de testes de tração superpostos a três teorias de falha. (Reproduzido da Fig. 7.11, p. 252, em *Mechanical Behavior of Materials* por N. E. Dowling, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.)

EXEMPLO 5-1

Falha de materiais dúcteis sob carregamento estático

Problema **Determine os coeficientes de segurança para o suporte do tirante mostrado na Figura 5-9, baseado tanto na teoria da energia de distorção como na teoria da máxima tensão de cisalhamento, e compare-os.**

Dados **O material é alumínio 2024-T4 com tensão de escoamento de 47000 psi. O comprimento da haste é $l = 6$ in e do braço $a = 8$ in. O diâmetro externo da haste é $d = 1{,}5$ in. A força é $F = 1000$ lb.**

Hipóteses **O carregamento é estático e o conjunto está a temperatura ambiente. Considere o cisalhamento devido à força cortante, assim como outras tensões.**

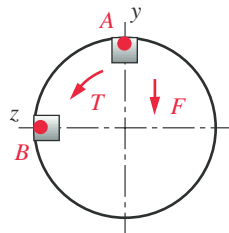
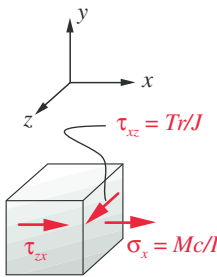
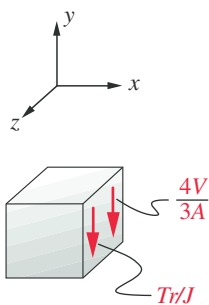
Solução **Ver Figuras 5-9 e 4-33 (repetida nesta página). Ver também o Exemplo 4-9 para uma explicação mais detalhada da análise de tensões para este problema.**

(*a*) Dois pontos de interesse para cálculos de tensões

(*b*) Elemento inifinitesimal de tensão no ponto *A*

(*c*) Elemento inifinitesimal de tensão no ponto *B*

FIGURA 4-33 Repetida

Elementos de tensões nos pontos *A* e *B* na seção transversal da haste para o Exemplo 4-10.

1 A haste está solicitada tanto na flexão (como uma viga engastada) como na torção. A tensão máxima de tração devido à flexão será no topo da fibra mais externa, no ponto *A*. A maior tensão de cisalhamento devido à torção será em torno de toda a circunferência externa da haste. (Ver Exemplo 4-9 para mais detalhes.) Primeiro pegue um elemento infinitesimal no ponto *A* onde ambas as tensões se combinam, como mostra a Figura 4-33*b*. Encontre a tensão normal devido à flexão e a tensão de cisalhamento devido à torção no ponto *A* usando as Equações 4.11*b* e 4.23*b*, respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1\,000(6)(0,75)}{0,249} = 18108 \text{ psi} \tag{a}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1\,000(8)(0,75)}{0,497} = 12072 \text{ psi} \tag{b}$$

2 Encontre a tensão máxima de cisalhamento e as tensões principais que resultam dessa combinação de tensões aplicadas usando as Equações 4.6.

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18108 - 0}{2}\right)^2 + 12072^2} = 15090 \text{ psi}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{max} = \frac{18108 + 0}{2} + 15090 = 24144 \text{ psi} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{max} = \frac{18108 + 0}{2} - 15090 = -6036 \text{ psi} \end{aligned} \tag{c}$$

3 Encontre a tensão equivalente de von Mises a partir das tensões principais usando a Equação 5.7*a* com $\sigma_2 = 0$, que também é mostrada na Equação 5.7*c* para o caso 2D.

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \\ \sigma' &= \sqrt{24144^2 - 24144(-6036) + (-6036)^2} = 27661 \text{ psi} \end{aligned} \tag{d}$$

4 O coeficiente de segurança usando a teoria da energia de distorção pode ser encontrado usando a Equação 5.8*a*.

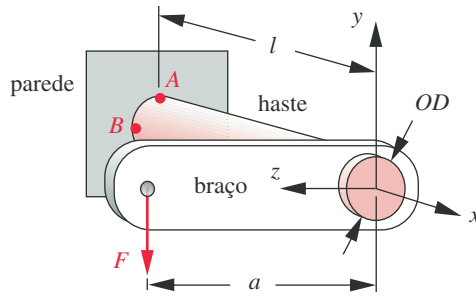



FIGURA 5-9

Suporte dos Exemplos 5-1 e 5-2.

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{47000}{27661} = 1{,}7 \qquad (e)$$

5 O coeficiente de segurança usando a teoria da máxima tensão de cisalhamento pode ser encontrado pela Equação 5.10.

$$N = \frac{0{,}50\,S_y}{\tau_{max}} = \frac{0{,}50(47000)}{15090} = 1{,}6 \qquad (f)$$

6 Comparando esses dois resultados, a teoria da tensão máxima de cisalhamento mostra-se a mais conservadora, dando um coeficiente de segurança ligeiramente menor.

7 Como a haste é uma viga curta, precisamos examinar a tensão de cisalhamento devido à força cortante no ponto B da linha neutra. A tensão máxima de cisalhamento na seção transversal ocorre sobre a linha neutra de uma haste circular e foi dada na Equação 4.15*c*.

$$\tau_{flexão} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1000)}{3(1{,}767)} = 755 \text{ psi} \qquad (g)$$

O ponto B está sujeito ao cisalhamento puro. A tensão de cisalhamento total no ponto B é a soma algébrica do cisalhamento devido à força cortante e o cisalhamento devido à torção, que atuam no mesmo plano do elemento infinitesimal e, neste caso, no mesmo sentido, como mostrado na Figura 4-33*c*.

$$\tau_{max} = \tau_{torção} + \tau_{flexão} = 12072 + 755 = 12827 \text{ psi} \qquad (h)$$

8 O coeficiente de segurança para o ponto B usando a teoria da energia de distorção para cisalhamento puro (Equação 5.9*b*) é:

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0{,}577\,S_y}{\tau_{max}} = \frac{0{,}577(47000)}{12827} = 2{,}1 \qquad (i)$$

e para a teoria da tensão máxima de cisalhamento usando a Equação 5.10 é:

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0{,}50\,S_y}{\tau_{max}} = \frac{0{,}50(47000)}{12827} = 1{,}8 \qquad (j)$$

De novo, o último é mais conservador.

9 Os arquivos EX05-01 encontram-se no CD-ROM.

5.2 FALHA DE MATERIAIS FRÁGEIS SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO

Os materiais frágeis rompem em vez de escoarem. Considera-se que a **ruptura frágil sob tração** *se deve apenas à tensão normal de tração*, e por isso a teoria da máxima tensão normal é aplicável neste caso. A **ruptura frágil sob compressão** *se deve a alguma combinação de tensão normal de compressão e de tensão de cisalhamento*, e requer uma teoria de falha diferente. Para responder por todas as condições de carregamento, é usada uma combinação de teorias.

Materiais uniformes e não uniformes

Alguns materiais forjados, como uma ferramenta de aço totalmente encruado, podem ser frágeis. Esses materiais tendem a ter resistência à compressão igual a sua resistência à tração e são, portanto, chamados de *materiais uniformes*. Muitos materiais fundidos, como o ferro fundido cinzento, são frágeis, mas têm sua resistência à compressão muito maior que sua resistência à tração. Esses materiais são chamados de *materiais não uniformes*. Sua baixa resistência à tração se deve à presença de falhas microscópicas na peça fundida que, quando sujeitas à carga de tração, servem como núcleos para a formação de trincas. Mas quando sujeitas à tensão de compressão, essas falhas são pressionadas, compactando-se e aumentando a resistência ao deslizamento devido à tensão de cisalhamento. Ferros fundidos cinzentos normalmente têm resistências à compressão 3 a 4 vezes maiores que suas resistências à tração, e cerâmicos têm relações ainda maiores.

Outra característica de **alguns materiais fundidos frágeis** é que sua *resistência à tensão de cisalhamento pode ser muito maior que sua resistência à tração*, entre sua resistência à compressão e à tração. Isso é totalmente diferente dos materiais dúcteis, nos quais a resistência ao cisalhamento é cerca da metade da resistência à tração. Os efeitos da maior resistência ao cisalhamento em materiais fundidos podem ser vistos nas características das falhas em testes de tração e de torção. A Figura 2-3 mostra um corpo de prova de tração dúctil cujo plano de falha está a 45° da tensão de tração aplicada, indicando que uma falha de cisalhamento ocorreu, o que também sabemos da teoria da energia de distorção. A Figura 2-5 mostra um corpo de prova de tração frágil cujo plano de falha é normal à tensão de tração aplicada, indicando que uma falha de tração ocorreu. O círculo de Mohr para esse estado de tensões é mostrado na Figura 5-1*a* (repetida aqui) e **é o mesmo para ambos os corpos de prova**. O modo de falha diferente deve-se à diferença relativa à resistência ao cisalhamento e à tração entre os materiais.

FIGURA 5-1 Repetida

Círculo de Mohr para tensão de tração unidirecional (*a*) e torção pura (*b*).

A Figura 2-8 mostra dois corpos de prova em teste de torção. O círculo de Mohr para o estado de tensão em ambos os corpos está mostrado na Figura 5-1*b*. O corpo de prova de aço dúctil falha em um plano normal ao eixo do torque aplicado. A tensão de cisalhamento aplicada é também a tensão máxima de cisalhamento, e a falha é paralela ao plano de máximo cisalhamento, pois materiais dúcteis são mais fracos sob cisalhamento. O corpo de provas de ferro fundido frágil falha em uma forma espiral ao longo de planos inclinados de 45° do eixo da peça. A falha ocorre nos planos de tensão máxima normal (principal), pois este material é mais fraco sob tração.

A Figura 5-10 mostra os círculos de Mohr tanto de testes de tração como de compressão de um *material uniforme* e de um *material não uniforme*. As linhas tangentes a esses círculos constituem as linhas de falha para todas as combinações de tensões aplicadas entre os dois círculos. A área encerrada pelos círculos e pelas linhas de falha representam a zona segura. No caso de materiais uniformes, as linhas de falha independem da tensão normal e são definidas pela máxima tensão de cisalhamento do material. Isso é consistente com a teoria da máxima tensão normal para materiais dúcteis (que também tendem a ser materiais unifor-

FIGURA 5-10

Círculos de Mohr para testes de tração e compressão, mostrando as envoltórias de falha para (*a*) materiais uniformes e (*b*) não uniformes.

mes). Para o material não uniforme, as linhas de falha são função tanto da tensão normal, σ, como da tensão de cisalhamento, τ. Para o regime de compressão, enquanto a componente da tensão normal de compressão torna-se crescentemente negativa (isto é, mais compressão), a resistência à tensão de cisalhamento do material aumenta. Isso é consistente com a ideia expressa anteriormente de que a compressão torna mais difícil a ocorrência do deslizamento cisalhante sobre as linhas defeituosas das falhas internas ao material. A equação da linha reta de falha pode ser encontrada para qualquer material a partir dos dados dos testes mostrados na figura. O coeficiente de inclinação, μ, e a interseção, τ_i, podem ser encontrados por geometria usando apenas os raios dos círculos de Mohr dos testes de tração e compressão.

A independência entre o cisalhamento e a tensão normal mostrada na Figura 5-10*b* é confirmada experimentalmente para os casos em que a tensão de compressão é dominante, especificamente quando a tensão principal que tem seu maior valor absoluto for compressiva. No entanto, os experimentos também mostram que, nas situações em que a tensão de tração domina, materiais frágeis não uniformes falham devido apenas à tração. A tensão de cisalhamento aparentemente não é um fator importante em materiais não uniformes se a tensão principal de maior valor absoluto for de tração.

A teoria de Coulomb-Mohr

Essas observações levam à teoria de Coulomb-Mohr para materiais frágeis, que é uma adaptação da teoria da máxima tensão normal. A Figura 5-11 mostra o caso bidimensional plotado nos eixos σ_1, σ_3 e normalizado pela tensão limite de ruptura na tração, S_{ut}. A teoria da máxima tensão normal é mostrada para um *material uniforme* como o quadrado tracejado de ordenadas e abscissas $\pm S_{ut}$. Isso pode ser usado como critério de falha para materiais frágeis sob carregamento estático se a resistência à tração e à compressão forem iguais (materiais uniformes).

A fronteira da teoria da máxima tensão normal também é mostrada (cinza) para um material *não uniforme,* como o quadrado assimétrico de ordenadas e abscissas S_{ut} e $-S_{uc}$. A envoltória de falha é válida somente nos primeiro e terceiro quadrantes e não leva em conta a interdependência das tensões normal e de cisalhamento mostrada na Figura 5-10, que afeta o segundo e o quarto quadrantes. A envoltória de Coulomb-Mohr (área cinza claro) tenta levar em conta a interde-

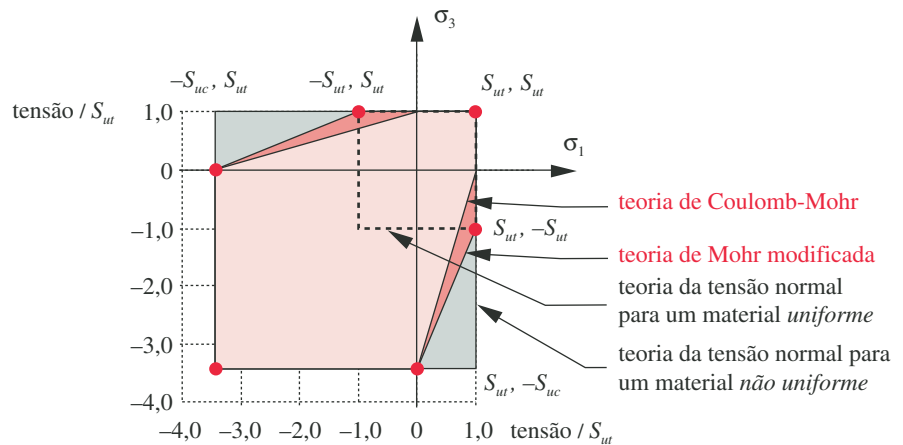



FIGURA 5-11

Teorias de Coulomb-Mohr, Mohr modificada e da máxima tensão normal para materiais frágeis não uniformes.

pendência conectando os cantos opostos destes dois quadrantes com diagonais. Observe a similaridade da forma do hexágono de Coulomb-Mohr com o hexágono da teoria da tensão máxima de cisalhamento para materiais dúcteis na Figura 5-5. As únicas diferenças são as assimetrias do modelo de Coulomb-Mohr devido às propriedades não uniformes do material e o uso da resistência à ruptura em vez da resistência ao escoamento.

A Figura 5-12 mostra alguns dados experimentais superpostos à envoltória de falhas do ferro fundido cinzento. Observe que as falhas no primeiro quadrante são compatíveis com a teoria da máxima tensão normal (que coincide com as outras teorias). As falhas no quarto quadrante incidem **dentro** da linha de máxima tensão normal (indicando sua incompatibilidade) e também incidem bem fora da linha de Coulomb-Mohr (indicando sua natureza conservadora). Essa observação levou a uma modificação da teoria de Coulomb-Mohr para que se ajustasse melhor aos dados observados.

A teoria de Mohr modificada

Os dados reais de falha da Figura 5-12 seguem a envoltória da teoria da máxima tensão normal de materiais uniformes até o ponto de coordenadas (S_{ut}, $-S_{ut}$) abaixo do eixo σ_1 e então segue uma linha reta até o ponto de coordenadas (0, $-S_{uc}$). Este conjunto de linhas, mostrado como as áreas combinadas em vermelho claro e vermelho escuro (também marcado por pontos coloridos), é a **envoltória da teoria de falha de Mohr modificada**. *Essa é a teoria recomendada para materiais frágeis não uniformes sob carregamento estático*.

Se as tensões principais para o caso 2D estão ordenadas como $\sigma_1 > \sigma_3$, $\sigma_2 = 0$, então apenas o primeiro e o quarto quadrantes precisam ser desenhados, como mostrado na Figura 5-13, que plota as tensões normalizadas por N/S_{ut}, onde N é o coeficiente de segurança. A Figura 5-13 também representa as três condições de tensão plana chamadas de A, B e C. O ponto A representa qualquer estado de tensão no qual as duas tensões principais não nulas, σ_1, σ_3, são positivas. A falha ocorrerá quando a linha de carregamento OA ultrapassar a envoltória de falha em A'. O coeficiente de segurança para essa situação pode ser expresso como

$$N = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} \tag{5.12a}$$

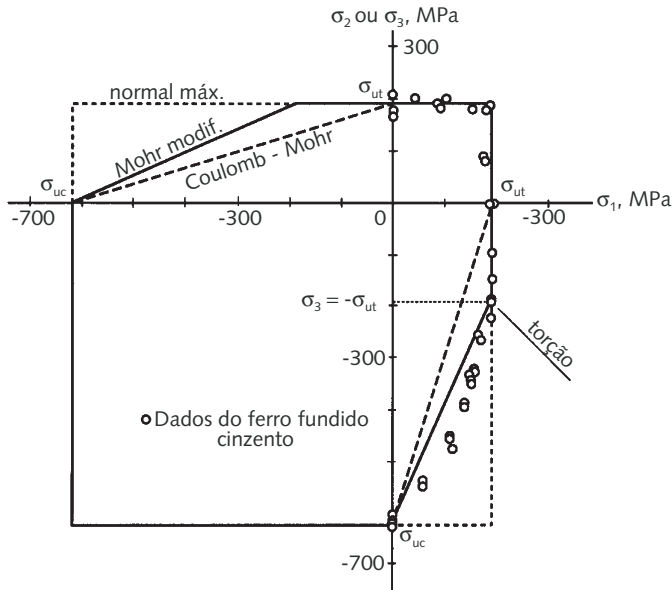



FIGURA 5-12

Dados de fratura biaxial do ferro fundido cinzento comparados a vários critérios de falha. (Extraído da Fig. 7.13, p. 255, em *Mechanical Behavior of Materials* por N. E. Dowling, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J, 1993. Dados de R. C. Grassi e I. Cornet, *Fracture of Gray Cast Iron Tubes under Biaxial Stresses,* J. App. Mech, v. 16, p.178, 1949.)

Se as duas tensões principais não nulas têm sinais opostos, então existem duas possibilidades para a falha, como representado pelos pontos *B* e *C* na Figura 5-13. A única diferença entre esses pontos são os valores relativos de suas duas componentes de tensão, σ_1, σ_3. A linha de carregamento *OB* intercepta a envoltória de falha acima do ponto de coordenadas (S_{ut}, $-S_{ut}$), e o coeficiente de segurança para este caso é dado pela Equação 5.12*a*.

Se o estado de tensão é como representado pelo ponto *C*, então a interseção da linha de carregamento *OC* com a envoltória de falha ocorre em *C'*, abaixo do ponto de coordenadas (S_{ut}, $-S_{ut}$). O coeficiente de segurança pode ser encontrado calculando a interseção entre a linha de carregamento *OC* e a linha de falha. Escrevendo as equações para essas retas e resolvendo-as, chega-se à equação de Mohr modificada.

$$N = \frac{S_{ut}\left|S_{uc}\right|}{\left|S_{uc}\right|\sigma_1 - S_{ut}\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)} \tag{5.12b}$$

Se o estado de tensão estiver no quarto quadrante, ambas as Equações 5.12*a* e 5.12*b* devem ser verificadas e o menor coeficiente de segurança deve ser usado.

Compare a Equação 5.12b com a menos precisa equação para a teoria não modificada de **Coulomb-Mohr** (não recomendada).

$$N = \frac{S_{ut}\left|S_{uc}\right|}{\left|S_{uc}\right|\sigma_1 - S_{ut}\sigma_3}$$

Para usar esta teoria, seria conveniente ter expressões para uma **tensão equivalente** que considerem todas as tensões aplicadas e permitam compará-la diretamente com as propriedades de resistência do material, como foi feito para materiais dúcteis com a tensão de von Mises. Dowling[5] desenvolveu um conjunto de equações para essa tensão equivalente envolvendo as três tensões principais:*

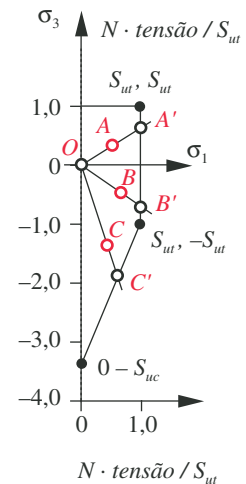



FIGURA 5-13

Teoria de falha de Mohr modificada para materiais frágeis.

* Ver a referência 5 para a dedução completa das teorias de Coulomb-Mohr e Mohr modificada e tensão equivalente nos casos bi e tridimensionais.

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[|\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left[|\sigma_2 - \sigma_3| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \qquad (5.12c)$$
$$C_3 = \frac{1}{2}\left[|\sigma_3 - \sigma_1| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

O maior dos seis valores do conjunto (C_1, C_2, C_3, mais as três tensões principais) é a tensão equivalente desejada como sugerido por Dowling.

$$\tilde{\sigma} = \text{MAX}(C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$
$$\tilde{\sigma} = 0 \quad se \text{ MAX} < 0 \qquad (5.12d)$$

onde a função MAX denota o maior valor algébrico dos seis argumentos disponíveis. Se todos os argumentos forem negativos, então a tensão equivalente é zero.

Esta *tensão equivalente de Mohr modificada* pode agora ser comparada à tensão de ruptura do material para determinar o coeficiente de segurança.

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} \qquad (5.12e)$$

Esse caminho permite fácil computadorização do processo.

EXEMPLO 5-2

Falha de materiais frágeis sob carregamento estático

Problema **Determine os coeficientes de segurança para o suporte do tirante mostrado na Figura 5-9 (repetida na próxima página), baseado na teoria de Mohr modificada.**

Dados **O material é ferro fundido cinzento classe 50 com S_{ut} = 52500 psi e S_{uc} = –164000 psi. O comprimento da haste é l = 6 in e do braço, a = 8 in. O diâmetro externo da haste é d = 1,5 in. A força F = 1000 lb.**

Hipóteses **O carregamento é estático e o conjunto está na temperatura ambiente. Considere o cisalhamento devido à força cortante, assim como as outras tensões.**

Solução **Ver Figuras 5-9 e 4-33 (repetidas na próxima página) e os Exemplos 4-9 e 5-1.**

1 A haste na Figura 5-9 está carregada tanto por flexão (como uma viga engastada) como por torção. A tensão máxima de tração devido à flexão será no topo da fibra mais externa, no ponto A. A maior tensão de cisalhamento devido à torção será em torno de toda a circunferência externa da haste (ver Exemplo 4-9 para mais detalhes). Primeiro considere um elemento inifinitesimal no ponto A onde ambas as tensões se combinam. Encontre a tensão normal devido à flexão e a tensão de cisalhamento devido à torção no ponto A usando as Equações 4.11b e 4.23b, respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1000(6)(0,75)}{0,249} = 18108 \text{ psi} \qquad (a)$$

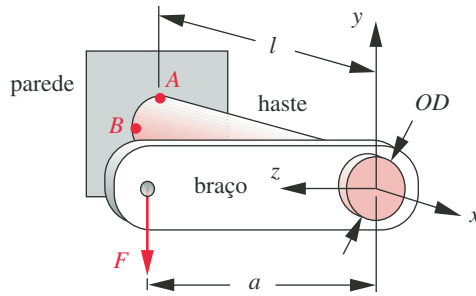



FIGURA 5-9 Repetida

Suporte dos Exemplos 5-1 e 5-2.

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1000(8)(0{,}75)}{0{,}497} = 12072 \text{ psi} \qquad (b)$$

2 Encontre a tensão máxima de cisalhamento e as tensões principais que resultam dessa combinação de tensões aplicadas usando as Equações 4.6.

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18108 - 0}{2}\right)^2 + 12072^2} = 15090 \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{max} = \frac{18108}{2} + 15090 = 24144 \text{ psi} \qquad (c)$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{max} = \frac{18108}{2} - 15090 = -6036 \text{ psi}$$

Observe que essas tensões são idênticas àquelas do Exemplo 5-1.

3 As tensões principais para o ponto A podem agora ser plotadas em um diagrama de Mohr modificado, como mostra a Figura 5-14a. Este mostra que a linha de carregamento cruza a envoltória de falha acima do ponto de coordenadas (S_{ut}, $-S_{ut}$), tornando a Equação 5.12a apropriada para o cálculo do coeficiente de segurança.

$$N = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{52400}{24144} = 2{,}2 \qquad (d)$$

4 Um caminho alternativo que não requer desenhar o diagrama de Mohr modificado é encontrar os fatores de Dowling C_1, C_2, C_3 usando as Equações 5.12c.

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[|\sigma_1 - \sigma_2| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|24144 - 0| + \frac{2(52500) - 164000}{-164000}(24144 + 0)\right] = 16415 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[|\sigma_2 - \sigma_3| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

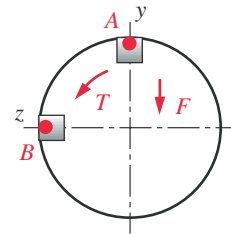
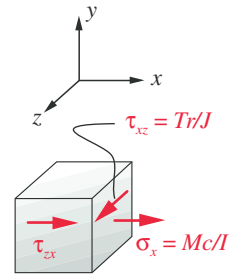
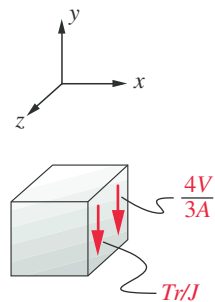
$$= \frac{1}{2}\left[|0 - (-6036)| + \frac{2(52500) - 164000}{-164000}(0 - 6036)\right] = 1\,932 \text{ psi} \qquad (f)$$

(a) Dois pontos de interesse para cálculos de tensões

(b) Elemento infinitesimal de tensão no ponto A

(c) Elemento infinitesimal de tensão no ponto B

FIGURA 4-33 Repetida

Elementos infinitesimais de tensão nos pontos A e B em uma seção transversal da haste do Exemplo 4-10.

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_3 - \sigma_1\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left|24144 - (-6036)\right| + \frac{2(52500) - 164000}{-164000}(24144 - 6036)\right] = 18348 \quad (g)$$

5 A seguir, encontre a maior das seis tensões C_1, C_2, C_3, σ_1, σ_2, σ_3:

$$\tilde{\sigma} = \text{MAX}(C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$
$$\tilde{\sigma} = \text{MAX}(16415,\ 1932,\ 18348,\ 24144,\ 0,\ -6036) = 24144 \quad (h)$$

que é a tensão equivalente de Mohr modificada.

6 O coeficiente de segurança para o ponto A pode agora ser encontrado usando a Equação 5.12e:

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} = \frac{52500}{24144} = 2{,}2 \quad (i)$$

que é o mesmo encontrado no passo 3.

7 Como a haste é uma viga curta, precisamos checar a tensão de cisalhamento devido à força cortante no ponto B da linha neutra. A máxima tensão de cisalhamento devido à força cortante na linha neutra de um cilindro maciço está indicada na Equação 4.15c.

$$\tau_{flexão} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1000)}{1{,}767} = 755 \text{ psi} \quad (j)$$

O ponto B está sob cisalhamento puro. A tensão total de cisalhamento é a soma algébrica da tensão de cisalhamento devido à cortante e a tensão de cisalhamento devido à torção, que agem nos mesmos planos do elemento infinitesimal e, neste caso, agem no mesmo sentido, como mostrado na Figura 4-33c.

$$\tau_{max} = \tau_{torção} + \tau_{flexão} = 12072 + 755 = 12827 \text{ psi} \quad (k)$$

8 Encontre as tensões principais para este carregamento de cisalhamento puro:

$$\sigma_1 = \tau_{max} = 12827 \text{ psi}$$
$$\sigma_2 = 0 \quad (l)$$
$$\sigma_3 = -\tau_{max} = -12827 \text{ psi}$$

9 Essas tensões principais para o ponto B podem ser plotadas em um diagrama de Mohr modificado, como mostrado na Figura 5-14b. Devido ao carregamento puramente cisalhante, a linha de carregamento cruza a envoltória de falha no ponto (S_{ut}, $-S_{ut}$), tornando a Equação 5.12a apropriada para calcular o coeficiente de segurança.

$$N = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{52400}{12827} = 4{,}1 \quad (m)$$

10 Para evitar desenhar o diagrama de Mohr modificado, encontre os fatores de Dowling C_1, C_2, C_3 usando as Equações 5.12c:

$$C_1 = 8721 \text{ psi}$$
$$C_2 = 4106 \text{ psi} \quad (n)$$
$$C_3 = 12827 \text{ psi}$$

(a) Tensões no ponto A

(b) Tensões no ponto B

FIGURA 5-14

Exemplo 5-2.

11 E encontre a maior das seis tensões C_1, C_2, C_3, σ_1, σ_2, σ_3:

$$\tilde{\sigma} = 12827 \text{ psi} \tag{o}$$

que é a tensão equivalente de Mohr modificada.

12 O coeficiente de segurança para o ponto *B* pode agora ser encontrado usando as Equações 5.12*e*:

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} = \frac{52500}{12827} = 4{,}1 \tag{p}$$

e é o mesmo encontrado no passo 9.

13 Os arquivos EX05-02 encontram-se no CD-ROM.

5.3 MECÂNICA DA FRATURA

Todas as teorias de falha estáticas discutidas até aqui assumiram que o material é perfeitamente homogêneo e isotrópico e, portanto, livre de quaisquer defeitos, como fendas, lacunas ou inclusões, que poderiam servir como concentradores de tensão. Isso raramente é verdade para materiais reais. Na verdade, considera-se que todos os materiais contenham microtrincas invisíveis a olho nu. Dolan[6] diz que "(...) *toda estrutura* contém pequenas fendas cujo tamanho e distribuição dependem do material e de seu processamento. Elas podem variar desde inclusões não metálicas e microlacunas até defeitos de solda, rachaduras de afiação, rachaduras de têmpera, dobras de superfícies, etc.". Arranhões ou batidas na superfície devido ao descuido na manipulação também podem servir como princípio de trincas. Contornos geométricos funcionais que são projetados para dentro da peça podem aumentar as tensões locais de maneira previsível e podem ser levados em conta no cálculo de tensões, como discutido no Capítulo 4 (e como será discutido posteriormente). Quebras que ocorrem espontaneamente em serviço, devido a dano ou falha do material, são mais difíceis de prever e esclarecer.

A presença de uma trinca aguda em um campo de tensões cria concentrações de tensão que teoricamente tendem a infinito. Ver a Figura 4-35 e a Equação 4.32*a*, que é repetida por conveniência.

$$K_t = 1 + 2\left(\frac{a}{c}\right) \tag{4.32a}$$

Observe que, quando o valor de *c* se aproxima de zero, a concentração de tensão e, portanto, a tensão aproximam-se de infinito. Como nenhum material pode suportar essas altas tensões, escoamento local (para materiais dúcteis), microfratura local (para materiais frágeis), ou rachadura local (para polímeros) ocorrem na extremidade[7] da fenda. Se as tensões são grandes o suficiente na ponta da trinca de tamanho adequado, podem resultar em uma repentina falha "aparentemente frágil", mesmo em materiais dúcteis sob carregamento estático. A ciência **mecânica da fratura** tem sido desenvolvida para explicar e prever esse fenômeno de falha súbita.

Rachaduras ocorrem comumente em estruturas soldadas, pontes, navios, aeronaves, veículos terrestres, vasos de pressão, etc. Muitas falhas catastróficas ocorreram em navios-tanque e navios de guerra construídos durante a Segunda Guerra Mundial.* [8, 9] Doze dessas falhas ocorreram tão logo foram lançados e antes de navegarem para algum lugar. Eles simplesmente dividiram-se ao meio enquanto ancorados ao cais. A Figura 5-15 mostra um desses navios. O material

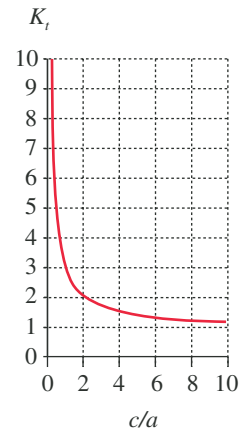
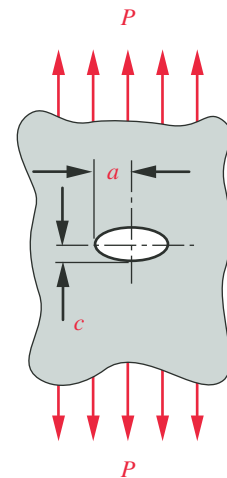



FIGURA 4-35 Repetida

Concentração de tensão no canto de um furo elíptico em uma placa.

* "Cerca de 80 navios partiram-se em dois, e quase 1.000 tinham placas no deck com fratura por fragilidade". D. A. Canonico, "Adjusting the Boiler Code," *Mechanical Engineering*, Feb. 2000, p. 56.

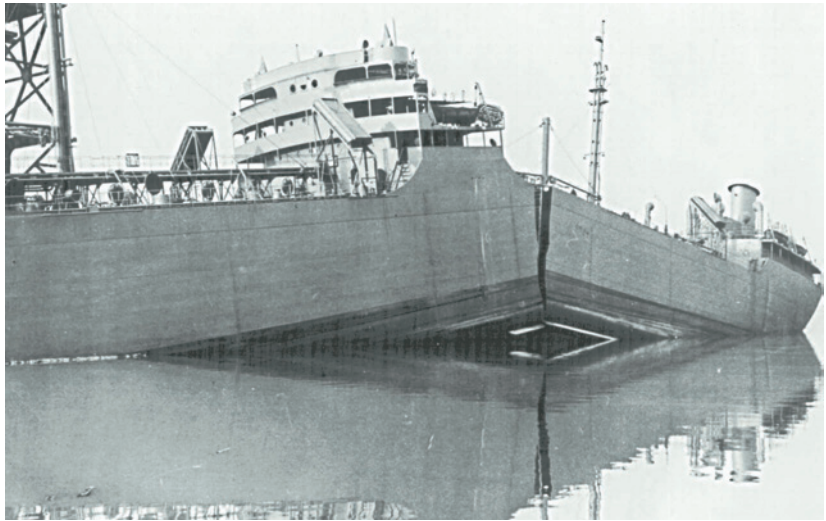



FIGURA 5-15

Navio tanque da II Guerra Mundial partido em dois enquanto estava atracado antes de ser colocado em serviço, Portland, Oregon, 16 de janeiro de 1943. (*Cortesia do Comitê de Estruturas Navais, Governo dos EUA*).

do casco era aço dúctil soldado, e o navio não tinha sido carregado dinamicamente em nenhum grau significativo. As tensões nominais estavam bem abaixo do limite de escoamento do material. Outros exemplos de falha súbita sob tensões abaixo do limite de escoamento ocorreram no século passado, como a ruptura do tanque de melado de Boston em janeiro de 1919, que afogou 21 pessoas e muitos cavalos sob 2,3 milhões de galões de líquido viscoso.[10] Um exemplo mais recente foi a falha de um motor de foguete de 22 pés de diâmetro enquanto era submetido ao teste de pressão pelo fabricante. A Figura 5-16 mostra as partes do foguete após a falha. Ele "foi projetado para suportar pressões de prova de 960 psi (mas) falhou (...) a 542 psi".[11] Essas e outras falhas repentinas "aparentemente frágeis" de materiais dúcteis sob carregamento estático levaram os pesquisadores a buscar teorias de falha melhores, pois as que estavam disponíveis não explicavam adequadamente o fenômeno observado.

Onde a vida humana está em risco, como em pontes, aeronaves, etc., inspeções de segurança periódicas para procurar fissuras são previstas por lei ou regulamento do governo. Essas inspeções podem ser por raio X, energia ultrassônica ou apenas visualmente. Quando as fendas são encontradas, um julgamento de engenharia deve ser feito para reparar ou substituir a peça defeituosa, reformar o conjunto ou mantê-lo em serviço para futuramente sujeitar-se a inspeções mais frequentes. (Muitos aviões comerciais atualmente voando contêm fendas estruturais.) Essas decisões agora podem ser feitas de maneira racional mediante o uso das teorias da mecânica da fratura.

Teorias da mecânica da fratura

A mecânica da fratura pressupõe a presença de uma trinca. O estado de tensão na região da trinca deve ser o estado plano de deformações ou de tensões (ver Seção 4.4). Se *a região de escoamento em torno da ponta da trinca é pequena se comparada às dimensões da peça*, então teorias da **mecânica da fratura linear-elástica** (MFLE) são aplicáveis. A MFLE assume que a maior parte do material

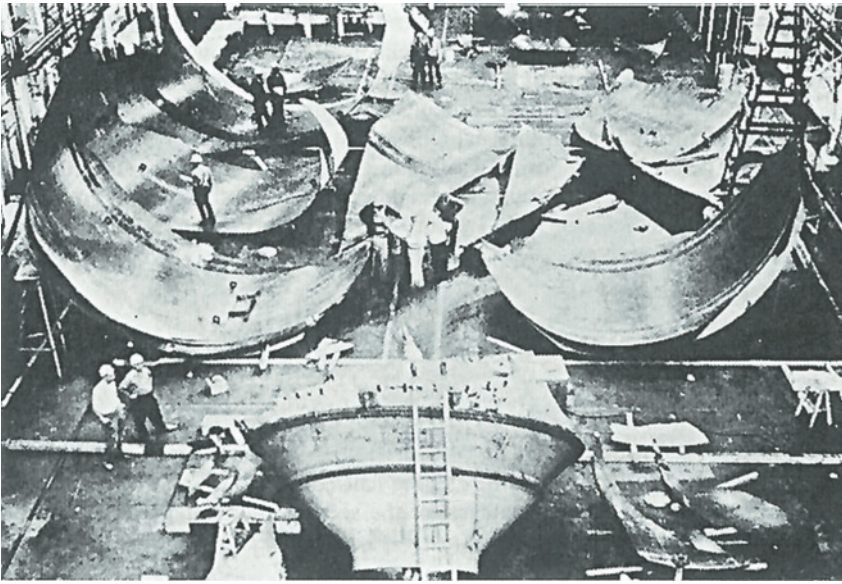



FIGURA 5-16

Caso da falha do motor de foguete. (*Cortesia da NASA – Centro de Pesquisas Lewis*).

está se comportando de acordo com a lei de Hooke. No entanto, se uma parte significativa do volume de material estiver na região plástica de sua curva de tensão-deformação, então é necessária uma abordagem mais complicada que a descrita aqui. Para a discussão seguinte, vamos pressupor que a MFLE se aplica.

Modos geométricos das trincas Dependendo da orientação entre o carregamento e a trinca, a carga aplicada tenderá a puxar a trinca para abrir em tração (Modo I), deslizar a trinca no plano (Modo II) ou deslizar (rasgar) a trinca fora do plano (Modo III), como mostrado na Figura 5-17. A maioria das pesquisas da mecânica da fratura e testes têm sido voltados ao caso do carregamento de tração (Modo I), e nos limitaremos à discussão desse caso.

(*a*) Modo I

(*b*) Modo II

(*c*) Modo III

FIGURA 5-17

Os três modos geométricos da trinca.

Fator de intensidade de tensão K A Figura 5-18*a* mostra uma placa (não em escala) de largura $2b$ sob tração com uma trinca transversal de comprimento $2a$ no centro. Assume-se que a trinca é aguda em suas extremidades e que b é muito maior que a. O plano da trinca é o plano xy. Um sistema de coordenadas polares r-θ é também utilizado no plano xy com sua origem na ponta da trinca, como mostrado na Figura 5-18*b*. Da *teoria da elasticidade*, para $b >> a$, as tensões em torno da borda da trinca, expressa como uma função de coordenadas polares, são

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right] + \ldots \tag{5.13a}$$

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right] + \ldots \tag{5.13b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} + \ldots \tag{5.13c}$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \text{para o estado plano de tensão} \tag{5.13d}$$

(a)

(b)

FIGURA 5-18

Uma trinca passante em uma placa sob tensão.

ou

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \qquad \text{para o estado plano de deformação}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{5.13e}$$

omitindo os termos pequenos de ordem superior. Observe que, quando o raio r é zero, as tensões xy assumem um valor infinito, o que é consistente com a Equação 4.32b. As tensões diminuem rapidamente enquanto r aumenta. O ângulo θ define a distribuição geométrica das tensões em torno da ponta da trinca em qualquer linha radial. **A quantidade *K* é chamada de fator de intensidade de tensão**. (Um símbolo subscrito pode ser adicionado para designar o modo I, II, III do carregamento, como em K_I, K_{II}, K_{III}. Como estamos lidando apenas com o modo I de carregamento, eliminaremos o índice e faremos $K = K_I$.)

Considerando o caso de estado plano de tensão e calculando a tensão equivalente de von Mises, σ', a partir das componentes x, y e de cisalhamento (Equações 5.13*a*, *b, c*), podemos plotar a distribuição de σ' em função de θ para qualquer r escolhido, como mostrado na Figura 5-19*a* para $r = 1E\text{–}5$ in e $K = 1$. A máxima tensão ocorre em torno de + 81o. Escolhendo este valor para θ e calculando a distribuição de σ' como função de r, teremos um gráfico com o aspecto da Figura 5-19*b,* que mostra r de $1E\text{–}5$ até 1 em escala logarítmica.

As maiores tensões próximas à ponta da trinca causam escoamento localizado e criam uma zona plástica de raio r_y como mostrado (não em escala) na Figura 5-19*c*. Para quaisquer raio r e ângulo θ, o estado de tensão nesta zona plástica em torno da ponta da trinca é diretamente proporcional ao **fator de intensidade de tensão *K***. Se $b >> a$, então K pode ser definido para uma placa com uma trinca central como

$$K = \sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \qquad a << b \tag{5.14a}$$

onde σ_{nom} é a tensão nominal* na ausência da trinca, a é o semicomprimento da trinca e b é a semilargura da placa (ver Figura 5-18). Essa equação tem imprecisão menor que 10% se $a / b \leq 0{,}4$. Observe que o fator de intensidade de tensão K é diretamente proporcional à tensão nominal aplicada e proporcional à raiz quadrada do comprimento da trinca. As unidades de K podem ser tanto MPa-m^{0,5} quanto kpsi-in^{0,5}.

Se o comprimento da trinca a não é pequeno se comparado à largura da placa b, e/ou se a geometria da peça é mais complicada do que a simples placa trincada mostrada na Figura 5-18, então um fator β adicional é necessário para calcular K.

$$K = \beta\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \qquad a << b \tag{5.14b}$$

onde β é uma quantidade adimensional que depende da geometria da peça, do tipo de carregamento e da fração a / b. Esse valor também é afetado pela maneira como σ_{nom} é calculado. É costume usar a tensão bruta para σ_{nom} calculada a partir da área da seção original, não subtraindo as dimensões da trinca. Usar a tensão calculada dividindo-se pela área líquida (subtraindo-se a trinca) seria mais preciso, mas menos conveniente de calcular, e a diferença pode ser considerada na determinação do fator geométrico β. Os valores de β para várias geometrias e carregamentos podem ser encontrados em manuais, alguns dos quais citados na bibliografia no final deste capítulo. Por exemplo, o valor de β para uma placa com uma trinca central da Figura 5-18*a* é

$$\beta = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \tag{5.14c}$$

Esse valor se aproxima assintoticamente de 1 para pequenos valores de a / b e é ∞ para $a / b = 1$.

* A tensão nominal para a análise do mecanismo de fratura é calculada com base na área bruta da seção de corte, sem nenhuma redução devido à área da trinca. Observe que isso é diferente dos procedimentos usados para o cálculo da tensão nominal quando usando os fatores concentração de tensão em uma análise regular de tensão. Neste caso, a área líquida da seção de corte é usada para encontrar a tensão nominal.

(*a*) Tensão de von Mises como uma função do ângulo em torno da ponta da trinca (r = 1*E*–5 in)

(*b*) Tensão de von Mises como uma função da distância da ponta da trinca (θ = 71°)

(*c*) Zona de deformação plástica em torno da ponta da trinca

FIGURA 5-19

Campo de tensão plana de von Mises em torno da ponta da trinca em uma placa sujeita à tração axial para um fator de intensidade de tensão $K = 1$.

Se a trinca, por exemplo, estiver na borda da placa em vez de no centro, como mostrado na Figura 5-19*c*, o fator β = 1,12:

$$K = 1{,}12\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \qquad a << b \qquad (5.14d)$$

Essa equação tem imprecisão menor que 10% se $a / b \leq 0{,}13$. Essa equação também tem imprecisão menor que 10% para uma placa com trincas em ambas as bordas da placa se $a / b \leq 0{,}6$ e para uma placa trincada na borda sob flexão se $a / b \leq 0{,}4$.

Tenacidade à fratura K_c

Enquanto o fator de intensidade de tensão K for menor que um valor crítico chamado de **tenacidade à fratura K_c*** (que é uma propriedade do material), a trinca pode ser considerada em um *modo estável* (se o carregamento é estático *e* o ambiente não corrosivo), em um *modo de crescimento lento* (se o carregamento varia com o tempo *e* o ambiente é não corrosivo), ou em um *modo de crescimento rápido* (se o ambiente for corrosivo).[13] **Quando K atinge K_c**, devido ao incremento da tensão nominal ou ao crescimento do comprimento da trinca, ***a trinca propaga-se subitamente até a falha***. A taxa de propagação desta trinca instável pode ser espetacular, atingindo velocidades da ordem de 1 milha/s![14] A estrutura efetivamente se abre como se fosse um zíper.† O coeficiente de segurança para falha de fratura mecânica é definido por

$$N_{FM} = \frac{K_c}{K} \qquad (5.15)$$

Observe que isso pode ser um alvo móvel se a trinca estiver em modo de crescimento, pois K é uma função do comprimento da trinca. Se o comprimento de trinca atual ou típico é conhecido para a peça e a tenacidade à fratura K_c é conhecida para o material, então a máxima tensão nominal permissível pode ser determinada para qualquer coeficiente de segurança escolhido e vice-versa. A tensão admissível para qualquer valor do coeficiente de segurança calculado a partir da versão apropriada da Equação 5.14*c* será tipicamente menor que a calculada com base na deformação de escoamento usando as Equações 5.8 ou 5.11. O efeito da variação de tensões com o tempo (dinâmico) no fator de intensidade de tensão K e na falha será explicado no próximo capítulo.

* Mais corretamente chamado de K_{IC}, onde o I refere-se ao modo I de carregamento. Os valores de tenacidade à fratura para os outros modos de carregamento são designados K_{IIC} e K_{IIIC}. Como estamos discutindo apenas o modo I de carregamento, este será denotado K_C.

† Na ocasião do 75° aniversário da ruptura do tanque de melado de Boston, um morador com 91 anos de idade foi entrevistado e descreveu o que ele viu e ouviu quando garoto, com 16 anos, em janeiro de 1919, ao testemunhar a falha do tanque sobre o monte Cobb ao norte de Boston. Ele lembrou de um estrondo súbito, como uma arma de fogo, seguido rapidamente de uma barulhenta explosão. O "som da arma de fogo" foi muito provavelmente a trinca propagando-se na parede do tanque a até 1 milha/segundo, e a explosão barulhenta foi provavelmente da pressão do melado estourando e desintegrando o tanque, sendo que grandes pedaços deste caíram e destruíram casas a centenas de metros.

Para determinar a tenacidade à fratura, K_c, peças padronizadas ASTM*, contendo uma trinca de dimensões definidas, são testadas até a falha. Para os testes axiais, a peça é presa em uma máquina de teste servo-hidráulica de tal forma que possa ser tracionada ortogonalmente à trinca. (Testes de flexão posicionam a trinca no lado tracionado da viga.) A peça é carregada dinamicamente com deslocamento crescente e a relação carga/deslocamento (constante elástica efetiva) é monitorada. A função carga/deslocamento torna-se não linear no começo do crescimento rápido da trinca. A tenacidade à fratura K_c é medida nesse ponto.

A tenacidade à fratura para materiais de engenharia varia de 20 a 200 MPa-$m^{0,5}$; o K_c de polímeros usados na engenharia e cerâmicas varia de 1 a 5 MPa-$m^{0,5}$.[15] *A tenacidade à fratura geralmente varia junto com a ductilidade* e cresce substancialmente a altas temperaturas. Aços de maior resistência tendem a ser menos dúcteis e têm menor K_c que aços de menor resistência. A substituição de um aço de baixa resistência por um aço de alta resistência tem levado a falhas em algumas aplicações devido à redução na tenacidade à fratura que acompanha a mudança de material.

A tenacidade à fratura de um material em geral varia com a direção do grão. A Figura 5-20 mostra as orientações da amostra e orientações de fenda e seus símbolos de acordo com o padrão ASTM E-399. O primeiro caractere especifica a direção de grãos normal ao plano de fenda, e o segundo caractere, a direção de grãos paralela ao plano de fratura. O teste de dados para tenacidade à fratura geralmente define a orientação da amostra por esse método, como destacado na Tabela 5-1, que apresenta valores de tenacidade à fratura para algumas ligas de aço e alumínio usadas na estrutura de aeronaves.

Um outro exemplo de falha pela mecânica da fratura é mostrado na Figura 5-21*a*, que é uma fotografia do suporte da esfera, de um engate para trailer, de aço de baixo carbono das Figuras 1-2 a 1-6. Essa peça falhou enquanto era dobrada para ser formada a quente. A superfície de fratura pode ser vista como sendo relativamente lisa e os cantos da trinca são extremamente afiados. Como elevadas temperaturas aumentam tanto a ductilidade quanto a tenacidade à fratura, uma súbita falha frágil é rara nessas circunstâncias. Uma inspeção mais próxima da

* Ver ASTM E-399-83, "Método para teste padrão de tenacidade à fratura para materiais metálicos sujeitos a fratura no estado plano de deformação".

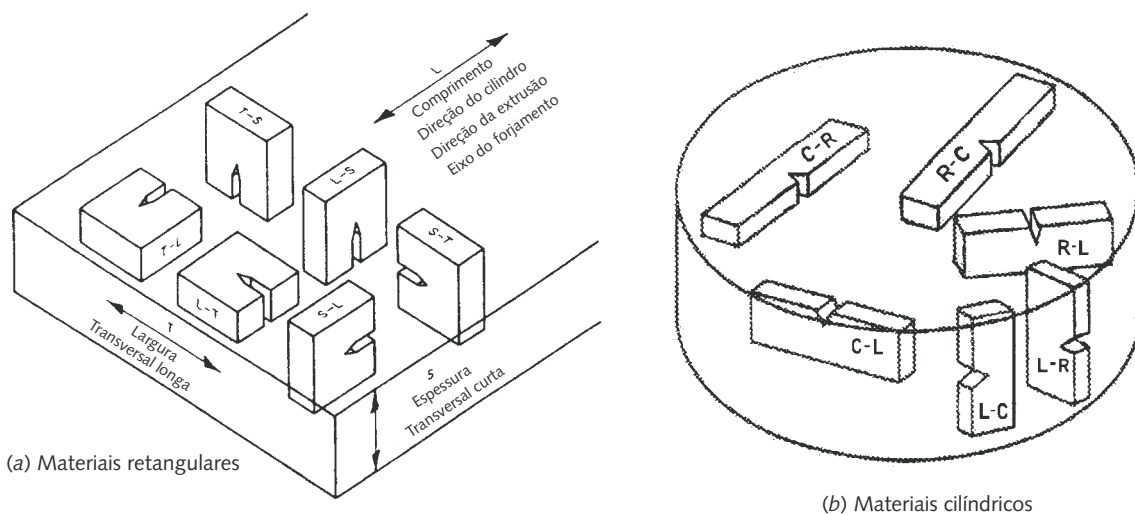



FIGURA 5-20

Direções típicas da fratura principal. Fonte: MIL-HDBK-5J, p. 1-21, January 31, 2003.

Tabela 5-1 Valores de tenacidade à fratura para materiais selecionados [16]
Valores de deformação plana em temperatura ambiente

Material	Liga	Tratamento térmico	Forma	Orientação	Escoamento kpsi	KIC, $kpsi\text{-}in^{0,5}$		
						Max.	Med.	Min.
Aço	AerMet 100	Anneal, TT para 280 kpsi	Barra	E-D	236-281	146	121	100
Aço	AerMet 100	Anneal, TT para 280 kpsi	Barra	C-D	223-273	137	112	90
Aço	AerMet 100	Anneal, TT para 290 kpsi	Barra	E-D	251-265	110	99	88
Aço	AerMet 100	Anneal, TT para 290 kpsi	Barra	C-D	250-268	101	88	73
Aço	Custom 465	H1000	Barra	E-D	212-227	131	120	108
Aço	Custom 465	H1000	Barra	D-E	212-225	118	109	100
Aço	9Ni-4Co-0,20C	Têmpera e revenido (T&R)	Forjamento	E-T	185-192	147	129	107
Aço	D6AC	T&R [ver ref. 16]	Chapa	E-T	217	88	62	40
Alumínio	2024-T351		Chapa	E-T		43	31	27
Alumínio	2024-T852		Forjamento	T-E		25	19	15
Alumínio	7075-T651		Chapa	T-E		27	22	18
Alumínio	7075-T6510		Extrusão	E-T		32	27	23
Alumínio	7075-T6510		Barra forjada	E-T		35	29	24
Alumínio	7475-T651		Chapa	T-E		60	47	34

superfície de falha (mostrada com aumento de 12,5× na Figura 5-21*b*) mostra uma pequena trinca que era aparentemente um defeito na barra de aço. O fator de intensidade de tensão na ponta da trinca excedeu a tenacidade à fratura desse material a sua elevada temperatura e uma súbita falha frágil ocorreu.*

Esta breve discussão da mecânica da fratura mal *arranhou a superfície* deste tópico complexo. Incentivamos o leitor a ler mais sobre este assunto. Fontes para informações gerais sobre a mecânica da fratura, fatores de intensidade de tensão e a propriedade dos materiais de tenacidade à fratura estão disponíveis na bibliografia deste capítulo.

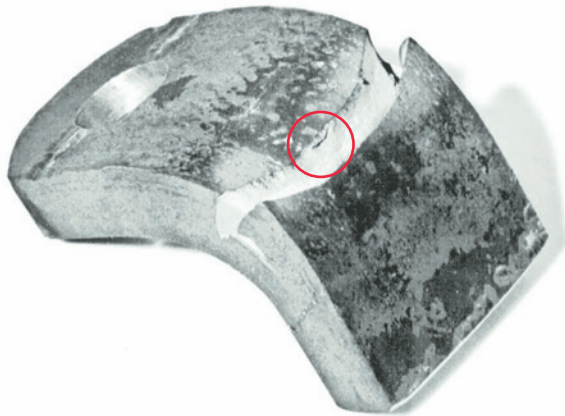
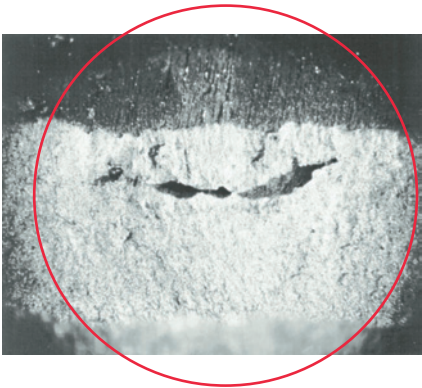
* Observe que a MFLE não pode ser usada para analisar esta falha, pois não está na região linear-elástica. Toda a seção transversal estava sendo deformada plasticamente no instante da falha. Uma análise mecânica não linear da fratura seria necessária neste caso.

(*a*) Engate fraturado enquanto era dobrado a quente

(*b*) Trinca preexistente no material aumentada em 12,5x

FIGURA 5-21

Suporte do engate de trailer de aço dúctil fraturado enquanto era dobrado a quente. Observe a preexistência da trinca e as bordas afiadas da falha. (*Cortesia de Steven Taylor, Mobile Logic Inc., Port Townsend, Wash.*)

EXEMPLO 5-3

Falha de materiais trincados sob carregamento estático

Problema **Uma tira de aço projetada para suportar 60000 N de tração axial foi acidentalmente talhada durante sua produção e agora tem uma trinca em sua borda. Determine o coeficiente de segurança da tira original, sem trinca, baseado no escoamento, e seu novo coeficiente de segurança "trincado" baseado na mecânica da fratura. Quão grande a trinca poderia ficar antes da falha? Um tratamento térmico da peça compensaria a perda de resistência devido à trinca?**

Dados **O material é aço com S_y = 540 MPa e K_c = 66 MPa-m^{0,5}. O comprimento l = 6 m, a largura b = 80 mm e a espessura t = 3 mm. O comprimento da trinca a = 10 mm. A trinca está completamente paralela à espessura, em uma borda de 80 mm de largura, similar à Figura 5-19*c*.**

Hipóteses **O carregamento é estático e o conjunto está a temperatura ambiente. A fração a / b é < 0,13, o que permite usar a Equação 5.14*d*.**

Solução

1 Primeiro calcula-se a tensão nominal na peça não trincada com base na seção de corte total.

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{A} = \frac{60000}{3(80)} = 250 \text{ MPa} \qquad (a)$$

2 Esta tensão é uniaxial, logo é tanto a tensão principal como a tensão equivalente de von Mises. O coeficiente de segurança contra o escoamento usando a teoria da energia de distorção é (Equação 5.8*a*):

$$N_{vm} = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{540}{250} = 2{,}16 \qquad (b)$$

3 O fator de intensidade de tensão K na borda da trinca pode ser encontrado para este caso a partir da Equação 5.14*d* se a fração a / b < 0,13:

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{80} = 0{,}125$$

e (*c*)

$$K = 1{,}12\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} = 1{,}12(250)\sqrt{10\pi} = 49{,}63 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

4 O coeficiente de segurança contra a súbita propagação da trinca é encontrado a partir da Equação 5.15.

$$N_{FM} = \frac{K_c}{K} = \frac{66}{49{,}63} = 1{,}33 \qquad (d)$$

Observe que a falha está agora prevista para ser súbita a 33% de sobrecarga, em um ponto onde a tensão nominal da peça ainda está abaixo da resistência ao escoamento. Isso é muito pouco para permitir que a peça seja usada em face da possibilidade de uma fratura súbita.

5 O tamanho da trinca necessária para a falha pode ser encontrado aproximadamente substituindo K_c por K na Equação 5.14*b* e resolvendo para a. O resultado é uma trinca de cerca de 18 mm de comprimento. Observe, no entanto, que a fração a / b agora excedeu aquela recomendada para 10%

de imprecisão com esta equação. Uma equação mais precisa para este caso pode ser obtida de uma das referências, se desejado.

6 Assumindo que o aço tem carbono suficiente para permitir tratamento térmico, a têmpera completa aumentará a resistência ao escoamento, mas a **ductilidade e a tenacidade à fratura K_c irão diminuir**, tornando a peça **menos segura** contra uma falha pela mecânica da fratura.

7 Os arquivos EX05-03 encontram-se no CD-ROM.

5.4 USANDO AS TEORIAS DE FALHA PARA CARREGAMENTO ESTÁTICO

Não é prático nem possível testar todos os materiais de engenharia sob todas as combinações de tensões aplicadas. As teorias de falha para carregamento estático apresentadas aqui fornecem um meio de relacionar o estado de tensão presente nas peças sujeitas a tensões combinadas ao teste de tração uniaxial de estado simples de tensão. O conceito de tensão equivalente que "converte" a combinação de tensões aplicadas a um valor equivalente que possa ser comparado ao resultado do teste de tração é extremamente útil. No entanto, o projetista deve estar atento às suas limitações a fim de aplicar apropriadamente o conceito da tensão equivalente.

Uma suposição fundamental neste capítulo é que os materiais em questão são macroscopicamente homogêneos e isotrópicos. A maioria dos metais e muitos polímeros de engenharia estão nessa categoria. A admissão da presença de trincas microscópicas não impede o uso das teorias de falha convencionais, desde que trincas detectáveis e macroscópicas não estejam em evidência. Se estiverem, teorias da mecânica da fratura devem ser utilizadas.

Materiais compósitos estão encontrando uso crescente em aplicações que requerem altas relações resistência/peso. Esses materiais são tipicamente não homogêneos e anisotrópicos (ou ortotrópicos), e por isso requerem teorias de falha diferentes e mais complicadas que aquelas apresentadas aqui. Para mais informações, indicamos ao leitor literatura sobre materiais compósitos, alguns dos quais se encontram na bibliografia deste capítulo.

Outra suposição fundamental destas teorias de falha estática é que a carga é aplicada lentamente e permanece essencialmente constante no tempo. Isto é, são carregamentos estáticos. **Quando as cargas (e portanto as tensões) variam no tempo ou são rapidamente aplicadas, as teorias de falha deste capítulo podem não ser o fator limitante.** O próximo capítulo irá discutir outras teorias de falha apropriadas para o caso de carregamento dinâmico e estender as considerações da mecânica da fratura ao carregamento dinâmico. Quando a mecânica da fratura é utilizada em situações de carregamento dinâmico, um valor de tenacidade à fratura dinâmica K_d (K_{Id}, K_{IId} ou K_{IIId}) é usado no lugar da tenacidade à fratura estática K_c discutida anteriormente.

Concentração de tensão devido à descontinuidades geométricas ou contornos agudos, precisam ser levados em conta em alguns casos de carregamento estático antes de aplicar a teoria de falha apropriada. O conceito de concentração de tensão foi explicado e discutido na Seção 4.15. Foi explicado que, **sob carregamento estático**, a concentração de tensão pode ser ignorada se o material for dúctil, pois a elevada tensão na descontinuidade causa escoamento local que reduz seus efeitos. No entanto, é bom repetir que, para materiais frágeis sob carregamento estático, os efeitos da concentração de tensão devem ser aplicados para o cálculo das tensões antes de convertê-las para a tensão equivalente para a comparação conforme as teorias de falha descritas aqui. A única exceção a isso é com alguns materiais

fundidos (como o ferro fundido cinzento), nos quais o número de elevadores de tensão inerentes dentro do material fundido é tão grande que a adição de mais alguns elevadores de tensão geométricos é de pouco efeito adicional.

Temperatura e umidade também são fatores na falha. A maioria dos dados disponíveis para materiais é gerada a temperatura ambiente e baixa umidade. Praticamente todas as propriedades dos materiais são uma função da temperatura. Os metais geralmente se tornam menos duros e mais dúcteis a temperaturas elevadas. Um material dúctil pode tornar-se frágil a baixas temperaturas. Água fervente é quente o suficiente para amolecer alguns polímeros, e um dia frio de inverno pode torná-los extremamente frágeis. Se sua aplicação envolve tanto temperaturas altas como baixas, ou ambientes úmidos/corrosivos, você precisa obter dados de resistência para essas condições do fabricante do material antes de aplicar qualquer teoria de falha.

Trincas Se trincas macroscópicas estão presentes, ou são antecipadas em serviço, então a teoria da mecânica da fratura (MF) deve ser aplicada. Uma vez que as trincas existentes são descobertas em serviço, a MF deve ser usada para prever a falha e determinar a segurança da peça em particular. Caso a experiência prévia com um equipamento similar indicar que a trinca em serviço é um problema, então deve-se usar a MF no projeto de futuras construções, e devem-se fazer inspeções regulares para detectar trincas assim que ocorram.

5.5 ESTUDOS DE CASO NA ANÁLISE DE FALHA ESTÁTICA

Iremos agora continuar alguns estudos de casos cujas forças foram analisadas no Capítulo 3 e cujas tensões foram analisadas no Capítulo 4. O mesmo número associado ao estudo de caso é mantido para um projeto dado por todo o texto, e sucessivas partes são designadas por uma letra. Por exemplo, o Capítulo 4 apresentou quatro estudos de casos denominados 1B, 2B, 3B e 4B. Este capítulo irá continuar estes casos como 1C, 2C, 3C e 4C. O leitor pode rever facilmente a parte anterior de qualquer caso dirigindo-se ao caso de mesmo número. Ver a lista de estudo de casos no sumário deste livro para localizar cada parte. Como as tensões variam ao longo da peça, fizemos um julgamento de engenharia no Capítulo 4 para selecionar onde as tensões seriam maiores e as calculamos nestes locais. Queremos agora determinar seus coeficientes de segurança usando teorias de falha apropriadas.

ESTUDO DE CASO 1C

Análise de falha da alavanca de freio de bicicleta

Problema **Determine os coeficientes de segurança nos pontos críticos da alavanca de freio mostrada nas Figura 3-1 (repetida na próxima página) e 5-22.**

Dados **As tensões são conhecidas do Estudo de Caso 1B. O material é a liga de alumínio forjado ASTM G8A com S_{ut} = 310 MPa (45 kpsi) e S_y = 186 Mpa (27 kpsi). A elongação até a ruptura é 8%, tornando-o um material marginalmente dúctil.**

Hipóteses **Os pontos de falha mais prováveis são os dois furos onde os pinos são inseridos e a base da viga engastada da alavanca.**

Solução **Ver Figuras 3-1 e 5-22 e arquivo CASE1C.**

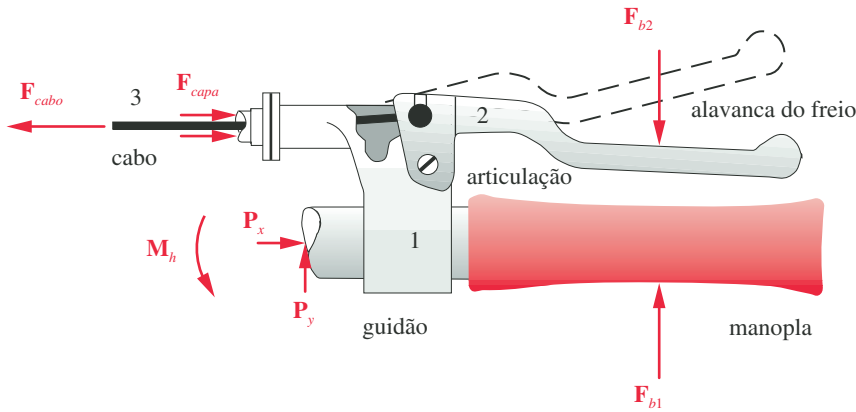



FIGURA 3-1 Repetida

Conjunto da alavanca de freio de bicicleta.

1 A tensão devido à flexão no ponto P da Figura 5-22 na base da viga engastada foi calculada a partir da Equação 4.11b no Estudo de Caso 1B e é

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(267\ \text{N} \cdot 0{,}0762\ \text{m})\left(\dfrac{0{,}0143}{2}\right)\text{m}}{\dfrac{\pi(0{,}0143)^4}{64}\ \text{m}^4} = 70{,}9\ \text{MPa} \qquad (a)$$

2 Esta é a única tensão aplicada neste ponto, de modo que também é a tensão principal. A tensão equivalente de von Mises $\sigma' = \sigma_1$ neste caso (ver Equação 5.7c). Então, o coeficiente de segurança contra o escoamento para o ponto P é (da Equação 5.8a)

$$N_{escoam} = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{186}{70{,}9} = 2{,}6 \qquad (b)$$

O projeto é seguro no carregamento médio, mas não há uma margem grande para proteger de sobrecargas. Observe que neste estado simples de tensão, a teoria da energia de distorção dá resultados idênticos ao da teoria da tensão máxima de cisalhamento, pois a elipse e o hexágono são coincidentes no ponto $x = \sigma_1$, $y = 0$ na Figura 5-5.

3 Como este é um material fundido com ductilidade limitada, seria interessante calcular também o coeficiente de segurança utilizando a teoria de falha de Mohr modificada contra fratura frágil pela Equação 5.12a. Pode-se argumentar que a alavanca do freio ainda deve ser utilizável apesar de uma leve deformação estar ocorrendo:

$$N_{fratura} = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{310}{70{,}9} = 4{,}4 \qquad (c)$$

Observe que não levamos em conta as concentrações de tensão na base do engastamento, que poderia reduzir este coeficiente de segurança à fratura. O Estudo de Caso 1D no Capítulo 8 determina o coeficiente de tensão no ponto P usando a análise do elemento finito.

4 A tensão de cisalhamento transversal no ponto Q da Figura 5-22 foi calculado a partir da Equação 4.15c como

$$\tau_{xy} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(267)\ \text{N}}{\dfrac{3\pi(14{,}3)^2}{4}\ \text{mm}^2} = 2{,}22\ \text{MPa} \qquad (d)$$

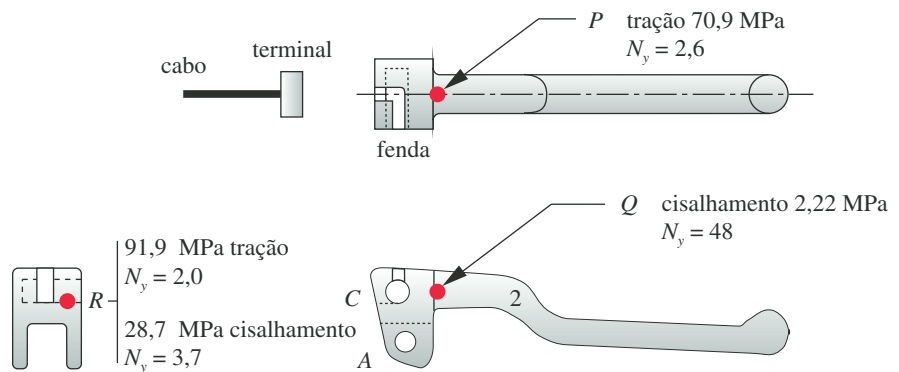



FIGURA 5-22

Tensões e coeficientes de segurança nos pontos selecionados na alavanca de freio de bicicleta.

Essa tensão de cisalhamento também é a máxima, pois nenhuma outra tensão age nesse ponto. O coeficiente de segurança usando a teoria da energia de distorção para cisalhamento puro no ponto Q é

$$N_{transversal} = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0{,}577 S_y}{\tau_{max}} = \frac{0{,}577(186)}{2{,}22} = 48 \tag{e}$$

Obviamente, não há perigo de falha por cisalhamento transversal no ponto Q.

5 A tensão de compressão de esmagamento no ponto A do furo da Figura 5-22 é

$$A_{esm} = \text{diâmetro} \cdot \text{espessura} = 8(2)(6{,}4) = 102 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{esm} = \frac{F_{12}}{A_{esm}} = \frac{1\,951}{102} = 19{,}2 \text{ MPa} \tag{f}$$

e essa tensão, agindo sozinha, também é a tensão principal e de von Mises. Assumindo que a resistência à compressão desse material seja igual a sua resistência à tração (um material uniforme), o coeficiente de segurança contra a falha por esmagamento no furo é

$$N_{esm} = \frac{S_{yc}}{\sigma'} = \frac{186}{19{,}2} = 9{,}7 \tag{g}$$

6 A ruptura por rasgamento (cisalhamento) nesse caso requer que 4 seções de 6,4 mm de espessura falhem por cisalhamento através do material entre o furo A e a borda. (Ver também a Figura 4.13.)

$$A_{rasgamento} = \text{comprimento} \cdot \text{espessura} = 7{,}1(4)(6{,}4) = 181{,}8 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{rasgamento} = \frac{F_{12}}{A_{rasgamento}} = \frac{1951}{181{,}8} = 10{,}7 \text{ MPa} \tag{h}$$

Este é um caso de cisalhamento puro e o coeficiente de segurança é encontrado por

$$N_{rasgamento} = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0{,}577 S_y}{\tau_{max}} = \frac{0{,}577(186)}{10{,}7} = 10{,}0 \tag{i}$$

7 O terminal do cabo aloja-se em um furo não passante que é parcialmente fendido para permitir a passagem do cabo durante a montagem como mostrado na Figura 5-22. Essa fenda enfraquece a peça e torna a seção em R o local de falha mais provável nessa junção. A tensão devido à flexão na fibra mais externa é

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{\frac{1914}{2}\left(\frac{5}{2}\right)(4)}{\frac{10(5)^3}{12}} = 91,9 \text{ MPa} \qquad (j)$$

Como a única tensão aplicada na fibra mais externa desta seção, esta também é a tensão principal e de von Mises. O coeficiente de segurança contra flexão no ponto R é

$$N = \frac{S_{yc}}{\sigma'} = \frac{186}{91,9} = 2,0 \qquad (k)$$

8 O cisalhamento devido à força cortante na linha neutra na seção em R é (Equação 4.14*b*):

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(957)}{2(10)(5)} = 28,7 \text{ MPa} \qquad (l)$$

Essa é a tensão máxima de cisalhamento na linha neutra, e o coeficiente de segurança contra o cisalhamento transversal no ponto R é

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{max}} = \frac{0,577S_y}{\tau_{max}} = \frac{0,577(186)}{28,7} = 3,7 \qquad (m)$$

É interessante observar que o coeficiente de segurança contra o cisalhamento transversal é apenas cerca de duas vezes o coeficiente de segurança contra a flexão no ponto R, pois a viga é muito curta. Compare esse resultado com aquele no ponto P nas Equações (*b*) e (*e*), onde os coeficientes de segurança contra flexão e cisalhamento transversal diferem de um fator em torno de 18 na viga mais longa. Ver Figura 5-22.

9 A liga de alumínio forjado escolhida é uma das mais resistentes ligas de alumínio fundido disponíveis. Caso se deseje proteção adicional contra sobrecarga (como pela queda da bicicleta), tanto uma mudança de geometria para aumentar o tamanho da seção e/ou redução dos concentradores de tensão como uma mudança no material ou método de fabricação poderiam ser feitas. Uma peça de alumínio forjada seria mais resistente, mas aumentaria os custos. O engrossamento da seção aumentaria ligeiramente o peso, mas provavelmente não de forma exorbitante. Aumentar o diâmetro da alavanca em torno do ponto P de 26% para 18 mm (talvez com um raio de transição mais generoso) dobraria o coeficiente de segurança lá, pois o módulo de resistência da seção é uma função de d^3.

Apesar de que alguns outros coeficientes de segurança possam parecer excessivos, pode ser impraticável reduzir essas seções devido às dificuldades em fundir seções delgadas. Outro aspecto que se deve levar em consideração é a aparência da peça produzida para satisfazer o consumidor de um produto como uma bicicleta. Se as dimensões não parecem "certas" para o consumidor, isso pode dar uma indesejada impressão de inferioridade. Às vezes é preferível prover mais espessura do que é necessário para um coeficiente de segurança adequado a fim de dar uma aparência de qualidade.

ESTUDO DE CASO 2C

Análise de falha do alicate de pressão

Problema **Determine os coeficientes de segurança nos pontos críticos do alicate de pressão mostrado nas Figura 3-3 (repetida na próxima página) e 5-23.**

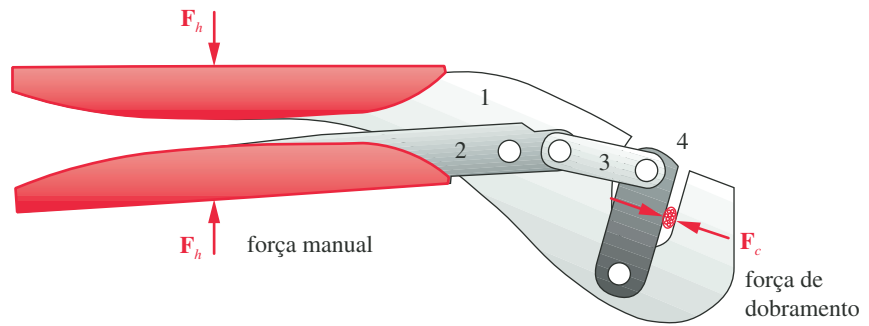



FIGURA 3-3 Repetida

Alicate de pressão para conexão de fios.

Dados **As tensões são conhecidas do Estudo de Caso 2B. Todo o material é aço AISI 1095 Q & T @ 800°F com $S_y = 112$ kpsi (ver Tabela A-9 no Apêndice A). É um material uniforme.**

Hipóteses **Os pontos de falha mais prováveis são o acoplador 3 por flambagem, os furos onde os pinos são inseridos, os pinos de conexão por cisalhamento puro e a barra 4 por flexão.**

Solução **Ver Figuras 3-3 e 5-23 e arquivos CASE2C-1 e CASE2C-2.**

1 O estudo de caso anterior encontrou a carga crítica de flambagem do acoplador 3 como sendo 3,1 vezes a carga aplicada. Esse é o coeficiente de segurança contra flambagem, que é expresso em termos da carga em vez da tensão.

2 Qualquer um dos elos pode falhar devido à tensão de esmagamento nos furos de 0,25 in de diâmetro. A tensão de esmagamento (Equações 4.7 e 4.10) é:

$$\sigma_b = \frac{P}{A_{esm}} = \frac{1560}{0{,}125(0{,}25)} = 50 \text{ kpsi} \tag{a}$$

3 Como é a única tensão aplicada nesse elemento, essa é a tensão principal e também a tensão de von Mises.

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{112}{50} = 2{,}2 \tag{b}$$

4 Os pinos de 0,25 in de diâmetro estão em cisalhamento simples (só uma área de cisalhamento). O pior caso de cisalhamento puro da Equação 4.9 é:

$$\tau = \frac{P}{A_{cis}} = \frac{1560}{\dfrac{\pi(0{,}25)^2}{4}} = 32 \text{ kpsi} \tag{c}$$

Como é a única tensão nesta seção, esta é também a tensão máxima de cisalhamento. O coeficiente de segurança para os pinos em cisalhamento simples da Equação 5.9*a* é:

$$N = \frac{0{,}577 S_y}{\tau_{max}} = \frac{(0{,}577)112}{32} = 2{,}0 \tag{d}$$

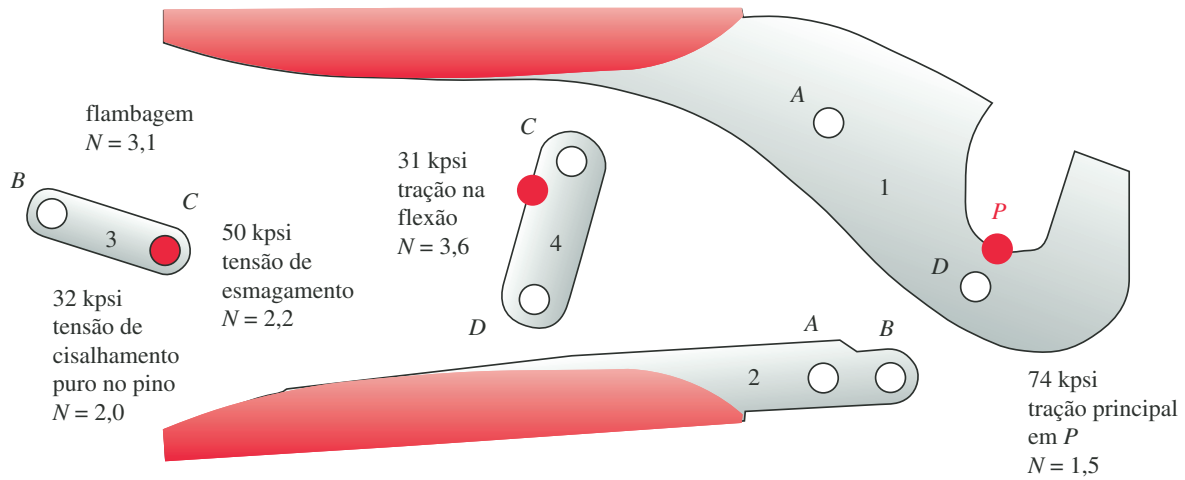



FIGURA 5-23

Tensões e coeficientes de segurança (N) significativos nos pontos críticos do alicate de pressão.

5 A barra 4 é uma viga de 1,55 in de comprimento, biapoiada nos pinos e carregada com 2000 lb de força de dobramento a 0,35 in do ponto C. A largura da viga no ponto de momento máximo é 0,75 in e a espessura é de 0,187 in. Então, a tensão de flexão é:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{541{,}8\left(\frac{0{,}75}{2}\right)}{\frac{0{,}187(0{,}75)^3}{12}} = 31 \text{ kpsi} \tag{e}$$

Como é a única tensão aplicada no elemento na fibra externa da viga, esta é a tensão principal e também a tensão de von Mises. Então, o coeficiente de segurança para a barra 4 sob flexão é

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{112}{31} = 3{,}6 \tag{f}$$

6 A barra 1 tem uma tensão de tração devido à flexão na fibra interna no ponto P na viga curva superposta à tensão de tração normal no mesmo ponto. Sua soma é a máxima tensão principal:

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{2400}{0{,}103\left[(1{,}0-0{,}25)(0{,}313)\right]}\left(\frac{0{,}397}{0{,}600}\right) = 65 \text{ kpsi} \\
\sigma_a &= \frac{F}{A} = \frac{2000}{(1{,}0-0{,}25)(0{,}313)} = 8{,}5 \text{ kpsi} \\
\sigma_1 &= \sigma_a + \sigma_i = 65 + 8{,}5 = 74 \text{ kpsi}
\end{aligned} \tag{g}$$

Não há tensão de cisalhamento aplicada no ponto P, então esta é a tensão principal e também a tensão de von Mises. O coeficiente de segurança contra flexão na fibra interna da viga curva no ponto P da Equação 5.8a é:

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{112}{74} = 1{,}5 \tag{h}$$

7 No furo da barra 1 existe uma tensão normal de tração σ_a da Equação (*g*) aumentada pelo fator de concentração de tensão (ver Estudo de Caso 2B, passo 14). O coeficiente de segurança é encontrado pela Equação 5.8*a*:

$$N = \frac{S_y}{\sigma} = \frac{112}{2{,}42(8{,}5)} = 5{,}4 \qquad (i)$$

Observe que também há uma tensão de cisalhamento transversal no furo que, quando combinada com a tração normal, reduz o coeficiente de segurança no furo para cerca de 3,7.

8 Alguns desses fatores de segurança, como o $N = 1{,}5$ para flexão na barra 1 no ponto *P*, são um pouco baixos para proteger contra sobrecarga induzida pelo usuário. Tanto um aço mais resistente como o SAE 4140 poderia ser escolhido, como o tamanho das seções das peças poderia ser ligeiramente aumentado. Uma pequena mudança na espessura da barra alcançaria coeficientes de segurança aceitáveis com o material existente. Observe que a geometria dessa ferramenta foi simplificada em relação ao projeto real para este exemplo. As tensões e os coeficientes de segurança calculados aqui não são necessariamente os mesmos da ferramenta real, que é um projeto testado e seguro.

ESTUDO DE CASO 3C

Análise de falha de macaco tipo sanfona de automóvel

Problema — **Determine os coeficientes de segurança nos pontos críticos do macaco tipo sanfona.**

Dados — **As tensões são conhecidas do Estudo de Caso 3B. A carga de projeto total é 2000 lb ou 1000 lb por lado. A largura das barras é de 1,032 in e suas espessuras são de 0,15 in. O fuso é um filete de rosca 1/2-13 UNC com diâmetro da raiz de 0,406 in. O material de todas as peças é aço dúctil com $E = 30$ Mpsi e $S_y = 60$ kpsi.**

Hipóteses — **Os pontos de falha mais prováveis são as barras por flambagem, por esmagamento nos furos onde os pinos são inseridos, os pinos de conexão por cisalhamento puro, o dente de engrenagem por flexão e o fuso por tração. Pressuponha que os dois lados dividem a carga igualmente. O macaco é usado por pouquíssimos ciclos durante sua vida útil, então uma análise estática é apropriada.**

Solução — **Ver Figuras 3-5 (repetida na próxima página) e 5-24 e arquivo CASE3C.**

1 As tensões nas partes deste macaco para a posição mostrada foram calculadas na seções anteriores a este Estudo de Caso no Capítulo 4. Favor ver também essas seções anteriores.

2 O parafuso do macaco está solicitado à tração. A tensão de tração foi calculada da Equação 4.7.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4(878)}{0{,}129} = 27128 \text{ psi} \qquad (a)$$

Esta é uma tensão de tração uniaxial, portanto também é a tensão principal e de von Mises. O coeficiente de segurança é

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{60000}{27128} = 2{,}2 \qquad (b)$$

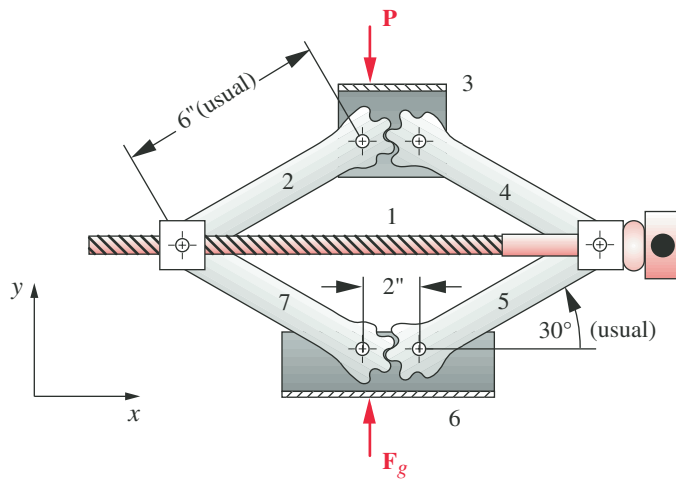



FIGURA 3-5 Repetida

Um macaco tipo sanfona de automóvel.

3 A barra 2 é solicitada como uma viga-coluna. Seu coeficiente de segurança contra flambagem foi calculado na parte anterior a este estudo de caso e é $N = 2{,}3$.

4 A tensão de esmagamento no furo mais carregado em C é

$$\sigma_{esm} = \frac{P}{A_{esm}} = \frac{1026}{0{,}15(0{,}437)} = 15652 \text{ psi} \tag{c}$$

Esta é uma tensão de compressão uniaxial, portanto também é a tensão principal e de von Mises. O coeficiente de segurança é

$$N_{esm} = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{60000}{15652} = 3{,}8 \tag{d}$$

A tensão de cisalhamento nos pinos é

$$\tau = \frac{P}{A_{cis}} = \frac{1026}{\frac{\pi(0{,}437)^2}{4}} = 6841 \text{ psi} \tag{e}$$

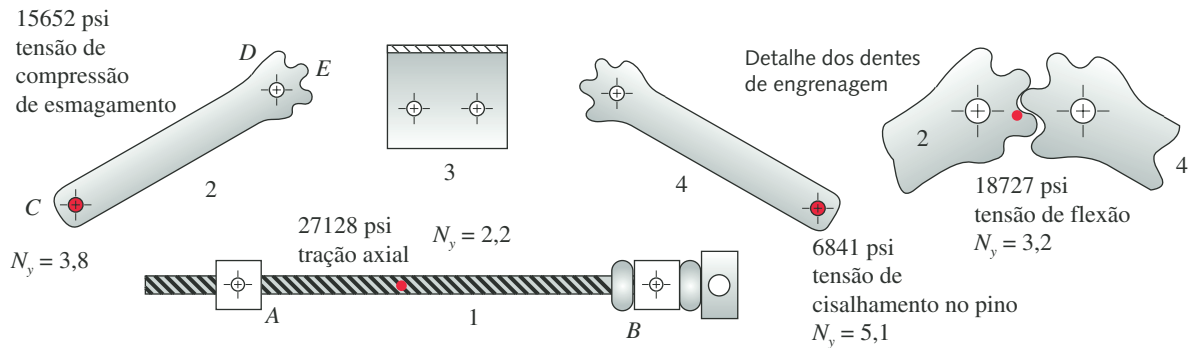



FIGURA 5-24

Algumas tensões e coeficientes de segurança no conjunto do macaco tipo sanfona.

Esta é uma tensão de cisalhamento puro, então também é a tensão máxima de cisalhamento. O coeficiente de segurança é

$$N = \frac{0,577 S_y}{\tau_{max}} = \frac{0,577(60000)}{6841} = 5,1 \tag{f}$$

5 A tensão de flexão na raiz do dente de engrenagem da barra 2 é

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{91(0,22)}{\dfrac{0,15(0,44)^3}{12}} = 18727 \text{ psi} \tag{g}$$

Esta é uma tensão de flexão uniaxial, então também é a tensão principal e de von Mises. O coeficiente de segurança é

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{60000}{18727} = 3,2 \tag{h}$$

6 Esta análise deveria continuar, analisando outros pontos do conjunto e, mais importante, as tensões e coeficientes de segurança quando o macaco está em posições diferentes. Usamos uma posição arbitrária para este estudo de caso, mas, à medida que o macaco se move para posições mais baixas, as forças nas barras e nos pinos aumentam devido a piores ângulos de transmissão. Você pode examinar os modelos para este estudo de caso abrindo os arquivos CASE3C-1 e CASE3C-2 no programa de sua preferência.

ESTUDO DE CASO 4C

Coeficientes de segurança do braço de freio de bicicleta

Problema **Escolha um material de liga apropriado para obter um coeficiente de segurança à ruptura de pelo menos 2 dos pontos críticos do braço do freio de bicicleta mostrado nas Figura 3-9 (repetida na próxima página) e 5-25.**

Dados **As tensões são conhecidas do Estudo de Caso 4B. O braço é de alumínio fundido e o pino de articulação é de aço.**

Hipóteses **Como o braço é um material fundido (não uniforme), a teoria de Mohr modificada será usada para encontrar um coeficiente de segurança para a ruptura. O pino é dúctil, então a teoria da energia máxima de distorção será usada para ele.**

Solução **Ver Figuras 3-9 e 5-25 e arquivo CASE4C.**

1 A tensão de flexão no braço, σ_i nas fibras internas (ponto *A* na Figura 5-25) e σ_o nas fibras externas (ponto *B* na Figura 5-25), foram calculadas como sendo

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{65452(6,063)}{(0,1873)(225)(58)} = 162 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) = \frac{65452(8,937)}{(0,1873)(225)(73)} = -190 \text{ MPa} \tag{a}$$

Para um coeficiente de segurança de 2 neste ponto, precisamos de um material com limite de resistência à tração de no mínimo 325 MPa e limite de resistência à compressão de pelo menos 380 MPa.

FIGURA 3-9 Repetida

Conjunto do braço de freio de bicicleta.

2 A tensão na metade esquerda da Seção B-B, no ponto *C* da Figura 5-25, é a soma da tensão de flexão e da tensão de tração devido à força normal:

$$\sigma_{cubo} = \frac{Mc}{I_{cubo}} + \frac{F_{32_y}}{A_{cubo}} = \frac{65452(12{,}5)}{33948} + \frac{523}{399} = 25{,}4 \text{ MPa} \qquad (b)$$

Isso requer uma resistência à tração do material de cerca de 52 MPa para ter um coeficiente de segurança de 2.

3 A tensão de flexão na fibra externa do lado de 23 mm da parte reta do braço de freio (ponto *D* na Figura 5-25) é

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} = 118{,}6 + 23{,}7 = 142 \text{ MPa} \qquad (c)$$

Para um coeficiente de segurança de 2 neste ponto, precisamos de um material com S_{ut} de pelo menos 284 MPa.

4 Outro possível ponto de ruptura é a fenda no braço (ponto *E* na Figura 5-25). A tensão de cisalhamento no rasgamento é

$$\tau = \frac{F_{52_z}}{A_{rasgamento}} = \frac{589}{32} = 18{,}4 \text{ MPa} \qquad (d)$$

Para um estado de tensão de cisalhamento puro, as tensões estão todas no primeiro quadrante da Figura 5-11 e a teoria de Mohr modificada é idêntica à teoria da máxima tensão normal. A tensão de tração equivalente é, portanto, o dobro da máxima tensão de cisalhamento, o que requer uma tensão limite de resistência superior a 75 MPa para um coeficiente de segurança de 2 neste caso.

5 O pior caso entre os pontos do braço calculados é o ponto A, com σ_y=162 MPa. Esta é uma tensão uniaxial e, portanto, principal. A Tabela A-3 no Apêndice A mostra uma liga de alumínio fundida em molde permanente A132, tratada termicamente a 340°F, com um S_{ut} de 324 MPa. Esse material satisfaz o requisito de coeficiente de segurança à ruptura ≥ 2 neste caso.

$$N_f = \frac{S_{ut}}{\sigma_{b_A}} = \frac{324 \text{ MPa}}{162 \text{ MPa}} = 2{,}0 \qquad (e)$$

6 A resistência ao escoamento convencional referente à deformação permanente de 0,2% para este material é 296 MPa. Como o ponto A está sujeito a um estado de tensão uniaxial, a tensão equivalente de von Mises é $\sigma' = \sigma_y$. O coeficiente de segurança ao escoamento por tração no ponto A é

$$N_y = \frac{S_y}{\sigma'_A} = \frac{296 \text{ MPa}}{162 \text{ MPa}} = 1{,}8 \qquad (f)$$

7 O pino de articulação de 11 mm de diâmetro tem a tensão de flexão máxima no ponto F de

$$\sigma_{pino} = \frac{M_{pino} c_{pino}}{I_{pino}} = \frac{23053\left(\frac{11}{2}\right)}{\frac{\pi (11)^4}{64}} = 176 \text{ MPa} \qquad (g)$$

Para um coeficiente de segurança ao escoamento dúctil de 2, isso requer um aço com resistência ao escoamento de no mínimo 352 MPa. O aço AISI 1040 tem S_y = 372 MPa em condições normalizadas. Isso dá um coeficiente de segurança acima de 2, como desejado.

8 A Figura 5-25 mostra um resumo das tensões em vários pontos críticos da peça. Você pode examinar o modelo para este estudo de caso abrindo o arquivo CASE4C no programa de sua preferência.

Observe que, na maioria dos estudos de caso, algum reprojeto foi necessário após (e apenas após) chegar ao "resultado final" ao determinar os coeficientes de segurança para as geometrias e os carregamentos assumidos no início. Alguns coeficientes de segurança baixos foram encontrados. Isso é típico

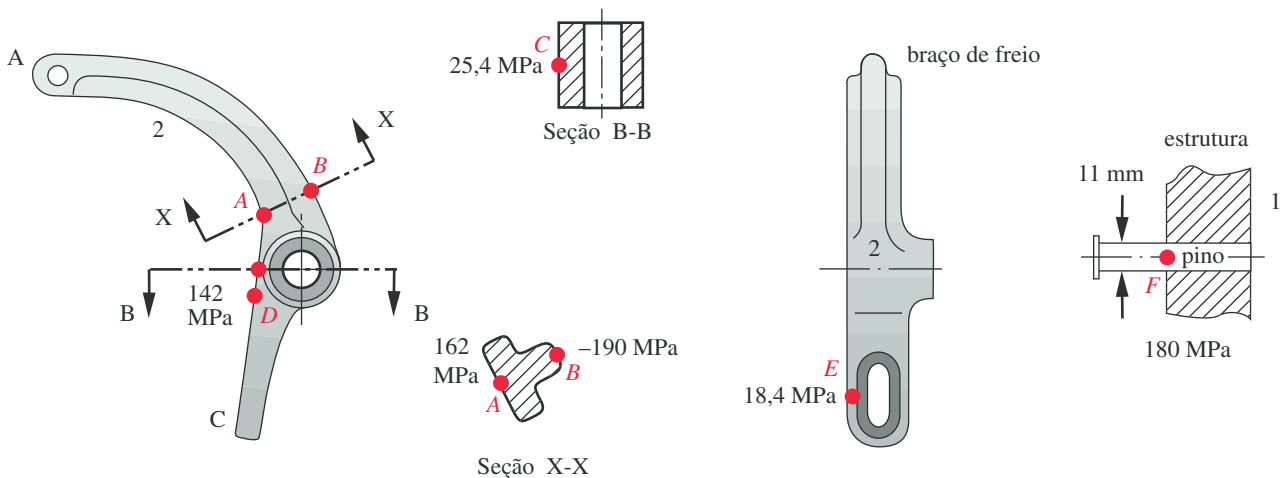



FIGURA 5-25

Tensões nos pontos selecionados do braço de freio.

de problemas de projeto e demonstra sua natureza iterativa. Não podemos saber se nossas hipóteses são válidas até despender tempo e energia consideráveis necessários para analisar completamente o projeto proposto. Não devemos ficar muito desapontados quando descobrimos que nosso primeiro projeto não funciona. Isso não é necessariamente um reflexo das habilidades do projetista. É apenas a natureza do processo. O valor de projetar o modelo analítico em um programa de computador, como uma planilha de cálculo ou um solucionador de equações, agora deve ser óbvio. A análise da geometria reprojetada como proposta neste último estudo de caso pode ser literalmente cumprida em minutos se inicialmente foi dedicado algum tempo para digitalizar o modelo. Se não, estamos em face de uma quantidade de trabalho muito maior para reanalisar o projeto modificado.

5.6 RESUMO

Este capítulo apresentou várias teorias de falhas para materiais sob carregamento estático. Duas dessas teorias parecem ajustar-se melhor aos dados experimentais. Ambas supõem que o material é razoavelmente homogêneo e isotrópico macroscopicamente. Além disso, o mecanismo de propagação de trinca baseado na teoria da mecânica da fratura foi apresentado.

A **teoria da energia de distorção**, também chamada de **teoria de von Mises**, é melhor para materiais dúcteis e uniformes cujas resistências à compressão e à tração são aproximadamente as mesmas e cuja resistência ao cisalhamento é menor que a resistência à tração. Considera-se que esses materiais falhem por cisalhamento, e a teoria da energia de distorção melhor prediz suas falhas.

Materiais não uniformes e frágeis, como ferro fundido, têm tipicamente suas resistências à tração muito abaixo de suas resistências à compressão, e suas resistências ao cisalhamento estão entre estes dois valores. Estes são mais fracos sob tração, e a **teoria de Mohr modificada** descreve melhor suas falhas.

Observe que quando o carregamento não é estático, mas varia com o tempo, *nenhuma destas teorias é apropriada para descrever a falha*. Um conjunto de critérios para carregamentos que variam com o tempo é discutido no próximo capítulo. Se trincas conhecidas estiverem presentes, então a possibilidade de falha súbita devido à propagação da trinca deve ser investigada usando a mecânica da fratura. A trinca pode abrir subitamente a níveis de tensão nominais muito abaixo da tensão de escoamento do material sob certas circunstâncias.

Tensão equivalente Para situações de carregamento com tensões combinadas (como tração e cisalhamento aplicados no mesmo ponto), qual tensão deve ser usada para comparar com o que o material resiste para obter o coeficiente de segurança? A tensão de cisalhamento aplicada deve ser comparada com a resistência ao cisalhamento ou com a tensão normal aplicada com a resistência à tração? A resposta é nenhuma das alternativas. Uma **tensão equivalente**, que combina os efeitos de todas as tensões combinadas aplicadas em um ponto, deve ser calculada e então comparada ao estado "puro" normal de tensão da peça do teste de tração. Essas tensões equivalentes são uma maneira útil de criar um critério de tensão-carregamento para comparar com os dados publicados de resistência dos materiais, mesmo quando a situação de tensões aplicadas for bem diferente do carregamento do corpo de prova. A utilização da tensão equivalente também é válida quando apenas uma tensão é aplicada ao ponto e, portanto, pode ser usada universalmente. O cálculo da tensão equivalente difere com o tipo de material, mas engloba tanto dúctil como frágil.

Para os materiais dúcteis e uniformes, a **tensão equivalente de von Mises** é calculada tanto diretamente a partir das tensões aplicadas (Equações 5.7*b*, 5.7*d*) quanto a partir das tensões principais que resultam das tensões aplicadas

(Equações 5.7*a*, 5.7*c*). Observe que esse cálculo da tensão equivalente converte **qualquer combinação** de tensões 2D ou 3D aplicadas em um ponto em um **valor simples de tensão** σ' que pode ser comparado a um critério de resistência apropriado para obter o coeficiente de segurança. Para materiais dúcteis sob carregamento estático, o critério de resistência desejado é a **tração de escoamento**. (Ver Seção 5.1.)

Para os materiais frágeis não uniformes, a **tensão equivalente de Mohr modificada** pode ser calculada usando as tensões principais que resultam da combinação particular das tensões aplicadas no ponto em questão (Equações 5.12*a-d*). A tensão equivalente resultante é comparada com a tensão de tração na ruptura (e não a tração de escoamento) para obter o coeficiente de segurança. (Ver Seção 5.2.)

Mecânica da fratura Além das possibilidades de falha por escoamento ou ruptura, uma peça pode falhar a tensões muito mais baixas pela propagação de trinca se uma trinca de tamanho suficiente estiver presente. A teoria da mecânica da fratura provê um meio de prever tais falhas súbitas baseadas em um **fator de intensidade de tensão** calculado comparado a um critério testado de **tenacidade à fratura** para o material. (Ver Seção 5.3.)

O processo de análise de falha para carregamento estático pode ser resumido em uma série de passos como mostrado no fluxograma da Figura 5-26. Repare que os primeiros cinco passos são os mesmos daqueles do fluxograma da Figura 4-60.

Equações importantes usadas neste capítulo

Ver as seções referidas para informações sobre o uso adequado destas equações.

Tensão equivalente de von Mises para 3 dimensões (Seção 5.1):

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \quad (5.7a)$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (5.7b)$$

Tensão equivalente de von Mises para 2 dimensões (Seção 5.1):

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \quad (5.7c)$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (5.7d)$$

Coeficiente de segurança para materiais dúcteis sob carregamento estático (Seção 5.1):

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} \quad (5.8a)$$

Limite de escoamento no cisalhamento como função do limite de escoamento na tração (Seção 5.1):

$$S_{ys} = 0{,}577\,S_y \quad (5.9b)$$

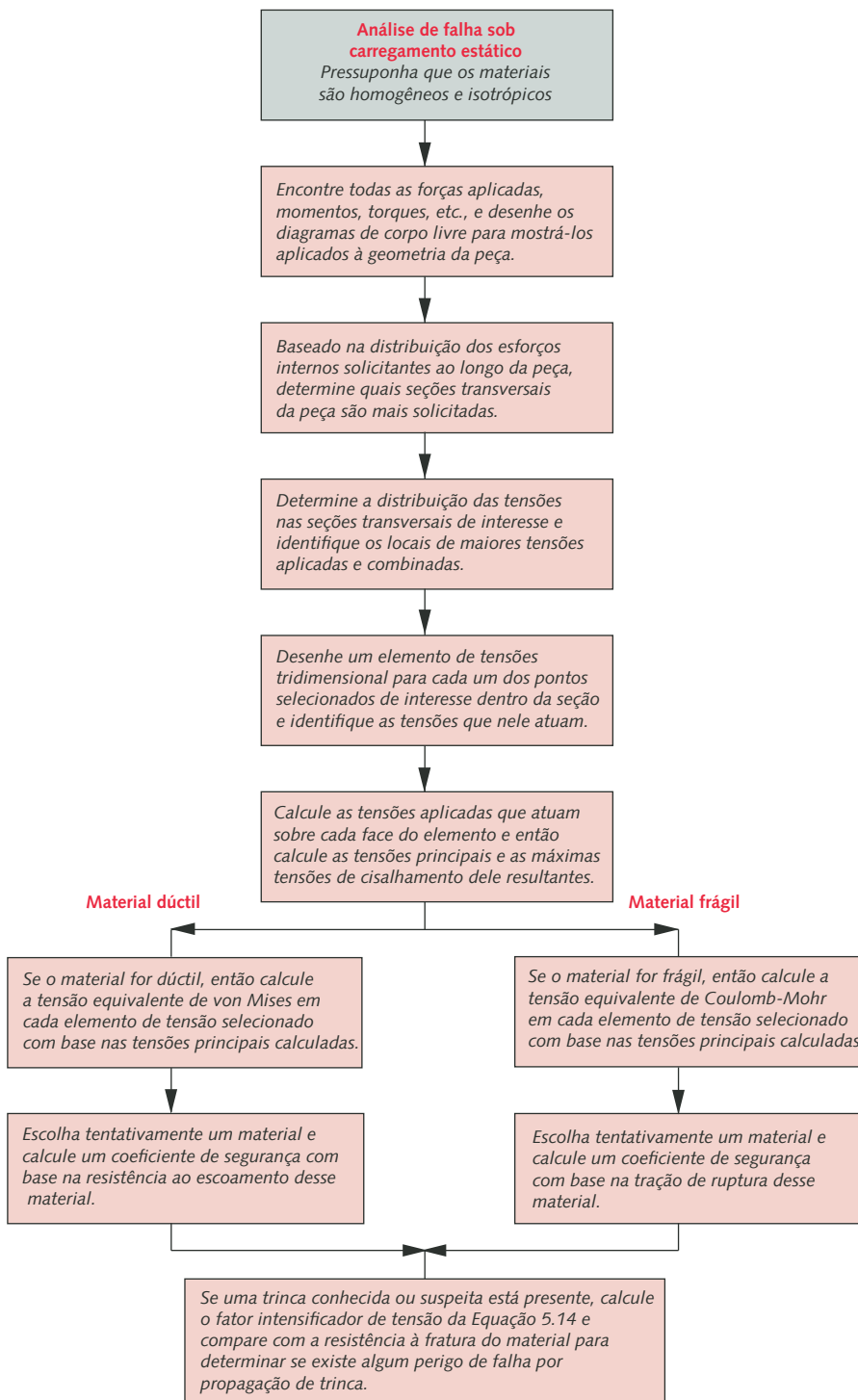



FIGURA 5-26

Fluxograma para análise de falha estática.

Tensão equivalente de Mohr modificada para 3 dimensões (Seção 5.2):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] \\ C_2 &= \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_2 - \sigma_3\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \\ C_3 &= \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_3 - \sigma_1\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right] \end{aligned} \tag{5.12c}$$

$$\tilde{\sigma} = \text{MAX}\left(C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$$

$$\tilde{\sigma} = 0 \quad se \text{ MAX} < 0$$

Coeficiente de segurança para materiais frágeis sob carregamento estático (Seção 5.2):

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} \tag{5.12e}$$

Fator de intensidade de tensão (Seção 5.3):

$$K = \beta\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \qquad a \ll b \tag{5.14b}$$

Coeficiente de segurança para propagação de trinca (Seção 5.3):

$$N_{FM} = \frac{K_c}{K} \tag{5.15}$$

5.7 REFERÊNCIAS

1 **J. P. D. Hartog**, *Strength of Materials*, Dover Press: New York, p. 222, 1961.

2 **J. Marin**, *Mechanical Behavior of Engineering Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., pp. 117-122, 1962.

3 **S. P. Timoshenko**, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill: New York, 1953.

4 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 252, 1993.

5 ***Ibid.***, pp. 262-264.

6 **T. J. Dolan**, *Preclude Failure: A Philosophy for Material Selection and Simulated Service Testing*. SESA J. Exp. Mech., Jan 1970.

7 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 280, 1993.

8 *Interim Report of a Board of Investigation to Inquire into the Design and Methods of Construction of Welded Steel Merchant Vessels*, USGC Ship Structures Committee, Wash., D. C. 20593-0001, June 3, 1944.

9 **C. F. Tripper**, *The Brittle Fracture Story*, Cambridge University Press: New York, 1962.

10 **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, p. 71, 1967.

11 **J. M. Barsom and S. T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*. 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs N. J., p. 203, 1987.

12 **J. A. Bannantine, J. J. Comer, and J. L. Handrock**, *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 94, 1990.

13 **D. Broek**, *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, pp. 8-10, 1988.

14 **Ibid.**, p. 11.

15 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., pp. 306-307, 1993.

16 *Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures*, Department of Defense Handbook MIL-HDBK-5J, January 31, 2003.

5.8 BIBLIOGRAFIA

Para informações adicionais sobre fratura mecânica, ver:

J. M. Barsom and S. T. Rolfe, *Fracture and Fatigue Control in Structures*. 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1987.

D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 1988.

R. C. Rice, ed. *Fatigue Design Handbook*. 2nd ed. SAE: Warrandale, PA. 1988.

Para informações adicionais sobre fatores de intensidade de tensão, ver:

Y. Murakami, ed. *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press: Oxford, U. K., 1987.

D. P. Rooke and D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*. Her Majesty's Stationary Office: London, 1976.

H. Tada, P. C. Paris, and G. R. Irwin, *The Stress Analisys of Cracks Handbook*. 2nd ed. Paris Production Inc.: 226 Woodbourne Dr., St. Louis Mo., 1985.

Para informações adicionais sobre resistência à fratura dos materiais, ver:

Battelle, *Aerospace Strucural Metals Handbook*. Metals and Ceramics Information Center, Battle Columbus Labs: Columbus, Ohio, 1991.

J. P. Gallagher, ed. *Damage Tolerant Design Handbook*. Metals and Ceramics Information Center, Battle Columbus Labs: Columbus, Ohio, 1983.

C. M. Hudson and S. K. Seward, *A Compendium of Sources of Fracture Toughness and Fatigue Crack Growth Data for Metallic Alloys*. Int. J. of Fracture, **14**(4): R151-R184, 1978.

B. Marandet and G. Sanz, *Evaluation of Toughness of Thick Medium Strength Steels*, in *Flaw Growth and Fracture*. Am. Soc. for Testing and Materials: Philadelphia, PA., pp. 72-95, 1977.

Para informações adicionais sobre falha de materiais compósitos, ver:

R. Juran, ed., *Modern Plastics Encyclopedia*, McGraw-Hill: New York. 1992.

A. Kelly, ed., *Concise Encyclopedia of Composite Materials*, Pergamon Press: Oxford, U. K. 1989.

M. M. Schwartz, *Composite Materials Handbook*. McGraw-Hill: New York, 1984.

5.9 PROBLEMAS

*†**5-1** Um paralelepípedo infinitesimal possui um conjunto de tensões aplicadas em suas faces, como indicado em cada linha da Tabela P5-1. Para a linha designada, desenhe o elemento de tensão 3D, mostrando as tensões aplicadas. Determine as tensões principais e de von Mises.

5-2 Um lustre de 400 lb deve ser suspenso por meio de dois fios maciços de aço de baixo carbono, de 10 ft de comprimento, sob tração. Dimensione os fios para um fator de segurança igual a 4. Especifique todas as hipóteses adotadas.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

† Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

Tabela P5-0[†]
Matriz de problemas/tópicos

5.1 Materiais dúcteis
5-1, *5-2*, **5-3**, **5-4**, **5-6**, ***5-7***, 5-8, **5-9**, *5-14*, 5-15, **5-16**, **5-17**, *5-19*, *5-20*, 5-21, **5-22**, ***5-27a***, ***5-28***, 5-29, *5-31*, **5-33**, **5-34**, **5-36**, **5-41**, **5-42**, **5-43**, ***5-44***, **5-45**, **5-46**, **5-47**, **5-48**, **5-49**, **5-56**, **5-57**, **5-58**, **5-60**, **5-67**, ***5-68***, ***5-73***, **5-74**, **5-78**, **5-79**, **5-80**, **5-81**

5.2 Materiais frágeis
5-10, **5-11**, **5-12**, **5-13**, **5-18**, **5-23**, **5-24**, **5-25**, **5-26**, ***5-27b***, 5-30, 5-32, **5-35**, **5-37**, 5-59, *5-40*, 5-61, 5-62, 5-63, 5-64, 5-65, 5-66, **5-69**, **5-70**, **5-71**, **5-72**, *5-75*, *5-82*, *5-83*, *5-84*, *5-85*

5.3 Mecânica da fratura
5-38, 5-39, 5-50, 5-51, 5-52, 5-53, 5-54, 5-55, 5-76, 5-77

5-3 Para o conjunto braço-pedal de bicicleta mostrado na Figura P5-1, com uma força de 1500 N no pedal aplicada pelo ciclista, determine a tensão de von Mises no braço do pedal de diâmetro igual a 15 mm. O pedal é conectado ao braço através de uma rosca de 12 mm. Encontre a tensão de von Mises no parafuso. Determine o fator de segurança à falha estática se o material tem $S_y = 350$ MPa.

***5-4** O engate de reboque ilustrado na Figura P5-2 e na Figura 1-1 possui as cargas aplicadas conforme o desenho. Um peso de 100 kgf atua para baixo e a força horizontal (de arranque) de 4905 N atua na direção horizontal. Usando as dimensões do suporte da esfera mostradas na Figura 1-5 e um $S_y = 300$ MPa de aço dúctil, determine os coeficientes de segurança (estático) para:

(a) O encaixe da esfera, onde ela se liga ao suporte.
(b) Falha por esmagamento do furo do suporte da esfera.
(c) Falha por cisalhamento do suporte da esfera.
(d) Falha de tração nos parafusos de fixação, se eles tiverem 19 mm de diâmetro.
(e) Falha de flexão no suporte da esfera como uma viga em balanço.

5-5 Repita o Problema 5-4 para as condições de carregamento do Problema 3-5.

***5-6** Repita o Problema 5-4 para as condições de carregamento do Problema 3-6.

****5-7*** Projete o pino de êmbolo do Problema 3-7 para um fator de segurança igual a 3,0, se $S_y = 100$ kpsi.

***5-8** Uma fábrica de papel processa rolos de papel que possuem uma densidade de 984 kg/m^3. O rolo de papel tem 1,50 m de diâmetro externo por 0,22 m de diâmetro interno por 3,23 m de comprimento e está simplesmente apoiado em um eixo de aço cavado com $S_y = 300$ MPa. Determine o diâmetro interno do eixo necessário para se obter um fator de segurança estático igual a 5 se o eixo em questão tiver um diâmetro externo de 22 cm.

5-9 Para o alicate de pressão (ViseGrip®) desenhado em escala na Figura P5-3, cujas forças foram analisadas no Problema 3-9 e tensões foram analisadas no Problema 4-9, determine os fatores de segurança para cada pino, assumindo uma força de aperto $P = 4000$ N na posição ilustrada. Todos os pinos estão sob cisalhamento duplo, têm 8 mm de diâmetro e $S_y = 400$ MPa.

***5-10** Um trampolim biarticulado em balanço é mostrado na Figura P5-4*a*. Pressuponha uma seção transversal de dimensões iguais a 305 mm × 32 mm. Determine a maior tensão principal atuante na prancha quando uma pessoa de 100 kg permanece de pé na extremidade livre dela. Qual é o fator de segurança estático se o material é fibra de vidro (frágil) com $S_{ut} = 130$ MPa na direção longitudinal?

***5-11** Repita o Problema 5-10 supondo, agora, que a pessoa de 100 kg do Problema 5-10 salta de 25 cm e retorna à prancha. Considere que a prancha pesa 29 kg e deflete 13,1 cm estaticamente quando a pessoa está de pé nela. Qual é o fator de

Tabela P5-1 Dados para o Problema 5-1
Linhas *a-g* são de problemas bidimensionais; as outras referem-se a problemas 3D.

Linha	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
a	1 000	0	0	500	0	0
b	–1000	0	0	750	0	0
c	500	–500	0	1000	0	0
d	0	–1500	0	750	0	0
e	750	250	0	500	0	0
f	–500	1 000	0	750	0	0
g	1 000	0	–750	0	0	250
h	750	500	250	500	0	0
i	1 000	–250	–750	250	500	750
j	–500	750	250	100	250	1 000

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

[†] Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

segurança estático se o material é fibra de vidro (frágil) com S_{ut} = 130 MPa na direção longitudinal?

5-12 Repita o Problema 5-10 usando o projeto de trampolim engastado da Figura P5-4*b*.

5-13 Repita o Problema 5-11 usando o projeto de trampolim engastado ilustrado na Figura P5-4*b*. Considere que a prancha pesa 19 kg e deflete 8,5 cm estaticamente quando a pessoa está de pé nela.

5-14 A Figura P5-5 mostra um brinquedo infantil chamado de pula-pula. A criança fica em pé sobre os suportes, aplicando metade de seu peso em cada lado do brinquedo. Ao saltar do solo, suportando os apoios contra os seus pés, a criança sofre trancos juntamente com a mola amortecendo o impacto e armazenando energia para auxiliar o próximo salto. Pressuponha que a constante de mola seja igual a 100 lb/in e que se tenha uma criança de 60 lb. O pula-pula pesa 5 lb. Dimensione as seções transversais de uma viga em balanço de alumínio, na qual a criança se apoia, para suportar saltos de 2 in, medidos a partir do solo, com um fator de segurança de 2. Utilize alumínio da série 1100. Defina o tamanho e a forma da viga.

*__5-15__ Qual é o coeficiente de segurança para o pino, sujeito a cisalhamento, definido no Problema 4-15?

5-16 Uma trilha para guiar bolas de boliche é projetada com duas barras metálicas de seção transversal circular, como mostra a Figura P5-6. As barras possuem um pequeno ângulo entre si. As bolas rolam ao longo das barras até caírem entre elas e saltarem em outra guia. Cada barra possui um comprimento de 30 in e o ângulo entre elas é de 3,2°. As bolas têm um diâmetro de 4,5 in e pesam 2,5 lb. A distância central entre as barras é de 4,2 in na extremidade estreita. Determine o fator de segurança estático para barras de aço normalizadas SAE 1045 de 1 in de diâmetro.

(a) Pressuponha que as barras estão simplesmente apoiadas em cada extremidade.
(b) Pressuponha que as barras estão fixas em cada extremidade.

*__5-17__ Uma pinça para gelo é ilustrada na Figura P5-7. O gelo pesa 50 lb e tem largura de 10 in. A distância entre as alças é de 4 in e o raio médio, *r*, da pinça é 6 in. As dimensões da seção transversal retangular da garra são 0,750 in de profundidade por 0,312 in de largura. Determine o fator de segurança para a pinça se ela tem um S_y = 30 kpsi.

5-18 Repita o Problema 5-17 com uma pinça fabricada de ferro fundido cinzento Classe 20.

****5-19*** Determine o diâmetro do pino de articulação mostrado na Figura P5-8 necessário para resistir a uma força aplicada de 130000 lb. Determine, também, o raio externo requerido para o engate em forma de "U" (*yoke*) não falhar por cisalhamento ou esmagamento, se as flanges dele têm, cada uma, 2,5 in de espessura. Use um fator de segurança igual a 3 para todos os modos de falha. Assuma S_y = 89,3 kpsi para o pino e S_y = 35,5 kpsi para o engate.

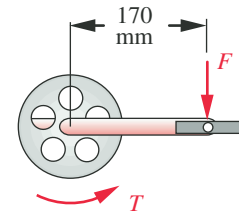
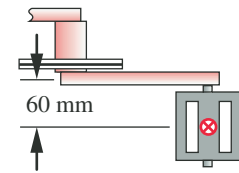



FIGURA P5-1

Problema 5-3. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

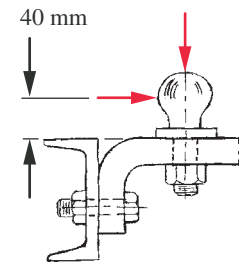



FIGURA P5-2

Problemas 5-4, 5-5 e 5-6. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

grade de 0,5 cm

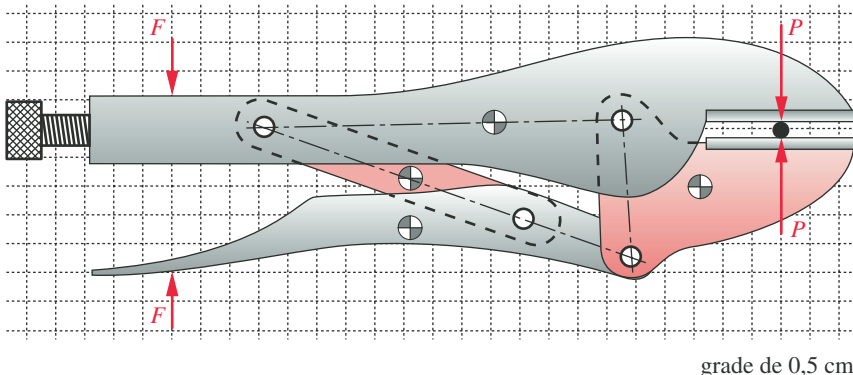



FIGURA P5-3

Problema 5-9. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

(a) Trampolim biarticulado em balanço

(b) Trampolim engastado

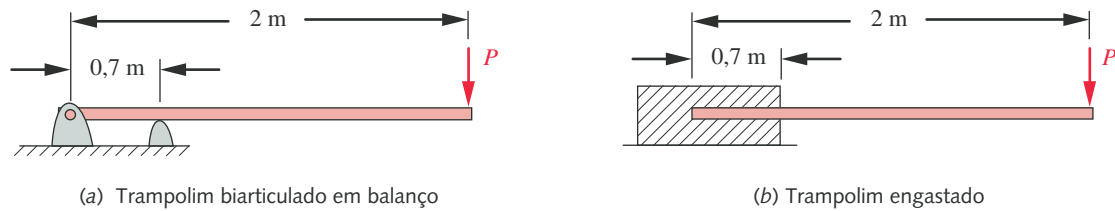



FIGURA P5-4

Problemas 5-10 a 5-13.

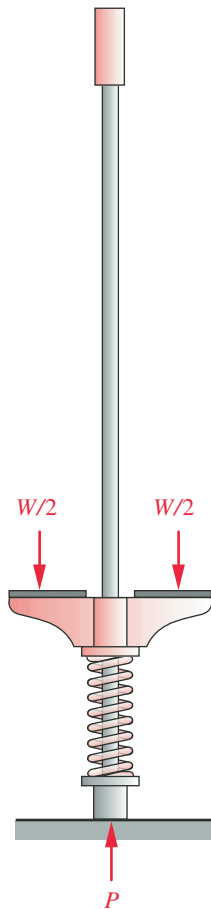



FIGURA P5-5

Problema 5-14.

5-20 Um torque de 100 Nm é aplicado em um eixo cilíndrico sólido de 1 m de comprimento. Dimensione-o para limitar a sua deflexão angular em 2° e selecione uma liga de aço para apresentar um coeficiente de segurança ao escoamento igual a 2.

5-21 A Figura P5-9 exibe a roda de um automóvel com dois tipos de chave de aperto: uma chave de apoio simples em forma de L (*a*) e uma chave de apoio duplo em forma de T (*b*). A distância entre os pontos *A* e *B* é de 1 ft em ambos os casos e o diâmetro do corpo da chave é 0,625 in. Qual é a força máxima possível antes do escoamento da alavanca se o material tem um $S_y = 45$ kpsi?

***5-22** Um patim *roller-blade* é mostrado na Figura P5-10. As rodas de poliuretano têm um diâmetro de 72 mm e apresentam uma distância entre centros de 104 mm. O conjunto patins-bota tem massa total de 2 kg. A constante de mola (rigidez) efetiva do sistema patins-patinador é de 6000 N/m. Os eixos são pinos de aço, sob cisalhamento duplo, com $S_y = 400$ MPa e diâmetro de 10 mm. Determine o coeficiente de segurança para os pinos quando uma pessoa de 100 kg pousa de um salto de 0,5 m em um único pé.

(a) Pressuponha que as quatro rodas tocam o solo simultaneamente.
(b) Pressuponha que uma única roda absorve toda a força de contato com o solo.

***5-23** Uma viga está apoiada e carregada conforme a Figura P5-11*a*. Para os dados fornecidos na(s) linhas(s) designada(s) da Tabela P5-2, determine o coeficiente de segurança estático:

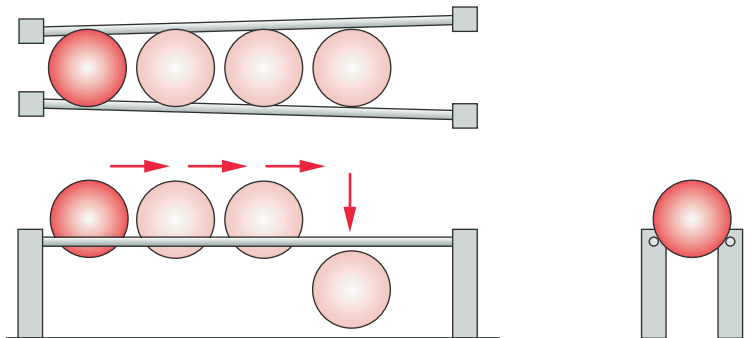
(a) Se a viga é de material dúctil com $S_y = 300$ MPa.
(b) Se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 150$ MPa, $S_{uc} = 570$ MPa.

***5-24** Uma viga está apoiada e carregada conforme a Figura P5-11*b*. Para os dados fornecidos na(s) linhas(s) designada(s) da Tabela P5-2, determine o coeficiente de segurança estático:

(a) Se a viga é de material dúctil com $S_y = 300$ MPa.
(b) Se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 150$ MPa, $S_{uc} = 570$ MPa.

FIGURA P5-6

Problema 5-16.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

***5-25** Uma viga está apoiada e carregada conforme a Figura P5-11*c*. Para os dados fornecidos na(s) linhas(s) designada(s) da Tabela P5-2, determine o coeficiente de segurança estático:

(a) Se a viga é de material dúctil com $S_y = 300$ MPa.
(b) Se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 150$ MPa, $S_{uc} = 570$ MPa.

***5-26** Uma viga está apoiada e carregada conforme a Figura P5-11*d*. Para os dados fornecidos na(s) linhas(s) designada(s) da Tabela P5-2, determine o coeficiente de segurança estático:

(a) Se a viga é de material dúctil com $S_y = 300$ MPa.
(b) Se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 150$ MPa, $S_{uc} = 570$ MPa.

****5-27*** Uma base com haste deve ser projetada para suportar o rolo de papel do Problema 5-8 como mostra a Figura P5-12. Determine os valores adequados para as dimensões *a* e *b* da figura. Faça com que o coeficiente de segurança estático seja pelo menos igual a 1,5. O mandril é um cilindro maciço que está inserido até a metade do rolo de papel.

(a) Se a viga é de material dúctil com $S_y = 300$ MPa.
(b) Se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 150$ MPa, $S_{uc} = 570$ MPa.

5-28 A Figura P5-13 ilustra uma empilhadeira subindo por uma rampa de 15° de inclinação para uma plataforma de 4 ft de altura. O veículo pesa 5000 lb e as rodas têm distância entre centros de 42 in. Projete duas rampas de aço (uma para cada lado) de 1 ft de largura para terem um coeficiente de segurança igual a 3 no instante mais crítico do movimento, quando a empilhadeira se encontra sobre elas. Minimize o peso das rampas pelo uso da variação da geometria (área) da seção transversal delas e escolha o aço, ou a liga de alumínio, mais apropriado para este caso.

5-29 Um paralelepípedo infinitesimal de tensão está sujeito às seguintes tensões (em kpsi): $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 = -20$. Um material dúctil apresenta os limites de resistência (em kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$ e $S_{uc} = 50$. Calcule o coeficiente de segurança e desenhe os diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ para cada uma das teorias de falha que mostram o estado de tensões usando:

(a) Teoria da tensão máxima de cisalhamento.
(b) Teoria da máxima energia de distorção.

5-30 Um paralelepípedo infinitesimal está sujeito às seguintes tensões (em kpsi): $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 = -20$. Um material frágil apresenta os limites de resistência (em kpsi): $S_{ut} = 50$ e $S_{uc} = 90$. Calcule o coeficiente de segurança e desenhe os diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ para cada uma das teorias de falha, mostrando o estado de tensões usando a:

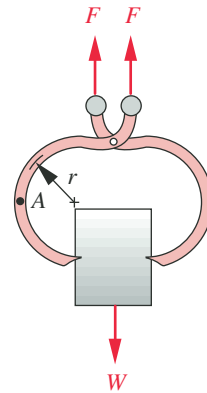
FIGURA P5-9

Problema 5-21.

FIGURA P5-7

Problema 5-17.

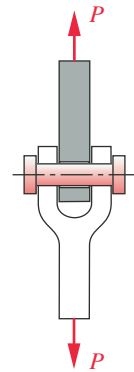



FIGURA P5-8

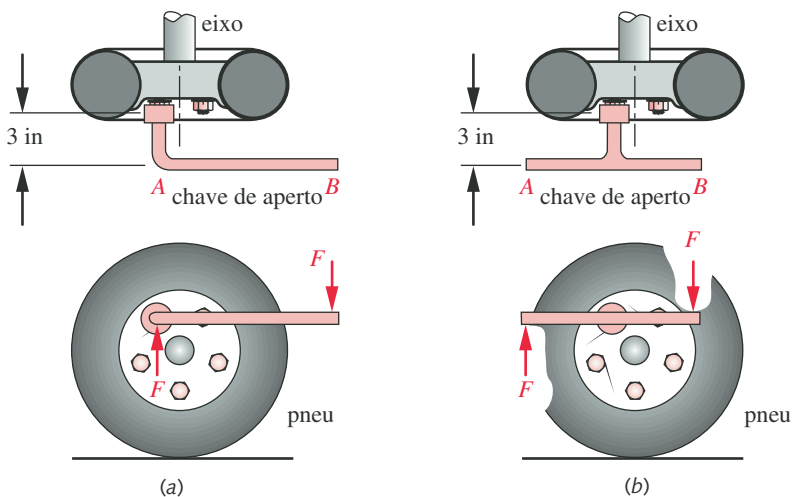
Problema 5-19.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

FIGURA P5-10

Problema 5-22.

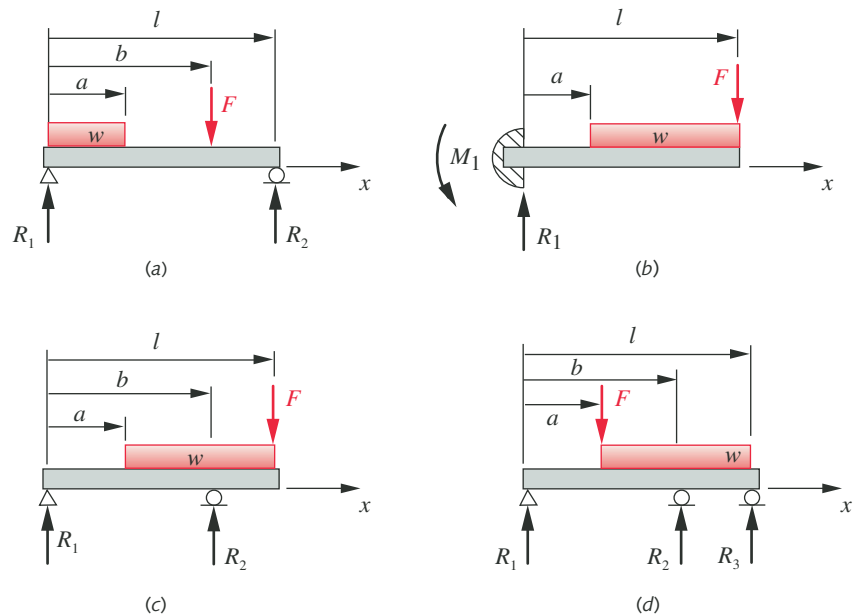



FIGURA P5-11

Vigas e respectivos carregamentos para os problemas 5-23 a 5-26 – ver a Tabela P5-2 para os dados correspondentes.

(a) Teoria de Coulomb-Mohr.
(b) Teoria modificada de Mohr.

5-31 Projete um suporte fixo em forma de tripé, que irá suportar 2 ton de carga com um coeficiente de segurança igual a 3. Use aço SAE 1020 e minimize o seu peso.

*5-32 Uma determinada peça está sujeita ao seguinte estado combinado de tensões e possui as seguintes resistências (em kpsi): $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = 5$, $\tau_{xy} = 4{,}5$, $S_{ut} = 20$, $S_y = 18$ e $S_{uc} = 80$. Escolha uma teoria de falha apropriada, com base nos dados

Tabela P5-2 Dados para os problemas 5-23 a 5-26

Use somente os dados relevantes para o problema em questão. Comprimentos em m, forças em N e *I* (momento de inércia) em m^4.

Linha	*l*	*a*	*b*	*w**	*F*	*I*	*c*	*E*
a	1,00	0,40	0,60	200	500	2,85*E*–08	2,00*E*–02	aço
b	0,70	0,20	0,40	80	850	1,70*E*–08	1,00*E*–02	aço
c	0,30	0,10	0,20	500	450	4,70*E*–09	1,25*E*–02	aço
d	0,80	0,50	0,60	65	250	4,90*E*–09	1,10*E*–02	aço
e	0,85	0,35	0,50	96	750	1,80*E*–08	9,00*E*–03	aço
f	0,50	0,18	0,40	450	950	1,17*E*–08	1,00*E*–02	aço
g	0,60	0,28	0,50	250	250	3,20*E*–09	7,50*E*–03	aço
h	0,20	0,10	0,13	400	500	4,00*E*–09	5,00*E*–03	alumínio
i	0,40	0,15	0,30	50	200	2,75*E*–09	5,00*E*–03	alumínio
j	0,20	0,10	0,15	150	80	6,50*E*–10	5,50*E*–03	alumínio
k	0,40	0,16	0,30	70	880	4,30*E*–08	1,45*E*–02	alumínio
l	0,90	0,25	0,80	90	600	4,20*E*–08	7,50*E*–03	alumínio
m	0,70	0,10	0,60	80	500	2,10*E*–08	6,50*E*–03	alumínio
n	0,85	0,15	0,70	60	120	7,90*E*–09	1,00*E*–02	alumínio

* Observe que ***w*** é força por unidade de comprimento, N/m.

Problemas numerados em *italico* são problemas de projeto.

FIGURA P5-12

Problema 5-27.

fornecidos, e determine a tensão equivalente e o coeficiente de segurança contra falha estática.

***5-33** Para o suporte mostrado na Figura P5-14 e com os dados da(s) linhas(s) designada(s) na Tabela P5-3, determine as tensões equivalentes de von Mises nos pontos *A* e *B*.

***5-34** Calcule o coeficiente de segurança para o suporte do Problema 5-33 utilizando as teorias da energia de distorção, da tensão máxima de cisalhamento e da máxima tensão normal. Faça comentários a respeito de suas adequações. Pressuponha que o material dúctil tem uma resistência $S_y = 400$ MPa (60 kpsi).

***5-35** Calcule os coeficientes de segurança para o suporte do Problema 5-33 utilizando as tensões equivalentes da teoria de Coulomb-Mohr e a teoria de Mohr modificada. Faça comentários a respeito de suas adequações. Pressuponha que o material frágil tem uma resistência $S_{ut} = 350$ MPa (50 kpsi) e $S_{uc} = 1000$ MPa (150 kpsi).

5-36 Para o suporte mostrado na Figura P5-14 e com os dados da(s) linhas(s) designada(s) na Tabela P5-3, refaça o Problema 5-33 considerando como locais de concentração de tensão os pontos *A* e *B*. Pressuponha um fator de concentração de tensão igual a 2,5 na flexão e na torção.

***5-37** Uma viga curva em forma de um semicírculo, mostrada na Figura P5-15, possui as seguintes dimensões: $OD = 150$ mm, $ID = 100$ mm e $t = 25$ mm. Para um par de força $F = 14$ kN, aplicado ao longo do diâmetro, determine o coeficiente de segurança nas fibras internas e externas: (a) se a viga é de material dúctil com S_y = 700 MPa e (b) se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 420$ MPa e S_{uc} = 1200 MPa.

*5-38 Suponha que a viga curva do Problema 5-37 tem uma trinca em sua superfície interna de tamanho $a = 2$ mm (metade da largura) e uma tenacidade à fratura de 50 MPa-m^{0,5}. Qual é o coeficiente de segurança contra falha repentina neste caso?

*5-39 Considere o caso da falha do tubo de foguete de 260 in de diâmetro por 0,73 in de espessura (Figura 5-16). O aço tem $S_y = 240$ kpsi e uma tenacidade à fratura $K_c = 79,6$ kpsi-in^{0,5}. Ele foi dimensionado para uma pressão interna de 960 psi;

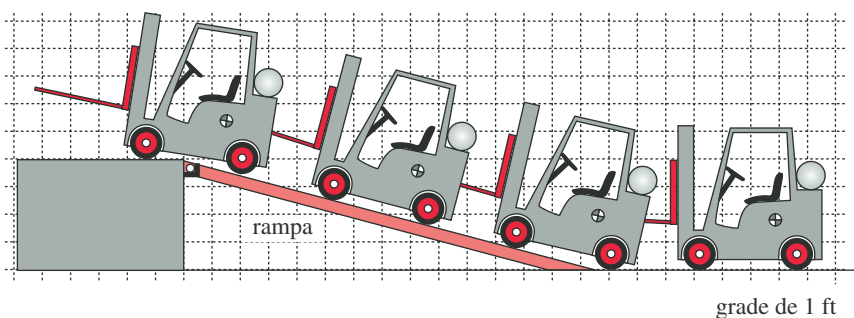



FIGURA P5-13

Problema 5-28.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

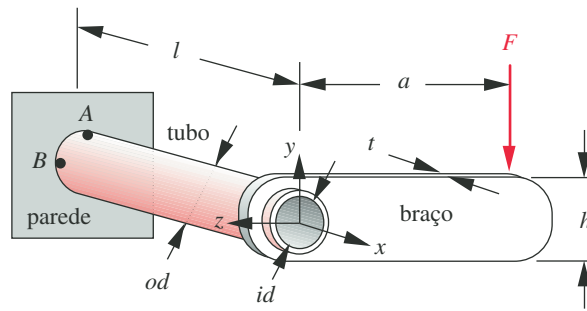



FIGURA P5-14

Problemas 5-33 a 5-36. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

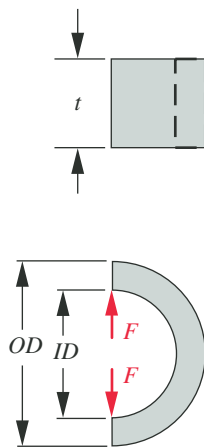



FIGURA P5-15

Problema 5-37. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

no entanto, apresentou falha quando atingiu o valor de 542 psi. Essa falha foi atribuída a uma pequena trinca que se precipitou numa repentina fratura mecânica frágil. Determine as tensões nominais na parede e o coeficiente de segurança ao escoamento nas condições de falha designadas e estime o tamanho da trinca que provocou a ruptura (explosão) do tubo. Pressuponha $\beta = 1{,}0$.

5-40 Projete novamente o suporte de rolo do Problema 5-8 para a configuração ilustrada na Figura P5-16, sabendo que os mandris se encontram inseridos em 10% do comprimento do rolo. Dimensione os valores de *a* e de *b* para um coeficiente de segurança igual a 2.

(a) Se a viga é de material dúctil com $S_y = 300$ MPa.
(b) Se a viga é de material frágil (fundido) com $S_{ut} = 150$ MPa e $S_{uc} = 1200$ MPa.

***5-41** Um tubo de aço de diâmetro interno igual a 10 mm transporta líquido a 7 MPa. O aço tem $S_y = 400$ MPa. Determine o coeficiente de segurança para a parede do tubo se ele tem a espessura de: (a) 1 mm, (b) 5 mm.

5-42 Um tanque cilíndrico de fundo hemisférico é necessário para armazenar ar pressurizado, a temperatura ambiente, a 150 psi. O aço utilizado possui uma resistência $S_y = 400$ MPa. Determine o fator de segurança para a estrutura se o tanque tiver um diâmetro de 0,5 m, uma espessura de parede de 1 mm e um comprimento de 1 m.

Tabela P5-3 Dados para os problemas 5-33 a 5-36

Use somente os dados relevantes para o problema em questão. Comprimentos em mm e forças em N.

Linha	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*OD*	*ID*	*E*
a	100	400	10	20	50	20	14	aço
b	70	200	6	80	85	20	6	aço
c	300	100	4	50	95	25	17	aço
d	800	500	6	65	160	46	22	alumínio
e	85	350	5	96	900	55	24	alumínio
f	50	180	4	45	950	50	30	alumínio
g	160	280	5	25	850	45	19	aço
h	200	100	2	10	800	40	24	aço
i	400	150	3	50	950	65	37	aço
j	200	100	3	10	600	45	32	alumínio
k	120	180	3	70	880	60	47	alumínio
l	150	250	8	90	750	52	28	alumínio
m	70	100	6	80	500	36	30	aço
n	85	150	7	60	820	40	15	aço

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

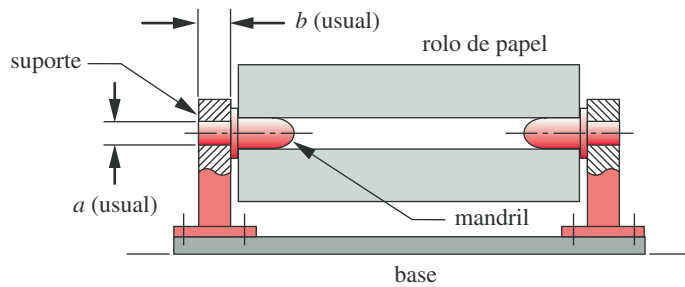



FIGURA P5-16

Problema 5-40. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

5-43 Os rolos de papel da Figura P5-17 têm 0,9 m de diâmetro externo por 0,22 m de diâmetro interno por 3,23 m de comprimento e uma densidade de 984 kg/m^3. Os rolos são transferidos da máquina transportadora (não mostrada na figura) para a empilhadeira através do acoplador articulado da estação de descarregamento, que gira de 90° devido a um cilindro pneumático. Em seguida, os cilindros de papel rolam em direção aos garfos da empilhadeira, que têm 38 mm de espessura, 100 mm de largura, 1,2 m de comprimento, uma inclinação de 3° em relação à horizontal e S_y = 600 MPa. Determine o coeficiente de segurança para os dois garfos da empilhadeira quando os rolos de papel caem neles para os seguintes casos (especifique todas as hipóteses adotadas):

(a) Os garfos não estão apoiados em suas extremidades.
(b) Os garfos encontram-se em contato com a mesa no ponto *A*.

5-44 Determine a espessura adequada para o acoplador articulado em V da estação de descarregamento da Figura P5-17, de modo a limitar a sua deflexão na extremidade em 10 mm para qualquer posição durante o seu movimento de rotação. Os dois "braços" que compõem o acoplador suportam os rolos de papel, ao longo de seu comprimento, nas posições equivalentes a 1/4 e 3/4 do comprimento do rolo, e têm 10 cm de largura por 1 m de comprimento cada. Qual é o coeficiente de segurança ao escoamento para o projeto nas condições limites de deflexão descritas acima? S_y = 400 MPa. Ver o Problema 5-43 para maiores informações.

5-45 Determine o coeficiente de segurança com base na carga crítica atuante na haste do cilindro pneumático da Figura P5-17. O braço de manivela, que rotaciona-o, tem um comprimento igual a 0,3 m, enquanto a haste possui um curso máximo de 0,5 m, um diâmetro de 25 mm e o seu material é um aço com limite de resistência ao escoamento de 400 MPa. Especifique todas as hipóteses adotadas.

Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

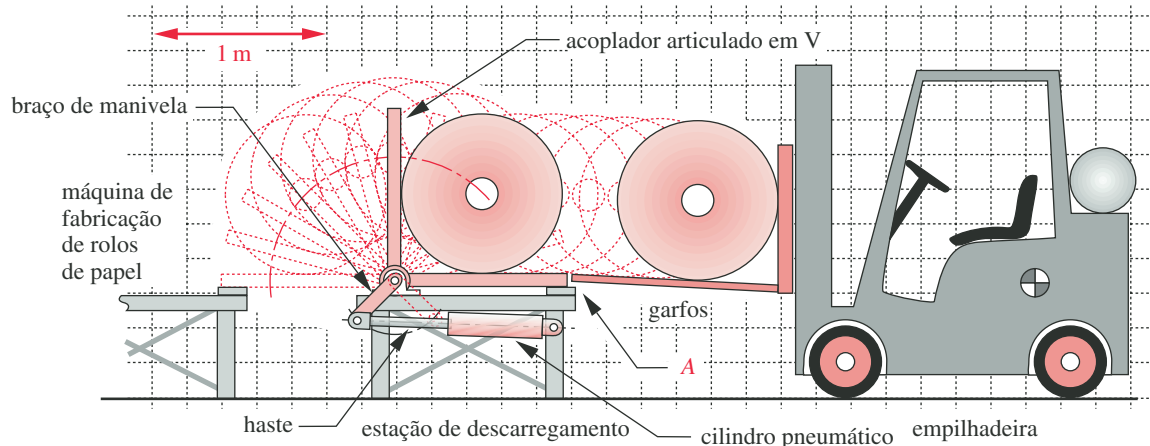



FIGURA P5-17

Problemas 5-43 até 5-47.

5-46 As posições do acoplador em V, ilustradas na Figura P5-17, são giradas através de um braço de manivela ligado a um eixo de 60 mm de diâmetro e 3,23 m de comprimento. Determine o torque máximo aplicado neste eixo, durante o movimento do acoplador em V, e o valor do coeficiente de segurança ao escoamento, também para o eixo, se $S_y = 400$ MPa. Ver o Problema 5-43 para maiores informações.

5-47 Determine as forças máximas nos pinos localizados nas extremidades do cilindro pneumático da Figura P5-17 e o valor do coeficiente de segurança para eles se têm um diâmetro de 30 mm e estão sujeitos a cisalhamento simples. $S_y = 400$ MPa.

5-48 A Figura P5-18 mostra um aparelho de exercícios para um corredor de cadeira de rodas de 100 kg. A cadeira de rodas possui rodas motrizes de 65 cm de diâmetro separadas por uma bitola de 70 cm de largura. Dois cilindros, livres para girar em torno dos mancais, suportam as rodas traseiras. O movimento lateral da cadeira está limitado pelas flanges dos cilindros. Dimensione os cilindros de 1 m de comprimento, como tubos ocos de alumínio (selecione a liga), para minimizar a altura da plataforma, e, também, limite as deflexões do cilindro em 1 mm para a pior situação (maior solicitação). Especifique o diâmetro de eixos de aço adequados para suportar os tubos nos mancais. Calcule todos os coeficientes de segurança significativos para este problema.

5-49 Uma determinada peça, fabricada com aço dúctil de $S_y = 40$ kpsi, está sujeita a um estado de tensões tridimensional com: $\sigma_1 = -80$ kpsi, $\sigma_2 = -80$ kpsi e $\sigma_3 = -80$ kpsi. Qual é a máxima tensão de cisalhamento? A peça irá apresentar falha?

5-50 Um componente na forma de uma chapa grande deverá ser fabricado com o alumínio 7075-T651, que possui uma tenacidade à fratura $K_c = 24{,}2$ MPa-m^{0,5} e uma resistência à tração de 495 MPa. Determine a maior fenda na borda que pode ser tolerada na chapa, caso a tensão nominal no ponto não ultrapasse metade do limite de resistência à tração (escoamento).

5-51 Um componente na forma de uma chapa grande deverá ser fabricado com o aço 4340, que possui uma tenacidade à fratura $K_c = 98{,}9$ MPa-m^{0,5} e uma resistência ao escoamento de 860 MPa. As chapas são inspecionadas contra defeitos após a fabricação, mas o plano de inspeção não detecta fendas menores que 3 mm. A peça em questão é muito pesada conforme dados de projeto. Um engenheiro sugeriu que a espessura fosse reduzida e que o material fosse submetido a um tratamento térmico para aumentar a sua resistência à tração para 1515 MPa, o que resultaria no decréscimo da tenacidade à fratura para 60,4 MPa-m^{0,5}. Assumindo que o nível de tensões não ultrapassa metade do limite de resistência ao escoamento, a sugestão proposta é aceitável? Se não, por quê?

5-52 Uma grande placa está sujeita a uma tensão de tração nominal de 350 MPa e possui uma fenda central de 15,9 mm de comprimento. Calcule o fator de intensidade de tensão na extremidade da fenda.

5-53 A cena de um filme requer que um dublê fique pendurado em uma corda que está suspensa 3 m acima de um fosso com aranhas venenosas. A corda está amarrada a uma chapa de vidro (vidraça) de 3000 mm de comprimento por 100 mm de largura e 1,27 mm de espessura. O dublê sabe que a vidraça contém uma trinca central de 16,2 mm de comprimento total, orientada paralelamente ao chão. A

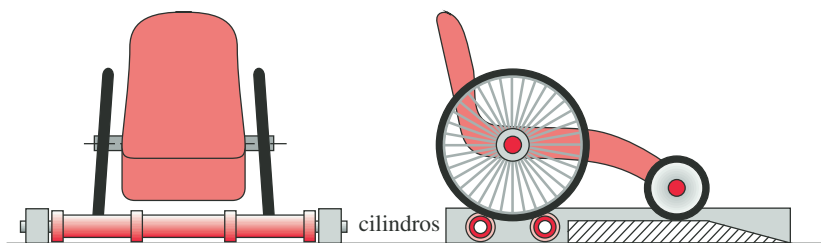



FIGURA P5-18

Problema 5-48.

Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen.

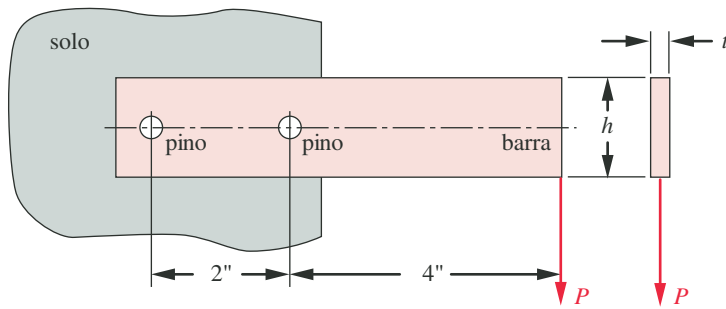



FIGURA P5-19

Problemas 5-56 e 5-57. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

tenacidade à fratura do vidro é igual a 0,83 MPa-m^{0,5}. O ator (dublê) deve realizar esta cena? Mostre todas as hipóteses e cálculos que confirmem a resposta dada.

5-54 Um material que possui uma tenacidade à fratura de 50 MPa-m^{0,5} e uma resistência ao escoamento de 1000 MPa será utilizado para a fabricação de um amplo painel. Se o painel for solicitado a um valor correspondente à metade de sua tensão de escoamento, qual a dimensão da máxima trinca central que pode ser tolerada, sem que ocorra uma falha catastrófica?

5-55 Um material que possui uma tenacidade à fratura de 33 MPa-m^{0,5} será utilizado para a construção de um amplo painel de 2000 mm de comprimento por 250 mm de largura e 4 mm de espessura. Se o comprimento total mínimo permitido para uma trinca é de 4 mm e o coeficiente de segurança é igual a 2,5, qual é a máxima carga de tração, na direção longitudinal, que pode ser aplicada sem que ocorra uma falha catastrófica?

5-56 A Figura P5-19 ilustra uma barra de aço SAE 1020, laminada a frio, presa ao solo (plano rígido) por dois pinos-guia de aço (A8) de 0,25 in de diâmetro cada e endurecidos à HRC52. Para $P = 1500$ lb e $t = 0{,}25$ in, determine:

(a) O coeficiente de segurança para cada pino.
(b) O coeficiente de segurança correspondente à tensão nos mancais em cada furo.
(c) O coeficiente de segurança para falha por rompimento se $h = 1$ in.

5-57 Repita o Problema 5-56 para uma peça fabricada de ferro fundido classe 50.

5-58 A Figura P5-20 ilustra um suporte usinado a partir de um aço SAE 1045, laminado a frio, de 0,5 in de espessura e com um raio de curvatura interno de 0,25 in. Ele está rigidamente ligado a uma base (engastado) e carregado com uma força $P = 5000$ lb no ponto D. Determine:

(a) O coeficiente de segurança contra falha estática no ponto A.

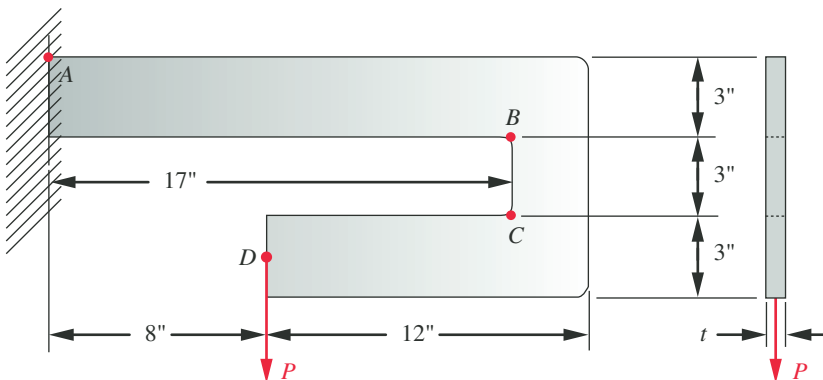



FIGURA P5-20

Problemas 5-58 e 5-59. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen.

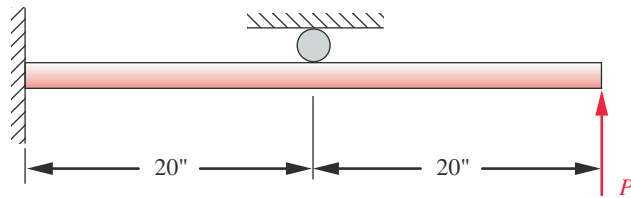



FIGURA P5-21

Problema 5-60.

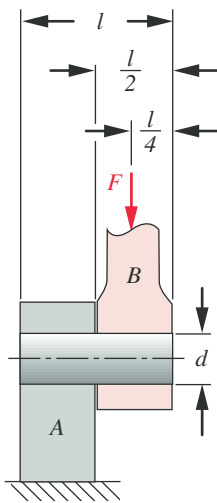



FIGURA P5-22

Problemas 5-62 e 5-63.

(b) O coeficiente de segurança contra falha estática no ponto B.

5-59 Repita o Problema 5-58 para uma peça, de 1 in de espessura, fabricada de ferro fundido classe 60.

5-60 A Figura P5-21 mostra uma barra de aço normalizada SAE 1040, de diâmetro igual a 1 in e laminada a quente, suportada e sujeita a uma carga aplicada de 500 lb (força P). Determine o coeficiente de segurança contra falha estática.

5-61 Repita o Problema 5-60 para uma barra fabricada de ferro fundido classe 60, cujo diâmetro foi aumentado para 1,5 in.

5-62 A Figura P5-22 mostra um pino de articulação com ajuste forçado na peça A e um ajuste deslizante na peça B. Se $F = 100$ lb, l = 2 in e $d = 0{,}5$ in, qual é o coeficiente de segurança contra escoamento do pino quando ele é fabricado a partir de um aço SAE 1020 laminado a frio?

5-63 A Figura P5-22 mostra um pino de articulação com ajuste forçado na peça A e um ajuste deslizante na peça B. Se $F = 100$ lb, l = 50 mm e $d = 16$ mm, qual é o coeficiente de segurança contra fratura do pino quando ele é fabricado a partir do ferro fundido classe 50?

5-64 Um elemento infinitesimal de tensão está sujeito às seguintes tensões (em kpsi): $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = -20$ e $\tau_{xy} = -20$. O material é não uniforme e apresenta os limites de resistência (em kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$ e $S_{uc} = 90$. Calcule o coeficiente de segurança e desenhe o diagrama $\sigma_a - \sigma_b$ mostrando o limite, para cada uma das teorias de falha com o estado de tensões e a linha do carregamento, e usando:

(a) A Teoria de Coulomb-Mohr.
(b) A Teoria de Mohr modificada.

*5-65 Um elemento infinitesimal de tensão está sujeito às seguintes tensões (em kpsi): $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = -5$ e $\tau_{xy} = 15$. O material é não uniforme e apresenta os limites de resistência (em kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$ e $S_{uc} = 90$. Calcule o coeficiente de segurança e desenhe o diagrama $\sigma_a - \sigma_b$ mostrando o limite, para cada uma das teorias de falha com o estado de tensões e a linha do carregamento, e usando:

(a) A Teoria de Coulomb-Mohr.
(b) A Teoria de Mohr modificada.

5-66 Um elemento infinitesimal de tensão está sujeito às seguintes tensões (em kpsi): $\sigma_x = -20$, $\sigma_y = -15$ e $\tau_{xy} = 15$. O material é não uniforme e apresenta os limites de resistência (em kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$ e $S_{uc} = 90$. Calcule o coeficiente de segurança e desenhe o diagrama $\sigma_a - \sigma_b$ mostrando o limite, para cada uma das teorias de falha com o estado de tensões e a linha do carrregamento, e usando:

(a) A Teoria de Coulomb-Mohr.
(b) A Teoria de Mohr modificada.

5-67 Deduza a equação da tensão equivalente de von Mises (Equação 5.7*d*) para o caso bidimensional.

***5-68** *A Figura P5-23 mostra uma bomba de vareta de sucção de petróleo. A manivela de acionamento em O_2 está carregada em torção e flexão com valores máximos de 6500 in-lib e 9800 in-lb, respectivamente. O ponto do eixo com máxima tensão está localizado longe da chave que o conecta à manivela. Usando um fator de segurança de 2, determine um diâmetro aceitável para o eixo se ele for feito com um aço laminado a frio SAE 1040.*

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

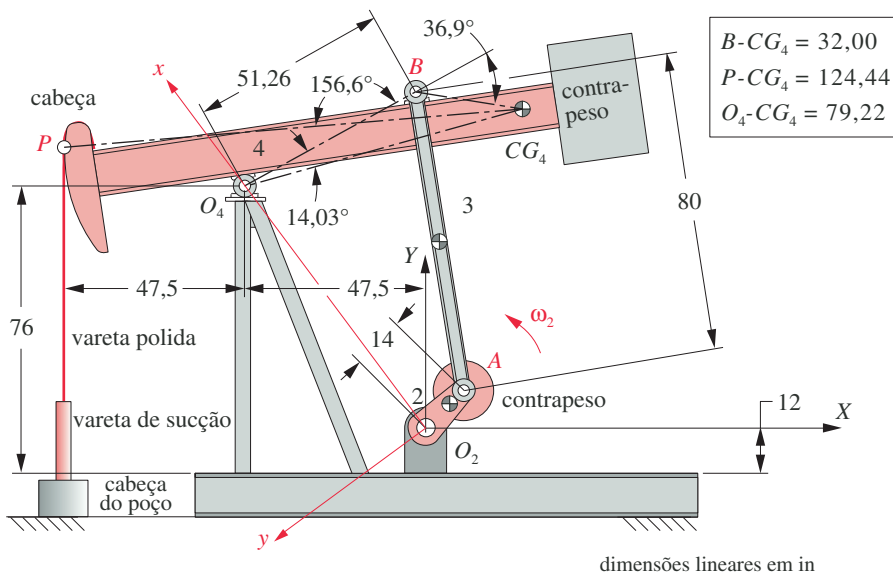



FIGURA P5-23

Problemas 5-68 e 5-69.

5-69 A Figura P5-24a mostra uma braçadeira em C com corpo elíptico, dimensionado como mostrado abaixo. A braçadeira tem uma seção T com espessura uniforme de 3,2 mm na garganta, como mostrado na Figura P5-24b. Encontre o valor estático de segurança se a força de fixação for de 2,7 kN e o material for ferro fundido cinzento classe 40.

5-70 Uma braçadeira em C, como a mostrada na Figura P5-24a, possui uma seção transversal retangular, como na Figura P5-24c. Encontre o valor estático de segurança se a força de fixação for de 1,6 kN e o material for ferro fundido cinzento classe 50.

5-71 Uma braçadeira em C como mostrada na Figura P5-24a tem uma seção transversal elíptica como na Figura P5-24d. As dimensões dos eixos maior e menor da elipse são dadas. Encontre o valor estático de segurança se a força de fixação for de 1,6 kN e o material for ferro fundido cinzento classe 60.

Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen.

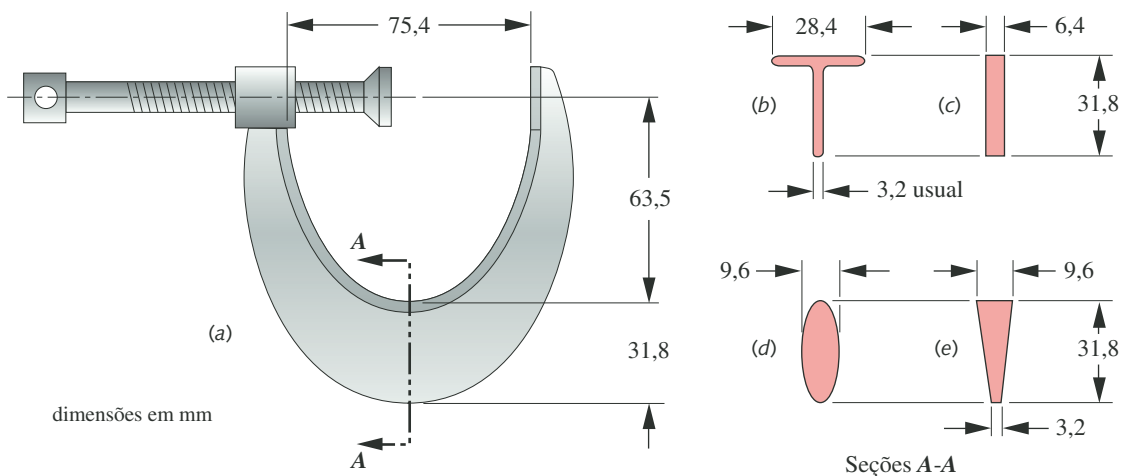



FIGURA P5-24

Problemas 5-69 a 5-72. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

5-72 Uma braçadeira em C, como a da Figura P5-24a, tem uma seção transversal trapezoidal, como na Figura P5-24e. Encontre o valor estático de segurança se a força de fixação for de 1,6 kN e o material for ferro fundido cinzento classe 40.

5-73 A biela (3) da bomba de sucção de petróleo mostrada na Figura P5-23 é, na verdade, composta por duas bielas, uma em cada lado da viga móvel. Determine uma largura aceitável para uma barra de aço laminado a frio de 1,2 polegada, pronta para ser usada, se a carga máxima de tração em cada uma das barras for de 3500 lb. Use um fator de segurança 4 contra rendimento estático.

5-74 Uma plataforma de trabalho é elevada no final de uma lança que possui a habilidade de estender seu comprimento e variar o seu ângulo em relação ao chão. A largura da plataforma é grande se comparada ao diâmetro da lança, desta forma, possibilitando dar carga à lança excentricamente, resultando em uma combinação de flexão, torção e compressão direta na base da lança. Na base da lança há um tubo oco com um diâmetro externo de 0,8 in e espessura de parede de 0,75 in. Ele é feito de aço SAE 1030 CR. Determine o fator de segurança contra falha estática se a carga em um ponto na base da lança for de M = 600.000 lb-in, T = 76.000 lb-in e se houver uma compressão axial de 4.800 lb.

5-75 Repita o Problema 5-74 para uma lança feita de aço fundido cinzento classe 20. Na base da lança, há um tubo oco com um diâmetro externo de 10 in e espessura de parede de 1 in.

5-76 Suponha que a viga curvada do Problema 5-70 possua uma fenda na sua superfície interna, com metade da largura a = 1,5 mm e tenacidade à fratura de 35 MPa-m^{0,5}. Qual é o fator de segurança contra fratura repentina?

5-77 Um painel de aeronave de grande porte é feito de alumínio 7075-T651. A partir de informações de testes, descobre-se que a tensão de tração nominal no painel é de 200 MPa. Qual é o tamanho médio da fenda máxima central que pode ser tolerado sem risco de uma falha catastrófica?

5-78 Projete a biela do Problema 3-50 (elo 3) para um fator de segurança de 4 se o elo for feito de barra de aço SAE 1010 laminada a quente. O diâmetro do orifício em cada extremidade é de 6 mm, e a máxima carga de tração aplicada é de 2000 N. Há duas barras levando a carga.

5-79 Projete o compactador (elo 4) do Problema 3-50 para um fator de segurança de 4 se a placa for feita de uma barra de aço SAE 1010 laminada a quente. O diâmetro do orifício na articulação onde o elo 3 é ligado é de 6 mm, e a carga aplicada $Fcom$ = 2000 N. O diâmetro do pistão é de 35 mm.

5-80 Um elemento diferencial é submetido às tensões (em MPa) $\sigma_1 = 70$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -140$. Um material dúctil tem as forças (em MPa) $S_{ut} = 350$, $S_y = 280$, $S_{uc} = 350$. Calcule o fator de segurança e desenhe diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoria, mostrando o estado de tensão, usando:

(a) Teoria da máxima tensão de cisalhamento
(b) Teoria da distorção de energia

5-81 Uma peça possui os seguintes estados de tensão e forças combinados: $\sigma_x = 70$, $\sigma_y = 35$, $\tau_{xy} = 31{,}5$, $S_{ut} = 140$, $S_{uc} = 140$, $S_y = 126$. Usando a teoria da falha da energia de distorção, encontre a tensão efetiva de von Misses e o fator de segurança contra falha estática.

5-82 Repita o Problema 5-78 para a biela de ferro fundido classe 20.

5-83 Repita o Problema 5-79 para a parte feita de ferro fundido classe 20.

5-84 Um elemento diferencial é submetido às tensões (em MPa) $\sigma_1 = 70$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -140$. Um material quebradiço possui as forças (em MPa) $S_{ut} = 350$, $S_{uc} = 630$. Calcule o fator de segurança e desenhe diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoria, mostrando o estado de tensão, usando:

(a) A teoria de Coulomb-Mohr
(b) A teoria modificada de Mohr

5-85 Uma peça possui os seguintes estados de tensão e forças combinados: $\sigma_x = 70$, $\sigma_y = 35$, $\tau_{xy} = 31{,}5$, $S_{ut} = 140$, $S_{uc} = 560$, $S_y = 126$. Usando a teoria da falha modificada de Mohr, encontre a tensão efetiva e o fator de segurança contra falha estática.

Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

6

TEORIAS DE FALHA POR FADIGA

A ciência é uma peça de mobília de primeira qualidade para o andar superior de um homem, se ele tiver bom senso no térreo.

OLIVER WENDELL HOLMES

6.0 INTRODUÇÃO

A maioria das falhas em máquinas acontece devido a cargas que variam no tempo, e não a esforços estáticos. Essas falhas ocorrem, geralmente, em níveis de tensão significativamente inferiores aos valores da resistência ao escoamento dos materiais. Assim, a utilização única das teorias de falha estática do capítulo anterior pode levar a projetos sem segurança quando as solicitações são dinâmicas.

A Tabela 6-0 mostra as variáveis utilizadas neste capítulo e faz referência às equações, tabelas ou seções nas quais elas são usadas. No fim do capítulo, é fornecido um resumo que também reúne as equações mais significativas do capítulo para facilitar a consulta e identifica a seção do capítulo correspondente à discussão da equação desejada.

História da falha por fadiga

Esse fenômeno foi observado pela primeira vez por volta de 1800, quando os eixos de um vagão ferroviário começaram a falhar após um pequeno período em serviço. Apesar de serem feitos de aço dúctil, eles exibiam características de fraturas frágeis e repentinas. Rankine publicou um artigo em 1843, *As Causas da Ruptura Inesperada de Munhões de Eixos Ferroviários,* no qual dizia que o material havia "cristalizado" e se tornado frágil devido às tensões flutuantes. Os eixos haviam sido projetados com toda a perícia e engenharia disponíveis na época, as quais baseavam-se em experiências decorrentes de estudos com estruturas carregadas estaticamente. Cargas dinâmicas eram, portanto, um fenômeno novo, resultante da introdução das máquinas movidas a vapor. Esses eixos estavam fixos às rodas e giravam em conjunto com elas. Desse modo, a tensão de flexão em qualquer ponto da superfície do eixo variava ciclicamente entre valores positivos e negativos, como mostra a Figura 6-1*a*. Esse carregamento é denominado alternado. Um engenheiro alemão, August Wöhler, realizou a primeira investigação científica (durante um período de 12 anos) sobre o que estava sendo chamado de *falha por fadiga,* testando, em laboratório, eixos até a falha sob carregamento alternado. Suas descobertas, publicadas em 1870, identificavam o número de ciclos de tensão variante no tempo como os causadores do colapso e a descoberta da

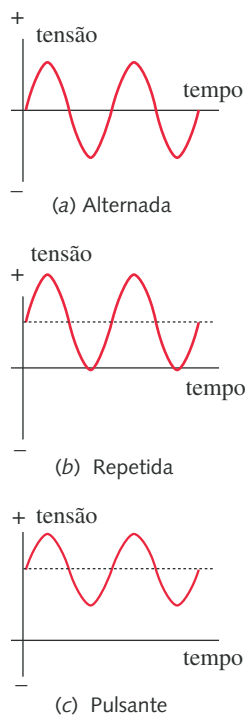



FIGURA 6-1

Tensões variantes no tempo.

Tabela 6-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unid. ips	Unid. SI	Ver
A	amplitude relativa	nenhuma	nenhuma	Equação 6.1*d*
a	metade da largura da trinca	in	m	Equação 6.3
A_{95}	95% de área tensionada	in^2	m^2	Equação 6.7*c*
C_{carreg}	fator de carga	nenhuma	nenhuma	Equação 6.7*a*
C_{conf}	fator de confiabilidade	nenhuma	nenhuma	Tabela 6-4
$C_{tamanho}$	fator de tamanho	nenhuma	nenhuma	Equação 6.7*b*
C_{perf}	fator de superfície	nenhuma	nenhuma	Equação 6.7*e*
C_{temp}	fator de temperatura	nenhuma	nenhuma	Equação 6.7*f*
d_{equiv}	diâmetro equivalente do corpo de prova	in	m	Equação 6.7*d*
K	fator de intensidade de tensão	$kpsi\text{-}in^{0,5}$	$MPa\text{-}m^{0,5}$	Seção 6.1
K_c	tenacidade à fratura	$kpsi\text{-}in^{0,5}$	$MPa\text{-}m^{0,5}$	Seção 6.1
ΔK	variação do fator de intensidade de tensão	$kpsi\text{-}in^{0,5}$	$MPa\text{-}m^{0,5}$	Equação 6.3
ΔK_{th}	valor limite da variação do fator intensidade de tensão	$kpsi\text{-}in^{0,5}$	$MPa\text{-}m^{0,5}$	Seção 6.5
K_f	fator de concentração de tensão na fadiga	nenhuma	nenhuma	Equação 6.11
K_{fm}	fator de concentração de tensão na fadiga para a tensão média	nenhuma	nenhuma	Equação 6.17
N	número de ciclos	nenhuma	nenhuma	Figura 6-2, Seção 6.2
N_f	coeficiente de segurança na fadiga	nenhuma	nenhuma	Equação 6.14, 6.18
q	sensibilidade ao entalhe do material	nenhuma	nenhuma	Equação 6.13, Figura 6-36
R	razão de tensão	nenhuma	nenhuma	Equação 6.1*d*
S_e	limite de fadiga corrigido	psi	Pa	Equação 6.6
$S_{e'}$	limite de fadiga não corrigido	psi	Pa	Equação 6.5
S_f	resistência à fadiga corrigida	psi	Pa	Equação 6.6
$S_{f'}$	resistência à fadiga não corrigida	psi	Pa	Equação 6.5
S_m	resistência média em 10^3 ciclos	psi	Pa	Equação 6.9
$S(N)$	resistência à fadiga em qualquer N	psi	Pa	Equação 6.10
S_{yc}	tensão de escoamento na compressão	psi	Pa	Figura 6-44, Equação 6.16*a*
β	fator geométrico de intensidade de tensão	nenhuma	nenhuma	Equação 6.3
σ	tensão normal	psi	Pa	
$\sigma_{1,2,3}$	tensões principais	psi	Pa	Seção 6.10
σ_a	tensão normal alternada	psi	MPa	Seção 6.4
σ_m	tensão média alternada	psi	MPa	Seção 6.4
σ'	tensão equivalente de von Mises	psi	Pa	Seção 6.10
σ'_a	tensão de von Mises alternada	psi	Pa	Seção 6.11
σ'_m	tensão de von Mises média	psi	Pa	Seção 6.11
σ_{max}	máxima tensão normal aplicada	psi	MPa	Seção 6.4
σ_{min}	mínima tensão normal aplicada	psi	MPa	Seção 6.4

A fotografia da página capitular ilustra a ruptura do navio Liberty *USS Schenectady*, cortesia do Comitê de Estruturas Navais – Governo dos Estados Unidos.

existência de uma tensão *limite de resistência à fadiga* para aços, isto é, um nível de tensão que toleraria milhões de ciclos de uma tensão alternada. O diagrama *S-N* ou Curva de Wöhler, mostrado na Figura 6-2, tornou-se a forma-padrão para caracterizar o comportamento dos materiais submetidos a solicitações alternadas

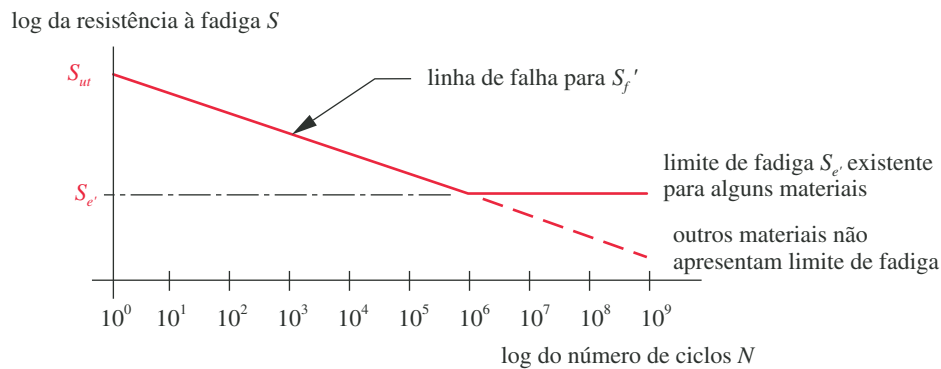



FIGURA 6-2

Diagrama *S-N* ou Curva de Wöhler (resistência à fadiga *versus* vida esperada).

e ainda é utilizado atualmente, apesar de outras medidas sobre a resistência dos materiais, sob cargas dinâmicas, estarem disponíveis hoje em dia.

O termo "fadiga" foi aplicado à situação recém-descrita pela primeira vez por Poncelet em 1839. O mecanismo de falha ainda não compreendido e a aparência de uma fratura frágil na superfície de um material dúctil geraram especulações de que o material, de alguma maneira, apresentou "cansaço" e fragilizou-se devido às oscilações da carga aplicada. Wöhler, mais tarde, mostrou que cada metade dos eixos quebrados ainda continuava tão resistente e dúctil, em ensaios de tração, quanto o material original. De qualquer maneira, o termo *falha por fadiga* permaneceu e ainda é usado para descrever qualquer falha devido a cargas variantes no tempo.

As falhas por fadiga constituem um custo significativo para a economia. Dowling sugere, baseado em dados do relatório elaborado por Reed et al.,[1] do Governo dos Estados Unidos, que:

> O custo anual da fadiga de materiais para a economia dos EUA em 1982 está por volta de U$100 bilhões, correspondendo a aproximadamente 3% do produto interno bruto (PIB). Esses custos são o resultado da ocorrência ou da prevenção da falha por fadiga em veículos terrestres, veículos ferroviários, aviões de todos os tipos, pontes, guindastes, equipamentos industriais, estruturas marítimas de poços de petróleo e uma ampla variedade de mecanismos e equipamentos incluindo itens de uso doméstico, brinquedos e equipamentos esportivos.[2]

O custo pode envolver também vida humanas. O primeiro avião a jato comercial de passageiros, o inglês *Comet*, despedaçou-se duas vezes em 1954 devido a falhas por fadiga em sua fuselagem, consequências dos ciclos de pressurização/despressurização da cabine.* Mais recentemente (1988), um Boeing 737 de uma linha área do Havaí perdeu cerca de um terço da cobertura de sua cabine, enquanto voava a 25000 pés de altitude. Ele conseguiu pousar de maneira segura com mínima perda de vidas. Existem muitos outros casos recentes de falhas catastróficas devido à fadiga. Muito trabalho vem sendo feito nos últimos 150 anos para determinar o mecanismo físico da falha por fadiga. As solicitações exigidas dos materiais nas aplicações em naves espaciais e aviões, desde a Segunda Guerra Mundial, têm motivado um aumento nos investimentos relacionados à pesquisa científica nesse assunto, e, agora, compreende-se razoavelmente bem o fenômeno da fadiga, apesar de que os pesquisadores continuam procurando respostas para as questões relacionadas ao mecanismo físico da fadiga em si. A Tabela 6-1 mostra a cronologia dos eventos mais significativos na história das pesquisas da falha por fadiga.

* Acredita-se que essas falhas do *Comet* também custaram ao Reino Unido a perda da liderança no segmento da indústria comercial de aeronaves. O tempo perdido, reprojetando seus aviões e estratégias, deu à indústria de aviões dos Estados Unidos a chance para tomar a liderança, que é mantida até hoje. A Grã-Bretanha apenas recentemente começa a conseguir alguma parte desse mercado, por causa do *Airbus* desenvolvido em parceria com outros países da Europa.

Tabela 6-1 Cronologia das principais realizações e eventos de pesquisa sobre falha por fadiga
Fonte: "Fracture Mechanics & Fatigue", Union College, 1992, com permissão.

Ano	Pesquisador	Evento ou realização
1829	Albert	Primeiro a documentar uma falha devido a cargas repetidas.
1839	Poncelet	Primeiro a utilizar o termo fadiga.
1837	Rankine	Discutiu a teoria da cristalização da fadiga.
1849	Stephenson	Discutiu a responsabilidade do produto associada às falhas por fadiga em eixos ferroviários.
1850	Braithwaite	Primeiro a utilizar o termo fadiga em publicação de língua inglesa e também discutiu a teoria da cristalização da fadiga.
1864	Fairbairn	Relatou os primeiros experimentos com cargas repetidas.
1871	Wöhler	Publicou os resultados de 20 anos de pesquisas sobre falhas em eixos, desenvolveu os ensaios de flexão rotativa e o diagrama *S-N* e definiu o limite de fadiga.
1871	Bauschinger	Desenvolveu um extensômetro com espelho com uma sensibilidade igual a 10^{-6} e estudou a tensão-deformação inelástica.
1886	Bauschinger	Propôs um "limite elástico natural" cíclico abaixo do qual nunca iria ocorrer fadiga.
1903	Ewing/Humfrey	Descobriram linhas de deslizamento, trincas de fadiga e o crescimento da trinca até a falha, mostrando os erros da teoria da cristalização da fadiga.
1910	Bairstow	Verificou a teoria do limite elástico natural de Bauschinger e o limite de fadiga de Wöhler.
1910	Basquin	Desenvolveu a lei exponencial para testes de fadiga (a equação de Basquin).
1915	Smith/Wedgewood	Separaram a componente cíclica de deformação plástica da deformação plástica total.
1921	Griffith	Desenvolveu um critério de falha e relacionou a fadiga ao crescimento da trinca.
1927	Moore/Kommers	Quantificaram os dados de fadiga de alto-ciclo para diversos materiais em "A Fadiga dos Metais".
1930	Goodman/Soderberg	Determinaram, de forma independente, a influência das tensões médias na fadiga.
1937	Neuber	Publicou a equação de Neuber sobre concentração de tensão em entalhes (tradução inglesa em 1946).
1953	Peterson	Publicou "Fatores da Concentração de Tensão para Projeto", fornecendo uma abordagem para considerar os entalhes.
1955	Coffin/Manson	Publicaram, de forma independente, a lei de fadiga de baixo-ciclo baseada na deformação específica (lei de Coffin-Manson).
1961	Paris	Publicou a lei da mecânica da fratura de Paris para o crescimento de trincas na fadiga.

6.1 MECANISMO DA FALHA POR FADIGA

As falhas por fadiga sempre têm início com uma pequena trinca, que pode estar presente no material desde a sua manufatura ou desenvolver-se ao longo do tempo devido às deformações cíclicas ao redor das concentrações de tensões. Fischer e Yen[3] mostraram que praticamente todas as partes de uma estrutura contêm descontinuidades, variando de microscópicas (< 0,010 in) até macroscópicas, introduzidas nos seus processos de fabricação ou de manufatura. As trincas de fadiga geralmente têm início em um entalhe ou em outro elemento de concentração de tensão. (Iremos utilizar o termo genérico *entalhe* para representar qualquer contorno geométrico que eleve a tensão localmente em um ponto.) As falhas de aspecto frágil ocorridas em navios-tanque da Segunda Guerra Mundial (ver Figura 5-15) foram rastreadas até trincas que começaram em um golpe de arco voltaico deixado por um soldador descuidado. As falhas no avião *Comet* tiveram início em trincas inferiores a 0,07 in de comprimento, próximas aos cantos de janelas de formato aproximadamente quadrangular, que geraram elevadas concentrações de tensão. **Assim, é fundamental que peças dinamicamente carregadas sejam projetadas para minimizar a concentração de tensões, como descrito na Seção 4.15.**

Existem três estágios na falha por fadiga: *início da trinca, propagação da trinca* e *ruptura repentina devido ao crescimento instável da trinca*. O primeiro estágio pode ter uma pequena duração; o segundo estágio envolve o maior tempo da vida da peça; e o terceiro e último estágio é instantâneo.

Estágio de início da trinca

Suponha que o material é um metal dúctil e, sendo manufaturado, não apresenta trincas, mas possui partículas, inclusões, etc., que são comuns em materiais de engenharia. Em uma escala microscópica, os metais não são homogêneos e isotrópicos.* Suponha, em seguida, que existam algumas regiões de concentração geométrica de tensão (entalhes) em locais com tensões variantes no tempo significativas que contenham uma componente positiva (tração), como mostra a Figura 6-1. Conforme as tensões no entalhe oscilam, pode ocorrer escoamento local devido à concentração de tensão, mesmo que a tensão nominal na seção esteja bem abaixo do valor da tensão de escoamento do material. A deformação plástica localizada causa distorções e cria bandas de deslizamento (regiões de intensa deformação devido a movimentos cisalhantes) ao longo dos contornos dos cristais do material. À medida que os ciclos de tensão ocorrem, bandas de deslizamento adicionais aparecem e agrupam-se em trincas microscópicas. Mesmo na ausência de um entalhe (como em corpos de prova planos) este mecanismo ainda ocorrerá, desde que se exceda o limite de escoamento em alguma região do material. Vazios ou inclusões preexistentes servirão como intensificadores de tensão para iniciar a trinca.

Materiais menos dúcteis não apresentam a mesma habilidade para escoar, comparados àqueles citados no parágrafo anterior, e tendem a desenvolver trincas mais rapidamente. Eles são mais *sensíveis a entalhes*. Materiais frágeis (especialmente os fundidos) que não escoam podem pular esse estágio inicial e proceder diretamente para a propagação da trinca em locais de existência de vazios ou inclusões, que atuam como trincas microscópicas.

Estágio de propagação da trinca

Uma vez que uma trinca microscópica se estabelece (ou está presente desde o início), os mecanismos da mecânica da fratura, como descritos na Seção 5.3, entram em funcionamento. A trinca mais severa (pontiaguda) cria concentração de tensões maiores que a proporcionada pelo entalhe original. Desenvolve-se, assim, uma zona plástica na ponta da trinca, cada vez que uma tensão de tração alonga-a, abrandando-se as tensões em suas pontas e reduzindo a concentração de tensão efetiva. A trinca cresce um pouco. Quando a tensão de fadiga (ciclo de tensão) passa para um regime de tensão de compressão ou para um valor nulo, para uma tensão de tração suficientemente baixa, como mostram as Figuras 6-1*a* até 6-1*c*, respectivamente, a trinca fecha, o escoamento momentaneamente cessa e a trinca torna-se novamente pontiaguda, agora com um comprimento maior. Esse processo continua enquanto a tensão local está variando de valores abaixo da tensão de escoamento para outros acima da tensão de escoamento, na ponta da trinca. Assim, **o crescimento da trinca se deve a tensões de tração** e a trinca propaga-se ao longo de planos normais aos de tensão máxima de tração. É por essa razão que as falhas por fadiga são consideradas falhas devido a tensões de tração, mesmo que tensões de cisalhamento iniciem o processo em materiais dúcteis, como descrito acima. Tensões cíclicas que são sempre de compressão não irão contribuir para o crescimento da trinca, visto que elas tendem a fechá-la.

A taxa de crescimento ou propagação da trinca é muito pequena, da ordem de 10^{-8} até 10^{-4} in por ciclo[5], mas após um grande número de ciclos torna-se significativa. Se a superfície de ruptura for vista bastante ampliada, as *estrias*, devido a cada ciclo de tensão, podem ser vistas conforme ilustra a Figura 6-3, que mostra a superfície de falha de um corpo de prova de alumínio, com uma ampliação de 12000×, juntamente com a representação do modelo de tensão cíclica atuante na peça que falhou. Os ocasionais ciclos de elevada tensão mostram estrias maiores do que aquelas mais frequentes de pequena amplitude, indicando que amplitudes de tensão maiores causam um maior crescimento da trinca por ciclo.

* "Quando vistos em um tamanho de escala suficientemente pequeno, todos os materiais são anisotrópicos e não homogêneos. Os materiais de engenharia, por exemplo, são constituídos de um agregado de pequenos grãos cristalinos. Interiormente, o comportamento de cada grão não é isotrópico, devido aos planos cristalinos, e, além disso, ultrapassando-se o limite do grão, a orientação desses planos é alterada. As heterogeneidades existem não somente devido à estrutura do grão, mas também porque há presença de vazios minúsculos ou partículas com composição química diferente do restante do material, como inclusões de sílica ou alumina no aço."[3]

Corrosão Outro mecanismo para a propagação de trincas é a corrosão. **Se uma peça contendo uma trinca estiver em um meio corrosivo, a trinca irá crescer submetida a tensões estáticas**. A combinação de tensão e meio corrosivo possui um efeito sinergético e o material corrói mais rapidamente do que se não estivesse submetido a alguma tensão. Essa condição combinada é chamada, às vezes, de **trincas por corrosão sob tensão ou trincamento auxiliado pelo ambiente**.

Se a peça é *solicitada ciclicamente em um meio corrosivo*, a trinca irá propagar-se mais rapidamente do que qualquer outro fator atuante sozinho. Isso também é chamado de **fadiga de corrosão**. Enquanto a frequência dos ciclos de tensão (ao contrário do número de ciclos) parece não ter efeito determinante no crescimento da trinca em um meio não corrosivo, em ambiente corrosivo ela tem. Frequências cíclicas baixas permitem que o ambiente tenha um maior tempo para atuar na ponta da trinca sob tensão enquanto ela se encontra aberta pela tensão de tração e, com isso, tem-se um aumento substancial na taxa de crescimento da trinca por ciclo.

Fratura

A trinca continuará a crescer enquanto tensões de tração cíclicas e/ou fatores de corrosão de severidade suficiente estiverem presentes. Em um certo ponto, o tamanho da trinca torna-se grande o bastante para aumentar o fator de intensidade de tensão K na extremidade da trinca (Equação 5.14), até o nível da tenacidade à fratura do material K_c, quando ocorre, de maneira instantânea, uma falha repentina (como descrito na Seção 5.3 sobre mecânica da fratura) no próximo ciclo de tensão de tração. Esse mecanismo de falha é o mesmo tanto se a condição de $K = K_c$ for alcançada pelo motivo de a trinca atingir um tamanho suficiente (aumento de a na Equação 5.14) quanto se a tensão nominal aumentar o suficiente (aumento de σ_{nom} na Equação 5.14). A primeira situação é geralmente o que acontece em um carregamento dinâmico, enquanto que a segunda situação citada é mais comum para carregamentos estáticos. O resultado é o mesmo: falha repentina e catastrófica sem nenhum aviso.

O exame a olho nu de peças que falharam devido à fadiga exibem um padrão típico, como pode ser visto na Figura 6-4. Existe uma região proveniente do local da microtrinca original de aparência polida e uma outra região que tem aparência áspera, semelhante a uma fratura frágil. A região de aparência polida em torno da trinca frequentemente exibe *marcas de praia*, assim chamadas porque se assemelham às ondulações deixadas na areia pelo movimento cíclico das ondas na orla marítima. As marcas de praia (não confundir com as estrias vistas na Figura 6-3,

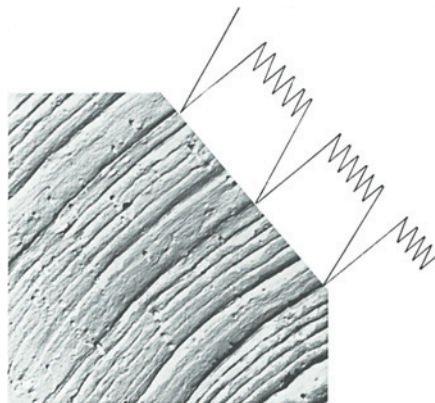



FIGURA 6-3

Estrias de fadiga na superfície da ruptura de uma liga de alumínio. O espaçamento entre as estrias corresponde ao modelo de carregamento cíclico. (Extraído da Fig. 1.5, pág. 10, de D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Publishers, Dordrecht, 1988.)

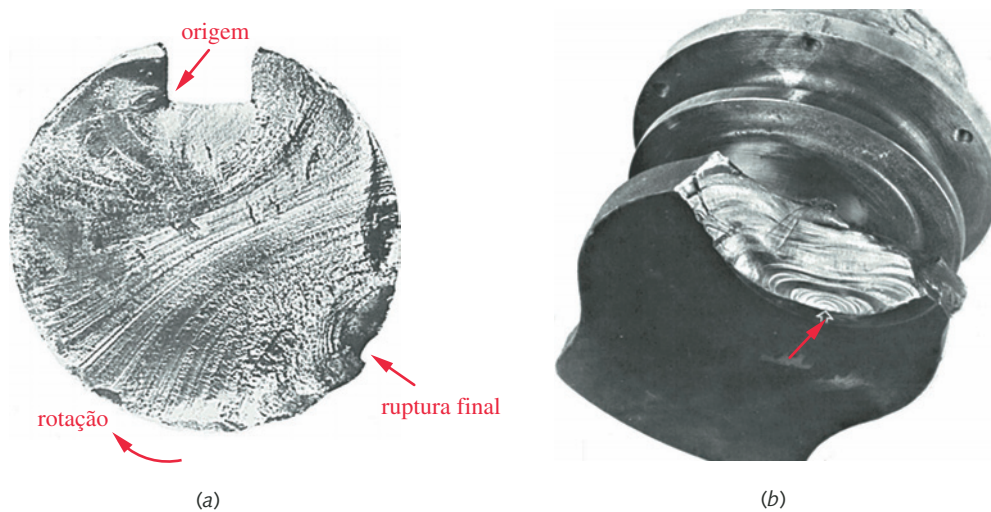



FIGURA 6-4

Duas peças que falharam sob fadiga. Observe as marcas de praia: (*a*) Eixo com rasgo de chaveta de aço 1040 que falhou sob flexão rotativa. A trinca teve início no rasgo de chaveta. (*b*) Eixo de manivela de um motor diesel que falhou sob torção e flexão combinadas. A trinca teve início no ponto indicado pela seta. (Fonte: D. J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, Am. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990, Fig. 22, p. 149 e Fig. 25, p. 152.)

que são menores e não visíveis a olho nu) surgem devido aos ciclos de início e parada do crescimento da trinca e circundam a origem da trinca, geralmente em um entalhe ou em um outro intensificador de tensão interna. Às vezes, se ocorre muita fricção nas superfícies da trinca, as marcas de praia ficarão obscuras. A região de fratura frágil corresponde à porção que apresentou ruptura repentina quando a trinca atingiu o seu tamanho limite. A Figura 6-5 mostra desenhos representativos das superfícies de falha de uma variedade de peças (diversas geometrias), carregadas de diversas maneiras e em diferentes níveis de tensão. As marcas de praia podem ser vistas nas zonas de fratura. A zona de fratura frágil pode estar representada por uma pequena área que restou da seção transversal original da peça.

6.2 MODELOS DE FALHA POR FADIGA

Existem três modelos de falha por fadiga em uso, atualmente, e cada um possui uma área de aplicação e um propósito. As abordagens são: o modelo *tensão-número de ciclos* (*S-N*), o modelo *deformação-número de ciclos* (ε-N) e o modelo da *mecânica da fratura linear-elástica* (MFLE). Primeiro, discutiremos suas aplicações, suas vantagens e desvantagens, comparando-as de forma geral, e então analisaremos algumas delas mais detalhadamente.

Regimes de fadiga

Com base no número de ciclos de tensão ou deformação, ao qual se espera que a peça seja submetida durante a sua vida em operação, pode-se definir um regime de **fadiga de baixo-ciclo** (**FBC**) ou um regime de **fadiga de alto-ciclo** (**FAC**). Não existe uma linha divisória bem definida entre os dois regimes e vários estudiosos sugerem uma ligeira distinção entre eles. Dowling[6] define a fadiga de alto-ciclo como a fadiga que tem início por volta de 10^2 até 10^4 ciclos de tensão/deformação, com esse número variando de acordo com o tipo de material. Juvinall[7] e Shigley[8] sugerem um valor igual a 10^3 ciclos e Madayag[9] define de 10^3 até 10^4 ciclos como o ponto de interrupção. No presente texto, assume-se que $N = 10^3$ ciclos é uma aproximação razoável para diferenciar o regime de baixo-ciclo em relação ao de alto-ciclo.

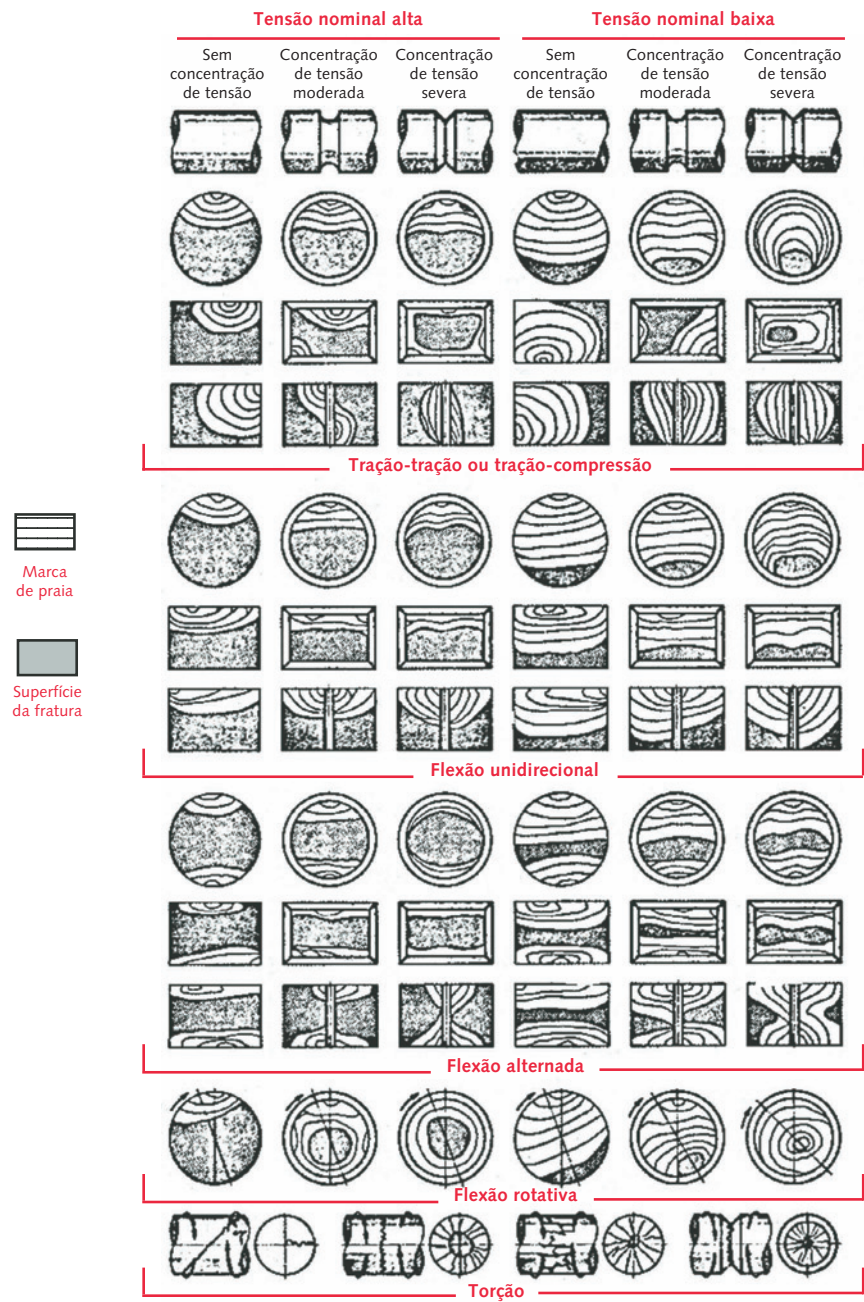



FIGURA 6-5

Representações esquemáticas das superfícies de fratura de fadiga de diversas seções transversais com e sem entalhes submetidas a diversas condições de carregamento e níveis de tensão. (Extraído com permissão do *Metals Handbook*, Am. Soc. for Metals, Metals Park, Ohio, Vol. 10, 8th ed., 1975, p. 102.)

A abordagem tensão-número de ciclos

Este é o mais antigo dos três modelos citados e ainda é o mais frequentemente utilizado nas aplicações que envolvem fadiga de alto-ciclo (FAC), nas quais espera-se que o conjunto mecânico opere por mais de 10^3 ciclos de tensão aproximadamente. Esta abordagem proporciona melhores resultados quando as amplitudes das solicitações são conhecidas e consistentes ao longo da vida da peça. Trata-se

de um **modelo baseado na tensão**, que busca determinar a **resistência à fadiga** e/ou o **limite de fadiga** para o material, de modo que as tensões cíclicas possam ser mantidas abaixo deste nível e, com isso, evita-se a falha para o número de ciclos requerido. A peça é, posteriormente, projetada com base na resistência à fadiga do material (ou limite de fadiga) e em um coeficiente de segurança. De fato, esta abordagem busca manter baixas as tensões locais nos entalhes e, assim, o estágio de iniciação da trinca *nunca começa*. A suposição é (e este é o objetivo do projeto) que as tensões e deformações permanecem no regime elástico e que não há ocorrência de escoamento local para a propagação de uma trinca qualquer.

Esta abordagem é razoavelmente fácil de ser implementada e uma elevada quantidade de dados relevantes de resistência encontram-se disponíveis devido à utilização deste modelo durante um longo período de tempo. Entretanto, este é o mais empírico e menos preciso dos três modelos apresentados em termos da definição dos estados verdadeiros de tensão/deformação locais na peça, especialmente para situações de vida finita na fadiga de baixo-ciclo (FBC), onde se espera que o número total de ciclos seja inferior a 10^3 e que as tensões apresentem um valor suficiente para causar escoamento local. Por outro lado, com certos materiais, a abordagem tensão-número de ciclos permite o projeto de peças e componentes, sob carregamento cíclico, para uma **vida infinita**.

A abordagem deformação-número de ciclos

Devido ao fato de a iniciação de uma trinca envolver escoamento, uma aproximação baseada na tensão é incapaz de modelar adequadamente esse estágio do processo de fadiga. Um **modelo baseado na deformação** fornece uma visão razoavelmente precisa do **estágio de iniciação da trinca**. Essa abordagem também pode esclarecer os danos cumulativos devido às variações na carga cíclica ao longo da vida da peça, como sobrecargas, que podem introduzir tensões residuais favoráveis ou desfavoráveis na região de falha. Combinações de cargas de fadiga e temperatura elevada são modeladas com maior segurança nesse caso, porque os efeitos de fluência podem ser incluídos na formulação matemática. Este método é aplicado com maior frequência em **regimes de fadiga de baixo-ciclo** e em **problemas de vida finita**, nos quais as tensões cíclicas são elevadas o suficiente para causarem escoamento local. É a aproximação mais complicada dos três modelos para ser utilizada e requer uma solução com o auxílio de computadores. Dados de teste de ciclos de deformação ainda estão sendo desenvolvidos para o comportamento de diversos materiais de engenharia.

A abordagem da MFLE

A teoria da mecânica da fratura fornece o melhor modelo para o **estágio de propagação da trinca** do processo de fadiga. Este método, bastante utilizado para predizer o tempo de vida restante em peças trincadas durante serviço, é aplicado em **regimes de fadiga de baixo-ciclo** e em **problemas de vida finita** nos quais as tensões cíclicas são conhecidas por serem elevadas o suficiente para causarem a formação de trincas. Esta abordagem é frequentemente utilizada em conjunto com ensaios não destrutivos (END) em programas periódicos de inspeção de serviço, especialmente na indústria aeronáutica/aeroespacial. A aplicação do método é razoavelmente direta, mas depende da precisão (exatidão) da expressão para o fator geométrico de intensidade de tensão, β (Equação 5.14*b*), e, também, na estimativa do tamanho da trinca inicial a requerida para o processamento computacional. Na ausência de uma trinca, uma aproximação consiste em assumir a existência de uma trinca, menor do que a mínima trinca detectável pelos instrumentos adequados, para o início dos cálculos. Convém ressaltar que resultados mais precisos são obtidos quando é possível detectar e mensurar uma trinca na peça.

6.3 CONSIDERAÇÕES RELATIVAS AO PROJETO DE MÁQUINAS

A escolha do modelo de falha por fadiga para propósitos de projeto de máquinas depende do tipo de máquina que está sendo projetada e em qual aplicação ela será utilizada. A ampla classe de **máquinas rotativas** (estacionárias ou móveis) é bem servida pelo modelo tensão-número de ciclos (*S-N*), porque as vidas requeridas estão usualmente na escala do regime de alto-ciclo. Considere, por exemplo, o número de ciclos de carga (revoluções) requerido ao longo da vida útil de um eixo virabrequim de um motor de automóvel. Suponha que a vida desejada, para não ocorrer falha no eixo, é de 100000 mi. O raio médio do pneu de um carro é de, aproximadamente, 1 ft e a sua circunferência vale 6,28 ft. O eixo gira a 5280/6,28 = 841 rev/mi ou 84*E*6 rev/100000 mi. Uma relação de transmissão final típica para um veículo de passageiros é de 3:1, o que significa que o eixo de transmissão de saída gira a uma velocidade igual a 3× a velocidade do eixo. Se pressupusermos que durante a maior parte da vida em serviço do carro ele funciona em marcha alta (1:1), a velocidade do motor também será 3× a velocidade do eixo. Isso significa que o eixo de manivela e a maior parte dos componentes rotativos e oscilantes dentro do motor estarão submetidos a 2,5*E*8 ciclos em 100.000 mi (o conjunto de válvulas estará submetido à metade desses ciclos). Trata-se, claramente, de um regime de fadiga de alto-ciclo e não inclui o tempo em que o motor funciona com o veículo parado. Além disso, as cargas cíclicas são razoavelmente consistentes e conhecidas, o que torna a abordagem *tensão-número de ciclos* apropriada neste caso.

Como outro exemplo, considere uma típica máquina de produção automatizada, utilizada na indústria dos Estados Unidos. Talvez ela produza baterias, fraldas ou realize o enchimento de latinhas de refrigerante. Pressupondo que a velocidade do eixo fundamental seja de 100 rpm (uma estimativa conservadora) e que ocorra somente um turno de operação da máquina (também bastante conservador, visto que muitas máquinas trabalham com 2 ou 3 turnos), qual é o número de ciclos (revoluções) esperado no eixo, engrenagens, camos, etc. para o período de um ano? Considerando-se 8 horas por dia, tem-se 100(60)(8) = 480000 rev/dia. Durante um ano (com 260 dias de trabalho), tem-se 125*E*6 rev/ano. Novamente, trata-se de um regime de alto-ciclo, e as cargas são razoavelmente consistentes e conhecidas em suas amplitudes.

Uma classe de máquinas que trabalha em regime de baixo-ciclo corresponde às máquinas de transporte (serviço). A estrutura de um avião, o casco de um navio e o chassi de veículos terrestres têm um histórico de carregamento que possui certas variações devido a tempestades, rajadas de vento/ondas, pousos/decolagens severas, etc. (para aviões/navios) e sobrecargas, buracos, etc. (para veículos terrestres). O número total de ciclos durante a vida em operação é, também, menos previsível devido a fatores aleatórios. Mesmo que o número de ciclos de tensão de baixa magnitude possa ser potencialmente grande (no regime de alto-ciclo) ao longo da vida em serviço, a chance de ocorrência de cargas maiores às previstas na fase de projeto e que causam escoamento localizado sempre está presente. Uma série de ciclos de tensão de elevada amplitude, mesmo quando em número inferior a 10^3 ciclos, pode causar um crescimento significativo de uma trinca devido ao escoamento local.

Fabricantes deste tipo de equipamento desenvolvem testes extensivos para a coleta de dados de carga ou deformação no tempo por meio da instrumentação de veículos enquanto estão em funcionamento em regime de serviço regular ou sob condições de teste controladas (a Figura 6-7 traz alguns exemplos). Simulações em computador também são desenvolvidas e refinadas comparando-as com os dados experimentais. Os históricos de carga no tempo, experimentais e simulados teoricamente, também são utilizados, normalmente em conjunto com um modelo deformação-número de ciclos ou MFLE (ou ambos), para predizer a ocorrência de falhas de maneira mais precisa e, portanto, otimizar a qualidade do

projeto. Outro exemplo do uso dos modelos ε-*N* e MFLE está na análise e projeto das pás dos rotores de turbinas a gás, que operam sob elevadas tensões e em altas temperaturas e, também, sujeitam-se a ciclos térmicos de fadiga de baixo-ciclo quando entram em funcionamento e são desligados.

Neste texto, o estudo concentra-se no **modelo tensão-número de ciclos**, além de na discussão da aplicação do **modelo MFLE** em problemas de projeto de máquinas sob carregamento cíclico. O **modelo deformação-número de ciclos** é o melhor para descrição das condições de iniciação da trinca, além de fornecer o modelo teórico mais completo, mas é o menos adequado para o projeto de peças sob fadiga de alto-ciclo. Uma descrição completa do **modelo deformação-número de ciclos** requer um espaço muito maior do que o disponível no presente texto introdutório. O leitor é aconselhado a consultar as referências citadas na bibliografia deste capítulo, que contém discussões a respeito da abordagem deformação-número de ciclos (assim como das outras duas aproximações). A abordagem da mecânica da fratura permite a determinação da vida restante para peças trincadas (com falhas) em serviço. O modelo tensão-número de ciclos é a escolha mais apropriada para a maioria dos problemas de projeto de máquinas rotativas, devido à necessidade de se ter uma vida com elevado número de ciclos (ou infinita) na maioria dos casos.

6.4 CARGAS DE FADIGA

Qualquer carga que varie no tempo pode, potencialmente, provocar uma falha devido à fadiga. O comportamento desse tipo de carga varia substancialmente de uma aplicação para outra. Em máquinas rotativas, as cargas tendem a ser consistentes na amplitude ao longo do tempo e repetem-se com alguma frequência. Em equipamentos de serviço (veículos de todos os tipos), as cargas tendem a variar completamente a sua amplitude e frequência no transcorrer do tempo, podendo até mesmo assumir uma natureza aleatórica. A forma da onda da carga em função do tempo parece não ter nenhum efeito significativo na falha por fadiga na ausência de corrosão. Assim, geralmente descreve-se a função, esquematicamente, como uma onda senoidal ou em forma de dente de serra. Além disso, a presença ou ausência de períodos de inatividade no histórico da carga não é tão significativa em um ambiente não corrosivo (a corrosão irá provocar um crescimento contínuo da trinca mesmo na ausência de quaisquer flutuações na carga). A forma da onda tensão-tempo ou deformação-tempo terá a mesma aparência geral e frequência que a onda carga-tempo. Os fatores significativos são a amplitude e o valor médio da onda de tensão-tempo (ou deformação-tempo) e o número total de ciclos de tensão/deformação a que a peça é submetida.

(*a*) Alternada

(*b*) Repetida

(*c*) Pulsante

FIGURA 6-6

Valores das componentes alternada, média e o intervalo de variação de tensões para tensões cíclicas alternadas, repetidas e pulsantes.

Carregamento em máquinas rotativas

As funções típicas de tensão-tempo, experimentadas por máquinas rotativas, podem ser modeladas conforme mostra a Figura 6-6, que as ilustra como ondas senoidais. A Figura 6-6*a* representa o caso da **tensão alternada**, na qual *o valor médio é zero*. A Figura 6-6*b* representa o caso da **tensão repetida**, na qual a forma da onda varia de *zero a um máximo com um valor médio igual à componente alternada*. Já a Figura 6-6*c* ilustra uma versão do caso mais geral (chamado de **tensão pulsante**) na qual *todas as componentes têm valor diferente de zero*. (Observe que qualquer parcela da onda poderia estar também no regime de tensão de compressão.) Qualquer um dos tipos de onda citados pode ser caracterizado por meio de dois parâmetros: componentes média e alternada, valores máximo e mínimo ou por meio da razão desses valores.

O **intervalo de tensões** $\Delta\sigma$ é definido como

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \qquad (6.1a)$$

A **amplitude da variação de tensão** σ_a (ou componente alternada) é obtida de

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{6.1b}$$

e a **tensão média** σ_m é

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{6.1c}$$

Duas razões podem ser definidas:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{6.1d}$$

onde R é a **razão de tensão** e A é a **razão de amplitude**.

Quando a tensão é alternada (Figura 6-6*a*), $R = -1$ e $A = \infty$. Quando a tensão é repetida (Figura 6-6*b*), $R = 0$ e $A = 1$. Quando as tensões máxima e mínima têm o mesmo sinal, como na Figura 6-6*c*, tanto R quanto A são positivos e $0 \leq R \leq 1$. Esses padrões de variação da carga podem resultar da aplicação de tensões de flexão, de torção, normais ou de uma combinação desses tipos de solicitação. Mais adiante, será visto que a presença de uma componente de tensão média pode ter um efeito significativo na vida em fadiga do componente em questão.

Carregamento em equipamentos de serviço

O comportamento da função de carga no tempo para equipamentos de serviço não é definido tão facilmente quanto para as máquinas rotativas. Os melhores dados provêm de medições reais realizadas nos equipamentos em serviço ou operados sob condições simuladas de serviço. A indústria automobilística submete protótipos de veículos a testes de dirigibilidade que simulam diversos tipos de curvas e superfícies de rodagem. Esses veículos de teste são extensivamente aparelhados com acelerômetros, transdutores de força, extensômetros de resistência elétrica (*strain gages*) e outros instrumentos que alimentam quantidades elevadas de dados para computadores instalados no interior dos carros ou os transmitem para computadores estacionários, onde são digitalizados e armazenados para análise posterior. A indústria aeronáutica também utiliza equipamentos especializados em aviões de teste para registrar (gravar) dados de força, aceleração e deformação durante uma simulação de voo. O mesmo procedimento é adotado com navios, plataformas marítimas de extração de petróleo, e outros.

Alguns exemplos de formas de ondas de tensão em serviço que variam ao longo do tempo são mostrados na Figura 6-7, que descreve o caso de um carregamento genérico simulado em (*a*), um teste-padrão típico para navios e plataformas marítimas em (*b*) e um teste-padrão típico aplicado em aviões comerciais em (*c*). Esses testes-padrão são de natureza semialeatória, já que os eventos não se repetem em algum período em particular. Dados como esses são usados em programas de simulação em computadores que calculam o dano de fadiga acumulado baseado em qualquer um dos modelos de deformação, da mecânica da fratura ou de uma combinação de ambos. O modelo tensão-número de ciclos não é capaz de tratar, de maneira tão efetiva, este tipo de variação de carregamento.

6.5 CRITÉRIOS DE MEDIÇÃO DA FALHA POR FADIGA

Atualmente, existem várias técnicas de ensaios experimentais diferentes com o propósito de realizar a medição do comportamento dos materiais com relação a tensões e deformações que variam ao longo do tempo. A abordagem mais antiga nesta área refere-se aos experimentos de Wöhler, que submeteu um eixo giratório em balanço a um carregamento de flexão para obter variações de tensão com o transcorrer do tempo. Mais tarde, R. R. Moore adaptou essa técnica para um eixo

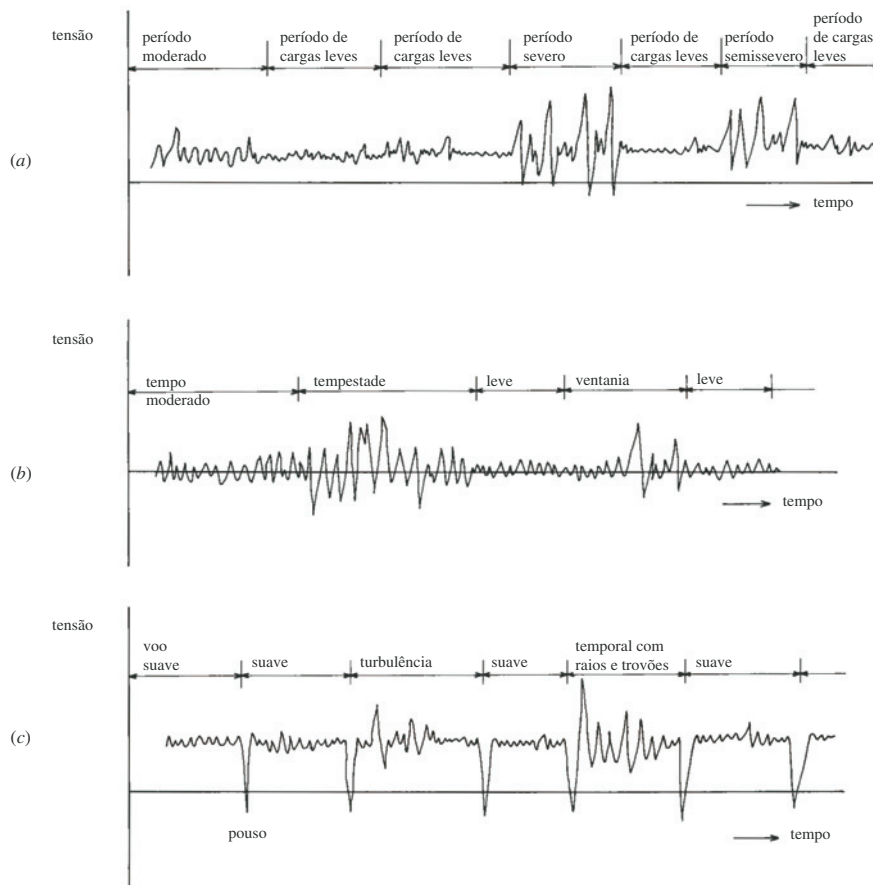



FIGURA 6-7

Carregamento semialeatório em diferentes períodos (viagens, meses, voos) para (*a*) caso genérico, (*b*) navio ou estrutura marítima e (*c*) avião comercial. (Extraído da Fig. 6.10, p. 186, in D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Publishers, Dordrecht, 1988.)

biapoiado giratório causando uma flexão pura alternada. Nos últimos 40 anos, com o advento do controle servo-hidráulico utilizado em máquinas de ensaio normal, tem sido possível uma maior flexibilidade na forma da onda realizada nos ensaios de tensão e de deformação, que podem ser aplicados aos corpos de prova. Dados baseados na deformação e na teoria da mecânica da fratura, assim como os relacionados à tensão, podem ser obtidos com esse método. A maioria das informações disponíveis sobre resistência à fadiga provém de ensaios em eixos girantes sujeitos à flexão alternada. Poucas informações se encontram disponíveis com relação a ensaios com força normal e menos ainda para ensaios de torção, apesar de isso estar mudando à medida que se desenvolvem mais dados de fadiga em ensaios sob força normal. Em alguns casos, não existem em absoluto informações disponíveis a respeito da resistência à fadiga do material desejado, sendo necessária uma maneira para se estimar o seu valor a partir de dados de resistência de "ensaios estáticos". Esse caso será discutido na seção seguinte.

Tensões alternadas

Esta situação de carregamento pode ser realizada por meio de um eixo rotativo, ensaio sob força normal, um eixo em balanço em flexão ou por meio de ensaio de torção, dependendo do tipo de solicitação desejada. O ensaio de flexão rotativa é um ensaio FAC baseado em tensões alternadas que visa determinar a resistência à fadiga de um material sob determinadas condições. O ensaio de fadiga sob força

normal pode ser usado para gerar dados similares de tensões alternadas, semelhantes às obtidas no ensaio de flexão rotativa, para um determinado material e também pode ser utilizado para a realização de ensaios controlados de deformação. A principal vantagem do ensaio com força normal consiste na possibilidade de aplicação de qualquer combinação de tensões médias e alternadas. O ensaio de flexão em uma viga engastada não giratória causa oscilações de tensão de flexão e é capaz de provocar uma tensão média assim como uma tensão alternada. Já no ensaio de torção, alternadamente, torce-se a barra em sentidos opostos, aplicando tensões de cisalhamento puro.

Ensaio de flexão rotativa O volume de dados disponível sobre resistência à fadiga sob tensões alternadas deve-se ao ensaio de flexão rotativa de R. R. Moore, no qual um corpo de prova, altamente polido e de aproximadamente 0,3 in de diâmetro, é montado em um suporte de fixação que permite a aplicação de um momento fletor (flexão pura) de magnitude constante, enquanto o corpo de prova gira a 1725 rpm. Essa configuração gera tensões alternadas de flexão em qualquer ponto da circunferência do corpo de prova, como mostrado na Figura 6-6*a*. O ensaio é iniciado em um nível de tensão particular, até o corpo de prova falhar, então o número de ciclos até a ruptura e o nível de tensão aplicada são registrados. O tempo de ensaio para alcançar 10^6 ciclos é de cerca de 12 horas, enquanto que para 10^8 ciclos o tempo é de aproximadamente 40 dias. O ensaio é repetido com diversos corpos de prova de mesmo material e solicitados a níveis diferentes de tensão. Os dados coletados são, posteriormente, plotados como resistência à fadiga normalizada S_f / S_{ut} em função do número de ciclos, *N*, (normalmente em coordenadas logarítmicas, log-log) para obter-se o diagrama *S-N*.

A Figura 6-8 exibe os resultados de muitos ensaios de flexão rotativa em aços forjados de até aproximadamente 200 kpsi de resistência à tração. Os dados revelam que amostras submetidas, no ensaio, a elevados níveis de tensão alternada falham após um número menor de ciclos. Em níveis de tensão menores, alguns corpos de prova não apresentam falha (no interior do círculo rotulados como *sem ruptura*) antes que os seus ensaios sejam interrompidos em um número próximo a 10^7 ciclos. Observe a grande quantidade de dispersão nos dados, típica de ensaios de resistência à fadiga. Diferenças existentes entre muitas amostras de material, requeridas para gerar a curva toda, podem ser a razão da dispersão existente. Algumas amostras podem ter contido mais (ou maiores) defeitos que serviram como intensificadores de tensão localizados. (Nenhum dos corpos de prova tinha entalhes e todos tiveram um acabamento de polimento cuidadoso para minimizar a possibilidade de um defeito superficial iniciar uma trinca.) As curvas contínuas do gráfico foram desenhadas para agrupar os dados.

Limite de fadiga Observe que a resistência à fadiga *S* decai contínua e linearmente (em coordenadas log-log) em função de *N*, até atingir uma inflexão por volta do intervalo entre 10^6 e 10^7 ciclos. Essa inflexão ("joelho") define o **limite de fadiga** $S_{e'}$ para o material, cuja definição é o nível de tensão abaixo do qual não ocorrem mais falhas por fadiga, podendo-se continuar os ciclos de tensão ilimitadamente. Na curva inferior da faixa de dispersão, além da inflexão, pode-se definir um limite de fadiga aproximado para os aços:

$$\text{para aços:} \qquad S_{e'} \cong 0{,}5\,S_{ut} \qquad S_{ut} < 200 \text{ ksi} \tag{6.2a}$$

Nem todos os materiais apresentam essa inflexão. "*Muitos aços-liga e de baixo carbono, alguns aços inoxidáveis, ferros, ligas de molibdênio, ligas de titânio e alguns polímeros*"[10] apresentam, de fato, essa inflexão. Outros materiais, como o "*alumínio, magnésio, cobre, ligas de níquel, alguns aços inoxidáveis e aços-liga e de alto carbono*"[10] exibem curvas *S-N* que continuam o seu decaimento com o aumento de *N*, embora a inclinação possa tornar-se menor além de aproximadamente 10^7 ciclos. Para aplicações que requerem um tempo de opera-

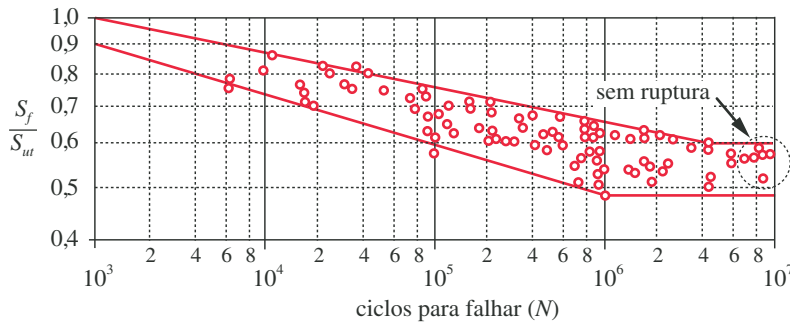



FIGURA 6-8

Gráfico log-log da composição de curvas *S-N* para aços forjados com $S_{ut} < 200$ kpsi. (Extraído de R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill, New York, 1967, Fig. 11.7, p. 210, com permissão.)

ção inferior a 10^6 ciclos, pode-se definir uma **resistência à fadiga**, S_f, para qualquer N dos dados em questão. O termo **limite de fadiga** *é usado para representar a resistência para uma vida infinita somente para os materiais que apresentam essa grandeza característica.*

Os dados na Figura 6-8 são para aços com $S_{ut} < 200$ kpsi. Aços com resistência à tração elevada não apresentam o relacionamento mostrado na Equação 6.2*a*. A Figura 6-9 mostra o limite de fadiga S_e, plotado em função de S_{ut}, na qual se observa uma faixa de dispersão ampla, mas cujo comportamento médio é uma linha da inclinação 0,5 até 200 kpsi. Além desse nível, o limite de fadiga mais elevado da resistência à tração dos aços apresenta uma diminuição. A aproximação usual consiste em assumir que o limite de fadiga para aços nunca excede 50% de 200 kpsi.

$$\text{para aços:} \qquad S_{e'} \cong 100 \text{ ksi} \qquad S_{ut} \geq 200 \text{ ksi} \tag{6.2b}$$

A Figura 6-9 também mostra faixas de dispersão de limites de fadiga para corpos de prova com entalhes severos e para corpos de prova em ambientes corrosivos. Ambos os fatores citados têm um efeito determinante na resistência à fadiga de qualquer material. O limite de fadiga, por exemplo, existe somente na ausência de corrosão. Materiais em ambientes corrosivos têm curvas *S-N* que continuam o seu decaimento com o aumento de *N*. Em breve, esses fatores serão considerados na determinação da resistência à fadiga corrigida para os materiais e o ambiente específico de uma peça.

A Figura 6-10 mostra as faixas de dispersão resultantes de ensaios de flexão rotativa realizados em ligas de alumínio de diversos tipos, incluindo ligas forjadas (com $S_{ut} < 48$ kpsi), fundidas em molde permanente ou em areia. Todos as amostras são polidas e não têm entalhes. Observa-se a ausência de uma inflexão bem distinta, embora a inclinação se torne menor ao redor de 10^7 ciclos. Os alumínios não têm um limite de fadiga, portanto a **resistência à fadiga**, S_f, é usualmente tomada como sendo o valor médio da tensão de falha em $N = 5E8$ ciclos ou em algum outro valor de N (que deve ser indicado como parte dos dados).

A Figura 6-11 mostra a tendência da resistência à fadiga (em $N = 5E8$) para um número de ligas de alumínio com resistência à tração estática variável. A resistência à fadiga segue a resistência à tração estática da liga segundo uma razão de

$$\text{para alumínio:} \qquad S_{f'_{@5x10^8}} \cong 0{,}4\, S_{ut} \qquad S_{ut} < 48 \text{ kpsi} \tag{6.2c}$$

até um nivelamento em torno de $S_f = 19$ kpsi, indicando que ligas de alumínio com $S_{ut} > 48$ kpsi, aproximadamente, "estabilizam-se" para uma resistência à fadiga de 19 kpsi ($S_{n'}$ na figura é o mesmo que $S_{f'}$).

$$\text{para alumínio:} \qquad S_{f'_{@5x10^8}} \cong 19 \text{ ksi} \qquad S_{ut} \geq 48 \text{ kpsi} \tag{6.2d}$$

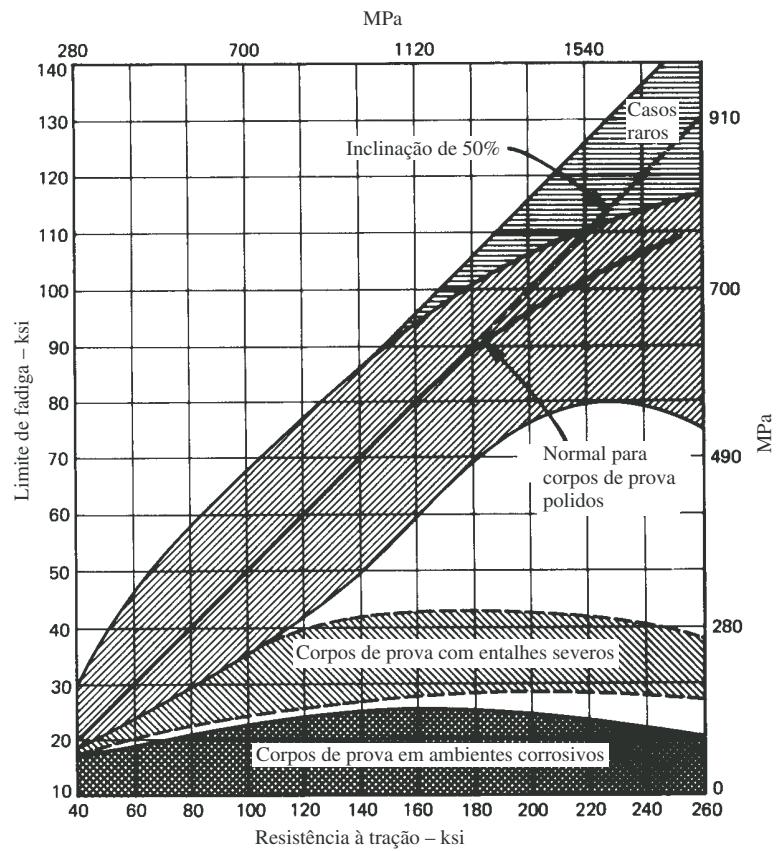



FIGURA 6-9

Relação entre limite de fadiga e resistência à tração para corpos de prova de aço. (Extraído de *Steel and Its Heat Treatment*, D. K. Bullens, John Wiley & Sons, New York, 1948.)

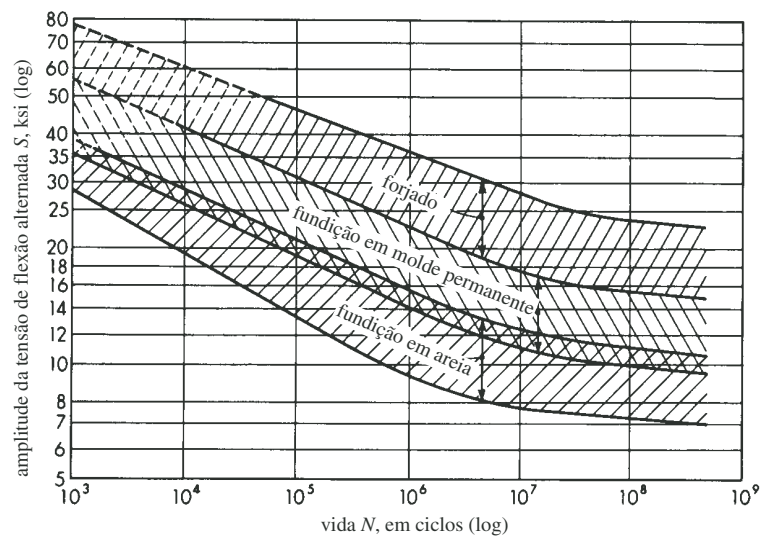



FIGURA 6-10

Bandas de curvas *S-N* para ligas de alumínio representativas, excluindo-se ligas forjadas com S_{ut} > 38 kpsi. (Extraído de R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill, New York, 1967, Fig. 11.13, p. 216.)

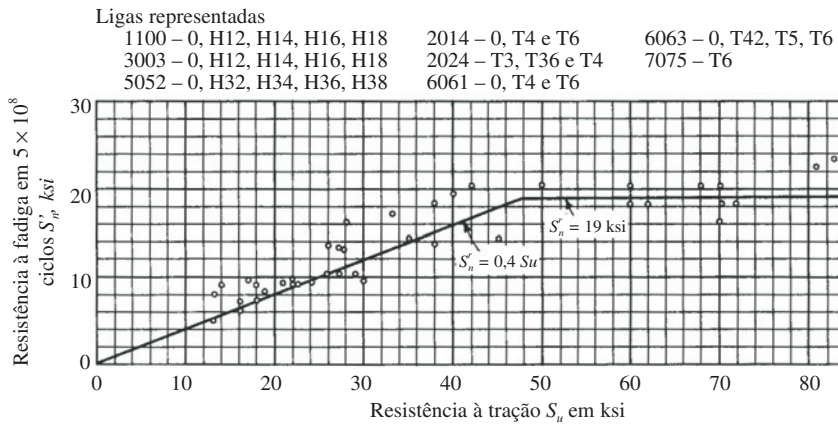



FIGURA 6-11

Resistência à fadiga em 5×10^8 ciclos para ligas de alumínio forjadas. (Extraído de R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill, New York, 1967, Fig. 11.12, p. 215.)

Ensaios de fadiga sob força normal O diagrama *S-N* também pode ser obtido para um material por meio de um ensaio de fadiga sob força normal, no qual um corpo de prova, semelhante ao ilustrado na Figura 2-1, é carregado ciclicamente em uma máquina de ensaios servo-hidráulica. A capacidade de programação dessas máquinas permite qualquer combinação de componentes de tensão média e alternada a serem aplicadas, incluindo-se carregamento alternado ou completamente invertido ($\sigma_m = 0$). A principal diferença, com relação ao ensaio de flexão rotativa, refere-se ao fato de que, aqui, toda a seção transversal é solicitada (uniformemente) em tração ou compressão axial, em vez de ter-se uma distribuição linear de tensões ao longo do diâmetro do corpo de prova, sendo que a tensão é máxima na fibra mais externa e nula no centro da seção. Um dos resultados dos ensaios sob força normal é que a resistência à fadiga apresenta valores inferiores aos obtidos nos ensaios de flexão rotativa. Acredita-se que esse fato esteja ligado à maior probabilidade de uma microtrinca estar presente na área maior sujeita a altas tensões em um corpo de prova sob tensão uniforme do que em uma menor área sujeita a altas tensões do corpo de prova sob flexão rotativa. Convém ressaltar que a dificuldade em se criar um carregamento axial sem nenhuma excentricidade pode, também, ser uma causa para os baixos valores de resistência, visto que carregamentos excêntricos proporcionam uma sobreposição de momentos fletores nas cargas axiais.

FIGURA 2-1 Repetida

Corpo de prova para ensaio de tração.

A Figura 6-12 mostra duas curvas *S-N* para o mesmo material (aço C10), geradas por ensaio sob força normal alternada (intitulada na figura como *tração-compressão*) e um ensaio sob flexão rotativa. Os dados provenientes do ensaio sob tração-compressão possuem valores inferiores aos obtidos no outro teste. Vários autores relatam que o valor da resistência à fadiga sob força normal alternada pode ser de 10%[11] até 30%[12] inferior ao valor encontrado pela flexão rotativa para um mesmo material. Caso haja flexão presente, juntamente com a força normal, essa redução no valor da resistência pode chegar a 40%[11].

A Figura 6-13 ilustra os dados obtidos a partir de um ensaio sob força normal alternada, em um aço AISI 4130, plotados em coordenadas log-log. Observa-se a mudança da declividade da curva, por volta dos 10^3 ciclos, que corresponde aproximadamente à transição da região da fadiga de baixo-ciclo (FBC) para a de alto-ciclo (FAC), e a inclinação da reta torna-se praticamente nula em 10^6 ciclos, correspondente ao limite de fadiga para vida infinita. A resistência à fadiga, por volta dos 10 ciclos, é aproximadamente 80% da resistência do material sob condições estáticas, e para 10 ciclos esse valor cai para 40%; em ambos os casos, os valores são 10% menores quando comparados aos dados do ensaio de flexão rotativa da Figura 6-8.

FIGURA 6-12

Comparação de curvas *S-N* entre ensaios sob flexão rotativa e força normal alternada. (Extraído de A. Esin, "A Method of Correlating Different Types of Fatigue Curves", *International Journal of Fatigue*, vol. 2, n° 4, p. 153-158, 1980.)

Ensaios de flexão em vigas engastadas Se a extremidade livre da viga engastada tem movimento oscilatório por causa de um mecanismo articulado, pode-se obter qualquer combinação das tensões médias e alternadas, como mostra a Figura 6-6. Este tipo de ensaio não é tão frequentemente utilizado quanto o de flexão rotativa ou sob força normal, mas é a alternativa menos cara em relação ao último tipo citado. Alguns exemplos de dados obtidos de um ensaio de flexão em uma viga engastada são exibidos na Figura 6-14 para diversos polímeros. Trata-se de um gráfico mono-log, mas ainda se percebe a presença de um limite de fadiga para alguns desses materiais não metálicos.

Os ensaios de fadiga sob torção são realizados em corpos de prova cilíndricos sujeitos a um esforço de torção alternado. Os pontos de falha para flexão e torção alternadas, em ensaios sob estado duplo de tensão, encontram-se plotados na Figura

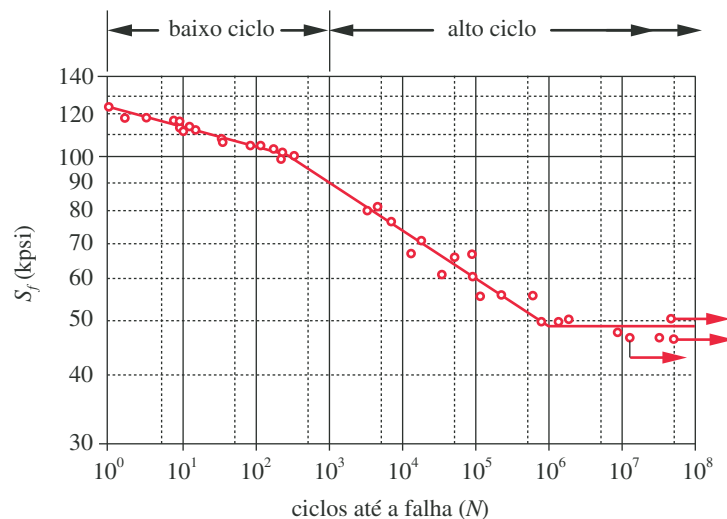



FIGURA 6-13

Curva *S-N* de um ensaio axial alternado para um aço AISI 4130, mostrando pontos de inflexão na transição entre os regimes de fadiga (FBC/FAC) e no limite de fadiga. (Extraído, com permissão, de Shigley & Mitchell, *Mechanical Engineering Design*, 4ª edição, McGraw-Hill, New York, 1983, Fig. 7-3, p. 273. Dados da NACA Technical Note #3866, Dezembro 1966.)

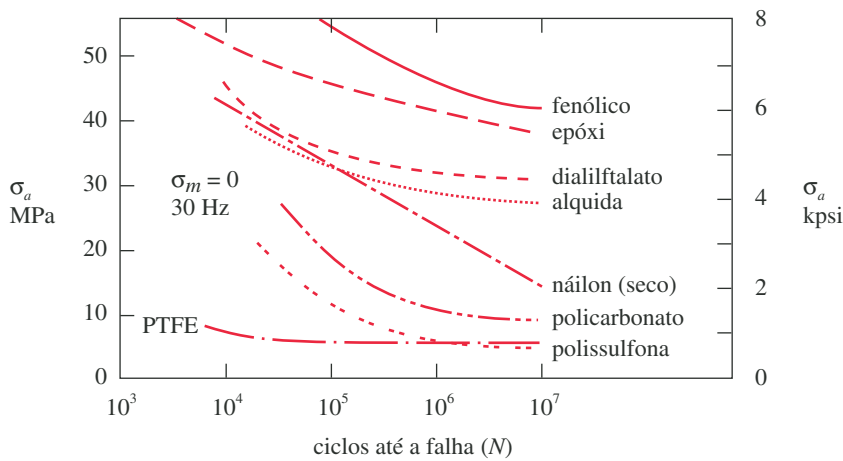



FIGURA 6-14

Curvas tensão-vida para flexão de vigas engastadas de materiais termofixos minerais preenchidos com vidro (as 4 linhas superiores) e termoplásticos não preenchidos (as 4 linhas inferiores). (Extraído de N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996, Fig. 9-22, p. 362 e baseado nos dados de M. N. Riddell, "A Guide to Better Testing of Plastics", *Plastics Enginnering*, vol. 30, n° 4, p. 71-78, ambos com permissão.)

6-15, onde os eixos de coordenadas correspondem aos valores de σ_1-σ_3. Observe a similaridade com a elipse da energia de distorção das Figuras 5-3 e 5-8 para a teoria de falhas sob cargas estáticas. Além disso, a relação entre a resistência torcional e a resistência à flexão em carregamentos cíclicos (dinâmicos) é idêntica àquela obtida nos casos estáticos. A resistência à fadiga sob torção (ou o limite de fadiga sob torção) para um material dúctil pode, então, ter seu valor esperado por volta de 0,577 (58%) da resistência à fadiga sob flexão (ou limite de fadiga sob flexão).

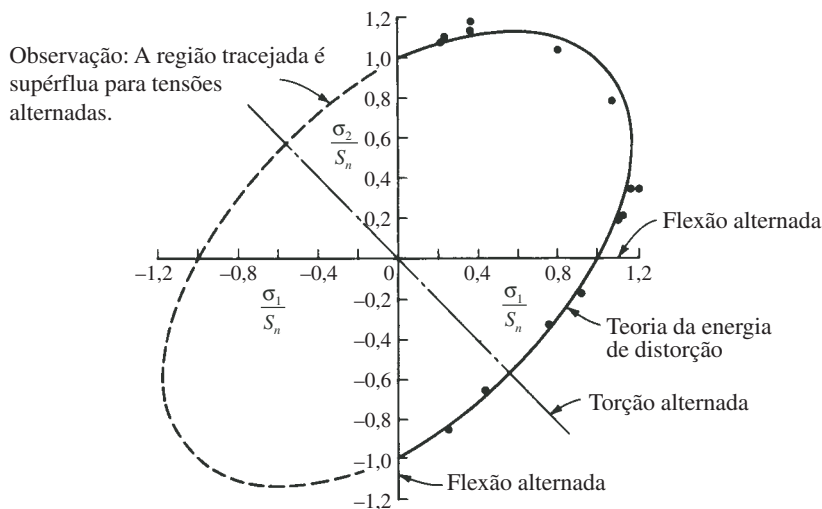



FIGURA 6-15

Tensões biaxiais combinadas de torção e flexão alternadas plotadas em eixos de coordenadas correspondem aos valores de σ_1-σ_2. (Extraído de *Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses*, ed. G. Sines em *Metal Fatigue*, por G. Sines e J. Waisman, McGraw-Hill, New York, 1959, com dados de W. Savert, Alemanha, 1943, para aço recozido.)

Tensões média e alternada combinadas

A presença de uma componente de tensão média tem um efeito significativo na falha. Quando uma componente de tensão média de tração é somada à componente alternada, como exemplificado nas Figuras 6-6*b* e 6-6*c*, o material apresenta falhas com tensões alternadas inferiores às que ocorreriam sob um carregamento puramente alternado. A Figura 6-16 mostra os resultados de ensaios realizados com aços em $\approx 10^7$ até 10^8 ciclos (*a*) e com ligas de alumínio em $\approx 5 \times 10^8$ ciclos (*b*) para vários níveis de tensões médias e alternadas combinadas. Os gráficos são normalizados por meio da divisão da tensão alternada σ_a pela resistência à fadiga S_f do material sob tensões alternadas (para um mesmo número de ciclos) e, também, com a divisão da tensão média σ_m pela resistência à tração S_{ut} do material. Há muita dispersão nos dados, mas uma parábola que intercepta ambos os eixos no ponto de valor igual a 1,0, chamada de **curva de Gerber**, pode ser ajustada aos dados plotados com uma razoável precisão. Uma linha reta

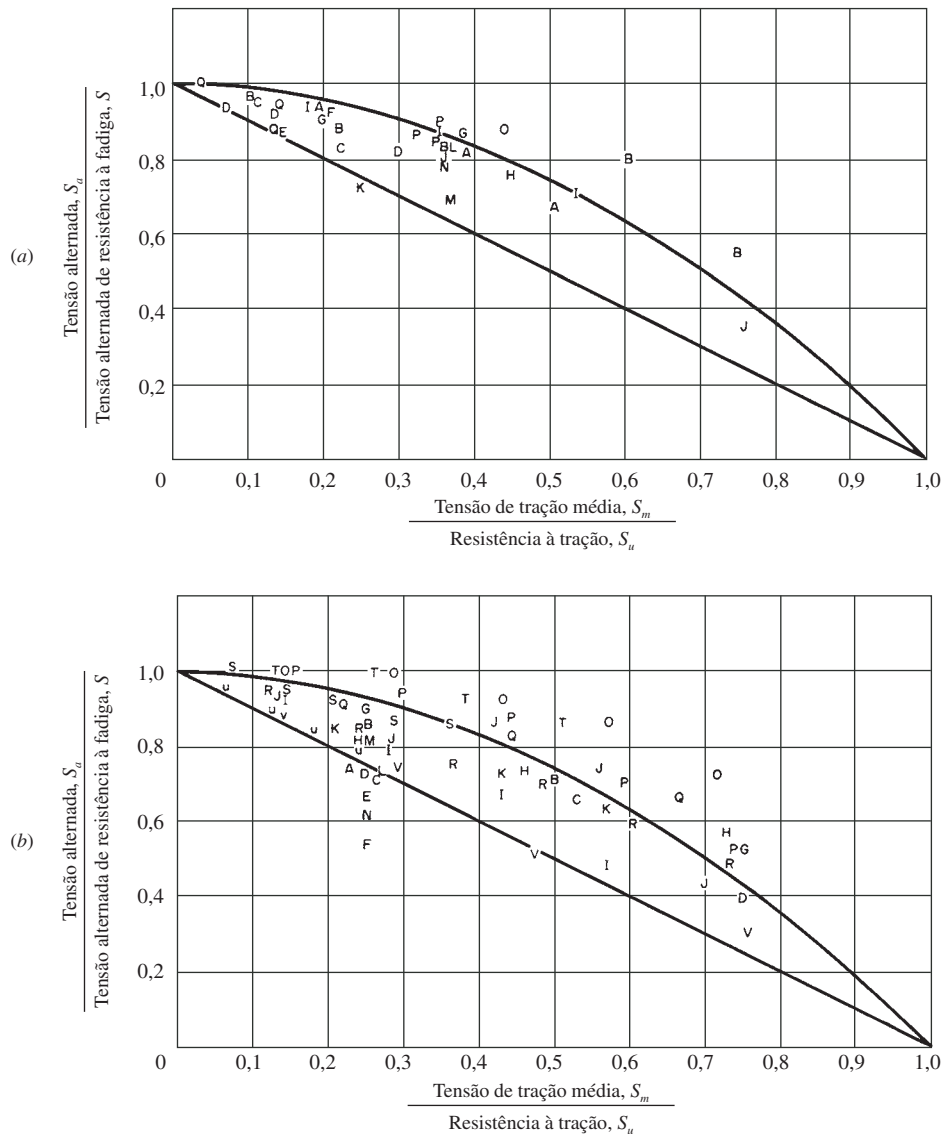



FIGURA 6-16

Efeitos da tensão média na tensão alternada de resistência à fadiga de vida longa: (*a*) aços baseados em 10^7 até 10^8 ciclos (*b*) ligas de alumínio baseadas em 5×10^8 ciclos. (Extaído de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Londres, 1962.)

conectando a resistência à fadiga (ponto igual a 1,0 no eixo *y*) com a resistência à tração (ponto igual a 1,0 no eixo *x*), chamada de **curva de Goodman**, é um ajuste razoável para o conjunto mais baixo dos dados. A curva de Gerber é uma medida do comportamento médio desses parâmetros (para materiais dúcteis) e a curva de Goodman é uma medida do comportamento mínimo. A curva de Goodman é frequentemente utilizada como um critério de projeto, já que é mais segura do que a curva de Gerber.

A Figura 6-17 mostra os efeitos das tensões médias (variando de compressão até tração) para a ocorrência de uma falha quando combinadas com uma tensão alternada para o aço e o alumínio. Fica bem claro, observando-se os dados do gráfico, que as tensões médias de compressão têm um efeito benéfico, enquanto as tensões médias de tração são prejudiciais. Esse fato oferece uma oportunidade para se abrandarem os efeitos das tensões alternadas por meio da introdução intencional de tensões médias de compressão. Um modo de se fazer isso é se criando **tensões de compressão residuais** no material em regiões onde se espera a ocorrência de componentes de tensão alternada de elevada amplitude. Nas próximas seções, serão discutidos outros métodos para suavizar os efeitos das tensões alternadas.

A Figura 6-18 mostra uma outra visão desse fenômeno por meio da plotagem da curva *S-N* (em eixos semilogarítmicos) para um material hipotético com tensão média de compressão, nenhuma tensão média ($\sigma_m = 0$) e tensão média de tração. A resistência à fadiga, ou limite de fadiga do material, é efetivamente aumentada com a introdução de uma tensão média de compressão, tanto aplicada intencionalmente como também na forma residual.

Critério da mecânica da fratura

O ensaio de tenacidade à fratura estático foi descrito na Seção 5.3. Para o desenvolvimento de dados de resistência à fadiga em termos da teoria da mecânica da fratura, um determinado número de corpos de prova de mesmo material é ensaiado até falhar para diversos níveis de intervalos de tensões cíclicas $\Delta\sigma$. O ensaio é realizado em uma máquina de ensaios de fadiga que aplica forças

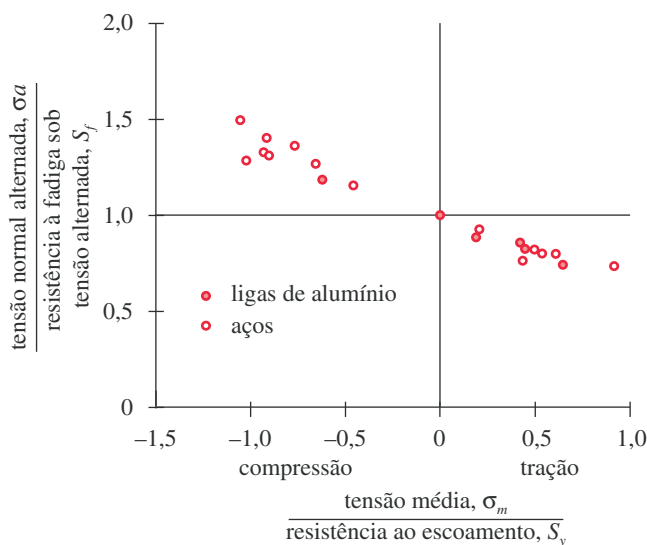



FIGURA 6-17

Efeitos da tensão média de tração e de compressão. (Extraído de G. Sines, *Failure of Materials Under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses*, NACA Technical Note #3495, 1955.)

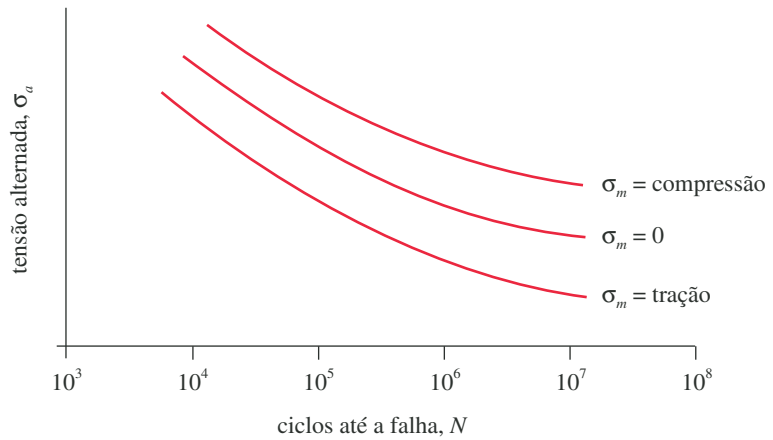



FIGURA 6-18

Efeito da tensão média na vida em fadiga. (Extraído de Fuchs e Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, New York, 1980, reimpresso com permissão da John Wiley & Sons, Inc.)

normais, e o carregamento padrão é geralmente uma tensão de tração pulsante ou variada, como mostra a Figura 6-6*b* e *c*. Ensaios sob tensões alternadas são raramente aplicados neste caso específico, visto que as tensões de compressão não promovem o crescimento de trincas. A propagação (crescimento) da trinca é monitorada continuamente durante todo o transcorrer do ensaio. O intervalo de tensões aplicadas varia de σ_{min} a σ_{max}. O **intervalo do fator de intensidade de tensão** ΔK pode ser calculado, para cada uma das condições de carga variável aplicada, a partir de

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} : \qquad \text{se } K_{min} < 0 \quad \text{então } \Delta K = K_{max} \tag{6.3a}$$

Substituindo-se a equação apropriada 5.14, temos:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \beta\sigma_{max}\sqrt{\pi a} - \beta\sigma_{min}\sqrt{\pi a} \\ &= \beta\sqrt{\pi a}\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right) \end{aligned} \tag{6.3b}$$

O logaritmo da taxa de crescimento da trinca em relação ao número de ciclos *da/dN* é calculado e plotado *versus* o logaritmo do intervalo do fator de intensidade de tensão ΔK, como mostra a Figura 6-19.

A curva em forma de *S* da Figura 6-19 é dividida em três regiões chamadas de I, II e III. A região I corresponde ao estágio de início da trinca, a região II refere-se ao estágio de crescimento (propagação) da trinca e a região III, ao da fratura instável. A região II é a de maior interesse para a previsão da vida até a fadiga da peça; é também nessa parte que a curva se apresenta como uma linha reta em coordenadas logarítmicas. Paris[13] definiu a relação matemática na região II como

$$\frac{da}{dN} = A\left(\Delta K\right)^n \tag{6.4a}$$

Barsom[14] testou diferentes tipos de aço e desenvolveu alguns valores empíricos para o coeficiente *A* e o expoente *n* da Equação 6.4. Eles se encontram listados na Tabela 6-2. O número de ciclos *N* a crescer de uma fenda de um tamanho inicial a_i para um dado tamanho a_f em um ciclo conhecido de amplitude de tensão $\Delta\sigma$ e geometria β pode ser calculado a partir dos parâmetros da equação de Paris, como:*

$$N = \frac{a_f^{(1-n/2)} - a_i^{(1-n/2)}}{A\beta^n\pi^{n/2}\Delta\sigma^n(1 - n/2)} \tag{6.4b}$$

* Ver Seção 5.3 para definição do fator geométrico β.

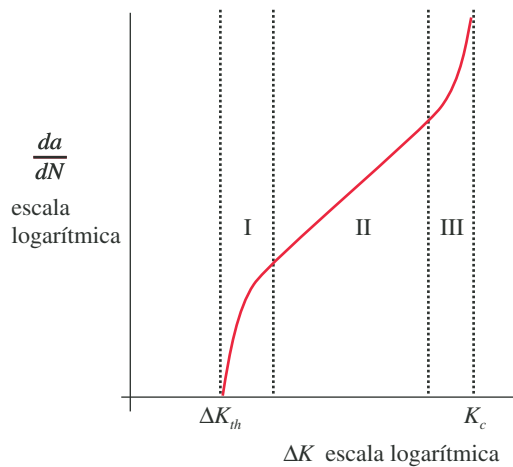



FIGURA 6-19

As três regiões da curva de crescimento da trinca. (Extraído de Bannantine et al., *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1990, Fig. 3-12, p. 102, com permissão.)

A vida até a fadiga, avaliada pelo crescimento da trinca, é determinada pela integração da Equação 6.4 entre o comprimento inicial da trinca, valor este conhecido ou assumido, e o máximo valor aceitável para o comprimento final da trinca, baseado nos parâmetros do material, da geometria da peça e do carregamento em particular, conforme a aplicação em questão.

A região I da Figura 6-19 é também bastante interessante, já que mostra a existência de um ponto inicial mínimo (ΔK_{th}) abaixo do qual não ocorrerá a propagação de trincas. Esse "*fator de intensidade de tensão do ponto limite inicial* ΔK_{th} *tem sido frequentemente considerado análogo ao limite de fadiga para peças sem entalhe S, uma vez que a aplicação de um intervalo do fator de intensidade de tensão* ΔK *inferior ao* ΔK_{th} *não causa o crescimento da trinca até a fadiga*".[15]

Esses ensaios de fadiga sob força normal têm uma tensão média cuja intensidade influencia a taxa de propagação da trinca. A Figura 6-20 exibe uma coleção esquemática de curvas *da/dN* para diferentes níveis de tensão média definidos a partir da razão de tensão R. Quando $R = 0$, a tensão é pulsante, como mostra a Figura 6-6*b*. Quando o valor de R se aproxima de 1, a tensão mínima aproxima-se da tensão máxima (ver Equação 6.1*d*). A Figura 6-20 mostra a pequena variação entre as curvas na região II (propagação da trinca), mas exibe as mudanças significativas com o valor de R nas regiões I e III. A iniciação da trinca também é afetada pelo nível da tensão média. O fator de intensidade de tensão do ponto-limite inicial ΔK_{th} pode ser reduzido por um fator de 1,5 até 2,5 quando R aumenta de 0 para 0,8.[18] Isso é bastante consistente com os efeitos da tensão média nos dados das curvas *S-N* do modelo tensão-número de ciclos discutido anteriormente (ver

Tabela 6-2 Parâmetros da equação de Paris para diversos aços
Fonte: J. M. Barsom[14], com permissão.

	Unidades SI		Unidades ips	
Aço	***A***	***n***	***A***	***n***
Ferrítico-perlítico	6,90*E*-12	3,00	3,60*E*-10	3,00
Martensítico	1,35*E*-10	2,25	6,60*E*-09	2,25
Austenítico inoxidável	5,60*E*-12	3,25	3,00*E*-10	3,25

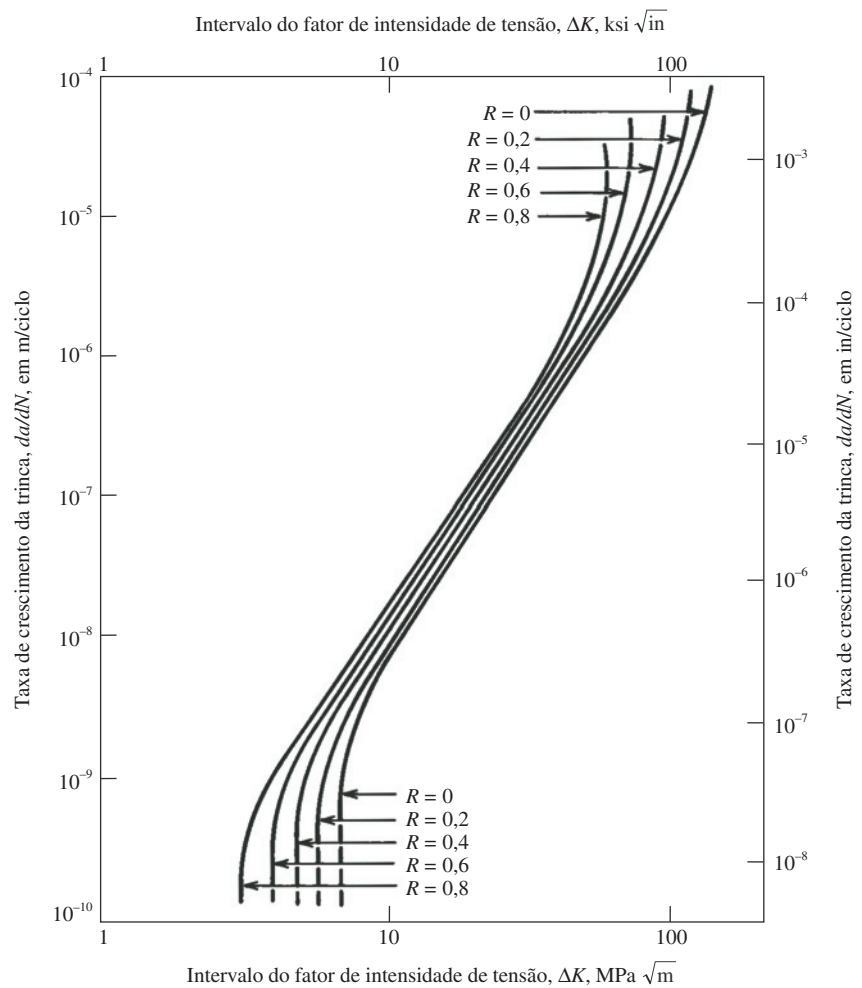



FIGURA 6-20

Gráfico esquemático dos efeitos da tensão média na curva de crescimento da trinca. (Extraído de Fuchs e Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, New York, 1980, reimpresso com permissão da John Wiley & Sons, Inc.)

Figura 6-16). A Figura 6-21, retirada da referência 19, mostra resultados de ensaios, exibindo o efeito da razão de tensão R no fator de intensidade de tensão no ponto limite inicial ΔK_{th} para diversos aços.

Ensaios de conjuntos reais

Se muitos dados de resistência se encontram disponíveis a partir de ensaios com corpos de prova, e o engenheiro pode utilizar-se desses dados como ponto de partida para estimar a resistência de uma peça em particular, é preciso dizer que os melhores dados são obtidos por meio de ensaios com conjuntos reais, submetidos a carregamentos verdadeiros e condições realistas de temperatura e ambiente. Trata-se de uma proposta bastante dispendiosa e que é normalmente realizada somente quando os custos do projeto, a quantidade a ser fabricada da peça/dispositivo ou a existência de uma ameaça à segurança humana demandam a realização desse tipo de ensaio. A Figura 6-22 mostra um elaborado conjunto de instrumentação construído para permitir ensaios de fadiga do conjunto da asa e da fuselagem de um avião Boeing 757 durante a sua fabricação. O avião inteiro é posicionado na plataforma de testes, juntamente com a instrumentação, e cargas variantes no

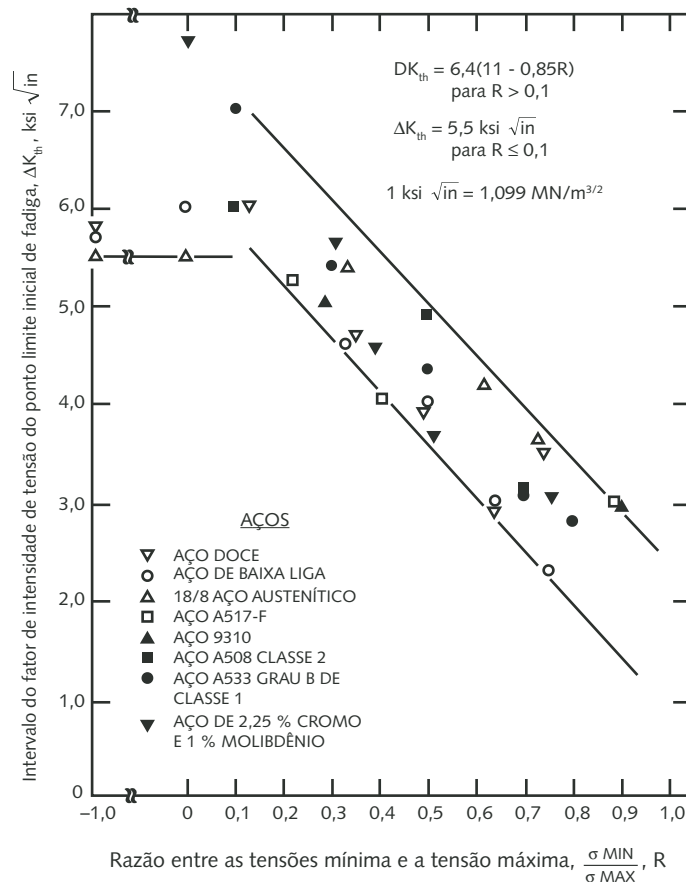



FIGURA 6-21

Efeito da tensão média no intervalo do fator de intensidade de tensão do ponto limite inicial de fadiga. (Extraído de Barsom e Rolfe, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987, Fig. 9.6, p. 285, com permissão.)

tempo são aplicadas a diversos elementos do avião, enquanto são realizadas medidas de deformações, deflexões, etc. Essa metodologia de ensaio é, obviamente, um processo caro, mas que ajuda a fornecer os dados mais realistas possíveis por meio da aplicação dos testes em peças com formato, tamanho e material reais, quando comparados aos ensaios com corpos de prova de laboratório.

6.6 CRITÉRIOS PARA ESTIMAR A FALHA POR FADIGA

A melhor informação a respeito da resistência à fadiga de um material para uma vida finita, ou seu limite de resistência à fadiga para uma vida infinita, provém de ensaios com montagens reais ou com os protótipos dos dispositivos de um projeto real, como descrito anteriormente. Nos casos em que essa alternativa não é possível, a próxima melhor informação provém dos ensaios de fadiga em corpos de prova retirados do mesmo material com o qual a peça será fabricada (isto é, tipos como fundidos, forjados, usinados, etc.). Também não sendo possível realizar a última alternativa citada, dados de resistência à fadiga podem estar disponíveis na literatura ou com os fabricantes/fornecedores de material, apesar de eles se referirem a ensaios com corpos de prova polidos e de pequenas dimensões ensaiados em ambientes controlados. Na ausência até mesmo desses valores, será necessário fazer alguma estimativa do limite de fadiga ou resistência à fadiga do

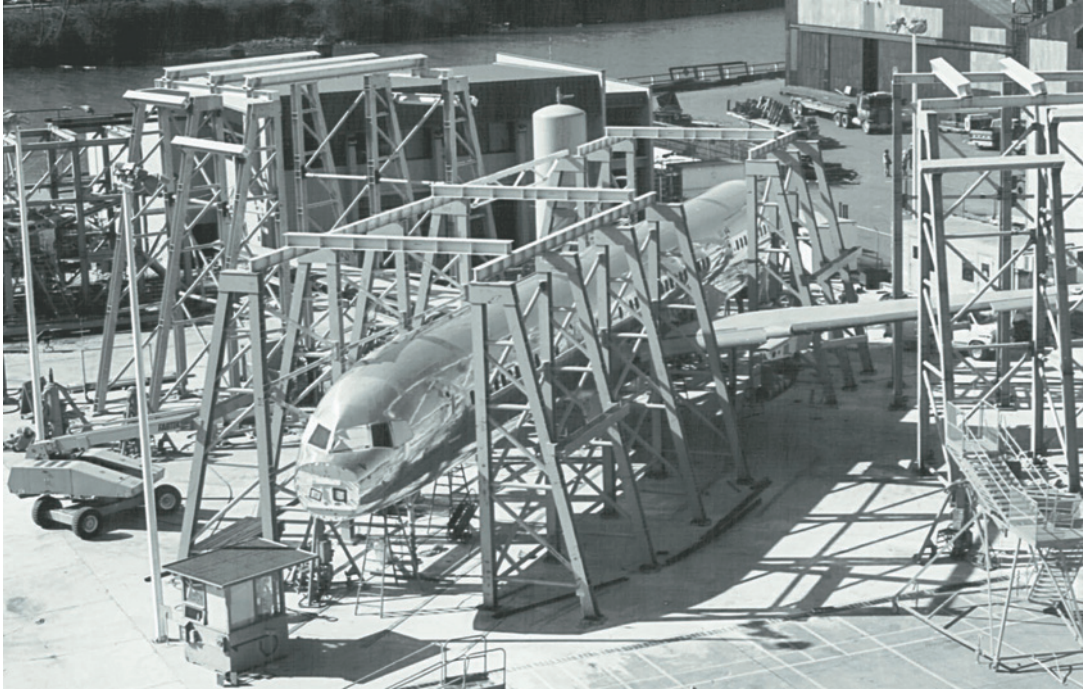



FIGURA 6-22

Conjunto com instrumentação construído para permitir ensaios de fadiga das montagens da asa e da fuselagem de um avião Boeing 757. (Cortesia da *Boeing Commercial Airplane Co.*, Seattle, Wash.)

material com base nos dados disponíveis de ensaios estáticos. Essa opção se limita a informações sobre a resistência à tração S_{ut} e a resistência ao escoamento S_y.

Resistência à fadiga teórica $S_{f'}$ ou limite de fadiga $S_{e'}$ estimados

Se os dados publicados estiverem disponíveis para a resistência à fadiga $S_{f'}$ ou o limite de fadiga $S_{e'}$ do material, eles devem ser utilizados, e os fatores de correção, discutidos na próxima seção, devem ser aplicados a esses valores. Os dados de resistência à fadiga encontrados nas publicações técnicas são geralmente retirados de ensaios com carregamentos alternados em flexão ou devido a forças normais em corpos de prova polidos e de pequenas dimensões. Se não existirem dados disponíveis de resistência à fadiga, valores aproximados de $S_{f'}$ ou $S_{e'}$ podem ser estimados a partir de valores da resistência à tração do material. A Figura 6-23 mostra a relação entre S_{ut} e $S_{f'}$ para aços forjados (*a*), ferros fundidos e forjados (*b*), ligas de alumínio (*c*) e ligas de cobre forjadas (*d*). Existe uma dispersão considerável e as retas são ajustadas aproximadamente para os limites superior e inferior. Para materiais com altos valores de resistência à tração, a resistência à fadiga tende a "estabilizar-se", como descrito anteriormente. A partir desses dados, relações aproximadas podem ser especificadas entre S_{ut} e $S_{f'}$ ou $S_{e'}$. Essas relações para aços e ligas de alumínio foram especificadas na seção anterior nas Equações 6.2 e são repetidas nesta seção por conveniência.

$$\text{aços:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} S_{e'} \cong 0{,}5\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 200 \text{ kpsi } (1400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 100 \text{ kpsi } (700 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \geq 200 \text{ kpsi } (1400 \text{ MPa}) \end{array} \right\} \quad (6.5a)$$

$$\text{ferros:} \quad \left\{ \begin{array}{ll} S_{e'} \cong 0{,}4\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 24 \text{ kpsi } (160 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \geq 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \end{array} \right\} \quad (6.5b)$$

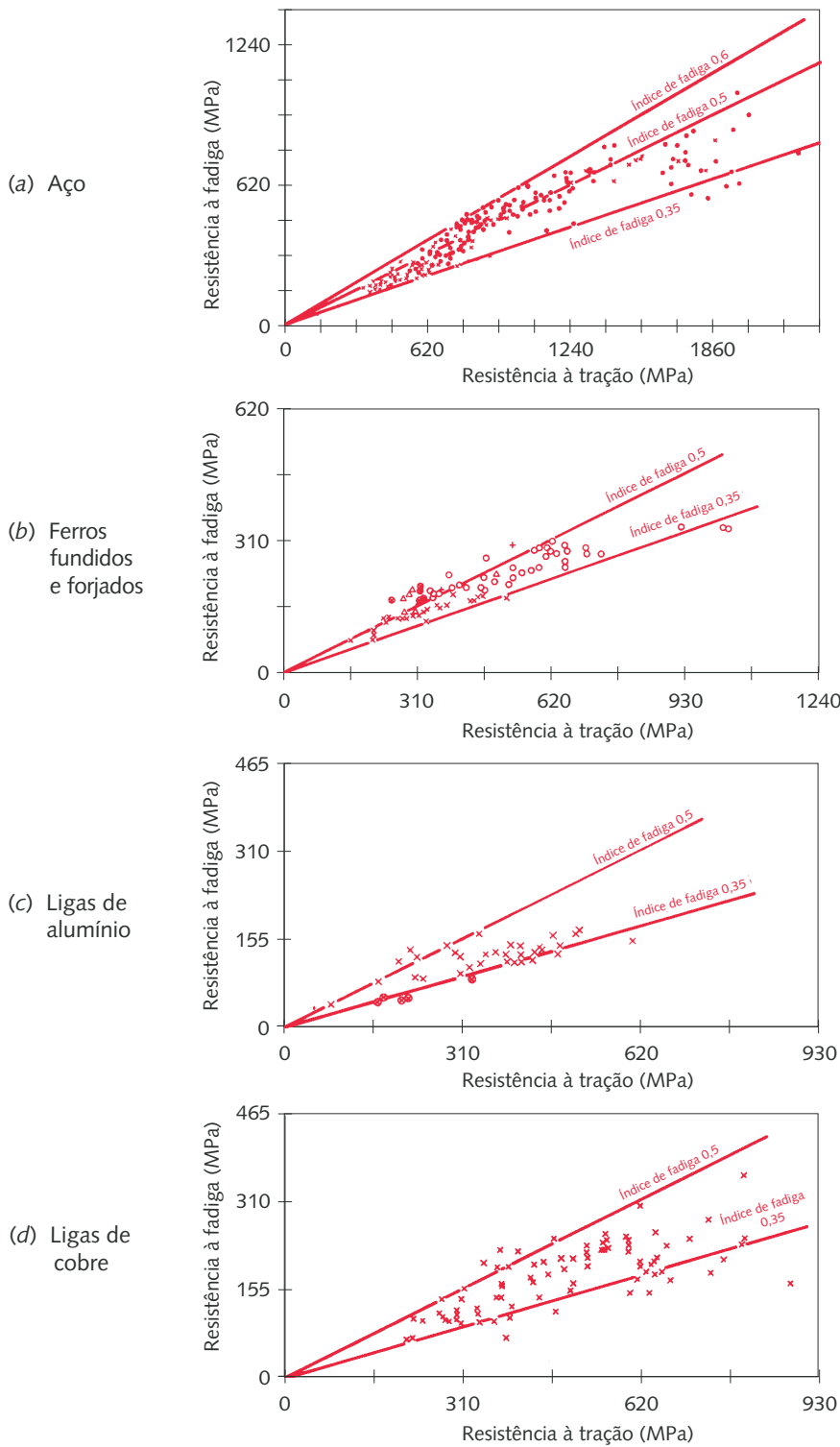



FIGURA 6-23

Relação entre a resistência à fadiga obtida de ensaios de flexão rotativa (sem entalhes) e a resistência à tração. (Extraído de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Londres, 1962.)

$$\text{alumínios:} \quad \begin{cases} S'_{f_{@5E8}} \cong 0{,}4\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \\ S'_{f_{@5E8}} \cong 19 \text{ kpsi } (130 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \geq 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{6.5c}$$

$$\text{ligas de cobre:} \quad \begin{cases} S'_{f_{@5E8}} \cong 0{,}4\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \\ S'_{f_{@5E8}} \cong 14 \text{ kpsi } (100 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \geq 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{6.5d*}$$

Fatores de correção para a resistência à fadiga ou limite de fadiga teóricos

As resistências à fadiga ou a limites de fadiga obtidos de ensaios com corpos de prova padrão ou de estimativas baseadas em testes estáticos devem ser modificadas para considerar, em seus valores finais, as diferenças físicas entre os corpos de prova e a peça real que está sendo projetada. Diferenças de temperatura e de meio ambiente (umidade, efeitos de corrosão, etc.) entre as condições do ensaio e as condições a que a peça estará submetida no futuro (condições reais) devem ser levadas em consideração, além das diferenças na maneira de aplicação do carregamento. Esses e outros fatores estão incorporados dentro de um conjunto de *fatores de redução da resistência* que são, depois, multiplicados pela estimativa teórica para se obter a resistência à fadiga corrigida ou o limite de fadiga corrigido para uma aplicação em particular.

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ S_f &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{f'} \end{aligned} \tag{6.6}$$

onde S_e representa o limite de fadiga corrigido para um material que exibe um ponto de inflexão em sua curva *S-N* e S_f representa a resistência à fadiga corrigida, definida para um número particular de ciclos *N*, correspondente a um material que não apresenta ponto de inflexão. Os fatores de redução da resistência, utilizados na Equação 6.6, serão definidos a seguir.

Efeitos da solicitação Uma vez que as relações descritas anteriormente e a maioria dos dados publicados de resistência à fadiga se referem a ensaios sob flexão rotativa, um fator de redução da resistência para a solicitação devido à força normal deve ser aplicado. A diferença entre a resistência à fadiga experimentalmente obtida de ensaios sob força normal e de flexão rotativa encontra-se descrita na seção anterior. Com base naquela discussão sobre ensaios de fadiga sob flexão e força normal, pode-se definir um **fator devido à solicitação** de redução da resistência, C_{carreg}, como

$$\begin{aligned} &\text{flexão:} && C_{carreg} = 1 \\ &\text{força normal:} && C_{carreg} = 0{,}70 \end{aligned} \tag{6.7a}$$

Sabe-se que os ensaios de fadiga sob torção apresentam uma resistência que é 0,577 vezes a resistência à fadiga sob flexão rotativa, como mostra a Figura 6-15. Para os casos de fadiga sob torção pura, pode-se comparar a tensão aplicada (tensão alternada) de cisalhamento devido à torção diretamente com a resistência à fadiga sob torção. Entretanto, geralmente lidaremos com o caso de torção pura (assim como os outros casos) por meio do cálculo da tensão equivalente de von Mises a partir das tensões aplicadas.† Isso fornece um *valor equivalente de tensão de tração alternada* que pode ser comparada diretamente com a *resistência à fadiga sob flexão*. Assim, para os casos de torção pura, usa-se $C_{carreg} = 1$ com esse método.

Efeitos do tamanho Os corpos de prova sujeitos a ensaios estáticos ou sujeitos à flexão rotativa possuem pequenas dimensões (por volta de 0,3 in de diâmetro). Se a peça em questão é maior do que a dimensão citada, um **fator de tamanho**, que reduz a resistência, deve ser aplicado a fim de se considerar o fato

* O professor Roger J. Hawks da Tri-State University, Angola, IN, analisou um grande número de dados para resistência à fadiga de ligas de cobre (incluindo os dados da Figura 6-23d) e entende que o melhor ajuste aos dados é $S_f = 0{,}37\, S_{ut}$ para $S_{ut} < 75$ kpsi e $S_f = 28$ kpsi para $S_{ut} > 75$ kpsi. (Comunicação pessoal, 1° de dezembro de 2004.)

† Uma exceção a esse fato corresponde ao caso da análise e do projeto de molas helicoidais, que será visto no Capítulo 13, para as quais a maioria dos dados de resistência disponíveis na literatura refere-se a valores de resistência ao cisalhamento na torção. Nesse caso, faz mais sentido comparar a tensão de torção diretamente com a resistência à torção sem efetuar a conversão para a tensão equivalente de von Mises.

de que peças maiores falham sob tensões menores, devido à maior probabilidade de um defeito estar presente na área sob tensão.* Vários autores têm sugerido diferentes valores para o fator de tamanho. Shigley e Mitchell[21] apresentaram uma equação simples, considerada bastante conservadora.

$$\begin{aligned} &\text{para } d \le 0{,}3 \text{ in } (8 \text{ mm}): && C_{tamanho} = 1 \\ &\text{para } 0{,}3 \text{ in} < d \le 10 \text{ in}: && C_{tamanho} = 0{,}869 d^{-0{,}097} \\ &\text{para } 8 \text{ mm} < d \le 250 \text{ mm}: && C_{tamanho} = 1{,}189 d^{-0{,}097} \end{aligned} \tag{6.7b}$$

Para tamanhos maiores, usa-se $C_{tamanho} = 0{,}6$. (Os dados experimentais coletados nos ensaios, nos quais essas equações se baseiam, foram obtidos a partir de peças de aço. A precisão da Equação 6.7*b* para metais não ferrosos é questionável.)

A Equação 6.7*b* é valida para peças cilíndricas. Para peças com outros formatos, Kuguel[22] sugeriu que a área da seção transversal não circular de uma peça que se encontra sujeita a uma tensão superior a 95% da tensão máxima da seção seja igualada à área de um corpo de prova cilíndrico da viga rotativa sujeita a tensões similares para fornecer o *diâmetro equivalente* a ser utilizado na Equação 6.7*b*. Visto que a tensão se encontra distribuída linearmente ao longo do diâmetro d de uma viga cilíndrica sob flexão rotativa, a área A_{95}, sujeita à tensão superior a 95% da tensão atuante em suas fibras externas, é aquela localizada na região entre 0,95d e 1,0d, como mostra a Figura 6-24.

$$A_{95} = \pi\left[\frac{d^2 - (0{,}95d)^2}{4}\right] = 0{,}0766 d^2 \tag{6.7c}$$

O diâmetro equivalente a um cilindro sob flexão rotativa, para qualquer seção transversal, é então

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0{,}0766}} \tag{6.7d}$$

onde A_{95} é a parcela da área da seção transversal não circular que está sujeita a tensões entre 95% e 100% da máxima tensão atuante na seção. Trata-se de uma tarefa simples o cálculo do valor de A_{95} para qualquer seção transversal, sendo conhecido o esforço solicitante. Shigley e Mitchell[21] fizeram esses cálculos para diversas seções transversais comumente usadas e seus resultados encontram-se na Figura 6-25.

(*a*) Distribuição de tensão

(*b*) Área acima de 95%

FIGURA 6-24

Área do corpo de prova sob flexão rotativa que está sujeita a tensões superiores a 95% da tensão máxima.

Efeitos da superfície O corpo de prova padrão da viga rotativa é polido com um acabamento espelhado para impedir que imperfeições superficiais atuem como intensificadores de tensão. Normalmente, não é prático realizar este tipo de acabamento por inteiro em uma peça real. Acabamentos mais grosseiros diminuem a resistência à fadiga devido à introdução de concentrações de tensão e/ou alteração das propriedades físicas da camada superficial da peça. Uma superfície forjada é rugosa e descarbonizada e os reduzidos níveis de carbono enfraquecem a superfície, onde as tensões são frequentemente as mais elevadas.[23] Um **fator de superfície** de redução da resistência, C_{superf}, faz-se necessário para considerar essas diferenças. Juvinall[24] fornece um gráfico (Figura 6-26) que oferece alguma orientação na seleção do fator de superfície para diversos acabamentos comuns no aço. Observe que a resistência à tração também é um parâmetro, visto que os materiais de maior resistência são mais sensíveis às concentrações de tensão introduzidas pelas irregularidades superficiais. Os ambientes corrosivos reduzem drasticamente a resistência, como mostra a Figura 6-26. Esses fatores de superfície foram desenvolvidos para aços e somente devem ser aplicados para ligas de alumínio e outros metais dúcteis tomando-se o cuidado de que em aplicações críticas sejam realizados ensaios, com as peças reais, sob condições reais de carregamento. Aos ferros fundidos pode-se atribuir um $C_{superf} = 1$, já que suas descontinuidades internas diminuem os efeitos de uma superfície rugosa.

* Seções transversais solicitadas à força normal sempre têm $C_{tamanho} = 1$, porque as falhas que ocorrem em corpos de prova sob esse tipo de solicitação não são sensíveis ao tamanho da seção transversal.

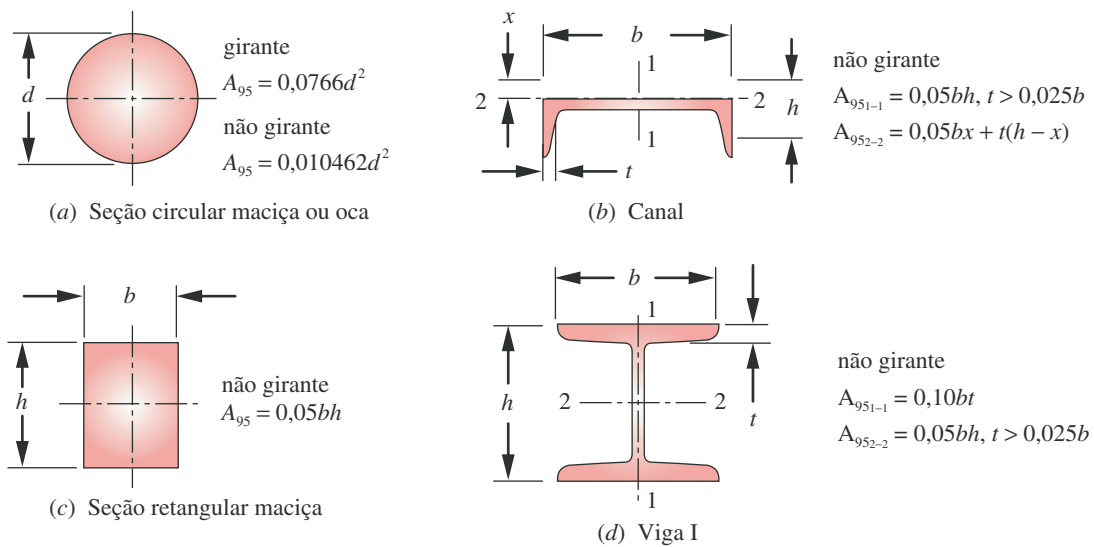



FIGURA 6-25

Fórmulas para áreas sob tensão (95%) de diversas seções transversais de vigas sob flexão. (Adaptado de: Shigley e Mitchell, *Mechanical Engineering Design*, 4th edition, McGraw-Hill, New York, 1983, com permissão.)

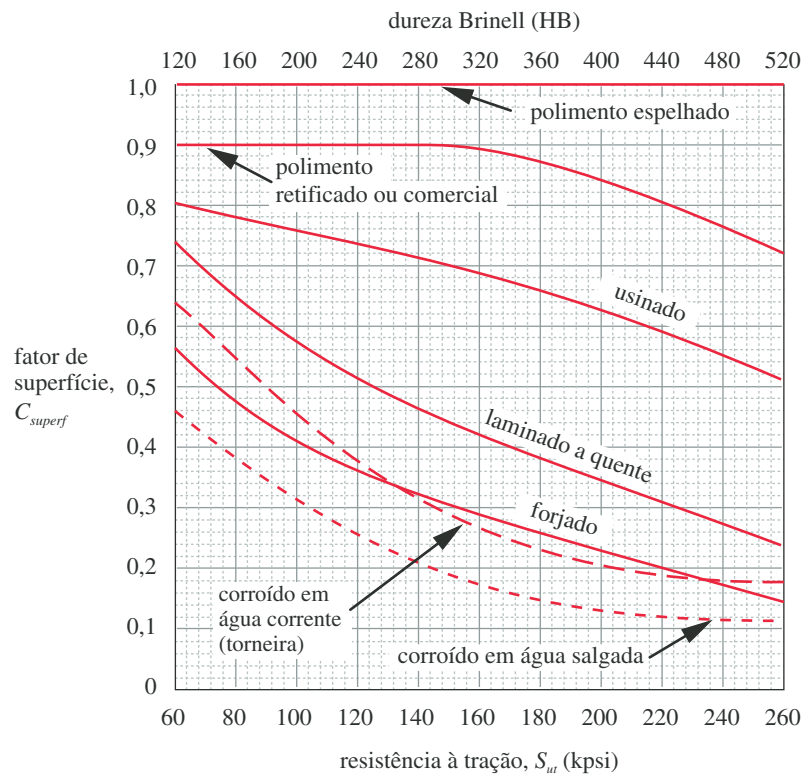



FIGURA 6-26

Fatores de superfície para diversos tipos de acabamento superficial para aços. (Extraído de R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill, New York, 1967, Fig. 12.6, p. 234, com permissão.)

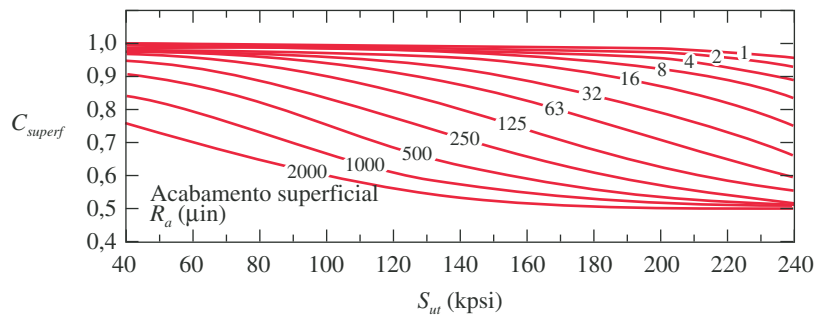



FIGURA 6-27

Fator de superfície em função da rugosidade superficial e da resistência à tração. (Extraído de R. C. Johnson, *Machine Design*, vol. 45, n° 11, 1967, p. 108, Penton Publishing, Cleveland, Ohio, com permissão.)

R. C. Johnson[25] apresenta um gráfico, exibido na Figura 6-27, que fornece maiores detalhes para **superfícies retificadas e usinadas** pela relação de C_{superf}, com a resistência à tração baseada na rugosidade superficial média R_a medida em micropolegadas.* Se o valor de R_a é conhecido para uma peça retificada ou usinada, a Figura 6-27 pode ser utilizada para se determinar o fator de superfície, C_{superf}, mais adequado. As curvas do fator de superfície na Figura 6-26 para superfícies laminadas a quente, forjadas e corroídas devem ainda ser utilizadas, visto que elas consideram os efeitos de crateração (*pitting*) e descarbonização, bem como a rugosidade superficial da peça.

Shigley e Mischke[39] sugerem a utilização de uma equação exponencial da seguinte forma:

$$C_{superf} \cong A\left(S_{ut}\right)^b \qquad \text{se } C_{superf} > 1{,}0, \text{ utilize } C_{superf} = 1{,}0 \qquad (6.7e)$$

para obter valores aproximados do fator de superfície em função do S_{ut}, tanto em kpsi quanto em MPa. Os coeficientes A e os expoentes b para diversos acabamentos são determinados a partir de dados similares àqueles utilizados na Figura 6-26 e encontram-se listados na Tabela 6-3. Essa aproximação tem a vantagem de ser programável em um computador, eliminando-se a necessidade de consultas a gráficos como os das Figuras 6-26 e 6-27. Note que valores ligeiramente diferentes de C_{superf} serão obtidos da Equação 6.7*e*, em comparação com o gráfico da Figura 6-26, devido aos diferentes dados usados para desenvolver a Equação 6.7*e* e seus fatores na Tabela 6-3.

Tratamentos superficiais como a eletrogalvanização com certos metais podem reduzir drasticamente a resistência à fadiga, como mostra a Figura 6-28 para revestimento com cromo. A galvanização (revestimento) com metais "maleáveis", como cádmio, cobre, zinco, chumbo e estanho, parece não comprome-

Tabela 6-3 Coeficientes para a equação do fator de superfície

Fonte: Shigley e Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1989, p. 283, com permissão

	Para S_{ut} em MPa, use		Para S_{ut} em kpsi (não em psi), use	
Acabamento superficial	**A**	**b**	**A**	**b**
Retificado	1,58	–0,085	1,34	–0,085
Usinado ou estirado a frio	4,51	–0,265	2,7	–0,265
Laminado a quente	57,7	–0,718	14,4	–0,718
Forjado	272	–0,995	39,9	–0,995

* Existem muitos parâmetros utilizados para caracterizar a rugosidade superficial, os quais, em sua maioria, são tipicamente medidos por meio da passagem de um estilete de diamante cônico e pontiagudo sobre a superfície em questão com força e velocidade controladas. O estilete segue os contornos microscópicos e permite armazenar o perfil da superfície em um computador. Um determinado número de análises estatísticas é feito em função do perfil obtido, como a determinação da maior distância entre picos (R_t), a média dos 5 picos mais elevados (R_{pm}), etc. O parâmetro mais comumente utilizado é o R_a (ou A_a), que corresponde à média aritmética dos valores absolutos das alturas dos picos e das profundidades dos vales do perfil. É este parâmetro que é usado na Figura 6-27. Ver Seção 7.1 para mais informações a respeito da rugosidade superficial.

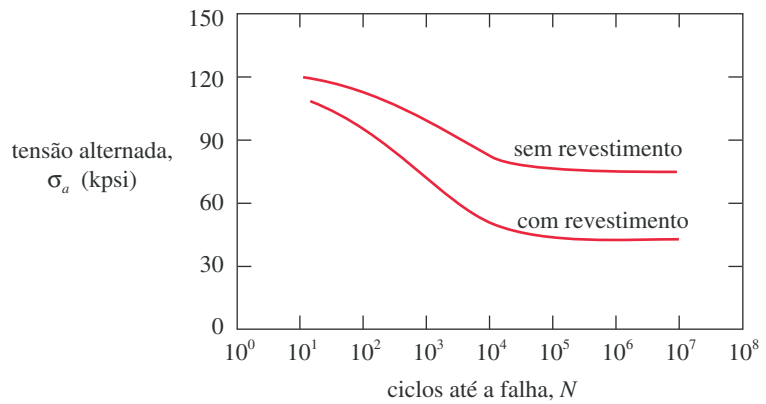



FIGURA 6-28

Efeito do revestimento com cromo na resistência à fadiga do aço. (Extraído de C. C. Osgood, *Fatigue Design*, Pergamon Press, London, 1982, com permissão.)

ter significativamente a resistência à fadiga. A eletrogalvanização com cromo e níquel em geral não é recomendável para peças submetidas a tensões de fadiga, ao menos que outros tratamentos superficiais adicionalmente também sejam aplicados, como o jateamento de esferas (*shot peening*). Uma exceção ocorre quando a peça estiver em um meio corrosivo e quando a proteção à corrosão, proporcionada pela galvanização, superar a redução da resistência. A maior parte da perda de resistência devido à galvanização pode ser recuperada por meio do jateamento de esferas na superfície da peça antes da galvanização para introduzir tensões de compressão, como mostra a Figura 6-29. O jateamento de esferas e outros métodos de introdução de tensões residuais são descritos na Seção 6.8.

Temperatura Ensaios de fadiga são mais comumente realizados a temperatura ambiente. A tenacidade à fratura diminui a baixas temperaturas e aumenta de valor em temperaturas moderadamente elevadas (até por volta de 350°C). Entretanto, o ponto de inflexão ("joelho") do limite de fadiga na curva *S-N* desaparece em altas temperaturas, fazendo com que a resistência à fadiga continue a dimi-

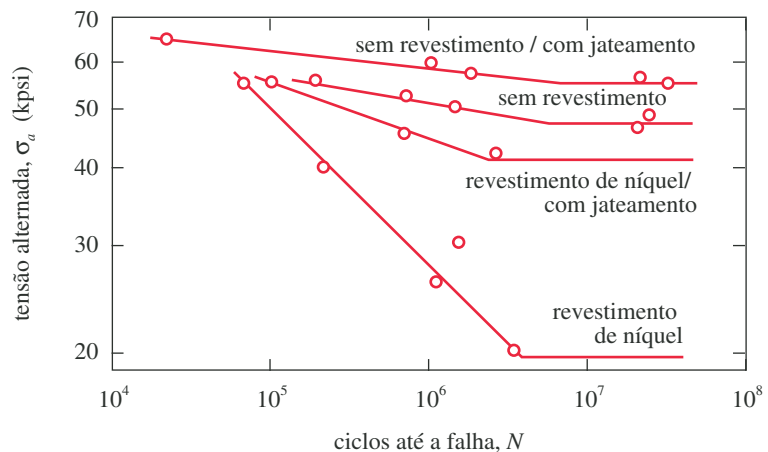



FIGURA 6-29

Efeito do revestimento de níquel e do jateamento de esferas na resistência à fadiga do aço. (Extraído de Almen & Black, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, New York, 1963.)

nuir com o aumento do número de ciclos, N. Além disso, a resistência ao escoamento decai continuamente com temperaturas acima da temperatura ambiente e, em alguns casos, isso pode provocar o fenômeno do escoamento antes mesmo da falha por fadiga. Nas temperaturas acima de aproximadamente 50% da temperatura de fusão absoluta do material, a fluência passa a ser um fator significativo para o comportamento do material da peça e a abordagem do modelo tensão-número de ciclos não é mais válida. A abordagem deformação-número de ciclos leva em consideração a influência combinada da fluência e fadiga sob elevadas temperaturas e, portanto, deve ser utilizada nesses casos.

Diversas fórmulas aproximadas têm sido propostas para o cálculo da redução no limite de fadiga em temperaturas moderadamente elevadas. Define-se, assim, um **fator de temperatura** C_{temp}. Shigley e Mitchell[21] sugerem o seguinte:

$$\begin{aligned} &\text{para } T \leq 450°\text{C } (840°\text{F}): && C_{temp} = 1 \\ &\text{para } 450°\text{C} < T \leq 550°\text{C}: && C_{temp} = 1 - 0{,}0058(T - 450) \qquad (6.7f) \\ &\text{para } 840°\text{F} < T \leq 1020°\text{F}: && C_{temp} = 1 - 0{,}0032(T - 840) \end{aligned}$$

Observe que os critérios acima são baseados em dados de ensaios com aços e, portanto, não devem ser utilizados para outros metais como Al, Mg e ligas de cobre.

Confiabilidade Muitos dos dados de resistência registrados na literatura referem-se a valores médios. Existe, no entanto, uma considerável dispersão nos ensaios realizados com o mesmo material sob condições semelhantes de ensaio. Haugen e Wirsching[27] relatam que os desvios-padrão das resistências à fadiga de aços raramente excedem 8% de seus valores médios. A Tabela 6-4 exibe os fatores de confiabilidade para um valor assumido para o desvio-padrão igual a 8% da média. Percebe-se que para uma confiabilidade de 50% o fator é igual a 1, e o fator diminui com a escolha de uma confiabilidade maior. Por exemplo, desejando-se ter uma probabilidade de que 99,99% das amostras igualem ou superem o valor de resistência assumido, é necessário multiplicar-se o valor da resistência média por 0,702. Os valores da Tabela 6-4 fornecem os fatores de redução da resistência, C_{conf}, para alguns níveis de confiabilidade previamente escolhidos.

Tabela 6-4
Fatores de confiabilidade para $S_d = 0{,}08\mu$

Confiabilidade %	C_{conf}
50	1,000
90	0,897
95	0,868
99	0,814
99,9	0,753
99,99	0,702
99,999	0,659
99,9999	0,620

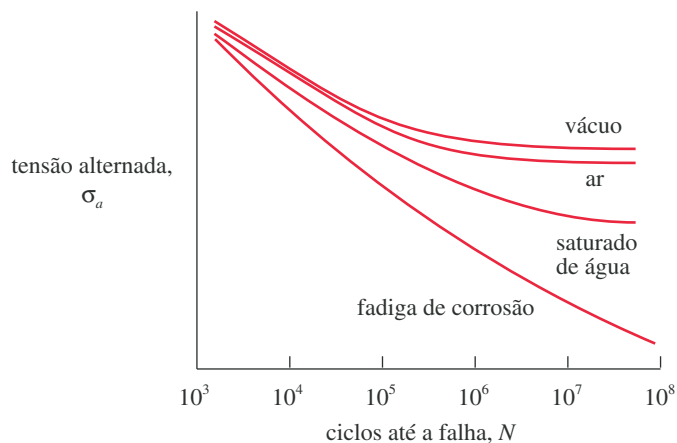



FIGURA 6-30

Efeito do meio ambiente na resistência à fadiga do aço. (Extraído de Fuchs e Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, New York, 1980; reimpresso com a permissão da John Wiley & Sons Inc.)

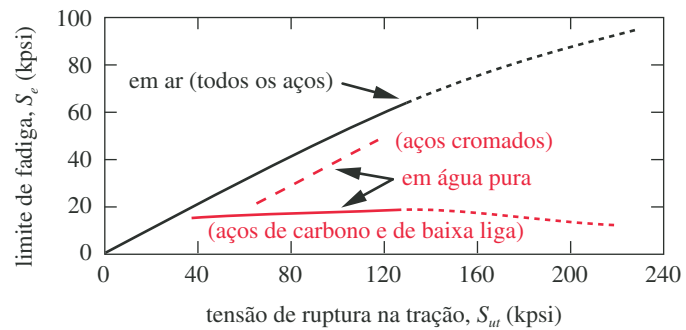



FIGURA 6-31

Efeito da água na resistência à fadiga do aço. (Extraído de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Oxford, 1962).

Ambiente O ambiente pode ter efeitos significativos na resistência à fadiga, o que é evidenciado pelas curvas de superfícies corroídas na Figura 6-26. A Figura 6-30 exibe esquematicamente os efeitos relativos de diferentes tipos de ambiente na resistência à fadiga. Observa-se que até mesmo o ar atmosférico presente no ambiente reduz a resistência à fadiga quando comparado ao vácuo. Quanto maior forem a umidade relativa e a temperatura, maior será a redução da resistência do material em contato com o ar do ambiente. A linha de *saturação em água* representa as peças que se encontram encharcadas (molhadas) em um ambiente corrosivo (água sem ou com sal) e que depois são testadas ao ar ambiente. Acredita-se que o aumento da rugosidade das superfícies que sofreram corrosão seja a razão para a perda de resistência. A curva de *corrosão por fadiga* mostra uma redução drástica da resistência e a eliminação do ponto definido como limite de fadiga.

O fenômeno de **corrosão por fadiga** não é completamente compreendido ainda, mas dados empíricos como os das Figuras 6-30 e 6-31 descrevem a seriedade desse tipo de fadiga. A Figura 6-31 mostra o efeito da água pura em serviço nas curvas *S-N* de aços carbono e de baixa liga. A relação entre S_e e S_{ut} fica constante a partir de 15 kpsi. Portanto, o aço carbono de baixa resistência comporta-se tão bem quanto o aço carbono de alta resistência nessas condições.

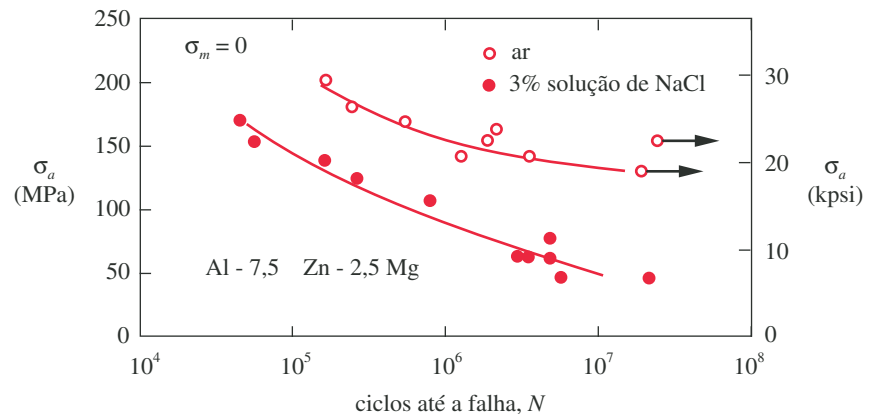



FIGURA 6-32

Efeito de água salgada na resistência à fadiga do alumínio. (Extraído de Stubbington e Forsyth, "Some Corrosion-Fatigue Observations on a High-Purity Aluminum-Zinc-Magnesium Alloy and Commercial D.T.D. 683 Alloy", *J. of the Inst. of Metals,* London, U. K., vol. 90, 1961-1962, pp. 347-354, com permissão.)

Os únicos tipos de aço que mantêm alguma resistência em água são os aços cromados (incluindo aço inoxidável), já que o elemento de liga confere proteção contra a corrosão. A Figura 6-32 mostra os efeitos de água salgada na resistência à fadiga de uma liga de alumínio. Apenas poucos dados estão disponíveis sobre resistência de materiais em ambientes severos. Assim, torna-se difícil definir quaisquer fatores globais de redução de resistência para condições ambientais. A melhor abordagem é testar extensivamente todos os projetos e materiais nos ambientes em que irão operar. (Isso não é simples para as situações nas quais os efeitos tardios de cargas de baixa frequência são desejados, pois seria necessário um tempo experimental impraticável para a obtenção dos dados.) Com base na Figura 6-31, para aços carbono e aços de baixa liga em água pura, a relação entre $S_{e'}$ e S_{ut} na Equação 6.5*a* deve ser modificada para:

$$S_{e'} \cong 15 \text{ kpsi } (100 \text{ MPa}) \qquad \text{para aço carbono em água pura} \tag{6.8}$$

Presumivelmente, um ambiente de água salgada seria ainda pior.

Cálculo da resistência à fadiga corrigida S_f ou do limite de fadiga corrigido S_e

Os fatores de redução da resistência podem agora ser aplicados ao limite de fadiga não corrigido $S_{e'}$ ou à resistência à fadiga não corrigida $S_{f'}$ usando-se as Equações 6.6 para a obtenção de valores corrigidos para propósitos de projeto.

Desenho do diagrama *S-N* estimado

As Equações 6.6 trazem informações a respeito da resistência dos materiais na região de alto-ciclo do diagrama *S-N*. Com informações similares para a região de baixo-ciclo, pode-se construir um diagrama *S-N* para materiais e aplicações particulares, como mostrado na Figura 6-33. A largura de banda de interesse é o regime fadiga de alto-ciclo de 10^3 a 10^6 ciclos e além. Suponha que S_m seja a resistência do material a 10^3 ciclos. Dados de teste indicam que as seguintes estimativas para S_m são razoáveis:

$$\begin{aligned} &\text{flexão:} && S_m = 0{,}9S_{ut} \\ &\text{força normal:} && S_m = 0{,}75S_{ut} \end{aligned} \tag{6.9}$$

O diagrama *S-N* estimado pode agora ser desenhado em escala log-log como mostra a Figura 6-33. O eixo dos *x* percorre de $N = 10^3$ a $N = 10^9$ e além. O valor de S_m da Equação 6.9 adequado ao tipo de carregamento é plotado em $N = 10^3$. Observe que os fatores de correção da Equação 6.6 **não** foram aplicados a S_m.

Se o material apresenta um limite de fadiga, então S_e corrigido da Equação 6.6 é plotado em $N_e = 10^6$ ciclos e uma linha reta é traçada entre S_m e S_e. A curva

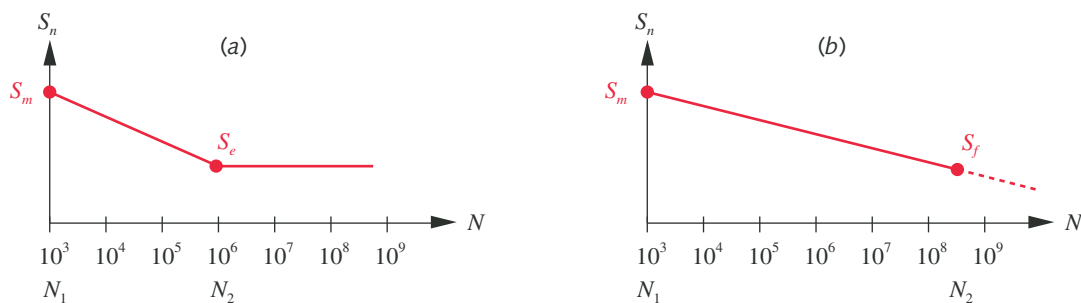



FIGURA 6-33

Curvas *S-N* estimadas para (*a*) materiais com limite de fadiga e para (*b*) materiais sem limite de fadiga.

é continuada horizontalmente deste ponto em diante. Se o material não apresenta um limite de fadiga, então o S_f corrigido da Equação 6.6 é plotado no número de ciclos para o qual este foi gerado (mostrado para $N_f = 5 \times 10^8$) e uma linha reta é traçada entre S_m e S_f. Essa linha pode ser extrapolada para valores além desse ponto; no entanto, a precisão é questionável, embora seja um resultado provavelmente conservador (ver Figura 6-10).

A equação da reta que passa por S_m e S_e ou S_f pode ser escrita como

$$S(N) = a N^b \tag{6.10a}$$

ou

$$\log S(N) = \log a + b \log N \tag{6.10b}$$

onde *S(N)* é a resistência à fadiga correspondente a um *N* qualquer, e *a* e *b* são constantes definidas pelas condições de contorno. Para todos os casos, o ponto no qual a curva intercepta o eixo *y* é $S(N) = S_m$ em $N = N_1 = 10^3$. Para o caso com limite de fadiga (Figura 6-33*a*), $S(N) = S_e$ em $N = N_2 = 10^6$. Para os materiais que não apresentarem um limite de fadiga definido, a resistência à fadiga é tomada a certo número de ciclos: $S(N) = S_f$ em $N = N_2$ (Figura 6-33*b*). Substituindo as condições de contorno na Equação 6.10*b* e resolvendo simultaneamente para *a* e *b*, tem-se:

$$b = \frac{1}{z}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) \qquad \text{onde} \qquad z = \log N_1 - \log N_2$$
$$\log(a) = \log(S_m) - b\log(N_1) = \log(S_m) - 3b \tag{6.10}$$

Tabela 6-5
Fatores *z* para Equação 6.10*c*

N_2	z
1,0*E*6	–3,000
5,0*E*6	–3,699
1,0*E*7	–4,000
5,0*E*7	–4,699
1,0*E*8	–5,000
5,0*E*8	–5,699
1,0*E*9	–6,000
5,0*E*9	–6,699

Observe que N_1 corresponde sempre a 1000 ciclos e seu $\log_{10}$ vale 3. Para um material com ponto de limite de fadiga em $N_2 = 10^6$, $z = (3 - 6) = -3$, como mostrado na Tabela 6-5. Essa curva é válida apenas para o ponto de limite de fadiga, a partir do qual $S(N) = S_e$, como mostrado na Figura 6-33*a*.

Para um material sem limite de fadiga definido e com $S(N) = S_f$ em $N = N_2$ (Figura 6-33*b*), os valores de *z* correspondentes aos vários valores de N_2 são facilmente calculados. Por exemplo, a curva na Figura 6-33*b* mostra S_f em $N_2 = 5 \times 10^8$ ciclos. Assim, o valor de *z* é:

$$z_{@5E8} = \log(1000) - \log(5E8) = 3 - 8{,}699 = -5{,}699$$
$$b_{@5E8} = -\frac{1}{5{,}699}\log\left(\frac{S_m}{S_f}\right) \quad \text{para } S_f @ N_2 = 5E8 \text{ ciclos} \tag{6.10d}$$

As constantes para quaisquer outras condições de contorno são determinadas da mesma maneira. Alguns valores de *z* para uma gama de valores de N_2 com N_1 fixo em 10^3 são apresentados na Tabela 6-5. Essas equações para a curva *S-N* permitem encontrar a vida em fadiga estimada, *N*, para qualquer resistência à fadiga alternada *S(N)*, ou, inversamente, o valor da resistência à fadiga, *S(N)*, para qualquer número de ciclos *N*.

EXEMPLO 6-1

Determinação de diagramas *S-N* estimados para materiais ferrosos

Problema **Construa um diagrama *S-N* estimado para uma barra de aço e defina suas equações. Quantos ciclos de vida podem ser esperados se a tensão alternada é de 100 MPa?**

Dados **O S_{ut} obtido experimentalmente é 600 MPa. A barra quadrada tem 150 mm de lado e tem acabamento superficial de**

laminado a quente. A temperatura máxima de operação é de 500°C. O carregamento aplicado é flexão pura alternada.

Hipóteses **A vida infinita é requerida e pode ser obtida, pois este aço dúctil apresentará limite de fadiga. Será considerado um fator para confiabilidade de 99,9%.**

Solução

1 Como nenhuma informação sobre o limite de fadiga ou resistência à fadiga é fornecido, estima-se $S_{e'}$ com base no limite de ruptura usando a Equação 6.5*a*.

$$S_{e'} \cong 0{,}5S_{ut} = 0{,}5(600) = 300 \text{ MPa} \quad (a)$$

2 O carregamento é de flexão, portanto o fator de carregamento da Equação 6.7*a* é:

$$C_{carreg} = 1{,}0 \quad (b)$$

3 A peça é maior que o corpo de prova e não tem seção circular, portanto um diâmetro equivalente baseado em 95% da tensão máxima (A_{95}) deve ser determinado e usado para encontrar o fator de tamanho. Para uma seção retangular sob flexão sem rotação, a área A_{95} é definida na Figura 6.25*c* e o diâmetro equivalente é obtido por meio da Equação 6.7*d*:

$$A_{95} = 0{,}05bh = 0{,}05(150)(150) = 1125 \text{ mm}^2$$

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0{,}0766}} = \sqrt{\frac{1125 \text{ mm}^2}{0{,}0766}} = 121{,}2 \text{ mm} \quad (c)$$

e o fator de tamanho é encontrado pela Equação 6.7*b*:

$$C_{tamanho} = 1{,}189(121{,}2)^{-0{,}097} = 0{,}747 \quad (d)$$

4 O fator de acabamento superficial é indicado pela Equação 6.7*e* e pelos valores da Tabela 6-3 para o acabamento por laminação a quente especificado.

$$C_{superf} = A\,S_{ut}^{b} = 57{,}7(600)^{-0{,}718} = 0{,}584 \quad (e)$$

5 O fator de temperatura é obtido da Equação 6.7*f*:

$$C_{temp} = 1 - 0{,}0058(T - 450) = 1 - 0{,}0058(500 - 450) = 0{,}71 \quad (f)$$

6 O fator de confiabilidade é obtido por meio da Tabela 6-4 para 99,9%:

$$C_{conf} = 0{,}753 \quad (g)$$

7 O valor corrigido do limite de fadiga S_e pode agora ser calculado pela Equação 6.6:

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carreg}\,C_{tamanho}\,C_{superf}\,C_{temp}\,C_{conf}\,S_{e'} \\ &= 1{,}0(0{,}747)(0{,}584)(0{,}71)(0{,}753)(300) \\ S_e &= 70 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (h)$$

8 Para criar o diagrama *S-N* é necessário estimar a tensão S_m em 10^3 ciclos de acordo com a Equação 6.9 para flexão.

$$S_m = 0{,}90S_{ut} = 0{,}90(600) = 540 \text{ MPa} \quad (i)$$

9 O diagrama *S-N* estimado é mostrado na Figura 6-34 com os valores de S_m e de S_e acima. As equações das duas linhas são obtidas pelas Equações de 6.10*a* a 6.10*c* assumindo que S_e começa aos 10^6 ciclos.

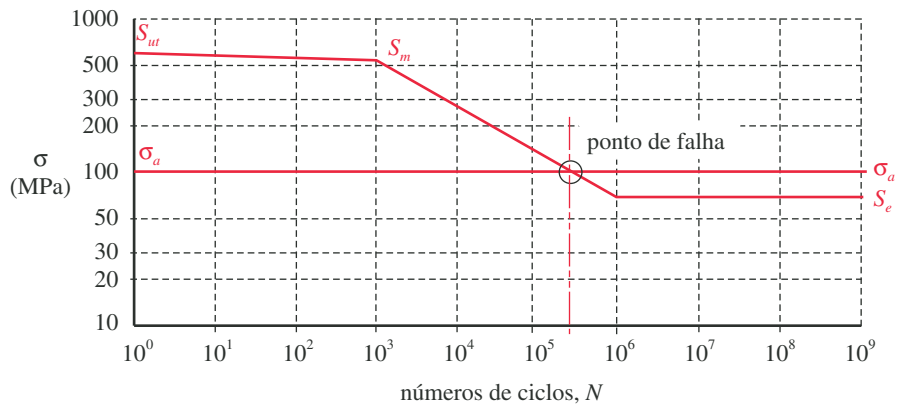



FIGURA 6-34

Diagrama S-N e linha de tensão alternada aplicada mostrando o ponto de falha para o Exemplo 6-1.

$$b = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{540}{70}\right) = -0{,}295765 \tag{j}$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log[540] - 3(-0{,}295\,765): \qquad a = 4165{,}707$$

$$\begin{aligned} S(N) &= a N^b = 4165{,}707\, N^{-0{,}295\,765} \text{ MPa} && 10^3 \le N \le 10^6 \\ S(N) &= S_e = 70 \text{ MPa} && N > 10^6 \end{aligned} \tag{k}$$

10 O número de ciclos de vida para qualquer nível de tensão alternada pode ser determinado com as Equações (k). Para a tensão alternada aplicada de 100 MPa tem-se:

$$\begin{aligned} 100 &= 4165{,}707\, N^{-0{,}295\,765} \qquad 10^3 \le N \le 10^6 \\ \log 100 &= \log 4165{,}707 - 0{,}295765 \log N \\ 2 &= 3{,}619689 - 0{,}295765 \log N \\ \log N &= \frac{2 - 3{,}619689}{-0{,}295765} = 5{,}476270 \\ N &= 10^{5{,}476270} = 3{,}0E5 \text{ ciclos} \end{aligned} \tag{l}$$

A Figura 6-34 mostra a interseção da linha de tensão alternada aplicada com a curva de falha em $N = 3E5$ ciclos.

11 Os arquivos EX06-01 encontram-se no CD-ROM que acompanha este livro.

EXEMPLO 6-2

Determinação de diagramas *S-N* estimados para materiais não ferrosos

Problema **Construa um diagrama *S-N* estimado para uma barra de alumínio e defina suas equações. Qual é o limite de fadiga corrigido em 2*E*7 ciclos?**

Dados **O S_{ut} para o alumínio 6061-T6 é 45000 psi. A barra forjada tem diâmetro de 1,5 in. A temperatura máxima de operação é de 300°F. O carregamento aplicado é torção pura.**

Hipóteses **Será considerado um fator de confiabilidade de 99,0%. A resistência à fadiga não corrigida será tomada a 5*E*8 ciclos.**

Solução

1 Como nenhuma informação sobre a resistência à fadiga é fornecida, estima-se $S_{f'}$ com base no limite de ruptura usando a Equação 6.5*c*.

$$S_{f'} \cong 0{,}4\,S_{ut} \qquad \text{para } S_{ut} < 48 \text{ ksi}$$
$$S_{f'} \cong 0{,}4(45.000) = 18.000 \text{ psi} \tag{a}$$

Esse valor corresponde a $N = 5E8$ ciclos. Não há limite de fadiga na curva *S-N* do alumínio.

2 O carregamento é *torção pura*; portanto, o fator de carregamento da Equação 6.7*a* é:

$$C_{carreg} = 1{,}0 \tag{b}$$

pois a tensão de cisalhamento na torção aplicada será convertida em uma tensão normal equivalente de Von Mises para comparação no diagrama de resistência *S-N*.

3 O tamanho da peça é maior que o do corpo de prova e sua seção é circular; portanto, o fator de tamanho pode ser estimado pela Equação 6.7*b*, notando que esta relação é baseada nos dados para aços:

$$C_{tamanho} = 0{,}869\left(d_{equiv}\right)^{-0{,}097} = 0{,}869\left(1{,}5\right)^{-0{,}097} = 0{,}835 \tag{c}$$

4 O fator de acabamento superficial é encontrado pela Equação 6.7*e* usando os dados da Tabela 6-3 para peças forjadas, lembrando que essas relações foram desenvolvidas para aço e podem ser menos precisas para alumínio.

$$C_{superf} = A\,S_{ut}^{b} = 39{,}9\left(45\right)^{-0{,}995} = 0{,}904 \tag{d}$$

5 A Equação 6.7*f* aplica-se apenas para aço; portanto, assume-se:

$$C_{temp} = 1 \tag{e}$$

6 O fator de confiabilidade é obtido da Tabela 6-4 para 99,0%:

$$C_{conf} = 0{,}814 \tag{f}$$

7 A resistência à fadiga corrigida S_f para $N = 5E8$ pode agora ser calculada pela Equação 6.6:

$$S_f = C_{carreg}\,C_{tamanho}\,C_{superf}\,C_{temp}\,C_{conf}\,S_{f'}$$
$$= 1{,}0(0{,}835)(0{,}904)(1{,}0)(0{,}814)(18000) = 11063 \text{ psi} \tag{g}$$

8 Para construir o diagrama *S-N* precisa-se ainda estimar a tensão S_m a 10^3 ciclos com base na Equação 6.9. Observe que o valor para o caso de flexão é usado para o caso de torção.

$$S_m = 0{,}90 S_{ut} = 0{,}90(45000) = 40500 \text{ psi} \tag{h}$$

9 O coeficiente e o expoente da curva *S-N* corrigida, assim como sua Equação, são obtidos a partir da Equação 6.10*c*. O valor de *z* é tirado da Tabela 6-5 para S_f a 5*E*8 ciclos.

$$b = -\frac{1}{5,699}\log\left(\frac{S_m}{S_f}\right) = -\frac{1}{5,699}\log\left(\frac{40500}{11063}\right) = -0,0989 \qquad (i)$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log[40500] - 3(-0,0989): \qquad a = 80193$$

10 A resistência à fadiga para a vida desejada de $N = 2E7$ ciclos pode ser avaliada pela Equação para a curva *S-N* corrigida:

$$S(N) = aN^b = 80193N^{-0,0989} = 80193(2e7)^{-0,0989} = 15209 \text{ psi} \qquad (j)$$

$S(N)$ é maior que S_f por ter sido calculado para uma vida menor em comparação à resistência à fadiga estipulada anteriormente.

11 Observe a ordem das operações. Primeiro foi encontrada uma resistência à fadiga não corrigida $S_{f'}$ para uma vida cíclica padrão ($N = 5E8$), então esta foi corrigida de acordo com os fatores apropriados das Equações 6.7. Só a partir daí é que foi criada a Equação 6.10*a* para a curva *S-N* de forma que esta passe pelo valor **corrigido** S_f para $N = 5E8$. Se a Equação 6.10*a* tivesse sido criada usando o valor não corrigido $S_{f'}$, resolvida para a vida desejada ($N = 2E7$), e se os fatores de correção tivessem sido aplicados depois, o resultado seria diferente e incorreto. Por serem funções exponenciais, a superposição não é válida.

12 Os arquivos EX06-02 encontram-se no CD-ROM.

6.7 ENTALHES E CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

Entalhe ou descontinuidade é um termo genérico neste contexto e refere-se a qualquer contorno geométrico que interrompa o “fluxo de forças” pela peça, como descrito na Seção 4.15. Uma **descontinuidade** pode ser *um furo, uma ranhura, um chanfro, uma mudança abrupta na seção transversal ou qualquer interrupção nos contornos lisos da peça*. As descontinuidades relevantes nesse contexto são aquelas introduzidas no projeto para desempenhar alguma função de engenharia, como ranhuras para anéis elásticos, arredondamentos em mudanças do diâmetro de eixos (ressaltos), etc. Espera-se que o engenheiro siga as boas recomendações práticas de projeto e mantenha os raios desses entalhes os maiores possíveis, reduzindo as concentrações de tensões como descrito na Seção 4.15. Entalhes de raio extremamente pequeno não são uma boa prática de projeto e, se existentes, devem ser tratados como trincas e com os princípios da mecânica da fratura usados para prever falhas. (Ver Seções 5.3 e 6.5). Uma descontinuidade ou entalhe causa uma concentração de tensões que aumenta os níveis de tensão localmente, podendo inclusive levar a um escoamento localizado. Na discussão sobre concentração de tensões nos Capítulos 4 e 5, na qual apenas cargas estáticas foram consideradas, os efeitos de concentração de tensões eram apenas importantes para os materiais frágeis. Supôs-se que os materiais dúcteis escoariam na região de concentração de tensões, aliviando as tensões até níveis aceitáveis. Na presença de cargas dinâmicas a situação torna-se diferente, já que materiais dúcteis se comportam como se fossem frágeis em falhas por fadiga.

Os fatores de concentração de tensão teóricos K_t para tensões normais e K_{ts} para tensões de cisalhamento foram definidos e abordados na Seção 4.15. (Ambos serão referidos aqui como K_t.) Esses fatores fornecem uma indicação do grau de concentração de tensão em um entalhe de contorno particular e são usados multiplicando a tensão nominal atuante na seção transversal que contém o entalhe (ver Equação 4.31). Muitos desses fatores teóricos ou geométricos de concentração de tensão foram determinados para diversos carregamentos e geometrias e encontram-se publicados em várias referências.[30, 31] Para cargas dinâmicas é necessário modificar o fator de concentração de tensão de acordo com a sensibilidade do

material a essas descontinuidades de modo a se obter o fator de concentração de tensão em fadiga, K_f , o qual pode ser aplicado às tensões dinâmicas nominais.

Sensibilidade ao entalhe

Os materiais apresentam diferentes sensibilidades a concentrações de tensão, denominadas **sensibilidade ao entalhe** do material. Em geral, quanto mais dúctil é o material, menor sua sensibilidade ao entalhe. Materiais frágeis são mais sensíveis a descontinuidades. Como a ductilidade e a fragilidade dos metais estão fortemente relacionadas à resistência e à dureza, materiais de baixa resistência e pouco duros tendem a ter menor sensibilidade a descontinuidades frente aos de alta resistência e duros. A sensibilidade ao entalhe depende também do raio de arredondamento do entalhe (que mede o quão bruscas são as descontinuidades). À medida que o raio de arredondamento se aproxima de zero, a sensibilidade ao entalhe do material **decresce** e também se aproxima de zero. Esse fato é de certa forma inesperado, pois, como visto na Seção 4.15, o fator de concentração de tensão teórico K_t tende a infinito quando o raio de arredondamento se aproxima de zero. Caso não houvesse uma redução na sensibilidade ao entalhe dos materiais para raios próximos de zero, os engenheiros teriam dificuldades para projetar peças capazes de suportar qualquer nível de tensão nominal quando há descontinuidades presentes.

Neuber[32] foi responsável pelos primeiros estudos minuciosos dos efeitos de descontinuidades e propôs uma equação para o fator de concentração de tensão em fadiga em 1937. Kuhn[33] posteriormente revisou a equação de Neuber e experimentalmente levantou dados para a constante de Neuber (uma propriedade do material), necessária em sua equação. Peterson[30] subsequentemente refinou a abordagem e desenvolveu o conceito de sensibilidade ao entalhe q definido por:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \tag{6.11a}$$

onde K_t é o fator de concentração de tensões teórico (estático) para a geometria particular e K_f é o fator de concentração de tensões em fadiga (dinâmico). A sensibilidade ao entalhe q varia entre 0 e 1. Essa equação pode ser reescrita para determinar K_f.

$$K_f = 1 + q\left(K_t - 1\right) \tag{6.11b}$$

O procedimento consiste em primeiro determinar a concentração de tensões teóricas K_t para a geometria e o carregamento particulares, então estabelecer a sensibilidade ao entalhe apropriada para o material escolhido e usá-los na Equação 6.11*b* para encontrar o fator dinâmico de concentração de tensões K_f. A tensão nominal dinâmica para qualquer situação é então multiplicada pelo fator K_f para tensão de tração (K_{fs} para tensão de cisalhamento) da mesma maneira que foi feito para o caso estático:

$$\begin{aligned} \sigma &= K_f\, \sigma_{nom} \\ \tau &= K_{fs}\, \tau_{nom} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Observe na Equação 6.11 que quando $q = 0$, $K_f = 1$ e não há aumento da tensão nominal na Equação 6.12. Quando $q = 1$, $K_f = K_t$ e o efeito total do fator geométrico de concentração de tensões é observado na Equação 6.12.

A sensibilidade ao entalhe q pode ainda ser definida a partir da fórmula de Kuhn-Hardrath[33] em termos da constante de Neuber a e do raio do entalhe r, ambos expressos em polegadas.

$$q = \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{6.13}$$

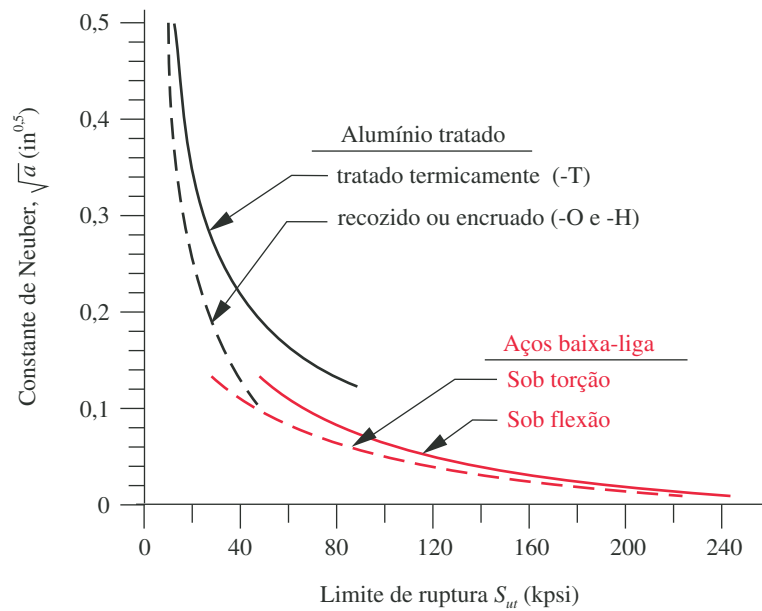



FIGURA 6-35

Constantes de Neuber para aço e alumínio. (Extraído de *ASME Paper* 843c, "The Prediction of Notch and Crack Strength under Static or Fatigue Loading" by P. Kuhn, April 1964.)

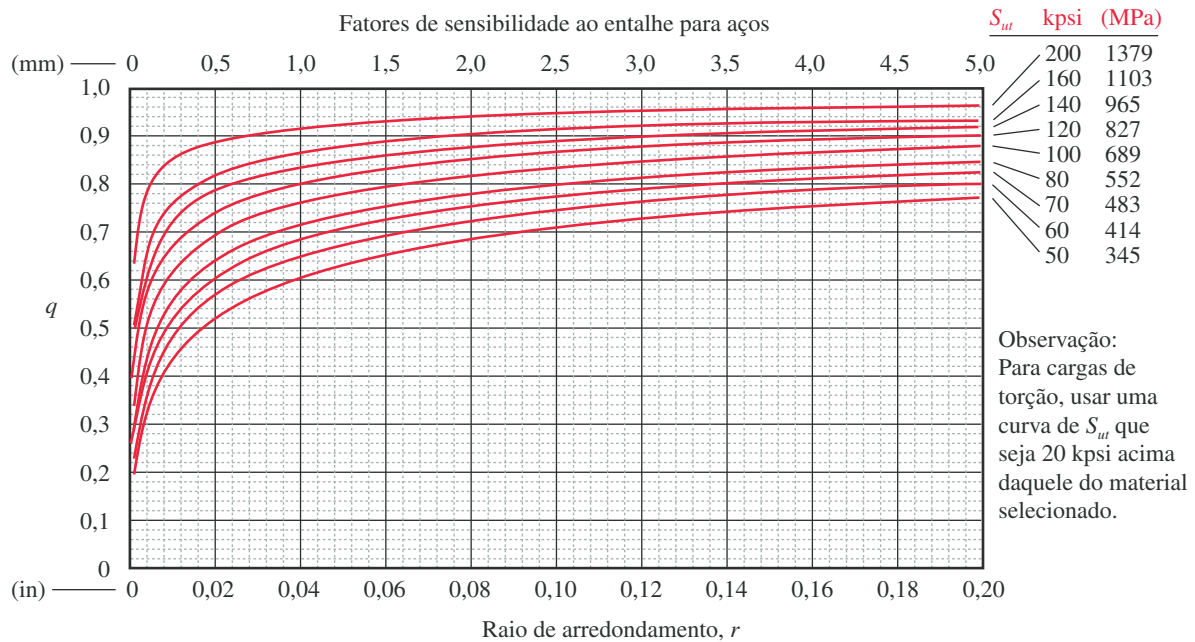



FIGURA 6-36 Parte 1

Curvas de sensibilidade ao entalhe para aços calculadas a partir da Equação 6.13 com os dados da Figura 6-35, como originalmente proposto por R. E. Peterson em "Notch Sensitivity", Capítulo 13 em *Metal Fatigue* by G. Sines and J. Waisman, McGraw-Hill, New York,1959.

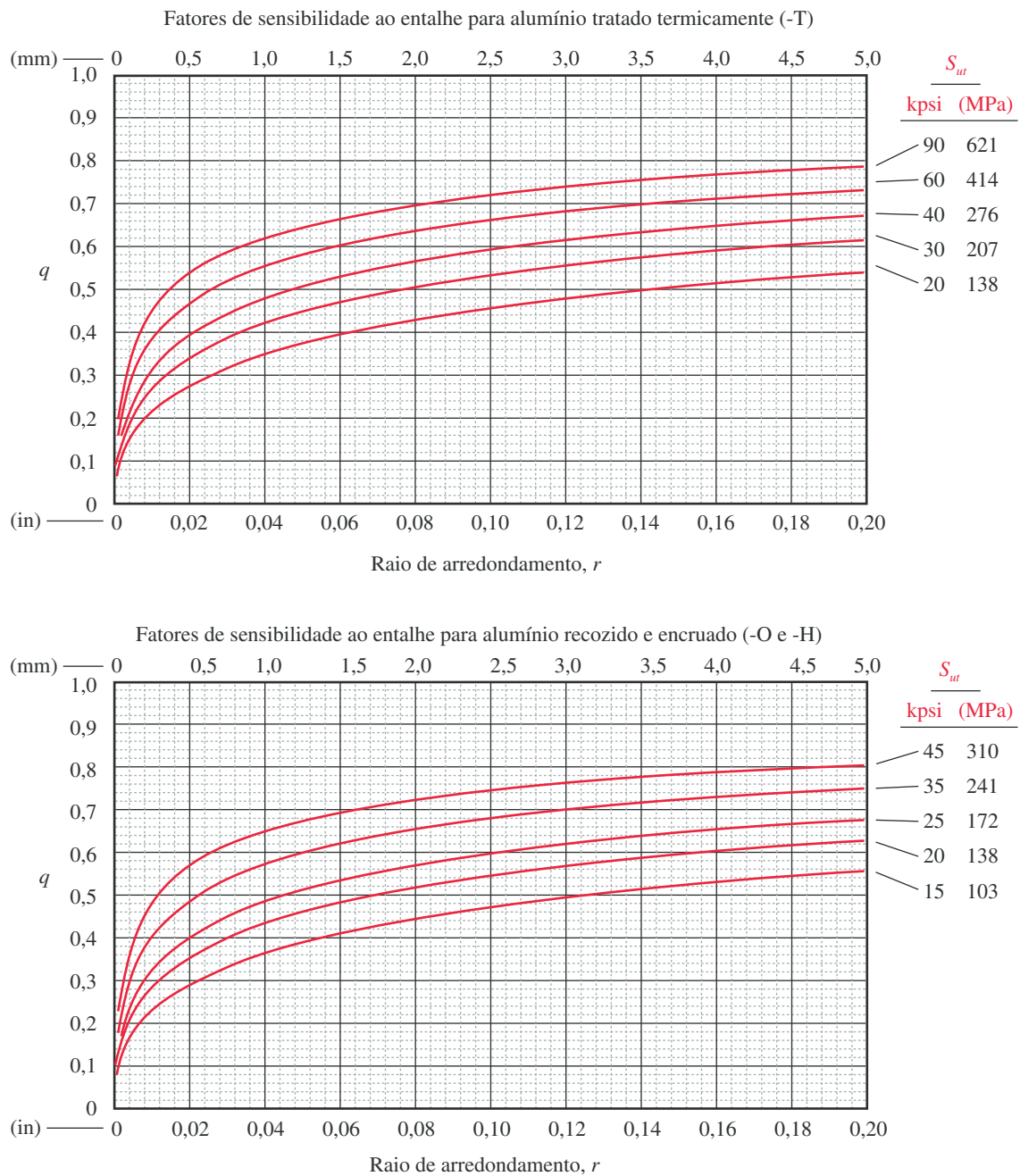



FIGURA 6-36 Parte 2

Curvas de sensibilidade ao entalhe para aços calculadas a partir da Equação 6.13 com os dados da Figura 6-35, como originalmente proposto por R. E. Peterson em "Notch Sensitivity", Capítulo 13 em *Metal Fatigue* by G. Sines and J. Waisman, McGraw-Hill, New York,1959.

Tabela 6-6
Constante de Neuber para aços

S_{ut} (ksi)	$\sqrt{a}$ ($in^{0,5}$)
50	0,130
55	0,118
60	0,108
70	0,093
80	0,080
90	0,070
100	0,062
110	0,055
120	0,049
130	0,044
140	0,039
160	0,031
180	0,024
200	0,018
220	0,013
240	0,009

Tabela 6-7
Constante de Neuber para alumínio recozido

S_{ut} (kpsi)	$\sqrt{a}$ ($in^{0,5}$)
10	0,500
15	0,341
20	0,264
25	0,217
30	0,180
35	0,152
40	0,126
45	0,111

Observe que a constante de Neuber é definida como a raiz quadrada de *a*, não como *a*, portanto é diretamente substituída na Equação 6.13, enquanto o valor de *r* deve ter sua raiz quadrada extraída. A Figura 6-35 mostra um gráfico da constante de Neuber $\sqrt{a}$ para três tipos de materiais, e as Tabelas 6-6 a 6-8 trazem dados retirados daquela figura. Observe na Figura 6-35 que, para esforços de torção em aços, o valor de $\sqrt{a}$ pode ser obtido utilizando-se a curva correspondente à tração, porém com o valor de S_{ut} do material acrescido de 20 kpsi.

Na Figura 6-36, as partes 1 e 2 mostram curvas de sensibilidade ao entalhe para aços e alumínios (respectivamente) geradas com a Equação 6.13 usando os dados da Figura 6-35. Essas curvas são para entalhes cuja profundidade é menor que quatro vezes o raio da raiz e devem ser usadas com cuidado para entalhes de maior profundidade.

O valor completo do fator de concentração de tensões em fadiga K_f aplica-se apenas ao final do regime FAC ($N = 10^6$-10^9 ciclos). Alguns autores [10, 30, 34] recomendam a aplicação de uma parcela reduzida de K_f, denominada $K_{f'}$, para tensões alternadas para $N = 10^3$ ciclos. Para materiais de alta resistência ou frágeis, $K_{f'}$, é próximo de K_f, mas para materiais dúcteis ou de baixa resistência, $K_{f'}$ aproxima-se de 1. Outros autores[35] recomendam a aplicação do valor completo de K_f mesmo a 10^3 ciclos. A última abordagem é mais conservadora, visto que dados indicam que os efeitos da concentração de tensões são menos pronunciados para valores de *N* baixos. Será adotada a abordagem conservativa e K_f será aplicado uniformemente ao longo da faixa de FAC, pois as incertezas ao redor das estimativas do limite de fadiga e os vários fatores de modificação encorajam o conservadorismo.

EXEMPLO 6-3

Determinação dos fatores de concentração de tensão em fadiga

Problema **Uma barra retangular com ressalto similar à da Figura 4-36 suporta esforços de flexão. Determine o fator de concentração de tensão em fadiga para as dimensões fornecidas.**

Dados **Usando-se a nomenclatura da Figura 4-36, $D = 2$, $d = 1{,}8$ e $r = 0{,}25$. O material apresenta $S_{ut} = 100$ kpsi.**

Solução

1 O fator geométrico de concentração de tensão K_t é obtido a partir da equação na Figura 4-36:

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b \qquad (a)$$

onde *A* e *b* são dados na própria figura em função da razão *D/d*, que vale 2/1,8 = 1,111. Para essa razão, $A = 1{,}0147$ e $b = -0{,}2179$, resultando em:

$$K_t = 1{,}0147\left(\frac{0{,}25}{1{,}8}\right)^{-0{,}2179} = 1{,}56 \qquad (b)$$

2 A sensibilidade ao entalhe *q* do material pode ser encontrada usando-se a constante de Neuber $\sqrt{a}$ da Figura 6-35 e das Tabelas 6-6 a 6-8 em combinação com a Equação 6.13, ou lendo-se o valor de *q* diretamente da Figura 6-36. O método anterior será aplicado. A constante de Neuber de acordo com a Tabela 6-6 para $S_{ut} = 100$ kpsi é 0,062. Observe que essa é a raiz quadrada de *a:*

$$q = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1+\frac{0,062}{\sqrt{0,25}}} = 0,89 \qquad (c)$$

3 O fator de concentração de tensão em fadiga pode então ser obtido pela Equação 6.11*b*:

$$K_f = 1 + q\left(K_t - 1\right) = 1 + 0,89\left(1,56 - 1\right) = 1,50 \qquad (d)$$

4 Os arquivos EX06-03 encontram-se no CD-ROM.

Tabela 6-8
Constante de Neuber para alumínio encruado

S_{ut} (kpsi)	$\sqrt{a}$ ($in^{0,5}$)
15	0,475
20	0,380
30	0,278
40	0,219
50	0,186
60	0,162
70	0,144
80	0,131
90	0,122

6.8 TENSÕES RESIDUAIS

As tensões residuais referem-se a tensões que são “embutidas” em uma peça sobre a qual não há esforços atuando. A maioria das peças apresenta tensões residuais devido a seus processos de fabricação. Qualquer procedimento como conformação ou tratamento térmico que crie deformações locais acima do limite de escoamento provoca tensões assim que a deformação for removida. Um bom projeto requer que o engenheiro procure utilizar as tensões residuais para, no mínimo, não criar efeitos negativos na resistência e, preferivelmente, criar efeitos positivos.

A falha por fadiga é um fenômeno característico de tensões de tração. As Figuras 6-17 e 6-18 ilustram os efeitos benéficos de tensões de compressão médias na resistência à fadiga. Enquanto o projetista tem pouco ou nenhum controle sobre a presença ou ausência de uma tensão de compressão média no padrão de carregamento a que a peça estará sujeita, há técnicas que permitem a introdução de **tensões residuais de compressão** em uma peça antes dela ser colocada em serviço. Implantadas devidamente, essas tensões residuais podem realizar melhorias significativas na vida sob fadiga. Há diversos métodos para introdução de tensões residuais de compressão: **tratamentos térmicos**, **tratamentos superficiais** e **tratamentos mecânicos de pré-tensionamento**. A maior parte deles deixa tensões de compressão biaxiais na superfície, tensões de compressão triaxiais sob a superfície e triaxiais de tração no centro da peça.

Uma vez que a peça está em equilíbrio, as tensões residuais próximas à superfície devem ser equilibradas por tensões de tração no interior. Se o tratamento é feito de forma exagerada, o aumento das tensões internas de tração pode causar a ruptura, portanto deve-se encontrar um meio-termo. Esses tratamentos são mais úteis quando a distribuição de tensão aplicada devido ao carregamento não é uniforme e é principalmente de tração na superfície, como na flexão alternada. Flexão em uma única direção apresentará picos de tensão de tração em apenas um lado da peça, e então o tratamento pode ser aplicado apenas a esse lado. A distribuição de tensões devido à força normal é uniforme ao longo da seção transversal e, portanto, um padrão não uniforme de tensão residual não traria benefícios, exceto no caso de haver entalhes na superfície que causem aumentos locais da tensão de tração. Nesta situação, tensões residuais de compressão tornam-se muito úteis. De fato, independentemente do carregamento, a distribuição de tensões de tração nos entalhes se reduzirá com a adição de tensões residuais de compressão nesses locais. Como entalhes do projeto se encontram frequentemente na superfície, pode-se aplicar um tratamento a eles.

A introdução deliberada de tensões residuais de compressão é mais efetiva em peças fabricadas com materiais de alta resistência ao escoamento. Se o limite de escoamento do material for baixo, as tensões residuais podem não permanecer por muito tempo na peça devido ao posterior escoamento provocado por altas tensões aplicadas em serviço. Segundo Faires,[36] aços com $S_y < 80$ kpsi mostraram melhorias iniciais, mas poucas melhorias duradouras quanto à resistência à fadiga. No entanto, Heywood[37] relatou aumentos de 50% na resistência à fadiga em roscas laminadas em aço de alta resistência.

Tratamentos térmicos Tensões térmicas surgem sempre que uma peça é aquecida e resfriada, de maneira não uniforme, como na conformação a quente ou em tratamentos térmicos. Diversos métodos de tratamento térmico foram discutidos no Capítulo 2. Eles podem ser divididos claramente em duas categorias, **endurecimento completo**, na qual *a peça inteira é aquecida acima da temperatura de transição e então resfriada rapidamente,* e **endurecimento superficial**, na qual apenas *uma camada pouco profunda da superfície é aquecida acima da temperatura de transição e resfriada* ou *a peça é aquecida até uma temperatura inferior em uma atmosfera para adição de elementos endurecedores à superfície.*

Têmpera completa causa *tensões residuais de tração* na superfície. Se o carregamento na peça cria altas tensões de tração na superfície, como em flexão ou torção, ou se entalhes na superfície de uma peça sob força normal causam altas tensões locais de tração, então tensões residuais de tração irão piorar a situação. Isso torna a têmpera completa menos desejável nesses casos.

Têmpera superficial por *cementação, nitretação, chama ou indução* cria *tensões residuais de compressão* na superfície porque o aumento de volume associado à mudança de fase do material (ou adição de elementos) localiza-se próximo da superfície e o núcleo inalterado leva a parte externa à compressão. Essa tensão de compressão superficial pode ter um efeito benéfico significativo na resistência à fadiga. Uma parte do material não sabe ou não se importa se a tensão nela aplicada é causada por alguma força externa ou por uma interna, residual. O material sente uma tensão reduzida que é a soma algébrica da tensão de tração (aplicada alternadamente) positiva e da tensão de compressão (residual média) negativa. Se uma peça sob fadiga for receber tratamento térmico, a têmpera superficial oferece vantagens significativas sobre a têmpera completa. A Figura 6-37 mostra os efeitos da nitretação e cementação no estado de tensão residual próximo à superfície, e mostra a distribuição de tensões de tração e de compressão através da espessura de uma peça cementada.

Tratamentos superficiais Os métodos mais comuns para introdução de tensões residuais superficiais são o **jateamento de esferas** e a **conformação a frio**. Ambos envolvem o escoamento por tração da camada superficial a uma certa profundidade. O escoamento seletivo de uma porção do material causa tensões residuais de sinal oposto desenvolvidas na região interior do material livre de tensão que tenta forçar o material escoado de volta a sua posição original. A regra é: *para proteção contra tensões futuras em um determinado sentido, aplica-se uma sobretensão ao material (isto, é provoca-se seu escoamento) no mesmo sentido*

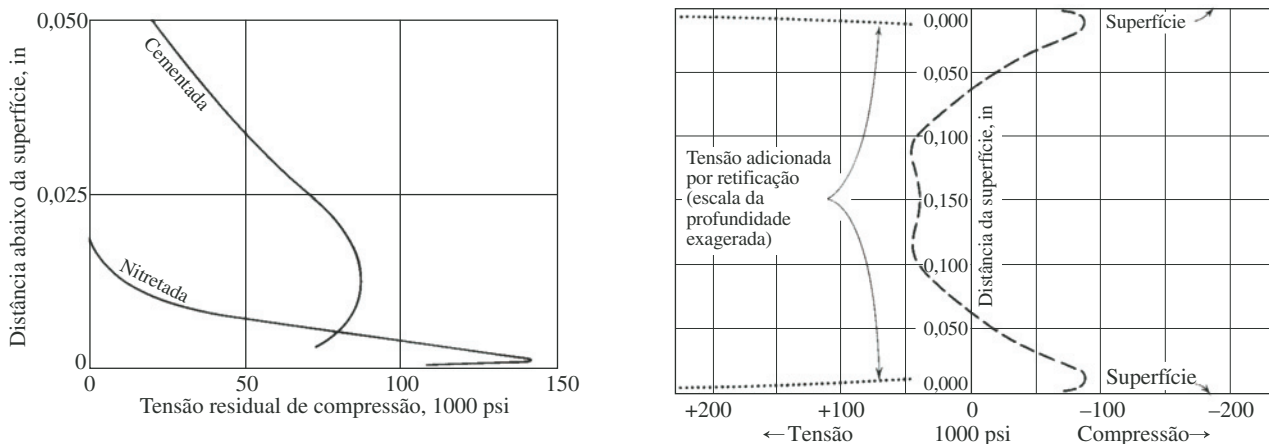



FIGURA 6-37

Distribuição de tensões residuais devido ao encruamento da superfície. (Extraído da Fig. 5.1, p. 51 e Fig. A-13, p. 202, em Almen e Black, 1963, *Residual Stresses and in Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, New York, com permissão.)

em que as tensões aplicadas ocorrerão. Uma vez que estamos tentando evitar tensões resultantes de tração na fadiga, deve-se escoar o material, que será solicitado à tração, com o objetivo de desenvolver tensões residuais de compressão. Esta técnica de trabalho a frio da superfície era conhecida dos antigos ferreiros que martelavam a superfície de espadas ou molas de carruagens quando frias como último passo para aumentar a resistência destas.

O **jateamento de esferas*** é um método de execução relativamente fácil e pode ser aplicado a peças de praticamente qualquer formato. A superfície da peça é impactada com um fluxo de esferas feitas de aço, ferro fundido endurecido a frio, vidro, cerâmica, cascas de nozes, ou outro material. O jateamento mais duro é usado em peças de aço, e o menos duro, em metais não ferrosos. A esfera é atirada na peça a uma alta velocidade, proveniente ou de um cilindro rotativo ou de jatos de ar através de bocais. Os impactos das esferas deformam a superfície, fazendo com que o material escoe e criando uma aparência marcada, com saliências em baixo relevo (depressões). A superfície é essencialmente esticada a uma área maior, e o material da camada inferior força a superfície de volta criando um estado de tensão residual de compressão. Pode haver também encruamento do material da superfície, o que aumenta sua dureza e sua resistência ao escoamento.

Pode-se alcançar níveis elevados de tensão de compressão, até valores de cerca 55% do limite de ruptura do material.† A profundidade de penetração da tensão de compressão pode chegar a 1 mm. É difícil determinar precisamente o nível de tensão residual em uma peça jateada, pois seria necessário destruí-la para tanto. Se uma fatia do material for retirada por corte até uma profundidade abaixo da camada jateada, a abertura irá movimentar-se no sentido do fechamento, e o grau de fechamento é uma medida das tensões residuais presentes. A Figura 6-38 ilustra a distribuição de tensões residuais resultantes do jateamento de esferas em dois aços com diferentes limites de escoamento. O pico de tensão de compressão ocorre logo abaixo da superfície e decai rapidamente com a profundidade.

O grau de jateamento de esferas pode ser medido durante o tratamento incluindo-se uma tira padrão do ensaio *Almen* na câmara de jateamento. A tira delgada de teste é fixada de modo que apenas uma de suas faces seja jateada. Quando retirada da fixação, a tira curva-se por causa das tensões de compressão em uma face. A altura de sua curvatura é convertida para um número de Almen que indica o grau de jateamento que a peça (e a tira) recebeu. Se não houver dados específicos disponíveis para o nível de tensão residual presente após o jateamento de esferas, uma maneira conservadora de considerar seu benefício é estipular o fator de superfície $C_{superf} = 1$ no cálculo da resistência à fadiga corrigida com a Equação 6.8.

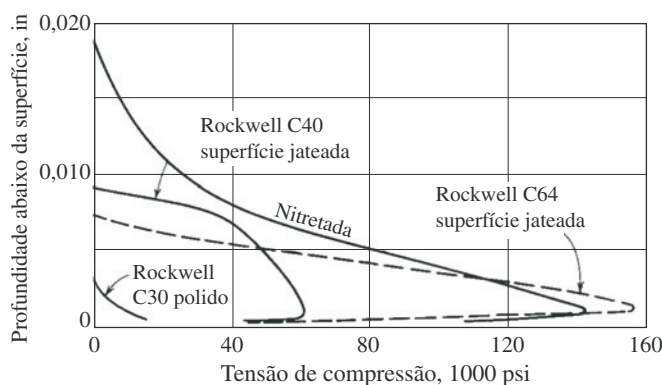



FIGURA 6-38

Distribuição de tensões residuais provocadas por jateamento de esferas. (Extraído da Fig. 5.11, p. 58, in Almen and Black, 1963, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, New York, com permissão.)

* Uma discussão definitiva e excelente a respeito de jateamento de esferas pode ser encontrado em Lenghorn, G., "The Story of Short Peening", A.S.N.E. Journal, Nov. 1957, pp. 653-665, também disponível em http://www.shortpeener.com/learning/story_peening.pdf. Qualquer pessoa seriamente interessada em jateamento de esferas deveria ler este artigo.
Da mesma forma, o livreto "Shot Peening Applications", 8ed., disponível pela Metal Improvement Company Inc. (www.metalimprovement.com), é uma valiosa fonte e referência sobre jateamento de esferas.

Outra fonte é a apresentação online em http://www.straaltechniek.net/files/straaltechniek_shot_peening_presentation.pdf

† American Gear Manufacturers Association Specification AGMA 938-A05

O **jateamento de esferas** é bastante usado em peças como lâminas de serra de corrente, virabrequins, hastes de conexão, bielas, engrenagens e molas.[38] Em peças muito grandes, o **martelamento** é às vezes usado, no qual um martelo pneumático com uma esfera endurecida é aplicado para produzir impactos em regiões da superfície que estarão sujeitas a altas tensões (como as raízes de dentes de engrenagens). Obtêm-se maiores benefícios com jateamento em peças de aço de alta resistência, uma vez que ele pode gerar tensões residuais de compressão de cerca de 55% do seu S_{ut} mais alto. É particularmente benéfico para superfícies de peças forjadas ou laminadas a quente, que se tornam rugosas e pouco duras devido à descarbonetação. Peças cromadas ou niqueladas podem recuperar seus níveis de resistência à fadiga anteriores à aplicação do revestimento metálico por meio do jateamento antes do revestimento. Se o jateamento for feito antes do revestimento, não só o efeito negativo do revestimento será impedido como também se obterá uma resistência à fadiga superior à original da peça não revestida, como mostrado na Figura 6-29. Molas helicoidais adequadamente jateadas podem apresentar um aumento em sua resistência à fadiga ao ponto de falharem por escoamento antes de falharem por fadiga.[38] Portanto, o jateamento de esferas é obviamente uma técnica útil para a melhoria da vida em fadiga de componentes altamente solicitados, além de não provocar aumentos excessivos nos custos de produção.

O **jateamento a laser** é uma técnica desenvolvida recentemente que usa laser pulsado para jatear 1 m^2 de metal por hora. Cada onda de choque gerada no material por um pulso de laser cria tensão de compressão residual com 1 a 2 mm de profundidade sobre uma área de 25 mm^2, mais profundo que algumas técnicas de jateamento com esferas, e prolonga a vida em fadiga 3 a 5 vezes mais do que as técnicas de jateamento com esferas convencionais. O jateamento a laser é mais lento e mais caro que o jateamento com esferas e, por vezes, é usado em áreas críticas, como bordos de ataque de pás de turbinas e raízes de dentes da engrenagem após a aplicação do jateamento com esferas na peça.* Diferentemente do jateamento com esferas, o jateamento a laser não afeta a superfície.

A **conformação a frio** pode ser realizada em superfícies de revolução como eixos, em superfícies planas que possam ser passadas entre roletes e em interiores de furos. Por exemplo, um rolo endurecido pode ser pressionado contra um eixo enquanto este gira em um torno. As forças elevadas causam deformações locais sob o rolo, que resultam em tensões residuais de compressão na superfície, protegendo a peça dos efeitos de tração devido à flexão rotativa e às solicitações alternadas de torção em serviço. A conformação a frio é útil especialmente nos filetes, ranhuras, ou outros concentradores de tensões.

Furos e canais podem ser conformados a frio ao se forçar um mandril de diâmetro ligeiramente maior pelo furo para expandir o diâmetro interno por deformação e criar tensões residuais de compressão. Isso é feito geralmente em canos de armas de fogo (canhão) por um processo denominado ***autofrettage***. O *autofrettage* é realizado também passando-se um cilindro de aço pelo cano da arma, que deixa um pequeno espaço em forma de coroa circular, selando as extremidades, enchendo o espaço na forma de coroa circular com gasolina,† pressurizando o fluido a 200.000 psi. A pressão hidrostática deforma a superfície interna em tração, criando tensões residuais de compressão e protegendo-a contra falhas por fadiga devido a tensões de tração cíclicas que surgem quando se dispara a arma.

As extremidades de furos em qualquer componente podem ser **alargadas** deformando-se suas bordas com uma ferramenta cônica para criar tensões compressivas ao longo dessa região de concentração de tensões na superfície. A redução das dimensões de um lingote plano por laminação a frio introduz tensões residuais de compressão na superfície e de tração no interior. A laminação excessiva pode provocar trincas por tração por exceder a resistência à tração estática no centro. O material pode ser recozido entre laminações sucessivas com o intuito de evitar a situação descrita acima.

* Veja: http://www.llnl.gov/str/March01/Hackel301.html e http://www.geartechnology.com/mag/archive/rev1101.pdf para mais informações.

† A capacidade de alguns líquidos de transmitir pressão rapidamente é limitada pelo aumento da viscosidade a altas temperaturas. Gasolina sem chumbo e alguns outros líquidos suportam pressões de cerca de 200.000 psi sem prejudicar seriamente a sua transmissibilidade de pressão. Alguns fluidos tornam-se sólidos por volta de 100.000 psi. Água forma gelo-VI a aproximadamente 155.000 psi, entupindo a tubulação ou o canal. *Fonte: D. H. Newhall, Harwood Engineering Inc., Walpole, Mass., personal communication, 1994.*

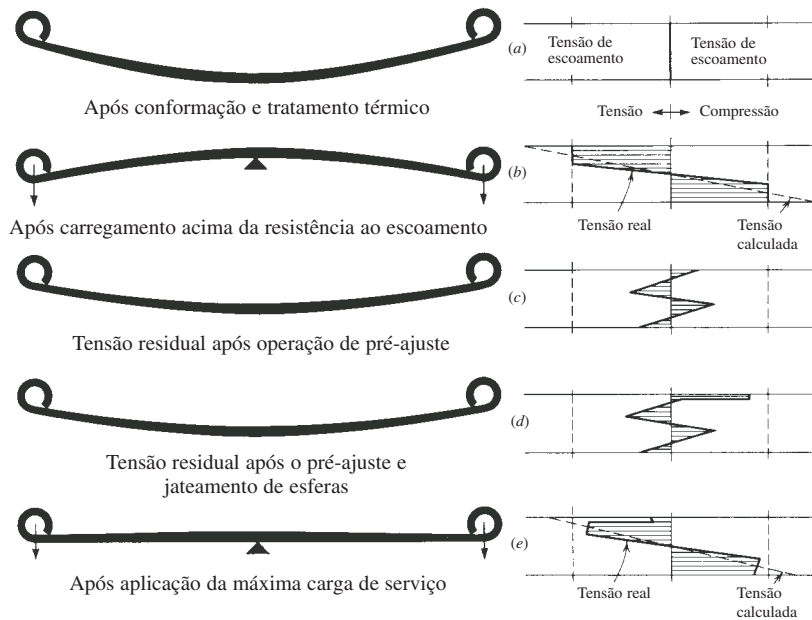



FIGURA 6-39

Tensões residuais por pré-tensionamento e jateamento de esferas em uma lâmina de mola transversal. (Extraído da Fig. 6.2, p. 61, in Almen and Black, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, New York, 1963, com permissão.)

Pré-tensionamento mecânico Para componentes que sofrem esforços dinâmicos em apenas uma direção durante a operação, como molas de suspensão de veículos, o pré-tensionamento é um modo eficiente de introduzir tensões residuais. Refere-se a sobrecarregar deliberadamente o componente no mesmo sentido dos esforços de operação, antes dele ser colocado em uso. A deformação que ocorre durante o pré-tensionamento cria tensões residuais benéficas.

A Figura 6-39 ilustra um exemplo de pré-tensionamento aplicado a uma mola de caminhão. A mola é formada inicialmente com contorno maior do que o necessário para a montagem. Ela é, então, colocada em um apoio com carregamento exatamente semelhante ao de serviço, porém a um nível abaixo da sua resistência ao escoamento (em tração) para ajustá-la previamente. Quando a carga é retirada, a mola retorna a uma nova forma, que é aquela desejada para a montagem. Porém, a recuperação elástica levou o material que havia sido deformado a um estado de tensão residual, que estará no sentido contrário (compressão) ao da carga aplicada. Assim, essa tensão residual agirá protegendo a peça contra as cargas operacionais de tração. Os padrões de tensão residual são mostrados na figura, que também indica o resultado do jateamento de esferas na superfície superior após o pré-ajuste. Os dois tratamentos complementam-se na superfície superior neste caso, proporcionando maior proteção contra tensões de tração flutuantes em serviço. Observe que, se a peça sofresse carregamento alternado em serviço, a ponto de deformar a superfície superior em compressão, isso aliviaria a tensão de compressão benéfica e comprometeria a vida da peça. Portanto, essa abordagem é mais eficiente para peças cujas tensões de serviço são só em um sentido.

Resumo As tensões residuais de compressão podem tornar-se "o melhor amigo do projetista de peças sob fadiga". Configuradas apropriadamente, tensões residuais

benéficas podem tornar seguro um projeto que de outra maneira não poderia ser trabalhado. O projetista deve familiarizar-se minuciosamente com os meios disponíveis para a criação dessas tensões. Essa descrição sucinta tem intenção apenas de servir como uma introdução para um tópico complicado, e recomenda-se que o leitor consulte as obras sobre tensões residuais, algumas das quais estão citadas na bibliografia deste capítulo.

Se puderem ser obtidos dados quantitativos a respeito dos níveis de tensões residuais desenvolvidos em uma peça específica (geralmente por meio de ensaios destrutivos), então esses dados podem ser usados para determinação dos níveis seguros de aplicação de tensões. Na ausência dessas informações quantitativas, o projetista fica limitado a considerar o uso desses tratamentos para fornecer um coeficiente de segurança adicional, que apesar de não ser bem quantificado, é direcionado corretamente.

6.9 PROJETO PARA FADIGA DE ALTO-CICLO

Agora temos condições de considerar a aplicação de todas as informações apresentadas sobre falha por fadiga *com o intuito de evitá-la* no projeto de peças sob esforços dinâmicos. Há quatro categorias básicas que podem ser tratadas separadamente, apesar de três delas serem apenas casos especiais da quarta categoria, o caso geral. Como será visto, a mesma abordagem geral para a solução de todas as quatro categorias é, além de possível, desejável. No entanto, lidar com elas separadamente, antes de apresentar o método de solução geral, deve auxiliar na compreensão de suas resoluções.

A Figura 6-40 ilustra as quatro categorias em uma matriz. As colunas definem a presença ou ausência de tensão média. O caso de alternância completa apresenta uma tensão média nula, enquanto o caso de tensão variada apresenta um valor médio não nulo. Ambos têm componentes alternadas. As linhas definem a presença de componentes de tensão aplicadas em apenas um eixo, ou em mais de um. O caso uniaxial representa casos de carregamento simples, como esforços axiais puros ou flexão pura. O caso multiaxial é o geral e permite componentes de tensões normais aplicadas em todos os eixos, combinados com tensões de cisalhamento aplicadas a qualquer face do elemento cúbico infinitesimal de tensões. Na realidade, os casos de esforços puros são raros na prática. Haverá com mais frequência alguma combinação de tensões multiaxiais em elementos de máquinas. Ambos os casos de tensão alternada e de tensão variada são bastante encontrados na prática.

Primeiramente será considerada a categoria mais simples (I), tensões uniaxiais alternadas. Muitos textos vão além e subdividem essa categoria em esforços de flexão, força normal, esforço de torção e apresentam abordagens separadas para cada um deles. Neste texto, todos estes serão combinados em uma categoria pelo cálculo da tensão equivalente de von Mises, a qual será comparada à resistência à fadiga corrigida do material escolhido. Isso elimina a necessidade de considerar a torção pura como um caso especial.

A seguir, tensões uniaxiais variadas serão consideradas (categoria II). Acrescenta-se a complicação da tensão média não nula, e o diagrama de Goodman modificado será empregado em conjunto com o diagrama *S-N* (mais simples). A tensão equivalente de von Mises será utilizada para converter esforços de torção pura em uma forma equivalente de tensão de tração.

Finalmente, serão estudadas as categorias gerais de tensões multiaxiais em ambos os casos de esforços alternados (III) e variados (IV) e será apresentada uma "abordagem universal" recomendada, aplicável a todas as categorias para as situações de carregamento mais comuns. Espera-se que essa abordagem simplifique um tópico complexo e forneça ao aluno um método que pode ser usado na maioria das situações de projeto para fadiga de alto-ciclo.

	Tensões alternadas ($\sigma_m = 0$)	Tensões variadas ($\sigma_m \neq 0$)
Tensões uniaxiais	Categoria I	Categoria II
Tensões multiaxiais	Categoria III	Categoria IV

FIGURA 6-40

Quatro categorias de situações de projeto para fadiga.

6.10 PROJETO PARA TENSÕES UNIAXIAIS ALTERNADAS

O exemplo mais simples de carregamento em fadiga é o da categoria I, tensão uniaxial alternada com tensão média nula (ver Figura 6-6*a*). Algumas aplicações comuns dessa categoria são flexão rotativa de um eixo suportando cargas estáticas, ou torque alternado em um eixo com cargas inerciais grandes e oscilatórias e um torque médio que é praticamente nulo comparado a essas oscilações. O processo pode ser descrito em um conjunto de etapas gerais:

Etapas de projeto para tensões alternadas com carregamento uniaxial

1 Defina o número de ciclos de carregamento N a que a peça será submetida ao longo de sua vida (esperada) em operação.

2 Determine a amplitude das solicitações alternadas aplicadas de zero ao pico (Equação 6.1). Observe que um esforço estático em um eixo em rotação causa tensões alternadas.

3 Defina um projeto preliminar da geometria da peça, baseado em boas práticas de engenharia, para que esta suporte as cargas aplicadas. (Ver Capítulos 3 e 4.)

4 Determine os fatores geométricos de concentração de tensão apropriados K_t (ou K_{ts} para cisalhamento) nos entalhes da geometria da peça. Tente, é claro, minimizá-los por meio de um bom projeto. (Ver Seção 4.15.)

5 Escolha um material preliminar para a peça e determine suas propriedades de interesse, como S_{ut}, S_y, $S_{e'}$ (ou $S_{f'}$ para a vida requerida) e q, com base em dados experimentais próprios, na literatura ou em estimativas descritas neste capítulo.

6 Converta os fatores geométricos de concentração de tensões K_t (ou K_{ts} para cisalhamento) para fatores de concentração em fadiga K_f, usando a sensibilidade ao entalhe do material, q.

7 Calcule as amplitudes de tensões nominais alternadas σ_a (ou τ_a se o carregamento for cisalhamento puro) nos pontos críticos da peça devido às cargas operacionais alternadas, utilizando as fórmulas básicas de cálculo de tensões (Capítulo 4) e aumentando-as o quanto for necessário com os fatores de concentração de tensão em fadiga (Seção 4.15 e 6.7.)

8 Calcule as amplitudes das tensões principais para os pontos críticos com base no estado de tensões aplicadas (Capítulo 4). Observe que estas contêm o efeito das concentrações de tensões. Calcule a tensão equivalente de Von Mises para cada ponto de interesse.

9 Determine os fatores de modificação de resistência à fadiga apropriados para o tipo de carregamento, tamanho da peça, superfície, etc., como descrito na Seção 6.6. Observe que o fator de carregamento C_{carreg} irá variar de acordo com a existência de esforços axiais ou de flexão (Equação 6.7*a*). Se os esforços

forem de torção pura, o cálculo da tensão equivalente de von Mises converterá esses esforços em tensões de tração, e C_{carreg} deve então receber o valor de 1.

10 Determine a resistência à fadiga corrigida S_f para o ciclo de vida N requisitado (ou o limite de fadiga corrigido S_e para vida infinita se conveniente) e a resistência "estática" S_m para $N = 10^3$ ciclos da Equação 6.9. Faça um diagrama *S-N* como mostrado na Figura 6-33, e/ou escreva a Equação 6.10 para essa escolha preliminar do material.

11 Compare a tensão equivalente alternada de von Mises no ponto crítico da peça com o valor da resistência à fadiga corrigida do material S_n retirado da curva *S-N* correspondente ao número de ciclos de vida N desejado. (Observe que para situações de vida infinita nas quais o material apresenta um limite de fadiga na curva *S-N*, $S_n = S_e$.)

12 Calcule o coeficiente de segurança para o projeto a partir da relação

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'} \tag{6.14}$$

onde N_f é o coeficiente de segurança na fadiga, S_n é a resistência à fadiga corrigida para o número de ciclos de vida requerido, retirado da curva *S-N* ou da Equação 6.10, e σ' é a maior tensão alternada de von Mises em qualquer local da peça, calculada para incluir todos os efeitos de concentração de tensão.

13 Devido ao fato do material ter sido escolhido apenas de forma preliminar, e de que o projeto pode ainda não estar tão refinado quanto possível, o resultado da primeira execução dessas etapas será provavelmente um projeto com falhas, cujo coeficiente de segurança é ou muito elevado ou muito baixo. Serão necessárias iterações (como sempre) para refinar o projeto. Qualquer subconjunto de passos pode ser repetido quantas vezes forem necessárias para se obter um projeto aceitável. A tática mais comum é retornar à etapa 3 e melhorar a geometria da peça, de modo a reduzir tensões e concentrações de tensões, e/ou rever a etapa 5 para escolher um material mais adequado. Algumas vezes será possível retornar à etapa 1 e redefinir uma vida menor aceitável para a peça.

O projetista pode ou não ter o controle dos esforços do projeto na etapa 2. Normalmente, o projetista não tem esse controle, a não ser que os esforços na peça sejam devidos a forças inerciais; nesse caso, aumentar a massa para "adicionar resistência" irá piorar a situação, pois isto irá aumentar os esforços proporcionalmente (ver Seção 3.6). Ao invés disso, o projetista pode escolher deixar a peça mais leve para reduzir as forças, sem comprometer excessivamente sua resistência. Quaisquer que sejam as circunstâncias particulares, o projetista deve estar disposto a repetir essas etapas várias vezes antes de atingir a convergência para uma solução utilizável. Ferramentas de resolução de equações, que permitem recálculo rápido das equações, tornam-se de grande ajuda nessa situação.

A melhor maneira de demonstrar o uso dessas etapas para projeto em fadiga é exemplificando.

EXEMPLO 6-4

Projeto de um suporte engastado sob flexão alternada

Problema **Um dispositivo de alimentação de rolos deve ser montado em cada extremidade nas braçadeiras de suporte engastadas na estrutura da máquina, como mostrado na Figura 6-41. O dispositivo está sujeito a uma força alternada de amplitude 1000 lb, dividida igualmente entre as duas braçadeiras de suporte.**

(*a*) Projeto simplista – material plano fresado (*b*) Projeto melhorado – usinado com arredondamento

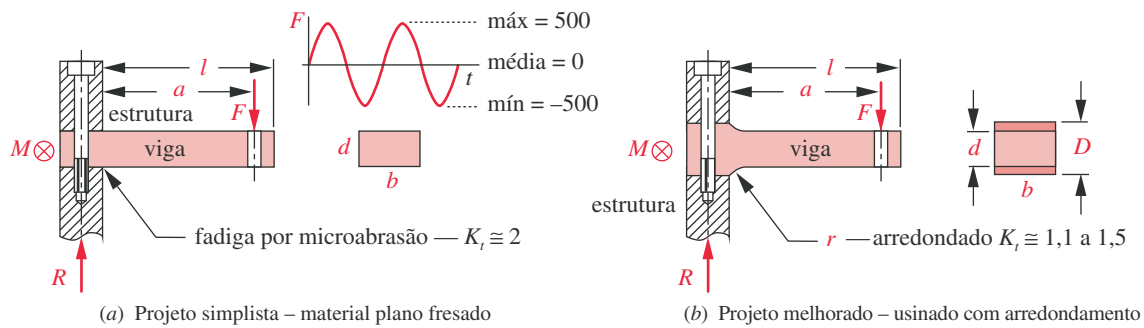



FIGURA 6-41

Projeto de suporte engastado sob carregamento de flexão alternada.

Projete uma braçadeira engastada para suportar uma força alternada de amplitude 500 lb para 10^9 ciclos sem ruptura. A deflexão dinâmica da viga não pode ultrapassar 0,01 in.

Dados **A forma da função carga *versus* tempo é mostrada na Figura 6-41*a*. O ambiente de operação é um local com ar de temperatura máxima de 120°F. O espaço disponível permite um comprimento máximo da viga de 6,0 in. Apenas 10 dessas peças são requeridas.**

Hipóteses **A viga pode ser fixada entre placas essencialmente rígidas ou parafusada na sua extremidade. A carga normal será aplicada na extremidade efetiva da viga engastada por uma haste conectada a um pequeno furo na viga. Como o momento fletor é efetivamente zero na extremidade em balanço da viga, a concentração de tensões causada por esse furo pode ser ignorada. Devido à pequena quantidade exigida de peças, o método de manufatura indicado é usinagem da matéria-prima por fresagem.**

Solução **Ver Figura 6-41 e Tabelas 6-9 e 6-10.**

1 Este é um problema de projeto típico. Muito pouca informação é fornecida, com exceção do desempenho exigido do dispositivo, algumas limitações de dimensão e o ciclo de vida requerido. Será necessário fazer algumas suposições básicas sobre a geometria da peça, materiais e outros fatores. Supõe-se que haverá necessidade de algumas iterações.

2 As primeiras duas etapas do processo sugerido acima, achar a amplitude do carregamento e o número de ciclos, estão definidas na formulação do problema. O processo terá início na terceira etapa, criar um projeto preliminar para a geometria da peça.

3 A Figura 6-41*a* ilustra uma configuração preliminar do projeto. A seção transversal retangular foi escolhida por permitir facilidade de montagem e fixação. Um pedaço de lingote em barra laminado a frio, vindo da fresagem, poderia simplesmente ser cortado no comprimento e furado para proporcionar os furos necessários, e então preso na estrutura armada. Essa abordagem parece atrativa por sua simplicidade, porque muito pouca usinagem é requerida. O acabamento por fresagem nas faces pode ser adequado a esta aplicação. No entanto, este projeto tem algumas desvantagens. As tolerâncias de fresagem para a espessura não são estreitas o suficiente para dar a precisão exigida na espessura, portanto as faces superior e inferior teriam que ser usinadas ou retificadas na dimensão. Além disso, os cantos vivos da estrutu-

ra onde o dispositivo é fixado causam concentrações de tensões com $K_t = 2$, aproximadamente, e também criam uma condição denominada **fadiga por microabrasão**[§], devido a movimentos relativos pequenos que ocorrem entre os dois corpos durante a deflexão do suporte. Esse movimento contínuo rompe o revestimento de óxido que protege a peça, expondo metal novo à oxidação e acelerando o processo de falha por fadiga. A microabrasão pode causar problemas mesmo se os cantos da viga forem arredondados.

4 A Figura 6-41*b* mostra um projeto melhor, no qual o material fresado é obtido com espessura maior que a dimensão final desejada e usinado na face superior e na face inferior até a dimensão *D*, depois usinado até a espessura *d* ao longo do comprimento *l*. O raio de arredondamento *r* é feito no ponto de engaste de modo a reduzir a fadiga por microabrasão e obter um valor de K_t reduzido. A Figura 4-36 mostra que, com controle conveniente das razões *r/d* e *D/d* para uma barra plana em flexão, o fator geométrico de concentração de tensão K_t pode ser mantido abaixo de cerca de 1,5.

5 Devem ser feitas algumas suposições para as dimensões *b, d, D, r, a* e *l*. Serão assumidos alguns valores (tentativos) de $b = 1$ in, $d = 0{,}75$ in, $D = 0{,}938$ in, $r = 0{,}25$, $a = 5{,}0$ e $l = 6{,}0$ in para o carregamento aplicado neste primeiro cálculo. Esse comprimento deixará algum material ao redor do furo e ainda se ajusta à restrição de comprimento de 6,0 in.

6 O material também deve ser escolhido. Para vida infinita, baixo custo e facilidade de fabricação, é desejável o uso de aço carbono, se possível, e se as condições do ambiente permitirem. Como isso será usado em um ambiente controlado e fechado, o aço-carbono é aceitável. O fato da deflexão ser relevante é também um bom motivo para a escolha de um material com grande *E*. Aços dúcteis de baixo e médio carbono apresentam o limite de fadiga requerido para a vida infinita exigida neste caso, e também apresentam baixas sensibilidades a entalhes. Um aço normalizado SAE 1040 com $S_{ut} = 80000$ psi é selecionado para a primeira tentativa.

7 A força de reação e o momento de reação no apoio são encontrados por meio das Equações *h* do Exemplo 4-5. A seguir, o momento de inércia da área da seção transversal, a distância até o ponto mais externo e a tensão nominal alternada de flexão na base são encontrados utilizando-se a amplitude de 500 lb dos esforços alternados.

$$R = F = 500 \text{ lb}$$
$$M = Rl - F(l-a) = 500(6) - 500(6-5) = 2500 \text{ lb-in} \qquad (a)$$

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{1(0{,}75)^3}{12} = 0{,}035\,2 \text{ in}^4$$
$$c = \frac{d}{2} = \frac{0{,}75}{2} = 0{,}375 \text{ in} \qquad (b)$$

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{Mc}{I} = \frac{2500(0{,}375)}{0{,}035\,2} = 26667 \text{ psi} \qquad (c)$$

8 Duas razões devem ser calculadas para uso na Figura 4-36, com o intuito de determinar o fator geométrico de concentração de tensão K_t para as dimensões assumidas da peça.

$$\frac{D}{d} = \frac{0{,}938}{0{,}75} = 1{,}25 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = 0{,}333 \qquad (d)$$

interpolando $\quad A = 0{,}965\,8 \qquad b = -0{,}266 \qquad (e)$

[§] N. de R. T.: *Fretting* está sendo traduzido como "microabrasão".

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b = 0{,}9658(0{,}333)^{-0{,}266} = 1{,}29 \qquad (f)$$

9 A sensibilidade ao entalhe q do material escolhido é calculada com base em seu limite de ruptura e raio de arredondamento por meio da Equação 6.13 e dos dados para a constante de Neuber da Tabela 6-6.

Da tabela para $S_{ut} = 80$ kpsi: $\sqrt{a} = 0{,}08$ (g)

$$q = \frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1+\dfrac{0{,}08}{\sqrt{0{,}25}}} = 0{,}862 \qquad (h)$$

10 Os valores de q e K_t são usados para determinar o fator de concentração de tensão em fadiga K_f, que é, por sua vez, usado para encontrar a tensão alternada local σ_a no entalhe. Pelo fato de se tratar do caso mais simples de tensão de tração uniaxial, a maior tensão alternada principal σ_{1a} para este caso é igual à tensão alternada de tração, assim como é a tensão alternada de von Mises σ'_a. Ver Equações 4.6 e 5.7.

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}862(1{,}29 - 1) = 1{,}25 \qquad (i)$$

$$\sigma_a = K_f \sigma_{a_{nom}} = 1{,}25(26667) = 33343 \text{ psi} \qquad (j)$$

$$\tau_{ab} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{33343 - 0}{2}\right)^2 + 0} = 16672 \text{ psi}$$

$$\sigma_{1_a}, \sigma_{3_a} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{ab} = 33343 \text{ psi}, 0 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{33343^2 - 33343(0) + 0} = 33343 \text{ psi}$$

11 O limite de fadiga não corrigido $S_{e'}$ é determinado pela Equação 6.5*a*. O fator de tamanho para essa peça retangular é determinado pelo cálculo da área da seção transversal cujas tensões são maiores que 95% da tensão máxima (ver Figura 6-25*c*) e usando este valor na Equação 6.7*d* para encontrar o diâmetro equivalente de um corpo de prova cilíndrico em flexão rotativa, para uso na Equação 6.7*b* de modo a definir $C_{tamanho}$.

$$S_{e'} = 0{,}5 S_{ut} = 0{,}5(80000) = 40000 \text{ psi} \qquad (l)$$

$$A_{95} = 0{,}05db = 0{,}05(0{,}75)(1) = 0{,}04 \text{ in}^2$$

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0{,}0766}} = 0{,}700 \text{ in} \qquad (m)$$

$$C_{tamanho} = 0{,}869(d_{equiv})^{-0{,}097} = 0{,}900$$

12 O cálculo do limite de fadiga corrigido S_e requer que diversos fatores sejam calculados. O C_{carreg} é encontrado a partir da Equação 6.7*a*. O C_{superf} para acabamento usinado é obtido pela Equação 6.7*e*. O C_{temp} é encontrado da Equação 6.7*f* e o C_{conf} é escolhido da Tabela 6-4 para um nível de confiabilidade de 99,9%.

$$\begin{aligned} C_{carreg} &= 1: && \text{para flexão} \\ C_{superf} &= A(Sut_{kpsi})^b = 2{,}7(80)^{-0{,}265} = 0{,}845: && \text{usinado} \\ C_{temp} &= 1: && \text{temperatura ambiente} \\ C_{conf} &= 0{,}753: && \text{para confiabilidade de 99,9\%} \end{aligned} \qquad (n)$$

Tabela 6-9 Exemplo 6-4 – Projeto de suporte engastado sob flexão alternada[§]

Primeira iteração: um projeto malsucedido (arquivo EX06-04A)

Entrada	Variável	Saída	Unidade	Comentários
500	*F*		lb	amplitude da carga aplicada no ponto *a*
1	*b*		in	largura da viga
0,75	*d*		in	altura da viga ao longo do comprimento
0,94	*D*		in	altura da viga na parede
0,25	*r*		in	raio de arredondamento
6	*l*		in	comprimento da viga
5	*a*		in	distância até a força *F*
6	*lx*		in	distância para cálculo da deflexão
3*E*7	*E*		psi	módulo de elasticidade
80 000	*Sut*		psi	limite de ruptura
1	*Ccarreg*			fator de carregamento para flexão superficial
	Csuperf	0,85		acabamento usinado
1	*Ctemp*			temperatura ambiente
0,753	*Cconf*			fator de confiabilidade para 99,9%
	R	500	lb	força de reação no suporte
	M	2500	in-lb	momento de reação no suporte
	I	0,035 2	in^4	momento de inércia da área
	c	0,38	in	distância até o ponto mais externo
	signom	26667	psi	tensão de flexão no engaste
	Doverd	1,25		razão de largura da barra 1,01 < *D*/*d* < 2
	roverd	0,33		razão entre o raio e a menor dimensão
	Kt	1,29		fator geométrico de concentração de tensão
	q	0,86		fator de sensibilidade ao entalhe de Peterson
	Kf	1,25		fator de concentração de tensão em fadiga
	sigx	33343	psi	tensão concentrada no engaste
	sig1	33343	psi	maior tensão principal alternada
	sigvm	33343	psi	tensão alternada de von Mises
	Seprime	40000	psi	limite de fadiga não corrigido
	A95	0,04	in^2	95% da área tensionada
	dequiv	0,7	in	diâmetro equivalente do corpo de teste
	Ctamanho	0,9		fator de tamanho baseado em 95% da área
	Se	22907	psi	limite de fadiga corrigido
	Nsf	0,69		coeficiente de segurança previsto
	y	–0,026	in	deflexão na extremidade da viga

[§] N. de R.: Estes dados também estão no CD, em inglês, que acompanha o livro. Estão traduzidos aqui para facilitar o entendimento do leitor.

Tabela 6-10 Exemplo 6-4 – Projeto de suporte engastado sob flexão alternada[§]

Iteração final: um projeto bem-sucedido (arquivo EX06-04B)

Entrada	Variável	Saída	Unidade	Comentários
500	*F*		lb	amplitude da carga aplicada no ponto *a*
2	*b*		in	largura da viga
1	*d*		in	altura da viga ao longo do comprimento
1,125	*D*		in	altura da viga na parede
0,5	*r*		in	raio de arredondamento
6	*l*		in	comprimento da viga
5	*a*		in	distância até a força *F*
6	*lx*		in	distância para cálculo da deflexão
3*E*7	*E*		psi	módulo de elasticidade
80 000	*Sut*		psi	limite de ruptura
1	*Ccarreg*			fator de carregamento para flexão superficial
	Csuperf	0,85		acabamento usinado
1	*Ctemp*			temperatura ambiente
0,753	*Cconf*			fator de confiabilidade para 99,9%
	R	500	lb	força de reação no suporte
	M	2500	in-lb	momento de reação no suporte
	I	0,166 7	in^4	momento de inércia da área
	c	0,5	in	distância até o ponto mais externo
	signom	7500	psi	tensão de flexão no engaste
	Doverd	1,13		razão de largura da barra $1{,}01 < D/d < 2$
	roverd	0,50		razão entre o raio e a menor dimensão
	Kt	1,18		fator geométrico de concentração de tensão
	q	0,90		fator de sensibilidade ao entalhe de Peterson
	Kf	1,16		fator de concentração de tensão em fadiga
	sigx	8 688	psi	tensão concentrada no engaste
	sig1	8 688	psi	maior tensão principal alternada
	sigvm	8 688	psi	tensão alternada de von Mises
	Seprime	40 000	psi	limite de fadiga não corrigido
	A95	0,10	in^2	95% da área tensionada
	dequiv	1,14	in	diâmetro equivalente do corpo de teste
	Ctamanho	0,86		fator de tamanho baseado em 95% da área
	Se	21 843	psi	limite de fadiga corrigido
	Nsf	2,5		coeficiente de segurança previsto
	y	–0,005	in	deflexão na extremidade da viga

[§] N. de R.: Estes dados também estão no CD, em inglês, que acompanha o livro. Estão traduzidos aqui para facilitar o entendimento do leitor.

O limite de fadiga corrigido é determinado pela Equação 6.6.

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ &= 1(0,900)(0,845)(1)(0,753)40000 = 22907 \text{ psi} \end{aligned} \tag{o}$$

Observe que S_e corrigido corresponde a apenas 29% de S_{ut}.

13 O coeficiente de segurança é calculado usando-se a Equação 6.14 e a deflexão da viga y é calculada pela Equação (j) do exemplo 4-5.

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'} = \frac{22907}{33343} = 0,69 \tag{p}$$

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x - a\rangle^3\right]$$

$$y_{@x=l} = \frac{500}{6(3E7)(0,0352)}\left[6^3 - 3(5)(6)^2 - (6-5)^3\right] = -0,026 \text{ in} \tag{q}$$

14 Os resultados de todos esses cálculos para o primeiro projeto escolhido podem ser vistos na Tabela 6-9. A deflexão de 0,026 in não está de acordo com a especificação do enunciado, e o projeto falha com um coeficiente de segurança menor do que 1. Portanto, são necessárias mais iterações, como se esperava. Qualquer uma das dimensões pode ser alterada, assim como o material. O material foi mantido inalterado, porém as dimensões da seção transversal e o raio de arredondamento no entalhe foram aumentados, e o modelo foi executado novamente (isso levou apenas alguns minutos) até os resultados mostrados na Tabela 6-10 terem sido alcançados.

15 As dimensões finais são $b = 2$ in; $d = 1$ in; $D = 1,125$ in; $r = 0,5$; $a = 5,0$ in e $l = 6,0$ in. O coeficiente de segurança agora é 2,5 e a deflexão máxima é 0,005 in. Ambos são satisfatórios. Observe como o fator de concentração de tensão em fadiga é baixo, $K_f = 1,16$. A dimensão D foi escolhida deliberadamente para ser levemente menor que o tamanho de uma peça bruta disponível em estoque para fresagem, de modo a haver material disponível para a limpeza e encaixe das superfícies de montagem. Além disso, com este projeto, poderia se usar aço laminado a quente (ALQ), no lugar do aço laminado a frio (ALF) assumido inicialmente (Figura 6-41*a*). O aço laminado a quente tem menor custo que o aço laminado a frio e, se normalizado, apresenta menores tensões residuais, porém sua superfície rugosa e descarbonetada necessita ser retirada inteiramente por usinagem, ou receber tratamento com jateamento de esferas para aumentar a sua resistência.

16 Os arquivos EX06-04 podem ser encontrados no CD-ROM deste livro.

O exemplo acima demonstra que projetar para carregamento alternado em fadiga de alto-ciclo (FAC) é simples, uma vez compreendidos os princípios. Se o projeto requisitasse carregamento de torção alternada, ou de flexão rotativa, ou axial, o procedimento de projeto seria o mesmo deste exemplo. As únicas diferenças estariam nas escolhas das equações de tensão e dos fatores de modificação de resistência, como descrito nas seções anteriores. Observe que o cálculo das tensões principais e de von Mises é de certa forma redundante neste exemplo simples, pois são ambas idênticas à tensão aplicada. No entanto, essas tensões são calculadas por uma questão de consistência, já que elas não serão idênticas em situações mais complicadas de aplicação de tensão. É preciso enfatizar o valor do uso de um computador e de uma ferramenta de resolução de equações, nes-

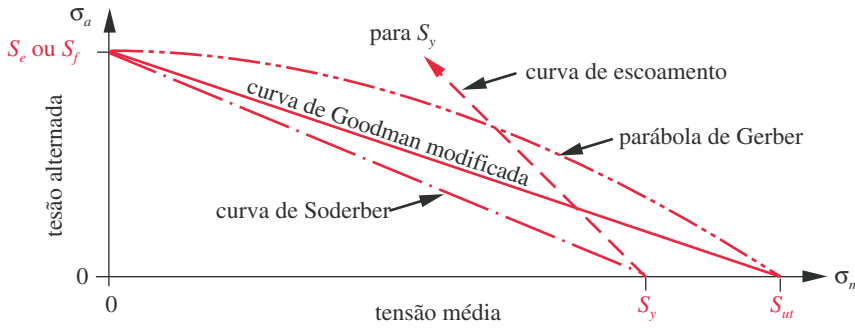



FIGURA 6-42

Diversas curvas de falha para tensões pulsantes.

te ou em qualquer problema de projeto, por permitirem rápidas iterações a partir dos valores iniciais até as dimensões finais com o mínimo de esforço.

6.11 PROJETO PARA TENSÕES UNIAXIAS REPETIDAS

Tensões repetidas ou pulsantes, como mostrado na Figura 6-6*b* e *c*, apresentam componentes médias não nulas, e estas devem ser consideradas na determinação do coeficiente de segurança. As Figuras 6-16, 6-17, 6-18 e 6-21 mostram evidências experimentais do efeito da componente tensão média na falha quando presente em combinação com tensões alternadas. Essa situação é bastante comum em elementos de máquinas de todos os tipos.

A Figura 6-42 ilustra a **curva de Goodman modificada**, a **parábola de Gerber**, a **curva de Soderberg** e a **curva de escoamento** plotadas nos eixos σ_m-σ_a. A parábola de Gerber ajusta-se melhor aos dados experimentais de falha e a curva de Goodman modificada ajusta-se abaixo da dispersão de dados, como mostra a Figura 6-16, a qual sobrepõe essas curvas nos pontos experimentais de falha. Ambas as curvas passam pelo limite de fadiga corrigido S_e ou pela resistência à fadiga S_f no eixo σ_a e por S_{ut} no eixo σ_m. Uma curva de escoamento que conecta S_y em ambos os eixos é também mostrada para servir como um limite no primeiro ciclo de tensão. (Se a peça escoa, ela falha, independentemente de sua segurança na fadiga.) A curva de Soderberg liga S_e ou S_f ao limite de escoamento S_y e é, portanto, um critério de falha mais conservador, porém elimina a necessidade de invocar a curva de escoamento. Também elimina certas combinações σ_m-σ_a que são seguras, como pode ser visto na Figura 6-16. Quaisquer que sejam as curvas escolhidas para representar a falha, as combinações seguras de σ_m e σ_a recaem à esquerda e abaixo da mesma. Essas curvas de falha são definidas por:

Parábola de Gerber:
$$\sigma_a = S_e\left(1 - \frac{\sigma_m^2}{S_{ut}^2}\right) \tag{6.15a}$$

Curva de Goodman modificada:
$$\sigma_a = S_e\left(1 - \frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right) \tag{6.15b}$$

Curva de Soderberg:
$$\sigma_a = S_e\left(1 - \frac{\sigma_m}{S_y}\right) \tag{6.15c}$$

Enquanto a curva de Gerber é um bom ajuste aos dados experimentais, o que a torna útil para a análise de falha de peças, a curva de Goodman modificada é um critério de falha mais conservador e mais usado no projeto de peças sujeitas

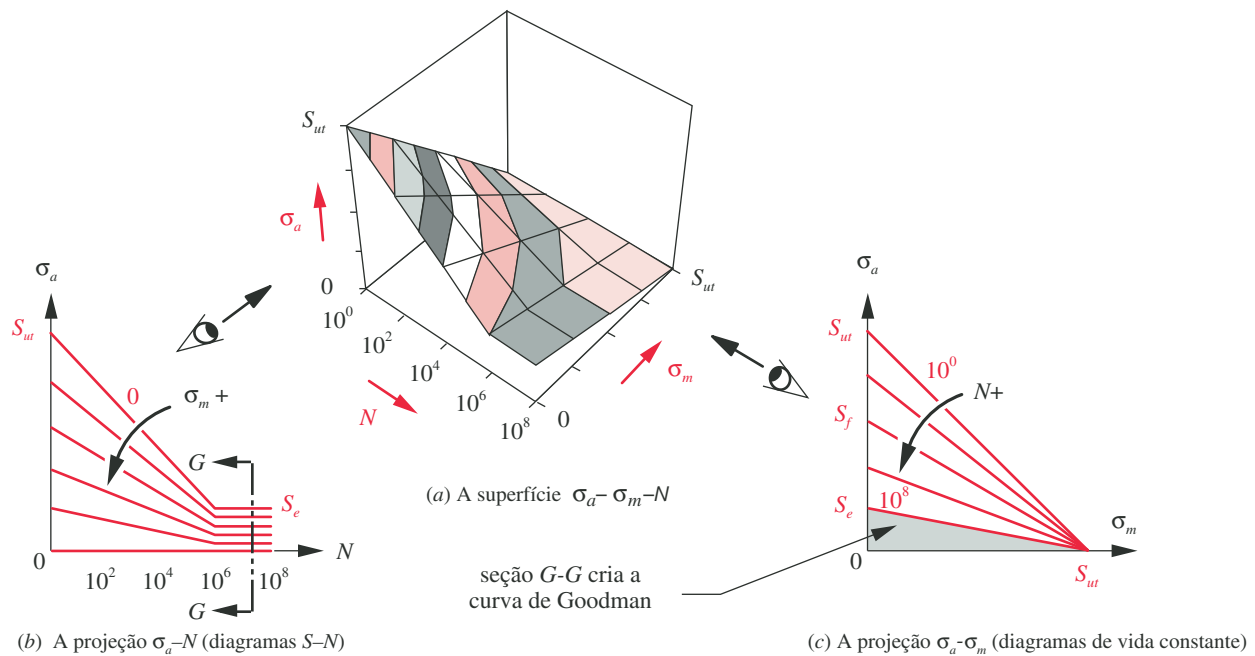



FIGURA 6-43

Efeito da combinação de tensões médias e alternadas.

a tensões médias em adição a alternadas. A curva de Soderberg é menos usada por ser conservadora demais. O uso da curva de Goodman modificada será agora explorado com mais detalhes.

Diagrama de Goodman modificado

A Figura 6-43a mostra um gráfico esquemático de uma superfície tridimensional formada pela componente de tensão alternada σ_a, pela componente de tensão média σ_m e pelo número de ciclos N para um material que possui o limite de fadiga a 10^6 ciclos. Se o plano σ_a-N, como mostrado na Figura 6-43b, for observado, podem-se ver projeções de curvas de nível da superfície que são diagramas S-N para vários níveis de tensão média. Quando $\sigma_m = 0$, o diagrama S-N é a curva mais acima, conectando S_{ut} a S_e, como também ilustram as Figuras 6-2 e 6-8. À medida que σ_m cresce, a interseção de σ_a em $N = 1$ ciclo diminui, tornando-se zero quando $\sigma_m = S_{ut}$.

A Figura 6-43c mostra projeções no plano σ_a-σ_m para vários valores de N. Isso é chamado de **diagrama de vida constante**, pois cada curva nele mostra a relação entre tensão alternada e média para um ciclo de vida em particular. Quando $N = 1$, o gráfico é uma curva a 45° ligando S_{ut} em ambos os eixos. Essa é uma curva de falha estática. A interseção em σ_a diminui à medida que N aumenta, tornando-se igual ao limite de fadiga S_e além de cerca de 10^6 ciclos. A curva conectando S_e no eixo σ_a e S_{ut} no eixo σ_m na Figura 6-43c é a **curva de Goodman modificada**, tomada na seção G-G como mostrado na Figura 6-43a.

A Figura 6-44 mostra um gráfico da tensão alternada σ_a em função da tensão média σ_m, o qual é referido como um **diagrama de Goodman modificado** "aumentado".* É um melhoramento da curva de Goodman modificada mostrada nas Figuras 6-16 e 6-42. As curvas de escoamento e a região de tensão média de compressão estão incluídas. Vários pontos de falha estão registrados. No eixo de tensão média (σ_m), o limite de escoamento S_y e o limite de ruptura S_{ut} do material

* O diagrama original de Goodman plotava a relação entre tensões médias e alternadas em um arranjo de eixos diferente do mostrado aqui e incluía a hipótese de que o limite de fadiga era 1/3 de S_{ut}. A abordagem original de Goodman é raramente usada atualmente. J. O. Smith[46] sugeriu a representação da curva de Goodman mostrada na Figura 6-42, que ficou conhecida como diagrama de Goodman modificado. A versão de Smith não mostrava a curva de escoamento ou a região de compressão, como retratado na Figura 6-44 – por isso o uso do termo "aumentado" aqui para registrar a adição dessa informação ao diagrama. Apesar disso, este será referido como diagrama de Goodman modificado, ou apenas DGM, por simplicidade. Além disso, as referências aqui à "curva de Goodman" devem ser entendidas como abreviação para "curva de Goodman modificada", e não como referência à representação original de Goodman.

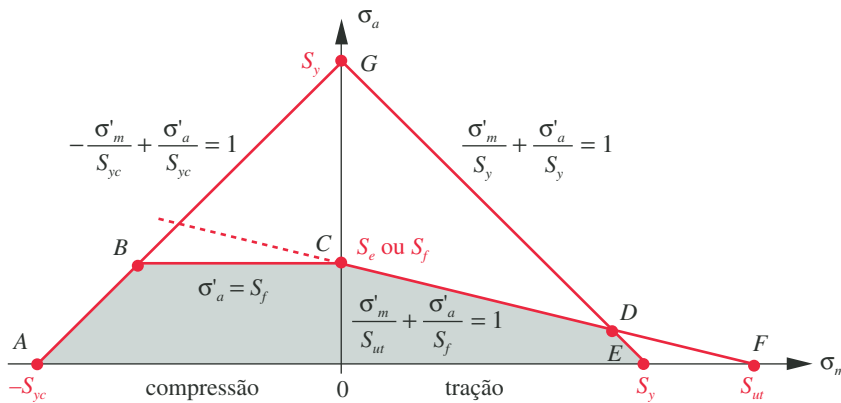



FIGURA 6-44

Diagrama de Goodman modificado "aumentado".

particular estão definidos nos pontos A, E e F. No eixo de tensão alternada (σ_a), a resistência à fadiga corrigida, S_f, em um certo número de ciclos (ou o limite de fadiga corrigido S_e) e o limite de escoamento, S_y, do material particular estão definidos nos pontos C e G. Observe que este diagrama normalmente representa uma seção como a G-G da superfície tridimensional da Figura 6-43. Isto é, o diagrama de Goodman modificado é normalmente desenhado para o caso de vida infinita ou de alto-ciclo ($N > 10^6$). No entanto, ele pode ser desenhado para qualquer seção ao longo do eixo N na Figura 6-43, representando uma situação de vida finita menor.

As curvas definindo falha podem ser traçadas ligando-se vários pontos no diagrama. A curva CF é a curva de Goodman e pode ser estendida até a região compressiva (mostrada tracejada) com base em dados empíricos como os mostrados na Figura 6-17. No entanto, convenciona-se traçar a curva horizontal mais conservadora CB para representar a curva de falha na região de compressão. Isso, de fato, ignora os efeitos benéficos da tensão de compressão média e considera essa situação como sendo idêntica ao caso completamente alternado da seção anterior.*

Na região de tração, a curva GE define escoamento estático e o contorno de falha é definido pelas curvas CD e DE, considerando-se tanto falha por fadiga como por escoamento. Se as componentes médias de tensão forem muito elevadas e as componentes alternadas, muito baixas, a combinação delas poderia definir um ponto na região DEF que seria seguro com relação à curva de Goodman, porém escoaria no primeiro ciclo. A região de falha é definida pelas curvas contornando a área sombreada denominada $ABCDEA$. Qualquer combinação de tensão média e alternada que caia nessa região (isto é, na área sombreada) seria segura. Combinações que caiam nessas curvas estão em falha e, se estiverem fora dessa região, já terão falhado.

No intuito de determinar o coeficiente de segurança de qualquer estado flutuante de tensões, serão necessárias expressões para as curvas que definem as fronteiras da região de falha mostrada na Figura 6-44. A curva AG define escoamento em compressão e é

$$-\frac{\sigma'_m}{S_{yc}} + \frac{\sigma'_a}{S_{yc}} = 1 \qquad (6.16a)$$

A curva BC define falha por fadiga em combinação com tensão média de compressão e é:

$$\sigma'_a = S_f \qquad (6.16b)$$

* Uma situação de carregamento na qual a tensão média σ_m é negativa deveria ser tratada assumindo-se que $\sigma_m = 0$, assim transformando-a em um caso de tensão alternada solucionável pelos métodos da Seção 6.10. Esta é a abordagem preferida, pois incluir uma tensão média negativa no cálculo de uma tensão equivalente de von Mises resultará em um coeficiente de segurança extremamente conservador, devido ao fato de o valor da tensão média negativa ser elevado ao quadrado neste cálculo. Assumir a tensão média negativa como sendo zero ainda é conservador, já que, fazendo-se isso, desprezam-se os potenciais efeitos benéficos mostrados na Figura 6-17.

A curva *CF* define falha por fadiga em combinação com tensão média de tração e é:

$$\frac{\sigma'_m}{S_{ut}} + \frac{\sigma'_a}{S_f} = 1 \tag{6.16c}$$

A curva *GE* define escoamento em tração e é:

$$\frac{\sigma'_m}{S_y} + \frac{\sigma'_a}{S_y} = 1 \tag{6.16d}$$

Essas equações são mostradas na Figura 6-44.

Aplicação dos efeitos de concentração de tensão às tensões variadas

A componente de tensão alternada é tratada da mesma maneira como foi tratada anteriormente para o caso de tensão alternada (ver Exemplo 6-4). Isto é, o fator geométrico de concentração de tensão, K_t, é encontrado, a sensibilidade ao entalhe q do material é determinada, e estes são usados na Equação 6.11*b* para encontrar o fator de concentração de tensão em fadiga, K_f. O valor local de σ_a é então encontrado pela Equação 6.12 para uso no diagrama de Goodman modificado.

A componente média de tensão, σ_m, é tratada diferentemente, dependendo da ductilidade ou fragilidade do material e, se dúctil, dependendo de quanto de escoamento é possível no entalhe. Se o material for frágil, então o valor total do fator geométrico de concentração de tensão, K_t, é normalmente aplicado à tensão média nominal, $\sigma_{m_{nom}}$, para se obter a tensão média local, σ_m, no entalhe usando-se a Equação 4.31. Se o material for dúctil, Dowling[40] sugere uma das três abordagens baseadas em Juvinall[41], dependendo da relação entre as tensões máximas locais e o limite de escoamento do material dúctil.

Um fator de concentração de tensão, relativo à tensão média em fadiga, K_{fm}, é definido com base no nível de tensão média local, σ_m, na concentração de tensão em relação ao limite de escoamento. A Figura 6-45*a* mostra uma situação genérica de tensão variada. A Figura 6-45*b* ilustra o escoamento localizado que pode ocorrer ao redor da concentração de tensão. Para essa análise, uma relação tensão-deformação *plástica perfeitamente elástica* é assumida, como mostrado na parte (*c*). Existem três possibilidades baseadas na relação entre σ_{max} e o limite de escoamento do material S_y. Se $\sigma_{max} < S_y$, não ocorre escoamento (ver Figura 6-45*d)* e o valor total de K_f *é* usado para K_{fm}.

Se $\sigma_{max} > S_y$, mas $|\sigma_{min}| < S_y$, ocorre escoamento local no primeiro ciclo (Figura 6-45*e*), após o qual a tensão máxima não pode exceder S_y. A tensão local na concentração é aliviada e um valor menor de K_{fm} pode ser usado, como definido na Figura 6-45*g*, a qual plota a relação entre K_{fm} e σ_{max}.

A terceira possibilidade é que a gama de tensão, $\Delta\sigma$, exceda $2S_y$, causando escoamento alternado como mostrado na Figura 6-45*f*. As tensões máxima e mínima agora ficam iguais a $\pm S_y$ e a tensão média torna-se zero (ver Equação 6.1*c*), levando a $K_{fm} = 0$.

Essas relações podem ser resumidas abaixo:

$$\begin{aligned}
&\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| < S_y \text{ então:} && K_{fm} = K_f \\
&\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| > S_y \text{ então:} && K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} \\
&\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}} - \sigma_{min_{nom}}\right| > 2S_y \text{ então:} && K_{fm} = 0
\end{aligned} \tag{6.17}$$

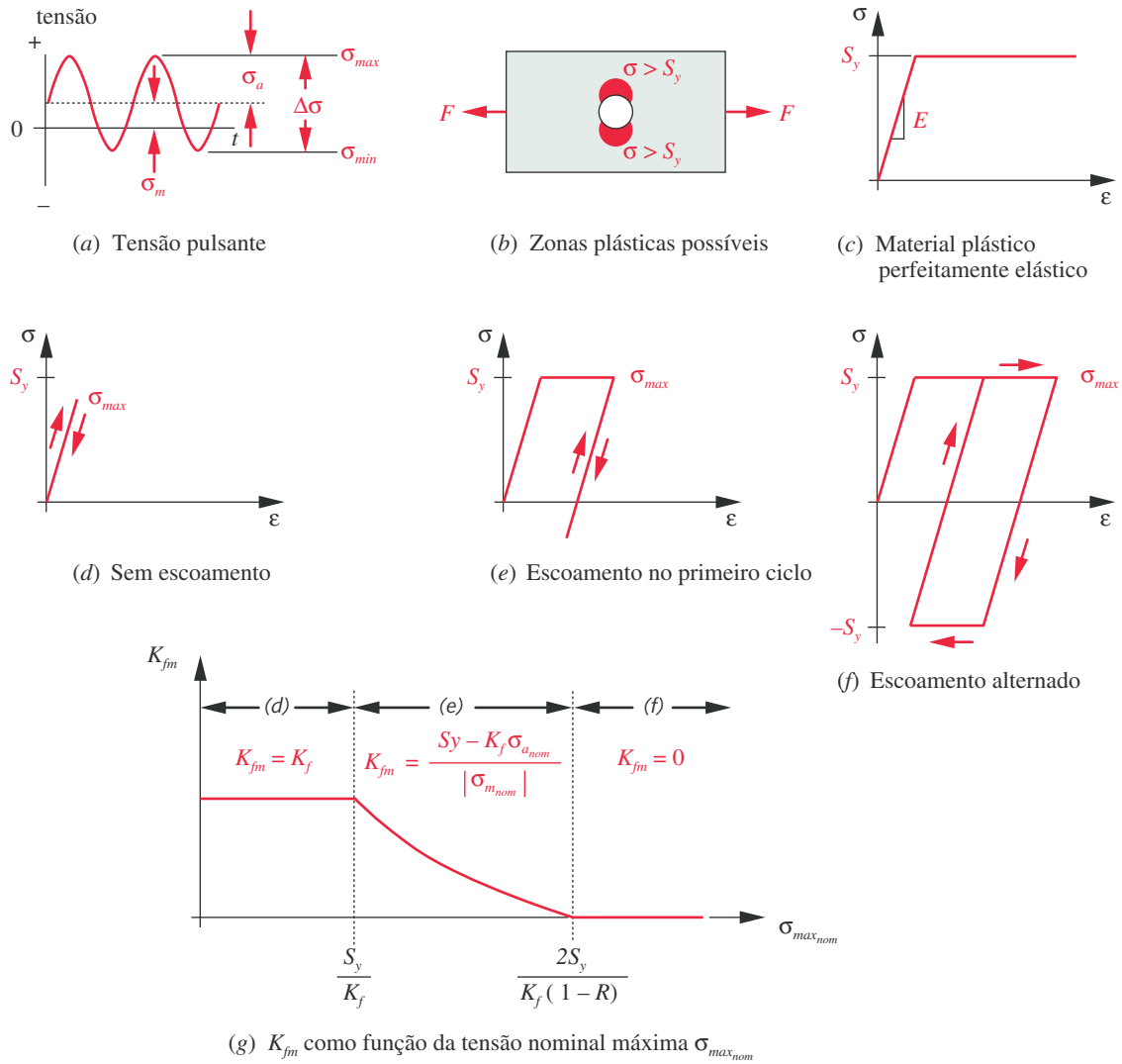



FIGURA 6-45

Variação do fator de concentração de tensão relativo à tensão média com a tensão máxima em materiais dúcteis com possibilidade de escoamento local. (Adaptado da Fig. 10-14, p. 415, N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993,. com permissão.)

Os valores absolutos são usados para considerar tanto as situações de compressão como de tração. O valor da tensão média local σ_m para uso no diagrama de Goodman modificado é então obtido da Equação 6.12 com K_f substituído por K_{fm}. Observe que os fatores de concentração de tensão devem ser usados para as tensões nominais aplicadas, sejam elas normais ou de cisalhamento.

As tensões locais aplicadas (com os efeitos de concentração de tensão em fadiga incluídos) são usadas para calcular as tensões médias e alternadas de von Mises. Esse cálculo é feito separadamente para as componentes médias e alternadas σ'_a e σ'_m. (Ver Equações 6.22*a* e 6.22*b*.) Essas componentes de von Mises serão usadas para calcular o coeficiente de segurança.

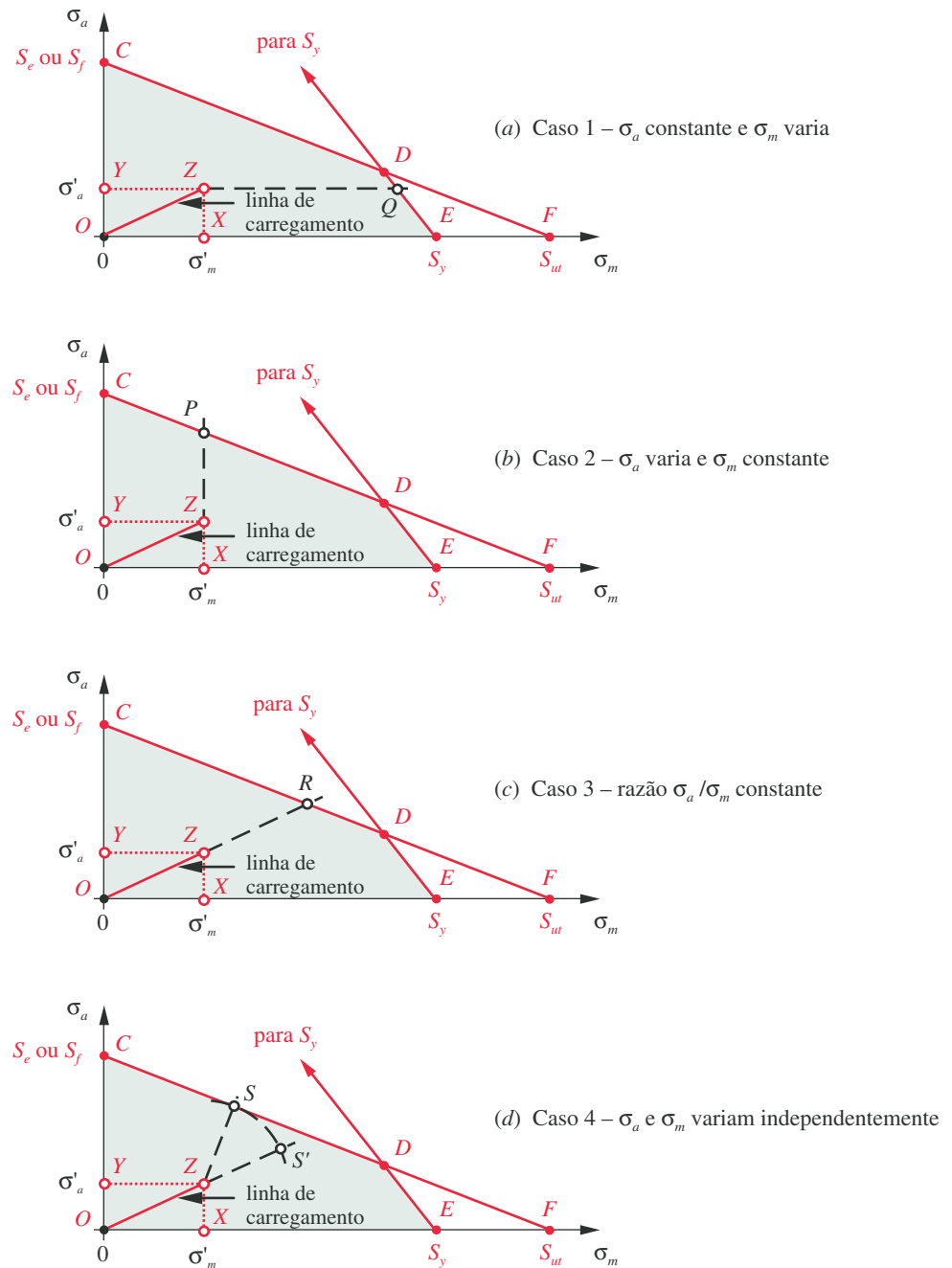



FIGURA 6-46

Coeficientes de segurança do diagrama de Goodman modificado para quatro possíveis variações de configuração de carregamento.

Determinação do coeficiente de segurança com tensões variadas

A Figura 6-46 mostra quatro vistas da face de tensão do diagrama de Goodman modificado aumentado, e também mostra a combinação de tensões médias e alternadas de von Mises no ponto *Z* representando uma peça sujeita a tensões variadas. O coeficiente de segurança para qualquer estado de tensões variadas

depende da maneira como as componentes médias e alternadas possam variar entre si em serviço. Há quatro casos possíveis a considerar, como mostrado na Figura 6-46.

1 A tensão alternada irá permanecer essencialmente constante ao longo da vida da peça, porém a tensão média pode aumentar sob as condições de serviço. (Curva *YQ* na Figura 6-46*a*.)

2 A tensão média irá permanecer essencialmente constante ao longo da vida da peça, porém a tensão alternada pode aumentar sob as condições de serviço. (Curva *XP* na Figura 6-46*b*.)

3 Ambas as componentes alternada e média podem aumentar sob as condições de serviço, porém sua razão permanecerá constante. (Curva *OR* na Figura 6-46*c*.)

4 Ambas as componentes alternada e média podem aumentar sob as condições de serviço, porém não há conhecimento da relação entre os valores desse aumento. (Curva *ZS* na Figura 6-46*d*.)

O coeficiente de segurança para cada um desses casos é calculado diferentemente. Observe que S_f será usado nas expressões seguintes para representar tanto a resistência à fadiga corrigida para um número de ciclos definido quanto o limite de fadiga corrigido. Portanto, S_e pode substituir S_f em qualquer uma dessas expressões, se for apropriado para o material usado.

PARA O CASO 1, a falha ocorre no ponto Q e o coeficiente de segurança é a razão dos segmentos YQ/YZ. Para expressar isso matematicamente, pode-se resolver a Equação 6.16*d* para o valor de $\sigma'_{m@Q}$ e dividi-lo por $\sigma'_{m@Z}$.

$$\sigma'_{m@Q} = \left(1 - \frac{\sigma'_a}{S_y}\right) S_y$$

$$N_f = \frac{\sigma'_{m@Q}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_y}{\sigma'_m}\left(1 - \frac{\sigma'_a}{S_y}\right) \tag{6.18a}$$

Se σ'_a for grande e σ'_m pequeno de modo que o ponto Q esteja na curva CD em vez de na DE, então a Equação 6.16*c* deve ser usada para determinar o valor de $\sigma'_{m@Q}$.

PARA O CASO 2, a falha ocorre no ponto P e o coeficiente de segurança é a razão entre as curvas XP/XZ. Para expressar isso matematicamente, pode-se resolver a Equação 6.16*c* para o valor de $\sigma'_{a@P}$ e dividir o resultado por $\sigma'_{a@Z}$.

$$\sigma'_{a@P} = \left(1 - \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}\right) S_f$$

$$N_f = \frac{\sigma'_{a@P}}{\sigma'_{a@Z}} = \frac{S_f}{\sigma'_a}\left(1 - \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}\right) \tag{6.18a}$$

Se σ'_m for grande e σ'_a pequeno de modo que o ponto P esteja na curva DE em vez de na CD, então a Equação 6.16*d* deve ser usada para determinar o valor de $\sigma'_{a@P}$.

PARA O CASO 3, a falha ocorre no ponto R e o coeficiente de segurança é a razão entre os segmentos OR/OZ ou, por semelhança de triângulos, as razões $\sigma'_{m@R}/\sigma'_{m@Z}$ ou $\sigma'_{a@R}/\sigma'_{a@Z}$. Para expressar isso matematicamente, pode-se resolver as Equações 6.16*c* e a equação da reta OR simultaneamente para o valor de $\sigma'_{m@R}$ e dividir o resultado por $\sigma'_{m@Z}$.

da Equação 6.16*c*:
$$\sigma'_{a@R} = \left(1 - \frac{\sigma'_{m@R}}{S_{ut}}\right) S_f \tag{6.18c}$$
da reta *OR*:
$$\sigma'_{a@R} = \left(\frac{\sigma'_{a@Z}}{\sigma'_{m@Z}}\right)\sigma'_{m@R} = \left(\frac{\sigma'_a}{\sigma'_m}\right)\sigma'_{m@R}$$

A solução simultânea destas resulta em:

$$\sigma'_{m@R} = \frac{S_f}{\dfrac{\sigma'_a}{\sigma'_m} + \dfrac{S_f}{S_{ut}}} \tag{6.18d}$$

que após substituições e alguma manipulação leva a:

$$N_f = \frac{\sigma'_{m@R}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} \tag{6.18e}$$

Há também a possibilidade de que o ponto *R* caia sobre o segmento *DE* em vez de em *CD*, e, nesse caso, a Equação 6.16*d* deve substituir a Equação 6.16*c* na solução acima.

Para o Caso 4, onde a relação entre as componentes médias e alternadas de tensão é aleatória ou desconhecida, o ponto *S* na curva de falha mais próximo do estado de tensões em *Z* pode ser tomado como uma estimativa conservadora do ponto de falha. O segmento *ZS* é ortogonal a *CD*, portanto sua equação pode ser escrita e resolvida simultaneamente com a da curva *CD* para encontrar as coordenadas do ponto *S* e o comprimento *ZS*, que são

$$\sigma'_{m@S} = \frac{S_{ut}\left(S_f^2 - S_f\sigma'_a + S_{ut}\sigma'_m\right)}{S_f^2 + S_{ut}^2}$$
$$\sigma'_{a@S} = -\frac{S_f}{S_{ut}}\left(\sigma'_{m@S}\right) + S_f$$
$$ZS = \sqrt{\left(\sigma'_m - \sigma'_{m@S}\right)^2 + \left(\sigma'_a - \sigma'_{a@S}\right)^2} \tag{6.18f}$$

Para estabelecer uma razão para o coeficiente de segurança, gire o ponto *S* ao redor do ponto *Z* para que coincida com a curva *OZS'* no ponto *S*'. O coeficiente de segurança é a razão *OS*'/*OZ*.

$$OZ = \sqrt{\left(\sigma'_a\right)^2 + \left(\sigma'_m\right)^2}$$
$$N_f = \frac{OZ + ZS}{OZ} \tag{6.18g}$$

Há também a possibilidade de que o ponto *S* recaia na curva *DE* e não na curva *CD*, e, nesse caso, a Equação 6.16*d* deve substituir a Equação 6.16*c* na solução acima.

O caso 4 fornece um coeficiente de segurança mais conservador do que o caso 3. A mesma abordagem pode ser usada para que sejam obtidas expressões do coeficiente de segurança para combinações de componentes de tensão na metade esquerda do plano do diagrama de Goodman modificado. Além disso, se o diagrama for desenhado em escala, estimativas aproximadas dos coeficientes de segurança podem ser retiradas a partir dele. O arquivo GOODMAN oferecido com este texto calcula todos os fatores de segurança definidos nas Equações 6.18 para quaisquer valores fornecidos de σ'_a e σ'_m e plota o diagrama de Goodman

modificado e a curva estendida de tensão *OZ* de forma que a interseção da falha possa ser observada.

Etapas de projeto para tensões variadas

Um conjunto de etapas de projeto similar àquele listado para o caso tensões alternadas pode ser definido para o caso de tensões variadas:

1. Determine o número de ciclos de carregamento N ao qual a peça estará submetida ao longo de sua vida esperada em operação.
2. Determine a amplitude dos esforços alternados aplicados (da média ao pico) e do esforço médio. (Ver Capítulo 3 e Equações 6.1.)
3. Crie um projeto preliminar da geometria da peça para suportar o carregamento aplicado com base em boas práticas de engenharia.
4. Determine os fatores de concentração de tensão K_t em entalhes na geometria da peça. Tente, é claro, minimizá-los por meio de um bom projeto. (Ver Seção 4.15.)
5. Converta os fatores geométricos de concentração de tensão K_t em fatores de concentração em fadiga K_f usando o q do material.
6. Calcule as amplitudes de tensão de tração nominal alternada σ_a (ver Figura 6.6*c*) em locais críticos da peça, devido a esforços alternados de carregamento, baseado nas fórmulas para cálculo de tensões (Capítulo 4), e incremente as tensões tanto quanto for necessário com os fatores de concentração de tensão em fadiga apropriados da Equação 6.11. (Ver Seções 4.15 e 6.6). Calcule os valores da tensão nominal média nos mesmos pontos críticos e aumente-os tanto quanto for necessário com os fatores de concentração de tensão adequados relativos à tensão média em fadiga, K_{fm}, da Equação 6.17.
7. Calcule os valores da tensão principal e da tensão equivalente de von Mises para os pontos críticos com base em seus estados de tensões aplicadas. Faça isso separadamente para as componentes de tensão média e alternada. (Ver Capítulo 4 e Equações 6.22.)
8. Escolha um material preliminar para a peça e encontre suas propriedades de interesse, como S_{ut}, S_y, $S_{e'}$ (ou $S_{f'}$ para a vida requerida) e sensibilidade ao entalhe q, de acordo com os próprios dados levantados, com a literatura disponível ou com estimativas como descritas neste capítulo.
9. Determine os fatores adequados de modificação de resistência à fadiga para o tipo de carregamento, tamanho da peça, superfície, etc., como descrito na Seção 6.6. Observe que o fator de carregamento C_{carreg} irá variar conforme haja esforços axiais ou de flexão (Equação 6.7*a*). Se o esforço for puramente de torção, então o cálculo da tensão equivalente de von Mises o converterá em uma tensão de tração equivalente e o C_{carreg} deve então ser definido como 1.
10. Defina a resistência à fadiga corrigida S_f na vida cíclica exigida N (ou o limite de fadiga S_e para a vida infinita se for apropriado). Faça o diagrama de Goodman modificado, como mostrado na Figura 6-44 usando a resistência à fadiga corrigida S_f do material obtido da curva *S-N* no número de ciclos de vida desejado N. (Observe que para situações de vida infinita nas quais o material apresenta um limite de fadiga na curva *S-N*, $S_f = S_e$). Escreva as Equações 6.16 para as curvas de Goodman e de escoamento.

11 Plote as tensões médias e alternadas de von Mises (para o ponto sob maior tensão) no diagrama de Goodman modificado e calcule um coeficiente de segurança para o projeto por uma das relações mostradas nas Equações 6.18.

12 Dado o fato de que o material foi apenas preliminarmente escolhido e que o projeto pode ainda não estar tão refinado quanto possível, o primeiro resultado da execução dessas etapas será provavelmente um projeto inadequado, cujo coeficiente de segurança é muito alto ou muito reduzido. Serão necessárias iterações (como sempre são) para melhorar o projeto. Qualquer subconjunto de etapas pode ser repetido quantas vezes forem necessárias para se chegar a um projeto aceitável. A tática mais comum é retornar à etapa 3 e aumentar a geometria da peça para reduzir tensões e concentrações de tensão, e/ou reconsiderar a etapa 8 para escolher um material mais adequado. Às vezes será necessário voltar à etapa 1 e redefinir uma vida aceitável menor para a peça. Os esforços de projeto podem ou não estar sob o controle do projetista. Normalmente eles não estão, a não ser que os esforços sobre a peça sejam decorrentes de forças inerciais, em cujo caso aumentar a massa do componente visando "adicionar resistência" irá piorar a situação, pelo fato disso aumentar proporcionalmente os esforços (ver Seção 3.6). O projetista pode querer reduzir a peça sem comprometer excessivamente sua resistência, com o intuito de reduzir as forças inerciais. Quaisquer que sejam as circunstâncias características, o projetista deve estar preparado para repetir essas etapas diversas vezes antes de convergir para uma solução aplicável. Ferramentas para a resolução de equações que permitem recálculo rápido das equações são um grande auxílio nesta situação. Se o solucionador de equações for capaz também de fornecer uma solução reversa, permitindo que variáveis sejam trocadas de entrada para saída do cálculo, a geometria necessária para que se alcance um coeficiente de segurança desejado pode ser diretamente calculada colocando-se o coeficiente de segurança como entrada de dados e a variável de geometria como resultado.

A melhor maneira de demonstrar o uso dessas etapas para projeto em fadiga com tensões variadas é com um exemplo. O exemplo anterior será repetido, modificando-se seu padrão de carregamento.

EXEMPLO 6-5

Projeto de um suporte engastado sob flexão variada

Problema **Um dispositivo de alimentação a rolos deve ser montado pelas suas extremidades em suportes engastados na estrutura da máquina, como mostrado na Figura 6-47. O dispositivo recebe uma carga variada que oscila entre um valor mínimo de 200 lb e um máximo de 2200 lb, dividida igualmente entre os dois suportes. Projete um suporte engastado para suportar uma força que varia de 100 lb a 1100 lb para 10^9 ciclos sem ruptura. A deflexão dinâmica do componente não pode ultrapassar 0,02 in.**

Dados **A forma da função força *versus* tempo é mostrada na Figura 6-47. O ambiente de operação é um local com ar de temperatura máxima de 120°F. O espaço disponível permite um comprimento máximo da viga de 6,0 in. Apenas 10 dessas peças são requeridas.**

Hipóteses **A viga pode ser fixada entre placas essencialmente rígidas parafusadas na sua extremidade. A carga normal será aplicada na**

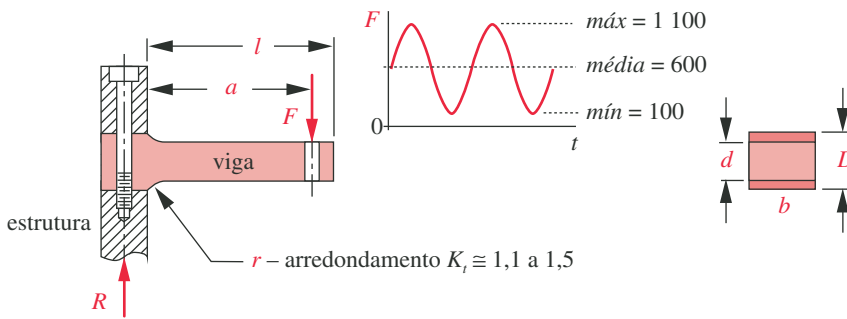



FIGURA 6-47

Projeto de suporte engastado para carregamento de flexão variada.

extremidade efetiva da viga engastada por uma haste conectada a um pequeno furo na viga. Como o momento fletor é efetivamente zero na extremidade em balanço da viga, a concentração de tensões causada por este furo pode ser ignorada. Devido à pequena quantidade exigida de peças, o método de manufatura indicado é usinagem da matéria-prima por fresagem.

Solução **Ver Figura 6-47 e Tabelas 6-11 e 6-12.**

1 Este é um problema de projeto típico. Muito pouca informação é fornecida, com exceção do desempenho exigido do dispositivo, algumas limitações de dimensão e o ciclo de vida requerido. É necessário fazer algumas suposições básicas sobre a geometria da peça, dos materiais e de outros fatores. Supõe-se que haverá necessidade de algumas iterações.

2 A Figura 6-47 ilustra a mesma configuração preliminar de projeto da Figura 6-41*b*. O material fresado é obtido com espessura maior que a dimensão final desejada e usinado na face superior e na face inferior até a dimensão *D*, depois usinado na espessura *d* ao longo do comprimento *l*. O arredondamento de raio *r* é feito no ponto de engaste de modo a reduzir a fadiga por microabrasão e obter um valor de K_t reduzido (ver Figura 4-37). A Figura 4-36 mostra que, com controle conveniente das razões *r/d* e *D/d* para uma viga plana em flexão, o fator geométrico de concentração de tensão K_t pode ser mantido abaixo de cerca de 1,5.

3 O material deve ser escolhido. Para vida infinita, baixo custo e facilidade de fabricação, é desejável o uso de aço-carbono, se possível, e se as condições do ambiente permitirem. Como isso será usado em um ambiente controlado e fechado, o aço-carbono é aceitável. O fato da deflexão ser relevante é também um bom motivo para a escolha de um material com grande *E*. Aços dúcteis de baixo e médio carbono apresentam o limite de fadiga requerido para a vida infinita exigida neste caso e também apresentam baixas sensibilidades a entalhes. Um aço normalizado SAE 1040 com S_{ut} = 80 kpsi e S_y = 60 kpsi é selecionado para a primeira tentativa.

4 As dimensões preliminares serão assumidas como sendo as mesmas da solução adequada para o caso de esforços completamente alternados do Exemplo 6-4. Estas são $b = 2$ in, $d = 1$ in, $D = 1{,}125$ in, $r = 0{,}5$ in, $a = 5$ in e $l = 6{,}0$ in. Esse valor de *a* deixa algum material ao redor do furo e ainda está dentro da restrição de 6,0 in de comprimento.

5 As componentes média e alternada do carregamento e os esforços de reação podem ser calculados a partir dos valores dados máximo e mínimo da força.

$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} = \frac{1100 + 100}{2} = 600 \text{ lb}$$
$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = \frac{1100 - 100}{2} = 500 \text{ lb} \qquad (a)$$

$$R_a = F_a = 500 \text{ lb} \qquad R_m = F_m = 600 \text{ lb} \qquad R_{max} = F_{max} = 1100 \text{ lb} \qquad (b)$$

6 A partir desses valores, os momentos médios e alternados e o momento máximo atuando no ponto de engastamento da viga podem ser calculados.

$$M_a = R_a l - F_a(l - a) = 500(6) - 500(6 - 5) = 2500 \text{ lb-in}$$
$$M_m = R_m l - F_m(l - a) = 600(6) - 600(6 - 5) = 3000 \text{ lb-in} \qquad (c)$$
$$M_{max} = R_{max} l - F_{max}(l - a) = 1100(6) - 1100(6 - 5) = 5500 \text{ lb-in}$$

7 Encontre o momento de inércia da área da seção transversal e a distância ao ponto mais externo da seção.

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{2,0(1,0)^3}{12} = 0,166\,7 \text{ in}^4$$
$$c = \frac{d}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5 \text{ in} \qquad (d)$$

8 As tensões nominais de flexão no engastamento são obtidas para ambos os carregamentos alternado e médio, usando-se:

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{M_a c}{I} = \frac{2500(0,5)}{0,166\,7} = 7500 \text{ psi}$$
$$\sigma_{m_{nom}} = \frac{M_m c}{I} = \frac{3000(0,5)}{0,166\,7} = 9000 \text{ psi} \qquad (e)$$

9 Duas frações devem ser calculadas para uso na Figura 4-36, com o intuito de encontrar o fator geométrico de concentração de tensão K_t para as dimensões assumidas da peça.

$$\frac{D}{d} = \frac{1,125}{1,0} = 1,125 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0,5}{1,0} = 0,5 \qquad (f)$$

Interpolando na tabela da Figura 4-36: $A = 1,012 \qquad b = -0,221 \qquad (g)$

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b = 1,012(0,5)^{-0,221} = 1,18 \qquad (h)$$

10 A sensibilidade ao entalhe q do material escolhido é calculada com base em sua tensão de ruptura e no raio de arredondamento do entalhe, utilizando--se a Equação 6.13 e os dados para a constante de Neuber da Tabela 6-6. Os valores de q e K_t são usados para encontrar o fator de concentração de tensão em fadiga K_f, por meio da Equação 6.11*b*. K_{fm} é calculado pela Equação 6.17.

Da Tabela 6-6 para S_{ut} = 80 ksi: $\sqrt{a} = 0,08 \qquad (i)$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0,08}{\sqrt{0,5}}} = 0,898 \qquad (j)$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,898(1,18 - 1) = 1,16 \qquad (k)$$

$$\text{se } K_f\left|\sigma_{max}\right| < S_y \text{ então} \qquad K_{fm} = K_f$$

$$K_f\left|\frac{M_{max}c}{I}\right| = 1{,}16\left|\frac{5500(0{,}5)}{0{,}166\,7}\right| = 19136 < 60000 : \quad K_{fm} = 1{,}16 \tag{l}$$

11 Use esses fatores para obter as tensões locais média e alternada no entalhe.

$$\sigma_a = K_f\sigma_{a_{nom}} = 1{,}16(7500) = 8711 \text{ psi}$$
$$\sigma_m = K_{fm}\sigma_{m_{nom}} = 1{,}16(9000) = 10454 \text{ psi} \tag{m}$$

12 As tensões locais são usadas para calcular as tensões média e alternada de von Mises a partir das Equações 6.22*b*.

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} = \sqrt{8711^2 + 0 - 8711(0) + 3(0)} = 8711$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} = \sqrt{10454^2 + 0 - 10425(0) + 3(0)} = 10454 \tag{n}$$

13 O limite de fadiga não corrigido $S_{e'}$ é determinado pela Equação 6.5*a*.

$$S_{e'} = 0{,}5S_{ut} = 0{,}5(80000) = 40000 \text{ psi} \tag{o}$$

14 O *fator de tamanho* para essa peça retangular é determinado pelo cálculo da área da seção transversal cujas tensões são maiores que 95% da tensão máxima (ver Figura 6-25) e pelo uso desse valor na Equação 6.7*d* para se encontrar um diâmetro equivalente do corpo de prova cilíndrico em flexão rotativa.

$$A_{95} = 0{,}05db = 0{,}05(1{,}0)(2{,}0) = 0{,}1 \text{ in}^2$$
$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0{,}076\,6}} = \sqrt{\frac{0{,}1}{0{,}076\,6}} = 1{,}143 \text{ in} \tag{p}$$
$$C_{tamanho} = 0{,}869\left(d_{equiv}\right)^{-0{,}097} = 0{,}859$$

15 O cálculo do limite de fadiga corrigido S_e requer que muitos fatores sejam definidos. C_{carreg} é obtido pela Equação 6.7*a*. C_{superf} para acabamento usinado é encontrado pela Equação 6.7*e*. C_{temp} é encontrado pela Equação 6.7*f* e C_{conf} é escolhido da Tabela 6-4 para um nível de 99,9% de confiabilidade.

$$S_e = C_{carreg}\ C_{tamanho}\ C_{superf}\ C_{temp}\ C_{conf}\ S_e$$
$$= 1(0{,}859)(0{,}85)(1)(0{,}753)40000 = 21883 \text{ psi} \tag{q}$$

16 Os quatro fatores de segurança possíveis são calculados pelas Equações 6.18. O menor ou mais apropriado pode ser escolhido dentre os calculados. A Equação (*r*) mostra o coeficiente de segurança do Caso 3, o qual pressupõe que as componentes média e alternada apresentarão uma razão constante se estas alternarem em amplitude máxima ao longo da vida da peça.

$$N_{f_3} = \frac{S_e S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_e} = \frac{21883(80000)}{8688(80000) + 10425(21883)} = 1{,}9 \tag{r}$$

17 A deflexão máxima é calculada usando-se a força máxima aplicada F_{max}.

$$y_{@x=l} = \frac{F_{max}}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right]$$
$$= \frac{1100}{6(3E7)(0{,}1667)}\left[6^3 - 3(5)(6)^2 - (6-5)^3\right] = -0{,}012 \text{ in} \tag{s}$$

Tabela 6-11 Projeto de um suporte engastado sob flexão variada[§]
Primeira iteração para o Exemplo 6-5 (arquivo EX06-05A)

Entrada	Variável	Saída	Unidade	Comentários
2	*b*		in	largura da viga
1	*d*		in	altura da viga ao longo do comprimento
1,125	*D*		in	altura da viga na parede
0,5	*r*		in	raio de arredondamento
5	*a*		in	distância até a força *F*
80000	*Sut*		psi	limite de ruptura
60000	*Sy*		psi	limite de escoamento
'maquinado	*acabamento*			'retificado, 'usinado, 'laminado a quente, 'forjado
'flexão	*carregamento*			'flexão, 'axial, 'cisalhamento
99,9	*porcentagem*			% confiabilidade desejada
1100	*Fmax*		lb	máximo esforço aplicado
100	*Fmin*		lb	mínimo esforço aplicado
	Fa	500	lb	força alternada aplicada
	Fm	600	lb	força média aplicada
	Kt	1,18		fator geométrico de concentração de tensões
	q	0,898		fator de sensibilidade ao entalhe de Peterson
	Kf	1,16		fator de concentração de tensão em fadiga – alternado
	Kfm	1,16		fator de concentração de tensão em fadiga – médio
	siganom	7500	psi	tensão nominal alternada
	siga	8711	psi	tensão alternada com concentração
	sigavm	8711	psi	tensão alternada de von Mises
	sigmnom	9000	psi	tensão nominal média
	sigm	10454	psi	tensão média com concentração
	sigmvm	10454	psi	tensão média de von Mises
	Seprime	40000	psi	limite de fadiga não corrigido
	Ccarreg	1		fator de carregamento para flexão
	Csuperf	0,845		acabamento usinado
	Ctamanho	0,859		fator de tamanho baseado em 95% da área
	Ctemp	1		temperatura ambiente
	Cconf	0,753		fator de confiabilidade para 99,9%
	Se	21883	psi	limite de fadiga corrigido
	Nsf_1	5,5		FS para sigalt = constante
	Nsf_2	2,2		FS para sigmedia = constante
	Nsf_3	1,9		FS para sigalt/sigmedia = constante
	Nsf_4	1,7		FS para a curva de falha mais próxima

18 Os dados para este projeto estão mostrados na Tabela 6-11. Usando-se as mesmas dimensões da seção transversal e o mesmo carregamento alternado do Exemplo 6-4, chega-se a um coeficiente de segurança de $N_{f3} = 1,9$ e a uma deflexão máxima de $y_{max} = 0,012$ in, para este caso de esforços varia-

[§] N. de R.: Estes dados também estão no CD, em inglês, que acompanha o livro. Estão traduzidos aqui para facilitar o entendimento do leitor.

Tabela 6-12 Projeto de um suporte engastado sob flexão variada§
Iteração final para o Exemplo 6-5 (arquivo EX06-05B)

Entrada	Variável	Saída	Unidade	Comentários
2	*b*		in	largura da viga
1,2	*d*		in	altura da viga ao longo do comprimento
1,4	*D*		in	altura da viga na parede
0,5	*r*		in	raio de arredondamento
5	*a*		in	distância até a força *F*
80000	*Sut*		psi	limite de ruptura
60000	*Sy*		psi	limite de escoamento
'maquinado	*acabamento*			'retificado, 'usinado, 'laminado a quente, 'forjado
'flexão	*carregamento*			'flexão, 'axial, 'cisalhamento
99,9	*porcentagem*			% confiabilidade desejada
1100	*Fmax*		lb	máximo esforço aplicado
100	*Fmin*		lb	mínimo esforço aplicado
	Fa	500	lb	força alternada aplicada
	Fm	600	lb	força média aplicada
	Kt	1,22		fator geométrico de concentração de tensões
	q	0,898		fator de sensibilidade ao entalhe de Peterson
	Kf	1,20		fator de concentração de tensão em fadiga – alternado
	Kfm	1,20		fator de concentração de tensão em fadiga – médio
	siganom	5208	psi	tensão nominal alternada
	siga	6230	psi	tensão alternada com concentração
	sigavm	6230	psi	tensão alternada de von Mises
	sigmnom	6250	psi	tensão nominal média
	sigm	7476	psi	tensão média com concentração
	sigmvm	7476	psi	tensão média de von Mises
	Seprime	40000	psi	limite de fadiga não corrigido
	Ccarreg	1		fator de carregamento para flexão
	Csuperf	0,85		acabamento usinado
	Ctamanho	0,85		fator de tamanho baseado em 95% da área
	Ctemp	1		temperatura ambiente
	Cconf	0,753		fator de confiabilidade para 99,9%
	Se	21658	psi	limite de fadiga corrigido
	Nsf_1	8,6		FS para sigalt = constante
	Nsf_2	3,2		FS para sigmedia = constante
	Nsf_3	2,6		FS para sigalt/sigmedia = constante
	Nsf_4	2,3		FS para a curva de falha mais próxima

dos, em comparação ao $N_{f3} = 2,5$ e $y_{max} = 0,005$ in para a situação de carregamento alternado do Exemplo 6-4. A adição de uma tensão média ao nível de tensão alternada anterior reduziu o coeficiente de segurança e aumentou a deflexão, como já deveria ser esperado.

§ N. de R.: Estes dados também estão no CD, em inglês, que acompanha o livro. Estão traduzidos aqui para facilitar o entendimento do leitor.

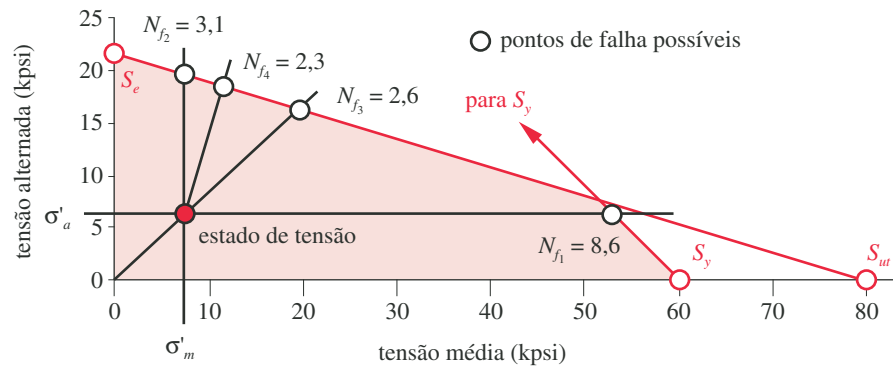



FIGURA 6-48

Diagrama de Goodman modificado para o Exemplo 6-5 mostrando resultados da solução final da Tabela 6-12.

19 Aumentando-se ligeiramente as dimensões da seção transversal da peça consegue-se um projeto melhor, mostrado na Tabela 6-12. As dimensões finais são $b = 2$ in, $d = 1{,}2$ in, $D = 1{,}4$ in, $r = 0{,}5$ in, $a = 5$ in e $l = 6{,}0$ in. N_{f3} passa a 2,6, como mostrado no diagrama de Goodman da Figura 6-48, e a deflexão máxima fica 0,007 in. Esses valores são ambos aceitáveis. A dimensão D foi escolhida deliberadamente para que fosse ligeiramente menor do que o tamanho do material bruto em estoque, de modo que houvesse um pequeno excesso de material disponível para usinagem, com o intuito de limpar e facear as superfícies para montagem.

20 Os arquivos EX06-05A e EX06-05B encontram-se no CD-ROM deste livro.

O exemplo anterior demonstra que projetar para carregamentos variados em fadiga de alto-ciclo é algo simples, uma vez que os princípios tenham sido compreendidos. Se o projeto estivesse sujeito a carregamento variado de torção, flexão ou axial, o procedimento de projeto seria o mesmo desse exemplo. As únicas diferenças seriam nas escolhas das equações de tensão e nos fatores de modificação de resistência, como descrito nas seções anteriores. É necessário enfatizar o valor do uso de um computador e de uma ferramenta de resolução de equações, neste ou em qualquer problema de projeto, por permitirem rápidas iterações a partir dos valores iniciais até as dimensões finais com o mínimo de esforço.

6.12 PROJETO PARA TENSÕES MULTIAXIAIS EM FADIGA

As discussões anteriores referiam-se a casos nos quais o carregamento produzia tensões uniaxiais na peça. Em elementos de máquinas, é bastante comum ter-se esforços combinados que criam simultaneamente tensões biaxiais e triaxiais variáveis no tempo no mesmo ponto. Um exemplo comum é um eixo em rotação sujeito a um momento fletor estático e um torque. Pelo fato do eixo estar girando, o momento estático gera tensões normais alternadas, que são máximas na superfície do eixo, e o torque cria tensões de cisalhamento, que também são máximas na parte mais externa do eixo. Há muitas combinações possíveis de carregamento. O torque pode ser constante, alternado ou variado. Se o torque não for constante, este pode ser sincronizado ou não sincronizado, e em fase ou defasado com relação ao momento fletor. Esses fatores complicam o cálculo de tensões. O caso de tensões combinadas sob esforços estáticos foi explorado no Capítulo 5 e foi utilizada a tensão equivalente de von Mises para converter essas

tensões a uma tensão de tração equivalente que pode ser usada para predizer a falha no caso de carregamento estático. Existem técnicas similares para se lidar com tensões combinadas em carregamento dinâmico.

Relações de frequência e de fase

Quando múltiplos esforços variáveis no tempo estão presentes, estes podem ser periódicos, aleatórios, ou alguma combinação dessas duas possibilidades. Se forem periódicos, eles podem ser sincronizados ou não sincronizados. Se forem sincronizados, podem ter relações em fase ou defasadas de 180°, ou qualquer valor intermediário. As combinações possíveis são muito variadas, e apenas algumas delas têm sido estudadas para determinar seus efeitos na falha por fadiga. Collins[49] sugere que a hipótese de que os esforços são sincronizados e em fase é, em geral, correta para elementos de máquinas e, normalmente (mas nem sempre), conservadora.

Os casos mais estudados são os de esforços sincronizados, periódicos e em fase, que causam tensões combinadas cujas direções principais não se alteram com o tempo. Isso é denominado **tensão multiaxial simples**. Sines[42] desenvolveu um modelo para esse caso em 1955. Vasos de pressão ou tubos submetidos a pressões internas que variam com o tempo podem apresentar tensões de tração sincronizadas e em fase com origem em uma única fonte de carregamento. O caso de um eixo em rotação sob flexão e torção combinadas pode encaixar-se também nessa categoria se o torque for constante no tempo, já que a componente alternada da tensão principal, devido apenas à flexão, atua em uma direção constante. Se o torque for variável, a direção da tensão principal alternada não é constante. Além disso, quando há concentrações de tensão, como um furo passante transversal no eixo, as tensões locais na concentração serão biaxiais. Essas situações nas quais as direções das tensões principais variam com o tempo, ou nas quais as tensões não são sincronizadas ou são defasadas, são chamadas de **tensão multiaxial complexa**, e ainda estão sendo estudadas. De acordo com o *SAE Fatigue Design Handbook*,[51] "*A análise desta situação está, em geral, além do presente estado da tecnologia. O processo de projeto deve proceder de análises aproximadas, fundamentadas em extensivos estudos experimentais simulando o material e a geometria, assim como o carregamento.*" Métodos de análise para alguns desses casos foram desenvolvidos por Kelly,[43] Garud,[44] Brown,[45] Langer[48] e outros. Algumas dessas abordagens são de uso bastante complicado. A referência 51 também "*previne contra o uso direto dessas informações, a não ser que as condições examinadas enquadrem-se naquelas sendo analisadas*". Esta discussão ficará limitada a poucas abordagens úteis para propósitos de projeto que fornecem resultados aproximados, mas conservadores, na maior parte das situações de projeto de máquinas.

Tensões alternadas multiaxiais simples

Dados experimentais levantados para tensões biaxiais simples, como aquelas mostradas na Figura 6-15, indicam que, para tensões multiaxiais simples em materiais dúcteis, a teoria da energia de distorção é aplicável caso a tensão de von Mises seja calculada para componentes alternadas usando-se a Equação 5.7. Para o caso tridimensional:

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{1_a}^2 + \sigma_{2_a}^2 + \sigma_{3_a}^2 - \sigma_{1_a}\sigma_{2_a} - \sigma_{2_a}\sigma_{3_a} - \sigma_{1_a}\sigma_{3_a}} \qquad (6.19a)$$

e para o caso bidimensional:

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{1_a}^2 - \sigma_{1_a}\sigma_{2_a} + \sigma_{2_a}^2} \qquad (6.19b)$$

Observe que essa forma da equação de von Mises contém as tensões principais alternadas, que são calculadas a partir das componentes alternadas das tensões aplicadas do estado multiaxial de tensão usando-se a Equação 4.4*c* – para 3D, ou 4.6 – para 2D, depois dessas componentes alternadas terem sido incrementadas por todos os fatores de concentração de tensão em fadiga aplicáveis. Essa tensão alternada efetiva σ'_a pode então ser usada como entrada no diagrama *S-N* para se determinar um coeficiente de segurança usando-se:

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'_a} \tag{6.20}$$

onde S_n é a resistência à fadiga do material na vida desejada N e σ'_a é a tensão alternada de von Mises.

Tensões variadas multiaxiais simples

Método de Sines Sines[42] elaborou um modelo para tensões variadas multiaxiais simples que cria uma tensão média equivalente, assim como cria também uma tensão alternada equivalente para as componentes de tensão aplicada. Esta tensão alternada equivalente é, de fato, a tensão alternada de von Mises, como definida na Equação 6.19*a* acima. No entanto, esta será apresentada sob uma forma alternativa, que usa diretamente as tensões aplicadas no lugar das tensões principais.

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy_a}^2 + \tau_{yz_a}^2 + \tau_{zx_a}^2\right)}{2}} \\ \sigma'_m &= \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} + \sigma_{z_m} \end{aligned} \tag{6.21a}$$

e, para o estado duplo de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} \\ \sigma'_m &= \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} \end{aligned} \tag{6.21b}$$

As componentes da tensão aplicada nas Equações 6.21 são as tensões locais, aumentadas pelos fatores de concentração de tensão aplicáveis. As duas tensões equivalentes σ'_a e σ'_m são então usadas em um diagrama de Goodman modificado como descrito na seção anterior, e o coeficiente de segurança apropriado é calculado a partir das Equações 6.18.

Enquanto as tensões locais individuais nas Equações 6.19 e 6.21 podem ser acrescidas, cada uma, por um fator diferente de concentração de tensão, pode haver alguns conflitos quando a resistência à fadiga corrigida ou o limite de fadiga corrigido for calculado para um estado combinado de tensão. Por exemplo, uma combinação de flexão e força normal resultaria em duas opções para os fatores de carregamento das Equações 6.7*a* e 6.9. Use o fator axial se esforços axiais estiverem presentes, independentemente de haver esforços de flexão.

Observe que a tensão equivalente média de Sines σ'_m das Equações 6.21 contém apenas componentes normais de tensão (que é a tensão hidrostática), ao passo que a tensão equivalente alternada de von Mises σ'_a das Equações 6.21 considera ambas as tensões normais e de cisalhamento. Portanto, as componentes médias da tensão de cisalhamento não contribuem no modelo de Sines. Isso é consistente com dados experimentais para barras circulares lisas, polidas, sem ranhuras, testadas em flexão e torção combinadas.[46] Porém, corpos de prova

com ranhura, sob o mesmo carregamento, mostram dependência ao valor da tensão média de torção,[46] então as Equações 6.21 devem apresentar resultados não conservadores nesses casos.

Método de von Mises Outras referências[47, 49] recomendam o uso da tensão equivalente de von Mises para ambas as componentes média e alternada das tensões aplicadas em carregamento com tensão multiaxial simples. Fatores de concentração de tensão apropriados (e possivelmente diferentes) podem ser aplicados às componentes média e alternada das tensões aplicadas, como descrito na Seção 6.10. Então, as tensões equivalentes de von Mises para as componentes média e alternada são calculadas para um estado triplo de tensão usando-se

$$\sigma'_a = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_a} + \tau^2_{yz_a} + \tau^2_{zx_a}\right)}{2}}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_m} - \sigma_{y_m}\right)^2 + \left(\sigma_{y_m} - \sigma_{z_m}\right)^2 + \left(\sigma_{z_m} - \sigma_{x_m}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_m} + \tau^2_{yz_m} + \tau^2_{zx_m}\right)}{2}} \qquad (6.22a)$$

ou para um estado duplo de tensão usando-se:

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma^2_{x_a} + \sigma^2_{y_a} - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau^2_{xy_a}}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma^2_{x_m} + \sigma^2_{y_m} - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau^2_{xy_m}} \qquad (6.22b)$$

Essas tensões alternadas e médias equivalentes de von Mises são, então, usadas em um diagrama de Goodman modificado para determinar um coeficiente de segurança por meio da versão adequada das Equações 6.18. Essa abordagem é mais conservadora do que o método de Sines e é, portanto, mais apropriada para situações envolvendo concentrações de tensão devido a entalhes.

Tensões multiaxiais complexas

Este tópico ainda se encontra sob estudo de muitos pesquisadores. Muitos casos específicos de tensões multiaxiais complexas têm sido analisados, porém nenhuma abordagem de projeto geral, aplicável a todas as situações, foi desenvolvida até o presente.[50] Nishihara e Kawamoto[52] descobriram que as resistências à fadiga de dois aços, de um ferro fundido e de uma liga de alumínio, testados sob tensão multiaxial complexa, não eram menores que suas resistências à fadiga em fase, para qualquer ângulo de fase. Para o caso de tensão biaxial comum de flexão e torção combinadas, como ocorre em eixos, muitos métodos têm sido propostos.[50] Um deles, chamado SEQA, o qual se baseia no Código de Caldeiras da ASME*, será discutido brevemente. SEQA é uma tensão equivalente ou efetiva (conceito similar ao da tensão equivalente de von Mises), que combina os efeitos das tensões normais e de cisalhamento e a relação de fase entre elas em um valor de tensão equivalente, que pode ser comparado às resistências estática e em fadiga de materiais dúcteis no diagrama de Goodman modificado. Ela é calculada a partir de:

$$SEQA = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{3}{4}Q^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2}Q^2\cos 2\phi + \frac{9}{16}Q^4}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (6.23)$$

* Código ASME de Vasos de Pressão e Caldeiras, Seção III, Caso do Código N-47-12, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1980.

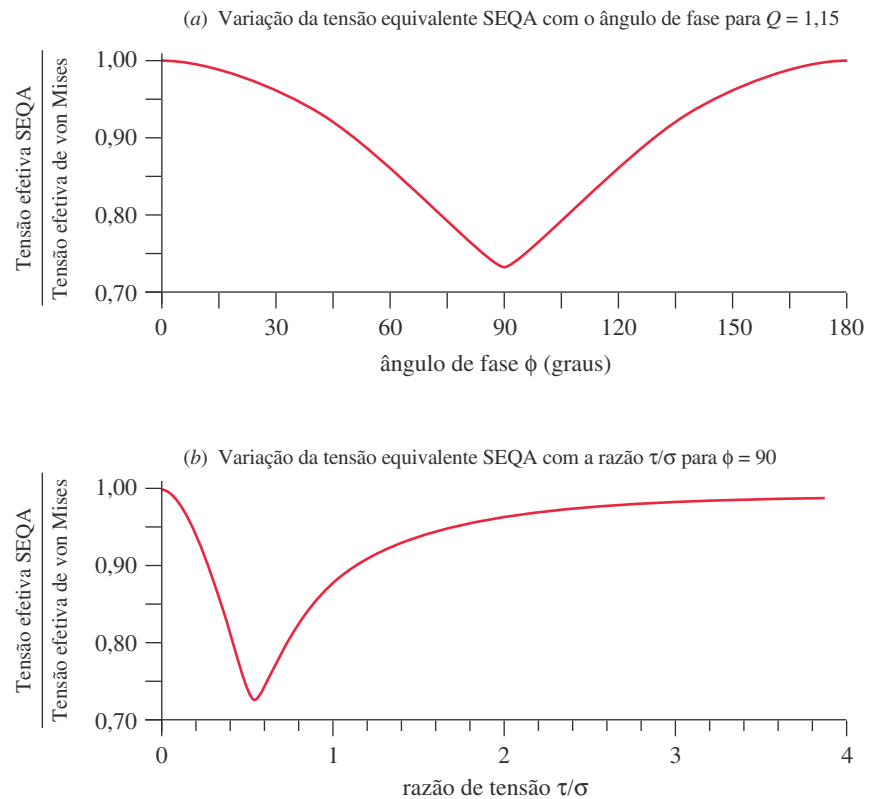



FIGURA 6-49

Variação da tensão equivalente SEQA com a razão τ/σ e com o ângulo de fase entre τ e σ.

onde σ = amplitude da tensão de flexão incluindo quaisquer efeitos de concentração de tensão

$$Q = 2\frac{\tau}{\sigma}$$

τ = amplitude da tensão de torção incluindo quaisquer efeitos de concentração de tensão

ϕ = ângulo de fase entre flexão e torção

A SEQA pode ser calculada para ambas as componentes média e alternada de tensão.

A Figura 6-49 mostra a variação da tensão equivalente SEQA, expressa relativamente à tensão de von Mises para a mesma combinação de flexão-torção como função de duas variáveis: o ângulo de fase ϕ e razão τ/σ. Observe na Figura 6-49*a* que quando a flexão e torção estão em fase, ou defasadas de 180°, a SEQA se iguala à tensão de von Mises σ'. Para $\phi = 90°$, a SEQA é aproximadamente 73% de σ'. A tensão SEQA também varia com os valores relativos de τ e σ como mostrado na Figura 6-49*b*. Quando $\tau/\sigma = 0{,}575$ ($Q = 1{,}15$), a redução na tensão SEQA para $\phi = 90°$ é máxima e aproxima-se de σ' para valores grandes e pequenos da razão τ/σ. Essa figura indica que o uso da tensão de von Mises para fadiga em flexão e torção combinadas fornece um resultado conservador para qualquer ângulo de fase ou razão τ/σ. No entanto, Garud mostrou que essa abordagem será pouco conservativa para carregamento defasado se a deformação local ultrapassar 0,13%. Portanto, essa abordagem não é recomendada para situações de fadiga

de baixo-ciclo. Tipton e Nelson mostraram que o método SEQA é conservador para aplicações em fadiga defasada de alto-ciclo (baixa deformação). De fato, quando os fatores de concentração de tensão K_f *e* K_{fs} para o entalhe foram ajustados para 1, a SEQA e outras abordagens similares* resultaram em previsões razoavelmente precisas para falha em fadiga de alto-ciclo (FAC).

O método de análise de fadiga multiaxial complexa apresentado acima pressupõe que os esforços aplicados são sincronizados com uma relação de fase previsível. Se as fontes dos múltiplos esforços forem desvinculadas e tiverem uma relação de fase aleatória ou desconhecida, então este método pode não ser suficiente para resolver o problema. Sugere-se que o leitor consulte a literatura, como descrito na bibliografia deste capítulo, para mais informações sobre o caso de carregamento multiaxial complexo. A melhor abordagem para situações inusitadas é um programa de testes próprio.

6.13 UMA ABORDAGEM GERAL PARA PROJETO DE FADIGA DE ALTO-CICLO

As seções e os exemplos anteriores usaram uma abordagem consistente para as categorias de carregamento sob fadiga envolvidas (ver Figura 6-40). Mesmo nos casos de tensão uniaxial, a tensão de von Mises foi calculada para as tensões médias e alternadas. Poderia ter sido discutido que esse passo é desnecessário no caso de tensão uniaxial, já que a tensão de von Mises será idêntica à tensão aplicada. No entanto, apesar de uma pequena sobrecarga adicional de cálculo (o que se torna irrelevante no caso de se estar usando um computador), ganha-se a vantagem da consistência. Além disso, os fatores da concentração de tensão individuais adequados devem ser aplicados às várias componentes de tensão antes de incorporá-las no cálculo da tensão de von Mises. Frequentemente, os fatores geométricos de concentração de tensão para o mesmo contorno de uma peça irão variar de acordo com diferentes carregamentos (axial ou flexão, etc.).

Seja o carregamento uniaxial ou multiaxial, flexão ou torção, ou qualquer combinação destes, o coeficiente de segurança com esse método é obtido da mesma maneira, comparando-se alguma combinação de tensões média e alternada de von Mises a uma curva definida pela resistência à fadiga em tração e pela resistência estática à tração do material. Isso elimina a necessidade de se calcular resistências à fadiga em torção separadamente. Se a abordagem destacada na seção anterior para carregamentos multiaxiais com concentrações de tensão for aceita, ou seja, usando-se a tensão de von Mises para as componentes média e alternada de tensão, a diferença entre os casos uniaxial e multiaxial desaparece. O mesmo algoritmo de cálculo aplica-se a todas as quatro categorias da Figura 6-40.

Quanto à diferença entre os modos de carregamento variado ou alternado, considere que o último é apenas um caso especial do primeiro. Todos os casos de carregamento em fadiga podem ser tratados como variados, e o critério de falha do DGM (diagrama de Goodman modificado) pode ser aplicado consistentemente com bons resultados. Observe na Figura 6-43 que o DGM e o diagrama *S-N* são simplesmente visões diferentes da mesma relação tridimensional entre tensão média σ'_m, tensão alternada σ'_a e o número de ciclos *N*. A Figura 6-43*c* mostra a seção de Goodman tomada através da superfície 3D que relaciona as variáveis. Um estado de tensão alternado ($\sigma'_a \neq 0$, $\sigma'_m = 0$) pode ser plotado no diagrama de Goodman e seu coeficiente de segurança calculado facilmente quando se percebe que o ponto resultante dos dados estará no eixo σ'_a. A Equação 6.18*b* fornece o coeficiente de segurança, que é o mesmo da Equação 6.14 quando $\sigma'_m = 0$. Por esse motivo, um problema de carregamento estático ($\sigma'_m = 0$, $\sigma'_a = 0$) pode ser plotado

* Um método similar baseado na teoria de máxima tensão de cisalhamento é definido também na referência 50. Este método, chamado de SALT, fornece resultados similares, porém ainda mais conservadores, para fadiga de alto-ciclo (FAC) do aqueles mostrados para o método SEQA na Figura 6-49. Sua aplicação só é válida para o caso de carregamento em fadiga de alto-ciclo, apesar de fornecer uma melhor correlação com resultados experimentais de testes de fadiga multiaxial de baixo-ciclo com deformação considerável do que o método SEQA.[44]

também no DGM, e seu ponto de dados recairá sobre o eixo σ'_m. Seu coeficiente de segurança pode ser calculado pela Equação 6.18*a*, que é idêntica à Equação 5.8*a* quando $\sigma'_a = 0$. Portanto, o diagrama de Goodman modificado constitui uma ferramenta universal para determinar o coeficiente de segurança para qualquer problema de tensão, seja estático, fadiga alternada ou fadiga variada.

A abordagem geral recomendada para projeto em fadiga de alto-ciclo com tensões uniaxiais ou multiaxiais sincronizadas é, então:

1 Gere um diagrama de Goodman modificado ajustado a partir da informação de resistência à tração do material em particular. Isso pode ser feito para qualquer vida finita desejada ou para vida infinita, tomando-se a seção de Goodman em um ponto N_2 diferente ao longo do eixo N na Figura 6-42. Isso é automaticamente acompanhado pela escolha de S_f a um certo número de ciclos N_2, como mostrado na Figura 6-33 e na Equação 6.10. Aplique os fatores de redução de resistência apropriados, pelas Equações 6.7, para obter uma resistência à fadiga corrigida.

2 Calcule as componentes alternada e média das tensões aplicadas em todos os pontos de interesse na peça e aplique o fator de concentração de tensão apropriado para cada componente de tensão aplicada. (Ver Exemplo 4-9 e a Seção Resumo do Capítulo 4.)

3 Converta as componentes alternada e média das tensões aplicadas, em qualquer ponto de interesse na peça submetida a esforços, para tensões equivalentes alternada e média de von Mises, usando as Equações 6.22.

4 Plote as tensões alternada e média de von Mises no diagrama de Goodman modificado e determine o coeficiente de segurança adequado a partir das Equações 6.18.

Lembre, da discussão sobre teorias de falha estática do Capítulo 5, que o uso da abordagem de von Mises era recomendado apenas para materiais dúcteis, pois prevê precisamente o escoamento no carregamento estático, caso no qual o cisalhamento é o mecanismo de falha. Aqui isso está sendo usado para um propósito um pouco diferente: para combinar as tensões multiaxiais média e alternada aplicadas em tensões equivalentes de tração média e alternada (pseudouniaxiais), que podem ser comparadas à resistência à tração em fadiga e à resistência à tração estática em um diagrama de Goodman modificado. Desse modo, o método de von Mises pode ser aplicado para materiais dúcteis e frágeis sob carregamento em fadiga de alto-ciclo, já que a hipótese (correta) é que falhas de fadiga são falhas de tração, independentemente da ductilidade ou fragilidade do material. De fato, pensou-se por muito tempo que materiais dúcteis se tornassem de alguma forma fragilizados sob carregamento prolongado em fadiga, por causa do fato de suas superfícies de falha parecerem aquelas de material frágil submetido à falha estática. No entanto, sabe-se hoje que isso não é verdade.

O projetista deve, apesar de tudo, ter precaução ao usar materiais frágeis em situações de carregamento em fadiga, pois suas resistências à tração tendem a ser inferiores às de materiais dúcteis, e é mais provável que apresentem aumentos de tensão dentro do material devido ao processo de fundição. Muitas aplicações bem-sucedidas de materiais fundidos sob esforços em fadiga podem ser citadas, como em virabrequins de motores de combustão interna, eixos came e bielas. Essas aplicações tendem a existir em motores de menor tamanho e baixa potência, como em cortadores de grama, etc. Motores automotivos e de caminhões, de maior potência, irão normalmente usar aço forjado (dúctil) ou ferro fundido nodular (dúctil) em vez de ferro fundido cinzento, usado para virabrequins e bielas, por exemplo.

Será apresentado agora um exemplo de fadiga multiaxial simples usando-se a mesma estrutura que foi estudada nos Exemplos 4-9 e 5-1. Desta vez, o carregamento é variado no tempo.

EXEMPLO 6-6

Tensões multiaxiais variadas

Problema **Determine os coeficientes de segurança para a estrutura tubular mostrada na Figura 5-9 (repetida nesta página).**

Dados **O material é alumínio 2024-T4 com S_y = 47000 psi e S_{ut} = 68000 psi. O comprimento do tubo é l = 6 in e do braço é de a = 8 in. O diâmetro externo do tubo é OD = 2 in e o diâmetro interno é ID = 1,5 in. O carregamento aplicado varia senoidalmente de F = 340 lb a –200 lb.**

Hipóteses **O esforço é dinâmico e o dispositivo está a temperatura ambiente. Considere o cisalhamento devido à força cortante assim como outras tensões. Deseja-se um projeto com vida finita de 6E7 ciclos. O raio do entalhe na parede é de 0,25 in e os fatores de concentração de tensão são, para flexão, K_t = 1,7, e para cisalhamento, K_{ts} = 1,35.**

Solução **Ver Figura 5-9 repetida aqui. Ver também Exemplo 4-9 para uma explicação mais completa da análise de tensões para este problema.**

1 O alumínio não apresenta limite de fadiga. Sua resistência à fadiga a 5E8 ciclos pode ser estimada a partir da Equação 6.5c. Como o S_{ut} é maior que 48 kpsi, o valor não corrigido $S_{f'@5E8}$ = 19 kpsi.

2 Os fatores de correção são calculados pelas Equações 6.7 e Figura 6-25, e usados para encontrar a resistência à fadiga corrigida ao padrão de 5E8 ciclos.

$$C_{carreg} = 1: \quad \text{para flexão}$$

$$C_{tamanho} = 0{,}869\left(d_{equiv}\right)^{-0{,}097} = 0{,}869\left(\sqrt{\frac{0{,}01046d^2}{0{,}0766}}\right)^{-0{,}097} = 0{,}869\left(0{,}739\right)^{-0{,}097} = 0{,}895$$

$$C_{superf} = 2{,}7\left(S_{ut}\right)^{-0{,}265} = 2{,}7\left(68\right)^{-0{,}265} = 0{,}883 \qquad (a)$$

$$C_{temp} = 1$$

$$C_{conf} = 0{,}753: \quad \text{para } 99{,}9\%$$

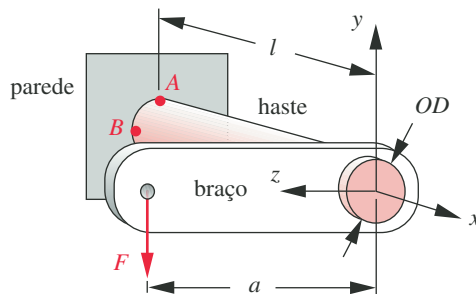



FIGURA 5-9 Repetida

Estrutura para Exemplo 6-6.

$$\begin{aligned} S_{f@5e8} &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{f'} \\ &= (1)(0{,}895)(0{,}883)(1)(0{,}753)19000 = 11299 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (b)$$

Observe que é usado o valor de flexão de C_{carreg}, mesmo que flexão e torção estejam ambas presentes. A tensão de cisalhamento à torção será convertida em uma tensão de tração equivalente pela fórmula de von Mises. C_{superf} é calculado a partir da Equação 6.7*e*, usando-se os dados da Tabela 6-3. Essa tensão limite de resistência à fadiga ainda corresponde ao número de ciclos testados, $N = 5E8$.

3 Esse problema exige uma vida de $6E7$ ciclos, de maneira que um valor de resistência a esse número de ciclos deve ser estimado a partir da curva *S-N* da Figura 6-33*b* utilizando-se a resistência à fadiga corrigida para uma vida correspondente. A Equação 6.10*a*, expressão analítica para a referida curva, pode ser resolvida para o limite de resistência desejado, após o cálculo do coeficiente *a* e do expoente *b* a partir da Equação 6.10*c*.

$$b = \frac{1}{z}\log\left(\frac{S_m}{S_f}\right) = \frac{1}{-5{,}699}\log\left[\frac{0{,}9(68000)}{11299}\right] = -0{,}1287$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log\left[0{,}9(68000)\right] - 3(-0{,}1287): \quad a = 148929 \qquad (c)$$

$$S_n = aN^b = 148929N^{-0{,}1287} = 148929(6e7)^{-0{,}1287} = 14846 \text{ psi}$$

Observe que S_m é calculado como sendo 90% de S_{ut} porque o carregamento é transversal, causando flexão, e não mais axial (Equação 6.9). O valor de z é tomado da Tabela 6-5, para $N = 5E8$ ciclos. Esse valor para a resistência à fadiga é corrigido para uma vida exigida menor do que a observada nos testes; por isso, sua magnitude é maior do que o valor de teste para as mesmas condições de tensão, calculado para uma vida mais longa.

4 A sensibilidade do material ao entalhe deve ser encontrada para calcular os fatores de concentração de tensão sob fadiga. A Tabela 6-8 apresenta os fatores de Neuber para alumínio encruado. Uma interpolação resulta no valor de 0,147 para *a* correspondente ao S_{ut} do material. A Equação 6.13 fornece a sensibilidade ao entalhe resultante para um raio de entalhe assumido de 0,25 in.

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0{,}147}{\sqrt{0{,}25}}} = 0{,}773 \qquad (d)$$

5 Os fatores de concentração de tensão sob fadiga são encontrados a partir da Equação 6.11*b* usando-se os fatores geométricos de concentração de tensão dados para flexão e torção, respectivamente.

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}773(1{,}7 - 1) = 1{,}541 \qquad (e)$$

$$K_{fs} = 1 + q(K_{ts} - 1) = 1 + 0{,}773(1{,}35 - 1) = 1{,}270 \qquad (f)$$

6 O tubo da estrutura é carregado tanto em flexão (como uma viga engastada) quanto em torção. Os perfis de distribuição de cisalhamento, momento fletor e momento torçor são ilustrados na Figura 4-31. Todos encontram seu valor máximo junto à parede. Nessa seção mais solicitada, as componentes média e alternada da força, do momento e do torque aplicados são

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = \frac{340 - (-200)}{2} = 270 \text{ lb} \\ F_m &= \frac{F_{max} + F_{min}}{2} = \frac{340 + (-200)}{2} = 70 \text{ lb} \end{aligned} \qquad (g)$$

$$M_a = F_a l = 270(6) = 1620 \text{ lb-in}$$
$$M_m = F_m l = 70(6) = 420 \text{ lb-in} \qquad (h)$$

$$T_a = F_a a = 270(8) = 2160 \text{ lb-in}$$
$$T_m = F_m a = 70(8) = 560 \text{ lb-in} \qquad (i)$$

7 O fator de concentração de tensões à fadiga para as tensões médias depende da relação entre a máxima tensão local de von Mises no entalhe e o limite de escoamento, como definido na Equação 6.17, da qual se apresenta aqui uma parcela.

$$\text{se } K_f\left|\sigma_{max}\right| < S_y \text{ então} \qquad K_{fm} = K_f, \qquad K_{fsm} = K_{fs}$$

$$\sigma_{max} = K_f\left|\frac{M_{max}c}{I}\right| = K_f\left|\frac{F_{max}lc}{I}\right| = 1,541\left|\frac{340(6)(1)}{0,5369}\right| = 5855$$
$$\tau_{max} = K_{fs}\left|\frac{T_{max}r}{J}\right| = K_{fs}\left|\frac{F_{max}ar}{J}\right| = 1,270\left|\frac{340(8)(1)}{1,074}\right| = 3216 \qquad (j)$$
$$\sigma'_{max} = \sqrt{5855^2 + (3)3216^2} = 8081 < 47000$$
$$\therefore \quad K_{fm} = K_f = 1,541, \qquad K_{fsm} = K_{fs} = 1,270$$

Nesse caso, não há nenhuma redução nos fatores de concentração de tensão para a tensão média porque não ocorre escoamento local no entalhe para aliviar a concentração de tensões.

8 A máxima tensão de tração na flexão ocorre na fibra mais externa da parte superior ou inferior da viga nos pontos *A* ou *A*'. A máxima tensão de cisalhamento em torção ocorre ao longo da circunferência mais externa do tubo. (Ver o Exemplo 4-9 para mais detalhes.) Primeiramente, considere um elemento infinitesimal no ponto *A*, ou *A*', no qual ambas as formas de tensão se combinam. (Ver a Figura 4-32.) Encontre, no ponto *A*, as componentes alternada e média da tensão normal causada pela flexão e da tensão de cisalhamento devido à torção, usando as Equações 4.11*b* e 4.23*b*, respectivamente.

$$\sigma_a = K_f \frac{M_a c}{I} = 1,541 \frac{1620(1)}{0,5369} = 4649 \text{ psi}$$
$$\tau_{a_{torção}} = K_{fs} \frac{T_a r}{J} = 1,270 \frac{2160(1)}{1,074} = 2556 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$\sigma_m = K_{fm} \frac{M_m c}{I} = 1,541 \frac{420(1)}{0,5369} = 1205 \text{ psi}$$
$$\tau_{m_{torção}} = K_{fsm} \frac{T_m r}{J} = 1,270 \frac{560(1)}{1,074} = 663 \text{ psi} \qquad (l)$$

9 Encontre as tensões de von Mises alternada e média no ponto *A* (Equação 6.22*b*).

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2}$$
$$= \sqrt{4649^2 + 0^2 - 4649(0) + 3\left(2556^2\right)} = 6419 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} \qquad (m)$$
$$= \sqrt{1205^2 + 0^2 - 1205(0) + 3\left(663^2\right)} = 1664 \text{ psi}$$

10 Uma vez que os momentos fletor e torçor são ambos causados pela mesma força externa aplicada, eles são síncronos e em fase, e qualquer mudança de um deles terá uma relação constante com o outro. Essa situação se enquadra no Caso 3, e o coeficiente de segurança pode ser encontrado com a Equação 6.18*e*.

$$N_f = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} = \frac{14846(68000)}{6419(68000) + 1664(14846)} = 2{,}2 \qquad (n)$$

11 Como o tubo é uma viga curta, é necessário verificar a tensão de cisalhamento devido à força cortante no ponto *B* sobre a linha neutra, onde o cisalhamento devido à torção alcança também seu valor máximo. A máxima tensão de cisalhamento devido à força cortante na linha neutra de um tubo cilíndrico oco de paredes finas foi dado na Equação 4.15*d*.

$$\tau_{a_{transversal}} = K_{fs}\frac{2V_a}{A} = 1{,}270\frac{2(270)}{1{,}374} = 499 \text{ psi}$$
$$\tau_{m_{transversal}} = K_{fsm}\frac{2V_m}{A} = 1{,}270\frac{2(70)}{1{,}374} = 129 \text{ psi} \qquad (o)$$

O ponto *B* encontra-se sob cisalhamento puro. A tensão de cisalhamento total no ponto *B* é a soma das tensões de cisalhamento devido à força cortante e ao momento torçor que agem nos mesmos planos do elemento infinitesimal.

$$\tau_{a_{total}} = \tau_{a_{transversal}} + \tau_{a_{torção}} = 499 + 2556 = 3055 \text{ psi}$$
$$\tau_{m_{total}} = \tau_{m_{transversal}} + \tau_{m_{torção}} = 129 + 663 = 792 \text{ psi} \qquad (p)$$

12 Encontre as tensões de von Mises alternada e média para o ponto *B* (Equação 6.22*b*).

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} = \sqrt{0 + 0 - 0 + 3(3055)^2} = 5291 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} = \sqrt{0 + 0 - 0 + 3(792)^2} = 1372 \text{ psi} \qquad (q)$$

13 O coeficiente de segurança para o ponto *B* é encontrado a partir da Equação 6.18*e*.

$$N_f = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} = \frac{14846(68000)}{5291(68000) + 1372(14846)} = 2{,}7 \qquad (r)$$

Ambos os pontos, *A* e *B*, estão seguros contra falha por fadiga.

14 Os arquivos EX06-06A e EX06-06B encontram-se no CD-ROM que acompanha o livro.

6.14 UM ESTUDO DE CASO EM PROJETO PARA FADIGA

O seguinte estudo de caso contém todos os elementos de um problema de projeto para FAC. Trata-se de um problema real de projeto da experiência do autor como consultor e serve para vários dos tópicos deste capítulo. Apesar de ser longo e bastante complicado, seu estudo cuidadoso irá seguramente recompensar o tempo investido.

ESTUDO DE CASO 6

Reprojeto de uma viga de tear que falhou para um tear automático a jato de água

Problema **As vigas transversais de muitos teares a jato de água começaram a falhar por fadiga. O proprietário da indústria de tecelagem havia aumentado a velocidade dos teares para melhorar o volume de produção. O projeto original da viga de aço resistiu sem falhas por 5 anos de operação com 3 turnos à velocidade mais baixa, porém começou a falhar poucos meses após o aumento da velocidade de trabalho. O proprietário possuía uma oficina no local: confeccionou novas vigas similares às originais, mas estas falharam com menos de 6 meses de uso. Ele substituiu as vigas de aço por vigas de alumínio que ele mesmo projetou, que duraram 3 meses. Ele, então, procurou o auxílio de um engenheiro. Analise os modos de falha dos três projetos existentes e redimensione a peça para vida de 5 anos sob a condição de velocidade mais alta.**

Dados **A viga transversal tem 54 in de comprimento e está ligada às extremidades das alavancas de dois mecanismos idênticos de Grashof com 4 barras, cujas manivelas são movidas de maneira síncrona e em fase por uma transmissão por engrenagens conectadas através de um eixo de transmissão de 54 in de comprimento. A configuração física do tear é mostrada na Figura 6-50. Os detalhes de sua operação são discutidos a seguir. As seções transversais dos projetos que falharam são mostradas na Figura 6-53 e as fotografias, na Figura 6-54. O novo projeto não pode ser mais largo do que a viga mais larga existente (2,5 in). A velocidade original do tear era de 400 rpm e a nova velocidade é de 500 rpm. O custo do novo projeto deve ser competitivo com o custo dos projetos existentes (que falharam), o que corresponde a aproximadamente $300 por cada lote de 50 unidades.**

Hipóteses **A carga variável principal sobre a peça é inercial e ocorre porque sua própria massa somada com a massa do pente por ela carregado são constantemente aceleradas e desaceleradas pelo movimento da alavanca. Existe também uma carga de "com-**

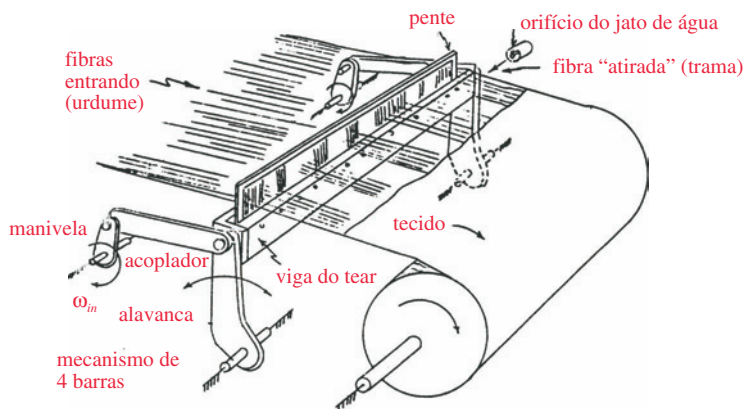



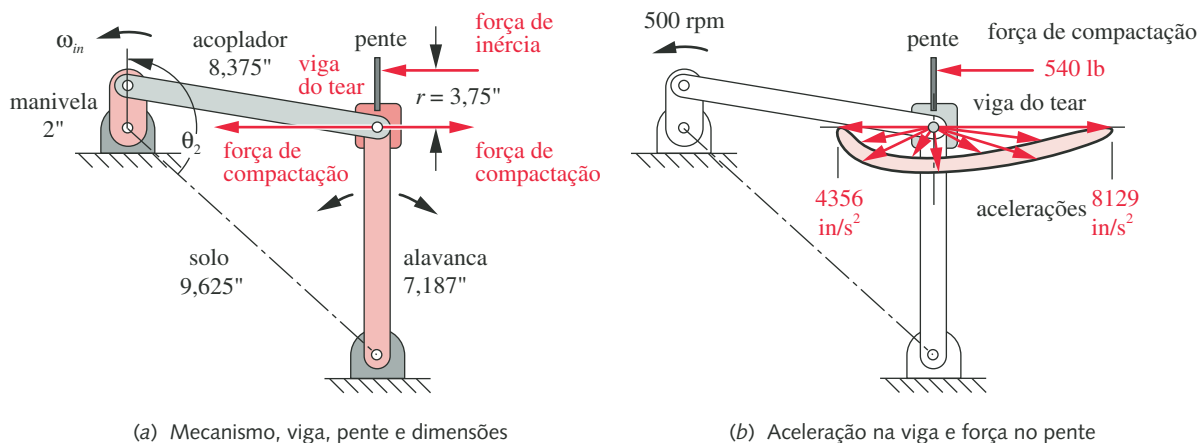
FIGURA 6-50

Urdume, trama, viga do tear, pente e mecanismo de acionamento para um tear a jato de água.

pactação" sobre o pente quando este bate contra o tecido para compactar o último fio da trama. Esta força causa um torque repetitivo sobre a viga que pode ou não ser significativo para sua falha. A magnitude da força de compactação não é conhecida com precisão, e varia com o peso do tecido que está sendo fabricado. Ela é estimada como sendo 10 lb/in de largura de tecido (540 lb no total). O ambiente é umedecido com água fresca e todas as amostras de peças quebradas têm evidências de corrosão.

Solução **Ver Figuras 6-50 a 6-56 e Tabela 6-13.**

1 Algumas informações adicionais são necessárias para se compreender o problema antes de se procurar a sua solução. Teares oscilantes para a fabricação de tecidos são equipamentos muito antigos e originalmente eram movidos por força humana. O tear automático foi inventado durante a Revolução Industrial, e atualmente apresenta várias formas distintas. A Figura 6-50 mostra partes do tear automático a jato de água de interesse para este estudo. Talvez a melhor forma de entender o princípio de operação de um tear seja a observação de um tear manual, que o leitor pode ter visto em um museu, em uma loja de confecção de tecidos personalizados ou na oficina de uma pessoa que tece por *hobby*. Seus componentes básicos são similares aos ilustrados na figura.

Um conjunto de fios longitudinais chamado de *urdume* é esticado através do pente do tear. Cada fio passa através de um orifício de um dispositivo (não desenhado) que pode conduzi-lo para cima ou para baixo. Esses aparelhos são movimentados por um mecanismo que, em um tear manual, é tipicamente operado por pedais. Quando um pedal é apertado, todos os fios do urdume a ele ligados são puxados para baixo, enquanto que os fios alternados não ligados a esse comando vão para cima, de maneira a formar um "túnel", se observados das bordas do tecido. A *navete*, espécie de "agulha gigante" parecida com uma canoa que contém uma bobina de fios enrolados ao longo de seu comprimento, é então "lançada" através do túnel pela mão do tecelão. A navete trilha uma fibra transversal do tecido chamada *trama*. O tecelão, então, puxa a *viga do tear*. Essa viga carrega consigo um *pente*, que traz a fibra de encontro ao tecido, segurando-a com seus "dentes". O pente aperta a nova fibra de maneira a colocá-la lado a lado contra as anteriores, batendo no tecido e criando uma trama firme. Em seguida, o tecelão troca os pedais, levando para baixo os fios do urdume que estavam em cima, e vice-versa, criando um novo túnel de fios longitudinais cruzados. A navete é novamente lançada através do túnel (desta vez no sentido inverso), tecendo uma nova fibra da trama para ser batida pelo pente.

(*a*) Mecanismo, viga, pente e dimensões

(*b*) Aceleração na viga e força no pente

FIGURA 6-51

Mecanismo de 4 barras para o acionamento da viga do tear, mostrando forças e acelerações na viga.

Os primeiros teares automáticos simplesmente trocaram o processo manual por um mecânico, substituindo as mãos e os pés do tecelão por engrenagens e barras. O lançamento da navete de madeira foi realizado, literalmente, acertando-o com um bastão, fazendo-o voar através do túnel de urdume e agarrando-a no lado oposto. A dinâmica desse "voo" (pré-NASA) de navete tornou-se o fator limitante da velocidade do tear. Teares com navete só podem alcançar a velocidade de 100 fibras por minuto (*ppm – picks per minute*). Muito esforço foi empregado para se desenvolver teares mais rápidos, os quais normalmente eliminavam a navete, cuja massa limitava a velocidade. Os teares automáticos a jato de ar e a jato de água foram desenvolvidos no século 20, baseados no lançamento da fibra através do túnel com forças de pressão por jato de ar ou água. A Figura 6-50 mostra o orifício através do qual a trama é alimentada. No tempo certo do ciclo, uma pequena bomba de pistões joga um jato de água através do orifício, e a tensão superficial empurra a fibra através do túnel. O tear a jato de água pode operar a até 500 ppm. Os teares em questão para o problema apresentado foram projetados para operar a 400 ppm, mas o proprietário trocou sua caixa de transmissão para aumentar a velocidade até 500 ppm. As consequentes falhas começaram a ocorrer em seguida, pois as cargas dinâmicas aumentaram com o quadrado da velocidade e ultrapassaram as cargas para as quais a máquina havia sido projetada.

FIGURA 6-52

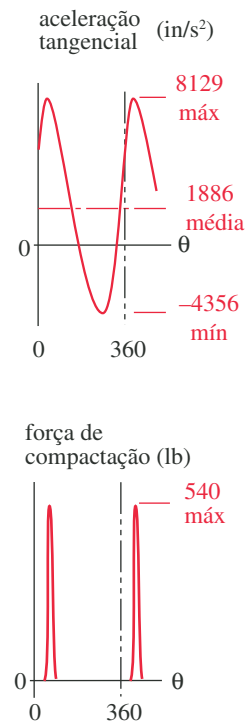
Aceleração e carga de compactação sobre a viga variáveis no tempo, a 500 rpm, mostrando sua relação de fase.

2 As Figuras 6-50 e 6-51 apresentam a viga, que se insere entre dois mecanismos idênticos de 4 barras, cuja alavanca se move em um arco de circunferência para empurrar o pente contra o tecido no ponto correto do ciclo. A barra é fixada de maneira segura às alavancas com parafuso e porca em cada uma de suas extremidades, e gira com o mecanismo. As articulações fixas das alavancas são mancais de rolamento autocompensadores, o que nos permite modelar a peça-alvo como uma viga suportada por apoios simples que carrega uma carga uniformemente distribuída igual à sua massa total multiplicada por sua aceleração mais a carga de compactação. A massa total é a soma da massa da viga com a massa do pente de 10 lb. A Figura 6-51 ilustra a geometria da fixação da viga do tear ao mecanismo, suas dimensões e uma representação gráfica polar dos vetores de aceleração do centro de massa da viga. As componentes máximas da aceleração são tangenciais, e criam momentos fletores nas direções das forças de inércia mostradas na mesma figura. A Figura 6-52 mostra um gráfico da componente tangencial da aceleração do centro de massa para 1 ciclo, e também a força de compactação em sua relação de fase com a aceleração. A aceleração gera um momento fletor variado, e a força de compactação, estando deslocada de 3,75 in do centro de massa da viga, cria um torque pulsante sobre esta. Dependendo da geometria da seção transversal da viga, essa combinação de cargas pode produzir uma situação de estado de *tensão multiaxial simples* síncrono e em concordância de fase em posições de tensão máxima (ver Seção 6.12). Pelo fato de a carga ser em grande parte inercial, o projeto da viga deveria minimizar sua massa (para reduzir o carregamento inercial), simultaneamente maximizando sua rigidez e resistência. Essas restrições são conflitantes, fazendo com que a tarefa de redimensionamento se torne mais desafiadora.

3 Tratando-se de um caso de carga variada, seguiremos o conjunto de passos de projeto recomendados na Seção 6.11, dos quais o primeiro é a determinação do número de ciclos de carregamento esperados além da vida em serviço. O proprietário solicitou que o novo projeto dure 5 anos de operação em 3 turnos. Pressupondo 2080 horas por turno no ano de trabalho padrão, isso se eleva a

$$N = 500\,\frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\left(\frac{60\text{ min}}{\text{h}}\right)\left(\frac{2080\text{ h}}{\text{tumo-ano}}\right)(3\text{ tumos})(5\text{anos}) = 9{,}4E8\text{ ciclos} \qquad (a)$$

Isso está claramente no regime FAC, e poderia se beneficiar da utilização de um material dotado de um limite de resistência à fadiga.

O proprietário relata que a sua viga de substituição confeccionada em aço durou 6 meses, e a viga em alumínio, 3 meses. (Ver as Figuras 6-53 e 6-54.) As vidas em ciclos são:

(*a*) Viga original de aço (*b*) Viga de substituição de aço (*c*) Viga de substituição de alumínio

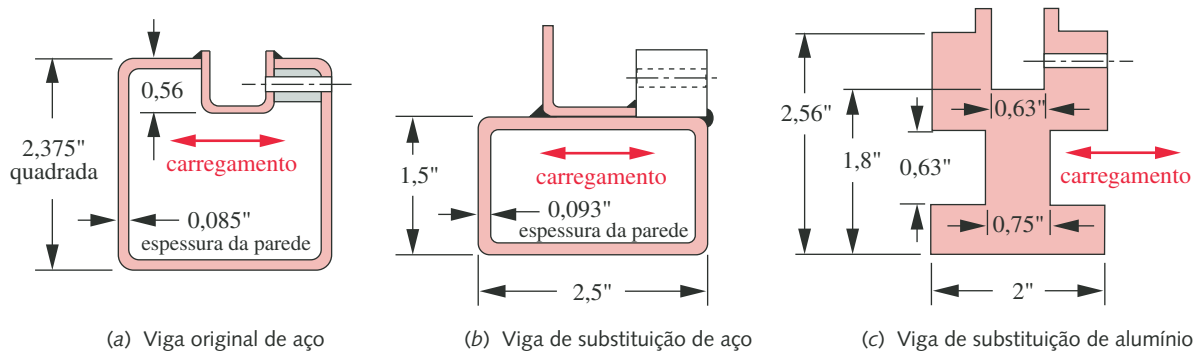



FIGURA 6-53

Projetos das vigas existentes, havendo todas falhado por fadiga.

$$\begin{aligned} &6 \text{ meses: } N = 500\,\frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\left(\frac{60\text{ min}}{\text{h}}\right)\left(\frac{2080\text{ h}}{\text{ano}}\right)(3\text{ tumos})(0{,}5\text{ ano}) = 9{,}4E7\text{ ciclos} \\ &3 \text{ meses: } N = 500\,\frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\left(\frac{60\text{ min}}{\text{h}}\right)\left(\frac{2080\text{ h}}{\text{ano}}\right)(3\text{ tumos})(0{,}25\text{ ano}) = 4{,}7E7\text{ ciclos} \end{aligned} \tag{b}$$

4 Uma vez que as amplitudes das cargas aplicadas são uma função da aceleração (que é determinada) e da massa da peça (que varia com o projeto), o mais conveniente é exprimir as cargas de flexão em termos de $F = ma$. O torque aplicado é, por hipótese, o mesmo para qualquer projeto, e é calculado com base na estimativa do proprietário de uma força de compactação típica. Esses dados são mostrados na Figura 6-52, e as componentes média e alternada são

$$\text{Flexão:} \quad \begin{aligned} F_{média} &= ma_{média} = m\frac{a_{max} + a_{min}}{2} = m\frac{8\,129 + (-4356)}{2} = 1886{,}5m \\ F_{média} &= ma_{alt} = m\frac{a_{max} - a_{min}}{2} = m\frac{8\,129 - (-4356)}{2} = 6242{,}5m \end{aligned} \tag{c}$$

$$\text{Torque:} \quad \begin{aligned} T_{média} &= \left(\frac{F_{comp_{max}} + F_{comp_{min}}}{2}\right)r = \left(\frac{540 + 0}{2}\right)3{,}75 = 1012{,}5\text{ lb-in} \\ T_{alt} &= \left(\frac{F_{comp_{max}} - F_{comp_{min}}}{2}\right)r = \left(\frac{540 - 0}{2}\right)3{,}75 = 1012{,}5\text{ lb-in} \end{aligned} \tag{d}$$

(*a*)

(*b*)

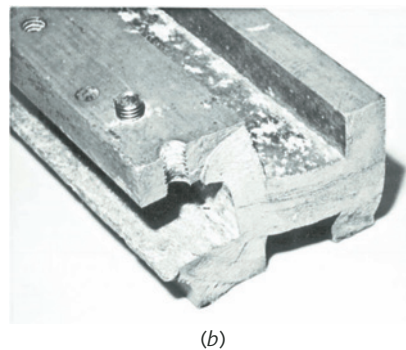
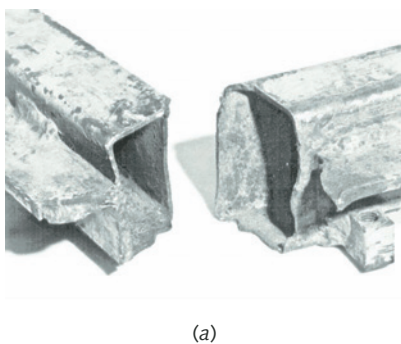



FIGURA 6-54

Fotografias de vigas fraturadas: (*a*) Viga de aço de reposição – depois de seis meses de trabalho; (*b*) Viga de alumínio de reposição – depois de três meses de trabalho.

5 Estamos na posição invejável de ter dados de testes para peças típicas submetidas às mesmas condições reais de operação, na forma de peças que falharam. Com efeito, o proprietário conduziu inadvertidamente um programa de ensaios (para sua tristeza) e determinou níveis de tensão que causam falha nessa aplicação particular. Assim, o primeiro passo será analisar os projetos existentes que falharam, com o intuito de aprender mais sobre o problema. Sabemos que as vigas do projeto original (Figura 6-53*a*) sobreviveram por cinco anos nos níveis mais baixos de tensão associados à operação a 400 rpm. Eles somente começaram a falhar quando se aumentou a velocidade, o que aumentou o carregamento inercial.

Há vários fatores envolvidos nessa aplicação que são difíceis de quantificar. A corrosão é evidente nas peças que falharam. As superfícies das vigas de aço estão repletas de marcas de corrosão por crateração (*pitting*), assim como a viga de alumínio. Os projetistas não tomaram muito cuidado para evitar concentrações de tensão, e é visível que as fraturas por fadiga se iniciaram (como é típico) nesses pontos de concentração de tensões. A peça de alumínio fraturada da Figura 6-54*b* mostra que a trinca começou no furo rosqueado, que é um entalhe muito agudo. As trincas na peça de aço (Figura 6-54*b*) parecem ter iniciado em uma base de solda usada para fixar os suportes do pente. Soldas são concentradores de tensão notórios, e frequentemente produzem tensões residuais de tração. Deveríamos levar em conta essas lições no reprojeto, tentando reduzir esses fatores negativos. **Por definição, uma peça fraturada tem coeficiente de segurança igual a 1**. Sabendo disso, pode-se criar um modelo do carregamento sobre a peça, tensões e coeficiente de segurança, e depois *calcular a viga em sentido inverso, com um coeficiente de segurança igual a 1*, de maneira a determinar vários dos fatores acima que são difíceis de se determinar para uma aplicação particular.

6 Um modelo foi criado para se resolver as equações nesse caso. Dados específicos para cada um dos três projetos fraturados serviram como entrada, e o modelo foi modificado convenientemente para levar em conta diferenças na geometria e no material para cada um dos três tipos de peça. O mesmo modelo foi posteriormente modificado para acomodar os novos projetos propostos, apresentados na Figura 6-55. Resultaram oito versões do modelo, e seus arquivos de dados acompanham este texto. Eles foram denominados CASE6-0 a CASE6-7. A limitação de espaço não permite a discussão do conteúdo de todos os 8 modelos, por isso somente dois serão discutidos em detalhe; os resultados dos modelos restantes serão comparados no resumo. O projeto original fraturado e o novo projeto final serão apresentados. O leitor pode abrir os arquivos que contêm os modelos no programa que desejar.

7 A análise do projeto original da viga do tear está contida no arquivo CASE6-1. A geometria da seção transversal e a massa da viga devem ser calculadas para se determinar as tensões devido à flexão.

$$\text{área} = 2{,}375^2 - 2{,}205^2 + 2(0{,}56)(0{,}085) = 0{,}874 \text{ in}^2$$

$$\text{peso} = \text{área}\ (\text{comprimento})(\gamma) = 0{,}874(54)(0{,}286) = 13{,}5 \text{ lb}$$

$$m = \frac{\text{peso} + \text{pente}}{386{,}4} = \frac{13{,}5 + 10}{386{,}4} = 0{,}061\ \text{blobs} \tag{e}$$

$$I = \frac{b_{ext}h_{ext}^3 - b_{int}h_{int}^3}{12} = \frac{2{,}375^4 - 2{,}205^4}{12} = 0{,}68 \text{ in}^4$$

Observe que o cálculo da área da seção transversal inclui as duas guias para fixação do pente, já que elas adicionam massa, porém o cálculo do momento de inércia I as ignora, uma vez que elas adicionam uma parcela muito pequena nesse parâmetro. O peso específico γ acima é para o aço, e a unidade de massa é *blobs* ou lb-s²/in.

(*a*) Projeto quadrado

(*b*) Projeto circular

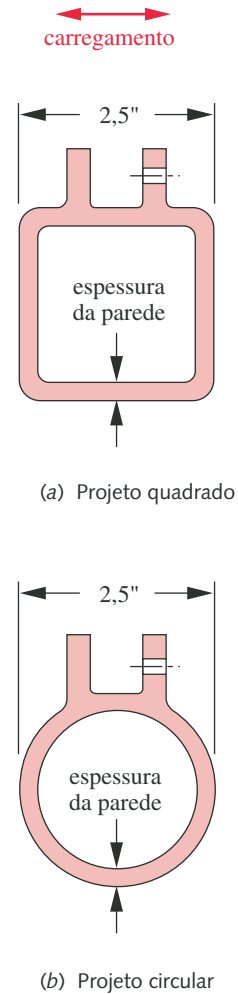



FIGURA 6-55

Dois novos projetos para a viga do tear a jato de água.

8 As componentes média e alternada da força e do momento fletor inerciais podem agora ser calculadas.

$$F_{média} = 1886{,}5m = 1886{,}5(0{,}061) = 115 \text{ lb}$$
$$F_{alt} = 6242{,}5m = 6242{,}5(0{,}061) = 380 \text{ lb}$$
$$M_{média} = \frac{wl^2}{8} = \frac{(wl)l}{8} = \frac{Fl}{8} = \frac{115(54)}{8} = 775 \text{ lb-in} \qquad (f)$$
$$M_{alt} = \frac{wl^2}{8} = \frac{(wl)l}{8} = \frac{Fl}{8} = \frac{380(54)}{8} = 2\,565 \text{ lb-in}$$

As equações do momento são para o momento máximo no centro de uma viga biapoiada com carga uniformemente distribuída (ver Figura B-2 no Apêndice B). As tensões nominais devido à flexão (sem incluir nenhuma concentração de tensões) são, portanto,

$$\sigma_{m_{nom}} = \frac{M_{média}(c)}{I} = \frac{775(1{,}188)}{0{,}68} = 1351 \text{ psi}$$
$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{M_{alt}(c)}{I} = \frac{2565(1{,}188)}{0{,}68} = 4470 \text{ psi} \qquad (g)$$

9 As tensões nominais de cisalhamento devido à torção em uma seção quadrada oca são máximas nos centros dos 4 lados e, portanto, ocorrem em pontos de máxima tensão devido à flexão. A tensão de cisalhamento é encontrada a partir de $\tau_{max} = T/Q$ (Equação 4.26*a*), onde Q para essa geometria particular é encontrada na Tabela 4-2:

$$Q = 2t(a-t)^2 = 2(0{,}085)\left(\frac{2{,}375}{2} - 0{,}085\right)^2 = 0{,}207 \text{ in}^3 \qquad (h)$$

onde t é a espessura da parede e a é a metade da largura da seção transversal. As tensões nominais de cisalhamento média e alternada são, portanto,

$$\tau_{m_{nom}} = \frac{T_{média}}{Q} = \frac{1012{,}5}{0{,}207} = 4900 \text{ psi}$$
$$\tau_{a_{nom}} = \frac{T_{alt}}{Q} = \frac{1012{,}5}{0{,}207} = 4900 \text{ psi} \qquad (i)$$

10 Os fatores de concentração de tensão para flexão e cisalhamento precisam ser encontradas ou estimadas. Peterson[30] fornece um gráfico para o caso de uma seção retangular oca em torção, e a partir daí é encontrado um $K_{ts} = 1{,}08$. Nenhum dado conveniente foi encontrado para o fator de concentração de tensões à flexão para este caso. A corrosão "convencional" e a corrosão por crateração combinadas sobre soldas grosseiras recomendam um K_t grande. A abordagem aqui empregada foi de calcular K_t em sentido reverso, com um coeficiente de segurança igual a 1 e todos os outros fatores de material, bem como tensões nominais, especificados. O resultado foi $K_t = 4{,}56$ para essa peça fraturada. Esse resultado é apresentado neste ponto para assegurar a continuidade da narrativa, mas deve-se entender que o valor de K_t foi encontrado por *cálculo reverso* sobre o modelo, usando iteração depois de todos os outros fatores definidos. Nesse referido ponto, o modelo foi resolvido para as tensões locais média e alternada e para K_t simultaneamente com $N_f = 1$, representando a condição de falha.

11 A sensibilidade ao entalhe do material e os fatores de concentração de tensões estimados para flexão e cisalhamento alternados são encontrados a partir das Equações 6.11*b* e 6.13, de acordo com o procedimento utilizado no Exemplo 6-3. Usando o valor de K_t encontrado no passo 10 e $q = 0{,}8$, os resultados são: $K_f = 3{,}86$ e $K_{fs} = 1{,}06$. Os fatores de concentração de tensões correspondentes para tensão média são encontrados a partir da Equação 6.17 e, uma vez que a tensão local está abaixo do limite de escoamento para ambas flexão e torção neste caso, eles são idênticos aos fatores para tensão alternada: $K_{fm} = K_f$ e $K_{fms} = K_{fm}$.

12 As componentes estimadas da tensão local podem agora ser determinadas usando-se os fatores de concentração de tensão sob fadiga:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= K_{fm}\sigma_{m_{nom}} = 3{,}86(1351) = 5212 \text{ psi} \\ \sigma_a &= K_f\sigma_{a_{nom}} = 3{,}86(4470) = 17247 \text{ psi} \end{aligned} \tag{j}$$

$$\begin{aligned} \tau_m &= K_{fsm}\tau_{m_{nom}} = 1{,}06(4900) = 5214 \text{ psi} \\ \tau_a &= K_{fsm}\tau_{a_{nom}} = 1{,}06(4900) = 5214 \text{ psi} \end{aligned} \tag{k}$$

13 Como temos um caso de tensões combinadas, variadas e biaxiais que são síncronas e em concordância de fase, e como a peça possui concentradores de tensão, o método geral usando a tensão equivalente de von Mises para ambas as componentes média e alternada de tensão é apropriado (Equação 6.22*b*). Isso nos possibilita calcular as tensões equivalentes alternada e média para o caso biaxial.

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} \\ &= \sqrt{17247 + 0 - 0 + 3(5214)} = 19468 \text{ psi} \\ \sigma'_m &= \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} \\ &= \sqrt{5212 + 0 - 0 + 3(5214)} = 10428 \text{ psi} \end{aligned} \tag{l}$$

14 As propriedades do material devem, agora, ser determinadas. Um teste de laboratório foi feito com uma amostra da peça fraturada, e sua composição química a enquadrou como aço AISI 1018 laminado a frio. Resistências para esse material foram obtidas de dados publicados (ver Apêndice A) e são: $S_{ut} = 64000$ psi e $S_y = 50000$ psi. O limite de escoamento sob cisalhamento foi calculado a partir de $S_{ys} = 0{,}577S_y = 28850$ psi. O limite de resistência à fadiga não corrigido foi tomado como $S_{e'} = 0{,}5S_{ut} = 32000$ psi.

15 Os fatores de modificação de resistência foram encontrados a partir das equações e dados da Seção 6.6. O carregamento é uma combinação de flexão e torção. Todavia, as tensões de torção foram incorporadas na equação da tensão equivalente de von Mises, que fornece uma tensão normal; assim,

$$C_{carreg} = 1 \tag{m}$$

O diâmetro do corpo de prova equivalente é encontrado considerando-se a área com tensões acima de 95% da tensão máxima, utilizando as Equações 6.7*c* e 6.7*d*. O fator de tamanho é, então, encontrado pela Equação 6.7*b*:

$$\begin{aligned} A_{95} &= 0{,}05bh = 0{,}05(2{,}375)^2 = 0{,}282 \text{ in}^2 \\ d_{equiv} &= \sqrt{\frac{A_{95}}{0{,}0766}} = 1{,}92 \text{ in} \\ C_{tamanho} &= 0{,}869(d_{equiv})^{-0{,}097} = 0{,}869(1{,}92)^{-0{,}097} = 0{,}82 \end{aligned} \tag{n}$$

O fator de superfície é encontrado a partir da Equação 6.7*e* e dos dados da Tabela 6-3 para superfícies usinadas ou estiradas a frio. O material da viga do tear parecia ter sido originalmente estirado a frio, mas estava corroído. Em face do problema de corrosão, poderia ser imposta a utilização de um fator de superfície reduzido, mas decidiu-se permitir que o fator geométrico de concentração de tensões K_t levasse em conta os efeitos de corrosão por crateração, neste caso, como descrito anteriormente, e foi aplicado o fator de superfície para material usinado.

$$C_{superf} = A(S_{ut})^b = 2{,}7(64)^{-0{,}265} = 0{,}897 \tag{o}$$

Para ambos os fatores de temperatura e de confiabilidade foi assumido valor igual a 1. A confiabilidade foi tomada como 50% para esse cálculo reverso, de maneira a colocar toda a incerteza sobre o fator altamente variável de concentração de tensões.

16 Um limite de fadiga corrigido pode, agora, ser calculado com

$$S_e = C_{carreg} C_{tamanho} C_{superf} C_{temp} C_{conf} S_{e'}$$
$$S_e = (1)(0,81)(0,90)(1)(1)(32000) = 23258 \text{ psi} \tag{p}$$

17 O coeficiente de segurança é calculado a partir da Equação 6.18*e*. Um coeficiente de segurança caso 3 é aplicável neste caso, uma vez que, com carregamento inercial, as componentes média e alternada da tensão de flexão irão manter uma relação constante com qualquer mudança na velocidade de operação. Devido ao fato de a mínima força de compactação ser sempre zero, também para essa grandeza a relação citada é constante, independentemente da força máxima.

$$N_f = \frac{S_e S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_e}$$
$$= \frac{23258(64000)}{19468(64000) + 10428(23258)} = 1,0 \tag{q}$$

As componentes média e alternada foram encontradas por cálculo reverso e podem agora ser utilizadas para se construir o diagrama de Goodman modificado. Já que forçamos o coeficiente de segurança a ter valor 1, e assim a representar a falha conhecida dessa peça, o ponto de tensão aplicada σ'_a, σ'_m está situado sobre a linha de Goodman.

18 A análise acima foi repetida, modificando-se a velocidade de operação para o valor original de projeto: 400 rpm. Usando o mesmo fator de concentração de tensões de 4,56 obtido por análise reversa da peça fraturada, o coeficiente de segurança a 400 rpm é 1,3, indicando por que a peça original sobreviveu à velocidade de projeto (arquivo CASE6-0).

19 A análise desta e de outras peças fraturadas fornece alguns importantes esclarecimentos sobre as restrições do problema e permite que um projeto melhor seja criado. Um dos fatores que influenciaram o novo projeto foi o ambiente corrosivo, o que faz do aço um material menos desejável, apesar de seu limite de fadiga. O acabamento com pintura não conseguiu proteger as peças de aço, completamente enferrujadas. A amostra examinada da peça de alumínio fraturada também mostrou corrosão por crateração significativa em apenas 3 meses de uso. Se for o caso de se utilizar alumínio, um acabamento anodizado deveria ser aplicado para protegê-lo da oxidação.

Outro fator óbvio é o papel da concentração de tensões, que parece ser bastante elevada nessa peça. A presença de soldas e furos rosqueados em regiões de altas tensões claramente contribuíram para as falhas. Qualquer projeto novo deve reduzir a concentração de tensões por meio do deslocamento dos furos rosqueados – necessários para a fixação do pente – para locais de menor tensão. Soldas em pontos de altas tensões devem ser evitadas, se possível. Tratamentos superficiais como jateamento de esferas devem ser considerados, para impor à superfície tensões residuais benéficas de compressão.

Os níveis significativos de tensão de torção, apesar de serem definidos de maneira pobre, são um problema. A fabricação de tecidos mais pesados vai gerar níveis mais altos de tensão de torção. Por isso, a geometria de qualquer novo projeto deve ser resistente tanto a tensões de torção quanto a tensões de flexão. Finalmente, um novo projeto não deve ser muito mais pesado do que o existente, uma vez que a massa adicional fará com que as forças de inércia mais altas sejam transmitidas a todas as outras partes da máquina, provocando, possivelmente, falhas em outras peças.

20 Como o carregamento sobre a viga é de natureza primordialmente inercial, e como ela carrega uma carga extra fixa, deveria existir uma seção transversal ideal para todo projeto. A resistência de uma viga à flexão é função de seu momento de inércia *I*. O carregamento inercial é função inversa da sua área *A*. Se a seção transversal fosse maciça, seu *I* seria o máximo possível para uma dada dimensão

externa, mas assim também o seriam sua área, massa e carga inercial. Se a parede construída fosse tão fina quanto uma folha de papel, sua massa seria mínima, porém assim também seria seu I. Ambos A e I são funções não lineares de suas dimensões. Portanto, deve haver uma espessura de parede particular que maximiza o coeficiente de segurança, mantidas todas as outras grandezas constantes.

Com todos os fatores citados em mente, dois projetos foram considerados, como ilustrado na Figura 6-55: uma seção transversal quadrada e outra circular, com nervuras (“orelhas”) externas integrais ao longo de todo o comprimento para suportar o pente. Ambos partilham de algumas propriedades em comum. Os contornos têm raios de concordância “generosos” para minimizar K_t. (A seção circular é a mais eficiente possível, sob esse aspecto.) As orelhas de suporte do pente, que devem conter furos rosqueados, estão próximas à linha neutra, onde as tensões de flexão são menores e se encontram na parte externa da estrutura geométrica básica. Pode ser que nenhuma solda seja necessária se a forma puder ser extrudada como mostrado. Ambas são basicamente seções fechadas que podem resistir a torques, e a seção circular é a forma ótima para solicitação de torção. A seção quadrada terá um I maior e, por isso, resistirá melhor à flexão do que uma forma circular de mesmas dimensões globais.

Dois materiais foram considerados: aço doce e alumínio. (Titânio seria ideal em termos de sua relação resistência-peso [SWR – *Strength-to-Weight Ratio*] e limite de fadiga, mas seu alto custo o exclui da consideração.) O alumínio (se anodizado) tem a vantagem da melhor resistência à corrosão em água. Mas o aço tem a vantagem de possuir um limite de fadiga quando protegido contra corrosão. O peso total do novo projeto é importante. O alumínio de alta resistência tem melhor SWR do que aço doce. (Aço de alta resistência não possui limite de fadiga e é sensível ao entalhe, além de ser caro.) O alumínio pode ser extrudado em seções transversais particulares com orelhas integrais a um baixo custo de ferramental, tornando, por isso, um lote limitado economicamente viável. Uma seção transversal personalizada em aço requereria a compra de grandes quantidades para amortizar o custo do ferramental. Assim, um projeto em aço será limitado às formas de cabeçote de laminadora, e implicará na necessidade de soldagem das orelhas.

21 Cada uma das geometrias da Figura 6-55 foi projetada separadamente com os dois materiais: aço e alumínio. A espessura da parede foi variada para cada modelo, varrendo uma gama de valores, desde muito finas até quase uma seção maciça, de modo a determinar a dimensão ideal. O projeto final escolhido foi uma seção circular em alumínio 6061-T6 extrudado com uma espessura de parede de 0,5 in. Esse projeto será agora discutido, sem esquecer que um grande número de iterações foi necessário até se chegar ao resultado aqui apresentado. A restrição de espaço não permite a discussão de todas as iterações.

22 Os cálculos anteriores da *vida em ciclos* (Equação a, passo 3), *aceleração* e *força de compactação* (Equações c e d, passo 4) ainda são aplicáveis. As propriedades da seção são

$$
\begin{aligned}
\text{área} &= \pi\left(\frac{2{,}5^2 - 1{,}5^2}{4}\right) + 2(0{,}5)(0{,}75) = 3{,}892\ \text{in}^2 \\
\text{peso} &= \text{área}(\text{comprimento})(\gamma) = 3{,}892(54)(0{,}10) = 21\ \text{lb} \\
m &= \frac{\text{peso} + \text{pente}}{386} = \frac{21+10}{386} = 0{,}080\ \textit{blobs} \\
I &= \pi\left(\frac{2{,}5^4 - 1{,}5^4}{64}\right) = 1{,}669\ \text{in}^4
\end{aligned} \tag{r}
$$

Observe que o cálculo da área inclui as orelhas, já que elas adicionam massa, mas o cálculo de I as ignora, visto que elas adicionam uma quantidade ínfima a essa grandeza. O peso específico γ para o alumínio é dado em lb/in^3, e a unidade de massa é *blobs* ou $\text{lb-s}^2\text{/in}$.

23 As componentes média e alternada da força de inércia e do momento fletor são

$$\begin{aligned} F_{média} &= 1886,5m = 1886,5(0,08) = 152 \text{ lb} \\ F_{alt} &= 6242,5m = 6242,5(0,08) = 502 \text{ lb} \\ M_{média} &= \frac{Fl}{8} = \frac{152(54)}{8} = 1023 \text{ lb-in} \\ M_{alt} &= \frac{Fl}{8} = \frac{502(54)}{8} = 3386 \text{ lb-in} \end{aligned} \tag{s}$$

As equações de momento são para o ponto de máximo, no centro de uma viga biapoiada com carga uniformemente distribuída. As tensões nominais devido à flexão (sem considerar concentração de tensões) são, portanto,

$$\begin{aligned} \sigma_{m_{nom}} &= \frac{M_{média}(c)}{I} = \frac{1023(1,25)}{1,669} \cong 766 \text{ psi} \\ \sigma_{a_{nom}} &= \frac{M_{alt}(c)}{I} = \frac{3386(1,25)}{1,669} \cong 2536 \text{ psi} \end{aligned} \tag{t}$$

Se compararmos esses resultados com aqueles do projeto original, (ver passo 8), as forças e momentos têm agora maior intensidade, devido ao maior peso da nova peça, porém as tensões são menores, devido ao maior momento de inércia *I* da seção transversal.

24 As tensões de cisalhamento sob torção em uma seção circular delgada são máximas na fibra mais externa e, portanto, ocorrem em pontos de máxima tensão resultante da flexão. A tensão nominal de cisalhamento é encontrada a partir de $\tau_{max} = Tr/J$, onde *J* para essa geometria é calculada com a Equação 4.25*b*:

$$J = \pi\left(\frac{d_{ext}^4 - d_{int}^4}{32}\right) = \pi\left(\frac{2,5^4 - 2,0^4}{32}\right) = 3,338 \text{ in}^4 \tag{u}$$

As tensões nominais de cisalhamento média e alternada são, portanto,

$$\begin{aligned} \tau_{m_{nom}} &= \frac{T_{média}(r)}{J} = \frac{1012,5}{3,338} = 379 \text{ psi} \\ \tau_{a_{nom}} &= \frac{T_{alt}(r)}{J} = \frac{1012,5}{3,338} = 379 \text{ psi} \end{aligned} \tag{v}$$

25 Devido ao grande raio de circunferência e aos contornos suaves dessa peça circular, K_t e K_{ts} foram tomados como iguais a 1. Haverá maior concentração de tensões nos pés das orelhas (nervuras externas), mas a tensão normal de flexão é bem menor nessa região, e a tensão de cisalhamento nessa forma ótima para torção é muito baixa. A sensibilidade ao entalhe do material é irrelevante quando K_t = 1, fazendo com que ambos K_f e K_{fs} sejam iguais a 1. Os fatores de concentração de tensões sob fadiga para a tensão média são também iguais a 1 com as hipóteses acima. As componentes locais de tensão são, então, idênticas às componentes nominais de tensão encontradas nas Equações *t* e *v*.

26 Visto que temos um caso de tensões combinadas, variadas e biaxiais que são sincronizadas e em concordância de fase, e que os entalhes foram eliminados pelo reprojeto, o método de Sines agora é adequado (Equação 6.21*b*). Esse método fornece tensões equivalentes alternada e média para o caso biaxial sem entalhe.

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} \\ &= \sqrt{2\,536 + 0 - 0 + 3(379)} = 2619 \text{ psi} \\ \sigma'_m &= \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} = 766 + 0 = 766 \text{ psi} \end{aligned} \tag{w}$$

27 As propriedades do material devem, agora, ser determinadas. Apesar de o alumínio não possuir limite de resistência à fadiga, existem dados publicados sobre as tensões máximas às quais o material resiste, para certos números de ciclos particulares. Uma pesquisa na literatura existente mostrou que, dentre todas as ligas de alumínio, as 7075 e 5052 oferecem as máximas resistências à fadiga S_f. Contudo, nenhuma extrusora de alumínio foi encontrada na região que pudesse trabalhar alguma dessas ligas. A liga extrudada disponível de maior resistência foi a 6061-T6, a qual tem um $S_{f'}$ publicado de 13500 psi a $N = 5E7$ ciclos, $S_{ut} =$ 45000 psi e $S_y = 40000$ psi.

28 Os fatores de alteração de resistência foram encontrados a partir das equações e dados da Seção 6.6. O carregamento é uma combinação de flexão e torção, o que parece criar um conflito na seleção de um fator de carga pela Equação 6.7*a*. Todavia, havíamos incorporado as tensões de torção na tensão equivalente do método de Sines, a qual tem característica de uma tensão normal; portanto, C_{carreg} = 1. O diâmetro equivalente para uma peça circular que não gira é encontrado pela Figura 6-25 e pela Equação 6.7*d*. O fator de tamanho é, então, encontrado a partir da Equação 6.7*b*:

$$A_{95} = 0{,}010462d^2 = 0{,}010462(2.5)^2 = 0{,}065 \text{ in}^2$$

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0{,}0766}} = \sqrt{\frac{0{,}065}{0{,}0766}} = 0{,}924 \text{ in}$$

$$C_{tamanho} = 0{,}869\left(d_{equiv}\right)^{-0{,}097} = 0{,}869(0{,}924)^{-0{,}097} = 0{,}88 \qquad (x)$$

O fator de superfície é calculado com a Equação 6.7*e* e com os dados da Tabela 6-3, para superfícies usinadas ou estiradas a frio. A corrosão poderia impor a utilização de um fator de superfície minorado, mas já que a peça será anodizada para conferir resistência à corrosão, o fator para superfície usinada foi aplicado.

$$C_{superf} = A\,S_{ut}^{b} = 2{,}7(45)^{-0{,}265} = 0{,}98 \qquad (y)$$

Observe que S_{ut} está em kpsi para a Equação 6.7*e*. Para o fator de temperatura, foi assumido valor 1, pois a peça opera em situação de temperatura ambiente. Para C_{conf} foi utilizado o valor 0,702 da Tabela 6-4 para representar a confiabilidade desejada de 99,99% para o novo projeto.

29 A resistência à fadiga corrigida pode agora ser calculada a partir de

$$S_n = C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{f'}$$

$$S_{n@5E7} = 1(0{,}88)(0{,}98)(1)(0{,}702)(13500) \cong 8173 \text{ psi} \qquad (z)$$

30 Esse limite corrigido de resistência à fadiga $Sn_{@5E7}$ corresponde ao experimento publicado para uma vida de $N = 5E7$ ciclos. Como necessitamos de uma vida próxima de $N = 9{,}4E8$ ciclos, a equação para a curva *S-N* deste material deve ser escrita e resolvida para S_n a $N = 9{,}4E8$ ciclos. Para fazê-lo, precisamos da resistência S_m do material a 10^3 ciclos, o que é obtido da Equação 6.9*a*:

$$S_m = 0{,}9S_{ut} = 0{,}9(45000) = 40500 \text{ psi} \qquad (aa)$$

Utilize as Equações 6.10 para encontrar o coeficiente e o expoente da curva *S-N*. O valor –4,699 é extraído da Tabela 6-5 e corresponde ao número de ciclos (5*E*7) para o qual esses dados experimentais foram tomados.

$$b = \frac{1}{-4{,}699}\log\left(\frac{S_m}{S_{n@5E7}}\right) = \frac{1}{-4{,}699}\log\left(\frac{40500}{8173}\right) = -0{,}14792 \qquad (ab)$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log(40500) - 3(-0{,}14792) = 5{,}0512; \quad a = 112516$$

$$S_{n@9{,}4E8} = a\,N^b = 112516(9{,}4E8)^{-0{,}14792} \cong 5296 \text{ psi} \qquad (ac)$$

Esse valor será utilizado com S_n corrigido para a vida desejada.

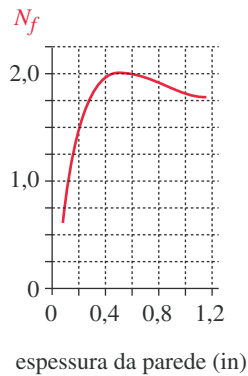



FIGURA 6-56

Coeficiente de segurança *N* como uma função de espessura da parede para uma viga circular em alumínio.

31 As tensões equivalentes alternada e média podem agora ser representadas graficamente em um diagrama modificado de Goodman, ou o coeficiente de segurança pode ser calculado a partir da Equação 6.18*e* para uma situação caso 3, como descrito no passo 17.

$$N_f = \frac{S_n S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_n} = \frac{5296(45000)}{2536(45000) + 766(5296)} = 2{,}0 \qquad (ad)$$

Esse coeficiente de segurança é bastante aceitável, porém, por medida de segurança adicional, a peça acabada foi tratada com jateamento de esferas antes de ser anodizada. A variação do coeficiente de segurança com a espessura da parede é ilustrada na Figura 6-56. O pico ocorre para uma espessura de aproximadamente 0,5 in, valor utilizado no projeto. Curvas do coeficiente de segurança *versus* espessura de parede são plotadas para todos os modelos de projeto, encontrados em arquivo eletrônico. Suas formas são similares às da Figura 6-56, e todas apresentam uma espessura ótima de parede que maximiza o coeficiente de segurança.

32 Os nomes de arquivos e dados pertinentes para os sete projetos são indicados na Tabela 6-13. O projeto original é mostrado tanto para o projeto para velocidade da máquina igual a 400 rpm, sob a qual a viga trabalhava com sucesso, quanto para a velocidade aumentada a 500 rpm, sob a qual ela falhou. A única diferença é o coeficiente de segurança, que foi de 1,3 para 1. Os fatores K_t são calculados de maneira reversa para os projetos que falharam (coeficiente de segurança = 1), como descrito anteriormente, mas são estimados para os novos projetos. Os projetos em aço fazem uso do K_t calculado reversamente para a viga original fraturada, o que tem por objetivo levar em conta possíveis efeitos da corrosão e da concentração na solda. O projeto em alumínio de seção quadrada possui um K_t elevado devido aos seus ângulos internos.

O fator peso é calculado como a relação entre o peso total (com o pente) do novo projeto e o peso total (com o pente) da viga original do tear. Os valores para o coeficiente de segurança constantes da tabela são os máximos alcançáveis sem exceder o

Tabela 6-13 Dados para vários projetos de viga
Estudo de Caso 6: Dimensões em polegadas e libras

Projeto	Ver figura	Rpm	Material	Nome do arquivo	Espessura da parede	Profundidade da viga	K_t	Fator peso	Coeficiente de segurança	Comentário
Viga original	6-53*a*	400	Aço 1018	CASE6-0	0,085	2,38	4,6	1	1,4	Seguro para a velocidade de projeto
Viga original	6-53*a*	500	Aço 1018	CASE6-1	0,085	2,38	4,6	1	1	Falhou sob velocidade mais alta
Viga de substituição em aço	6-53*b*	500	Aço 1020	CASE6-2	0,093	2,50	3,2	1	1	Falhou em 6 meses
Viga de substituição em alumínio	6-53*c*	500	Alumínio 6061-T6	CASE6-3	maciça	2,00	7,2	1,4	1	Falhou em 3 meses
Viga quadrada em aço	6-55*a*	500	Aço 1020	CASE6-4	0,062	2,50	4,6	1,4	0,5	Projeto rejeitado
Viga circular em aço	6-55*b*	500	Aço 1020	CASE6-5	0,10	2,50	4,6	1,4	0,5	Projeto rejeitado
Viga quadrada em alumínio	6-55*a*	500	Alumínio 6061-T6	CASE6-6	0,35	2,50	2,0	1,4	1,0	Projeto rejeitado
Viga circular em alumínio	6-55*b*	500	Alumínio 6061-T6	CASE6-7	0,50	2,50	1,0	1,4	2,0	Projeto selecionado

fator peso (1,4) da viga de substituição mais pesada que opera sem causar danos ao resto da máquina (Figura 6-53*c*). Coeficientes de segurança maiores do que aqueles mostrados na Tabela 6-13 são alcançáveis com alguns dos projetos rejeitados, mas somente com a penalização do peso. Por isso, o projeto circular selecionado é considerado o melhor do ponto de vista da relação entre coeficiente de segurança e peso.

Outros fatores que determinaram a decisão de se utilizar o projeto circular em alumínio foram a resistência à corrosão do alumínio anodizado, sua disponibilidade a um custo razoável para perfis de extrusão particulares – o que eliminou todas as soldas, exceto nas extremidades – e a maior resistência à torção e ausência de concentração de tensões de uma seção transversal circular. Aproximadamente 100 vigas de tear com as características do novo projeto foram fabricadas e instaladas em 1971-1972. Elas operaram sem nenhuma falha por mais de 7 anos. O maquinário foi posteriormente vendido e enviado a outro continente, e o autor não teve mais notícias delas.

6.15 RESUMO

Cargas variáveis no tempo são mais a regra do que a exceção em qualquer máquina. Projetar para evitar falhas sob essas condições é mais desafiador do que o projeto para cargas estáticas. O mecanismo de falha por fadiga é agora razoavelmente bem compreendido, ainda que se continue a pesquisar os seus vários detalhes. Dois regimes de carregamento são considerados: fadiga de baixo-ciclo (FBC), cujo número total de oscilações de tensão durante a vida da peça é menor do que aproximadamente 1000, e fadiga de alto-ciclo (FAC), que considera um número de ciclos da ordem de milhões ou mais. Uma análise baseada em deformações constitui o método mais preciso para se determinar tensões-limite de resistência à fadiga, e é mais indicada para situações FBC, para as quais as tensões locais podem eventualmente ultrapassar o limite de escoamento em ciclos particulares. Um exemplo é uma estrutura de aeronave, que é submetida ocasionalmente a sobrecargas severas em meio a uma série de oscilações de tensão de menor escala durante a sua vida, como ilustrado na Figura 6-7. A Mecânica da Fratura (MF) é uma ferramenta cada vez mais útil para a previsão de fraturas em estágio inicial em estruturas que podem ser inspecionadas à procura de trincas. O crescimento da trinca é monitorado, e a teoria da MF utilizada para calcular e predizer o tempo até a falha. A peça é, então, substituída em determinadas revisões periódicas que visam a excluir a possibilidade de falha em serviço. Isso é feito sistematicamente na indústria aeroespacial. A maior parte do maquinário industrial e alguns veículos de transporte terrestre estão sujeitos a oscilações de tensão mais uniformes em magnitude, e deles também se espera que suportem essas condições por muitos milhões de ciclos. Para esses casos, são mais apropriados os métodos de análise de FAC baseados em tensões, que são mais aproximativos, mas também de mais fácil aplicação.

Regras práticas e aproximações são utilizadas para se estimar resistências de materiais sob condições de carregamento dinâmico, principalmente para o caso de fadiga em alto-ciclo. Muitos deles erram no sentido do conservadorismo. Se houver a disponibilidade de dados experimentais específicos para a resistência à fadiga do material escolhido, esses dados devem ser sempre utilizados em lugar de uma estimativa calculada. Caso dados experimentais específicos não existam, a resistência à fadiga não corrigida pode ser estimada como uma porcentagem do limite de resistência à tração. Em ambas as situações, a resistência à fadiga não corrigida é posteriormente reduzida por meio de um conjunto de fatores, como definido na Seção 6.6 e nas Equações 6.7, para levar em conta diferenças entre a peça real e o corpo de provas a partir do qual a resistência foi medida. A seguir, um diagrama de Goodman modificado é construído usando estimativas da resistência "estática" do material a 1000 ciclos e sua resistência à fadiga corrigida para algum número de ciclos maior, adequado à vida esperada da peça. (Ver Seção 6.11.)

Uma abordagem geral para o projeto em casos de fadiga de alto-ciclo é apresentada na Seção 6.13. A equação da tensão equivalente de von Mises é utilizada para criar componentes equivalentes de tensão alternada e média para os pontos internos à peça sujeitos às cargas mais intensas. Em alguns casos, a componente média de tensão pode ser zero. Todos os efeitos relevantes de concentração de tensões devem ser incluídos nesses cálculos de tensão. As componentes de von Mises média e alternada são, então, representadas graficamente no diagrama de Goodman modificado, e um coeficiente de segurança é calculado com base em uma hipótese sobre o modo como as tensões média e alternada podem variar em serviço. Ver a Seção 6.11 e as Equações 6.18.

Equações importantes utilizadas neste capítulo

Componentes de tensão variadas (Seção 6.4):

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \tag{6.1a}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{6.1b}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{6.1c}$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{6.1d}$$

Estimativas para a resistência à fadiga não corrigido (Seção 6.6)

$$\text{Aços:} \quad \begin{cases} S_{e'} \cong 0{,}5\, S_{ut} & \text{para} \quad S_{ut} < 200 \text{ kpsi } (1400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 100 \text{ kpsi } (700 \text{ MPa}) & \text{para} \quad S_{ut} \geq 200 \text{ kpsi } (1400 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{6.5a}$$

$$\text{ferros:} \quad \begin{cases} S_{e'} \cong 0{,}4\, S_{ut} & \text{para} \quad S_{ut} < 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 24 \text{ kpsi } (160 \text{ MPa}) & \text{para} \quad S_{ut} \geq 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{6.5b}$$

$$\text{alumínios:} \quad \begin{cases} S_{f'_{@5E8}} \cong 0{,}4\, S_{ut} & \text{para} \quad S_{ut} < 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \\ S_{f'_{@5E8}} \cong 19 \text{ kpsi } (130 \text{ MPa}) & \text{para} \quad S_{ut} \geq 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{6.5c}$$

$$\text{ligas de cobre:} \quad \begin{cases} S_{f'_{@5E8}} \cong 0{,}4\, S_{ut} & \text{para} \quad S_{ut} < 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \\ S_{f'_{@5E8}} \cong 14 \text{ kpsi } (100 \text{ MPa}) & \text{para} \quad S_{ut} \geq 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{6.5d}$$

Fatores de correção para a resistência à fadiga (Seção 6.6):

$$\begin{aligned} &\text{flexão:} && C_{carreg} = 1 \\ &\text{força normal:} && C_{carreg} = 0{,}70 \end{aligned} \tag{6.7a}$$

$$\begin{aligned} &\text{para } d \leq 0{,}3 \text{ in } (8 \text{ mm}): && C_{tamanho} = 1 \\ &\text{para } 0{,}3 \text{ in} < d \leq 10 \text{ in}: && C_{tamanho} = 0{,}869 d^{-0{,}097} \\ &\text{para } 8 \text{ mm} < d \leq 250 \text{ mm}: && C_{tamanho} = 1{,}189 d^{-0{,}097} \end{aligned} \tag{6.7b}$$

$$C_{superf} \cong A\left(S_{ut}\right)^b \qquad \text{se } C_{superf} > 1{,}0, \text{ utilize } C_{superf} = 1{,}0 \tag{6.7e}$$

$$\begin{aligned} &\text{para } T \le 450°\text{C } (840°\text{F}): && C_{temp} = 1 \\ &\text{para } 450°\text{C} < T \le 550°\text{C}: && C_{temp} = 1 - 0{,}0058(T - 450) \\ &\text{para } 840°\text{F} < T \le 1020°\text{F}: && C_{temp} = 1 - 0{,}0032(T - 840) \end{aligned} \tag{6.7f}$$

Estimativas de correção da resistência à fadiga (Seção 6.6):

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ S_f &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{f'} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Resistência aproximada a 1000 ciclos (Seção 6.6):

$$\begin{aligned} &\text{flexão:} && S_m = 0{,}9 S_{ut} \\ &\text{força normal:} && S_m = 0{,}75 S_{ut} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Diagrama *S-N* (Seção 6.6):

$$\log S(N) = \log a + b \log N \tag{6.10b}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{z}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) \qquad \text{onde} \qquad z = \log N_1 - \log N_2 \\ \log(a) &= \log(S_m) - b\log(N_1) = \log(S_m) - 3b \end{aligned} \tag{6.10c}$$

Sensibilidade ao entalhe (Seção 6.7):

$$q = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{6.13}$$

Fatores de concentração de tensão na fadiga (Seções 6.7 e 6.11):

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \tag{6.11b}$$

$$\begin{aligned} &\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| < S_y \text{ então:} && K_{fm} = K_f \\ &\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| > S_y \text{ então:} && K_{fm} = \frac{S_y - K_f \sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} \\ &\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}} - \sigma_{min_{nom}}\right| > 2S_y \text{ então:} && K_{fm} = 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Coeficiente de segurança para tensões alternadas (Seção 6.10):

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'} \tag{6.14}$$

Diagrama de Goodman modificado (Seção 6.11):

$$-\frac{\sigma'_m}{S_{yc}} + \frac{\sigma'_a}{S_{yc}} = 1 \tag{6.16a}$$

$$\sigma'_a = S_f \tag{6.16b}$$

$$\frac{\sigma'_m}{S_{ut}} + \frac{\sigma'_a}{S_f} = 1 \tag{6.16c}$$

$$\frac{\sigma'_m}{S_y} + \frac{\sigma'_a}{S_y} = 1 \tag{6.16d}$$

Coeficiente de segurança – tensões variadas (Seção 6.11):

Caso 1: $$N_f = \frac{\sigma'_{m@Q}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_y}{\sigma'_m}\left(1 - \frac{\sigma'_a}{S_y}\right) \tag{6.18a}$$

Caso 2: $$N_f = \frac{\sigma'_{a@P}}{\sigma'_{a@Z}} = \frac{S_f}{\sigma'_a}\left(1 - \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}\right) \tag{6.18b}$$

Caso 3: $$N_f = \frac{\sigma'_{m@R}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} \tag{6.18e}$$

$$ZS = \sqrt{\left(\sigma'_m - \sigma'_{m@S}\right)^2 + \left(\sigma'_a - \sigma'_{a@S}\right)^2} \tag{6.18f}$$

$$OZ = \sqrt{\left(\sigma'_a\right)^2 + \left(\sigma'_m\right)^2}$$

Caso 4: $$N_f = \frac{OZ + ZS}{OZ} \tag{6.18g}$$

Método de Sines para tensões multiaxiais em fadiga – 3D (Seção 6.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy_a}^2 + \tau_{yz_a}^2 + \tau_{zx_a}^2\right)}{2}}$$

$$\sigma'_m = \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} + \sigma_{z_m} \tag{6.21a}$$

Método de Sines para tensões multiaxiais em fadiga – 2D (Seção 6.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2}$$

$$\sigma'_m = \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} \tag{6.21b}$$

Tensões gerais multiaxiais em fadiga – 3D (Seção 6.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy_a}^2 + \tau_{yz_a}^2 + \tau_{zx_a}^2\right)}{2}} \tag{6.22a}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_m} - \sigma_{y_m}\right)^2 + \left(\sigma_{y_m} - \sigma_{z_m}\right)^2 + \left(\sigma_{z_m} - \sigma_{x_m}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy_m}^2 + \tau_{yz_m}^2 + \tau_{zx_m}^2\right)}{2}}$$

Tensões gerais multiaxiais em fadiga – 2D (Seção 6.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} \qquad (6.22b)$$

Método SEQA para tensões multiaxiais complexas em fadiga (Seção 6.12):

$$SEQA = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{3}{4}Q^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2}Q^2\cos 2\phi + \frac{9}{16}Q^4}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (6.23)$$

Mecânica da fratura em fadiga (Seção 6.5):

$$\Delta K = \beta\sigma_{max}\sqrt{\pi a} - \beta\sigma_{min}\sqrt{\pi a}$$
$$= \beta\sqrt{\pi a}\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right) \qquad (6.3b)$$

$$\frac{da}{dN} = A\left(\Delta K\right)^n \qquad (6.4)$$

6.16 REFERÊNCIAS

1 **R. P. Reed**, **J. H. Smith**, **and B. W. Christ**, *The Economic Effects of Fracture in the United States: Part I*, Special Pub. 647-1, U. S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1983.

2 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 340, 1993.

3 **J. W. Fischer and B. T. Yen**, *Design, Structural Details, and Discontinuities in Steel, Safety and Reliability of Metal Structures*, ASCE, Nov. 2, 1972.

4 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 355, 1993.

5 **D. Broek**, *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, p. 10, 1988.

6 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 347, 1993.

7 **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, p. 280, 1967.

8 **J. E. Shigley and C. R. Mischke**, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill: New York, p. 278, 1989.

9 **A. F. Madayag**, *Metal Fatigue: Theory and Design*. John Wiley & Sons: New York, p. 117, 1969.

10 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 418, 1993.

11 **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, p. 231, 1967.

12 **J. A. Bannantine**, **J. J. Comer, and J. L. Handrock**, *Fundamentals of Metal Fatigue*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 13, 1990.

13 **P. C. Paris and F. Erdogan**, *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*. *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **85**(4): p. 528, 1963.

14 **J. M. Barsom**, *Fatigue-Crack Propagation in Steels of Various Yield Strengths. Trans. ASME, J. Eng. Ind.,* **Series B**(4): p. 1190, 1971.

15 **H. O. Fuchs and R. I. Stephens**, *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons: New York, p. 88, 1980.

16 **J. A. Bannantine**, **J. J. Comer, and J. L. Handrock**, *Fundamentals of Metal Fatigue*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 106, 1990.

17 **J. M. Barsom and S. T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 256, 1987.

18 **H. O. Fuchs and R. I. Stephens**, *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons: New York, p. 89, 1980.

19 **J. M. Barsom and S. T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 285, 1987.

20 **P. G. Forrest**, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press: London, 1962.

21 **J. E. Shigley and L. D. Mitchell**, *Mechanical Engineering Design*, 4th ed., McGraw-Hill: New York, p. 293, 1983.

22 **R. Kuguel**, *A Relation Between Theoretical Stress-Concentration Factor and Fatigue Notch Factor Deduced From the Concept of Highly Stressed Volume*. Proc. ASTM, **61**: p. 732-748, 1961.

23 **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, p. 233, 1967.

24 ***Ibid.***, p. 234

25 **R. C. Johnson**, *Machine Design*, vol. 45, p. 108, 1973.

26 **J. E. Shigley and L. D. Mitchell**, *Mechanical Engineering Design*, 4th ed., McGraw-Hill: New York, p. 300, 1983.

27 **E. B. Haugen and P. H. Wirsching**, "Probabilistic Design", *Machine Design*, vol. 47, pp. 10-14, 1975.

28 **R. C. Juvinall and K. M. Marshek**, *Fundamentals of Machine Component Design*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, p. 270, 1967.

29 ***Ibid.***, p. 267.

30 **R. E. Peterson**, *Stress-Concentration Factors*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

31 **R. J. Roark and W. C. Young**, *Formulas for Stress and Strain*, 5th ed., McGraw-Hill: New York, 1975.

32 **H. Neuber**, *Theory of Notch Stresses*, J. W. Edwards Publisher Inc.: Ann Arbor Mich., 1946.

33 **P. Kuhn and H. F. Hardrath**, *An Engineering Method for Estimating Notch-Size Effect in Fatigue Tests on Steel*. Technical Note 2805, NACA, Washington, D. C., Oct. 1952.

34 **R. B. Heywood**, *Designing Against Fatigue*, Chapman & Hall Ltd.: London, 1962.

35 **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, p. 280, 1967.

36 **V. M. Faires**, *Design of Machine Elements*, 4th ed., Macmillan: London, p. 162, 1965.

37 **R. B. Heywood**, *Designing Against Fatigue of Metals*, Reinhold: New York, p. 272, 1962.

38 **H. O. Fuchs and R. I. Stephens**, *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons: New Tork, p. 130, 1980.

39 **J. E. Shigley and C.R. Mischke**, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., McGraw-Hill: New York, p. 283, 1989.

40 **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., p. 416, 1993.

41 **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*. McGraw-Hill: New York, p. 280, 1967.

42 **G. Sines**, *Failure of Materials Under Combined Repeated Stresses Superimposed with Static Stresses*, Technical Note 3495, NACA, 1955.

43 **F. S. Kelly**, *A General Fatigue Evaluation Method*, Paper 79-PVP-77, ASME, New York, 1979.

44 **Y. S. Garud**, *A New Approach to the Evaluation of Fatigue Under Multiaxial Loadings*, in *Methods for Predicting Material Life in Fatigue*, W. J. Ostergren and J. R. Whitehead, ed. ASME: New York, pp. 249-263, 1979.

45 **M. W. Brown and K. J. Miller**, *A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress Conditions*. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **187**(65): pp. 745-755, 1973.

46 **J. O. Smith**, *The Effect of Range of Stress on the Fatigue Strength of Metals*. Univ. of Ill., *Eng. Exp. Sta. Bull.*, (334), 1942.

47 **J. E. Shigley and L. D. Mitchell**, *Mechanical Engineering Design*, 4th ed., McGraw-Hill: New York, p. 333, 1983.

48 **B. F. Langer**, *Design of Vessels Involving Fatigue,* in *Pressure Vessel Engineering*, R. W. Nichols, ed. Elsevier: Amsterdam, pp. 59-100, 1971.

49 **J. A. Collins**, *Failure of Materials in Mechanical Design*. 2nd ed., J. Wiley & Sons: New York, pp. 238-254, 1993.

50 **S. M. Tipton and D. V. Nelson**, *Fatigue Life Predictions for a Notched Shaft in Combined Bending and Torsion*, in *Multiaxial Fatigue*, K. J. Miller and M. W. Brown, Editors. ASTM: Philadelphia, PA., pp. 514-550, 1985.

51 **R. C. Rice**, ed. *Fatigue Design Handbook*. 2nd ed., Soc. of Automotive Engineers: Warrendale, PA., pp. 260, 1988.

52 **T. Nishihara and M. Kawamoto**, *The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Torsion with Phase Difference*. Memoirs College of Engineering, Kyoto Univ., Japan, **11**(85), 1945.

53 *Shot Peening of Gears*. American Gear Manufacturers Association AGMA 938-A05, 2005.

Tabela P6-0[†]
Matriz de tópicos/problemas

Seção 6.4 Cargas de fadiga
6-1

Seção 6.5 Mecânica da fratura
6-51, 6-52, 6-53

Seção 6.6 Diagramas *S-N* (tensão/vida)
6-2, 6-4, 6-5, 6-54, 6-55, 6-56, 6-57

Seção 6.7 Concentração de tensões
6-15, 6-58, 6-59, 6-60, 6-63 a 6-66

Seção 6.10 Tensões alternadas
6-6, ***6-7***, ***6-8***, *6-20*, 6-26, 6-29, **6-33**, **6-35**, **6-37**, **6-46**, ***6-48***

Seção 6.11 Tensões variadas
6-3, **6-9**, 6-10, **6-11**, 6-12, **6-13**, ***6-14***, **6-16**, **6-17**, **6-18**, ***6-19***, **6-21**, **6-22**, 6-23, 6-24, 6-25, ***6-27***, **6-28**, 6-30, 6-31, 6-32, **6-34**, **6-36**, 6-38, **6-40**, **6-43**, **6-44**, **6-45**, 6-70

Seção 6.12 Tensões multiaxiais
6-39, **6-41**, **6-42**, **6-61**, **6-62**, **6-67**, **6-68**, **6-69**

† Os problemas em **negrito** provêm de problemas em capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Os problemas em *itálico* são problemas de projeto.

6.17 BIBLIOGRAFIA

Para mais informações sobre projeto em fadiga, consulte:

J. A. Bannantine, J. J. Comer, and J. L. Handrock, *Fundamentals of Metal Fatigue*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs. N. J., 1990.

H. E. Boyer, ed., *Atlas of Fatigue Curves*. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1986.

H. O. Fuchs and R. I. Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons: New York, 1980.

R. C. Juvinall, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength.*

A. J. McEvily, ed., *Atlas of Stress-Corrosion and Corrosion Fatigue Curves*. American Society for Metals, Metals Park, Ohio, 1990. McGraw-Hill: New York, 1967.

Para mais informações sobre a abordagem deformações *versus* vida para fadiga de baixo-ciclo, consulte:

N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs. N. J., 1993.

R. C. Rice, ed. *Fatigue Design Handbook*. 2nd ed., Soc. of Automotive Engineers: Warrendale, PA. 1988.

Para mais informações sobre a abordagem da mecânica da fratura sobre fadiga, consulte:

J. M. Barsom and S. T. Rolfe, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1987.

D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 1988.

Para mais informações sobre tensões residuais, consulte:

J. O. Almen and P. H. Black, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*. McGraw-Hill: New York, 1963.

Para mais informações sobre fadiga sob tensões multiaxiais, consulte:

A. Fatemi and D. F. Socie, ed. *A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading*. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, **11**(3): pp. 149-165, 1988.

Y. S. Garud, *Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art*. J. Test. Eval., **9**(3), 1981.

K. F. Kussmaul, D. L. McDiarmid and D. F. Socie, ed. *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading*. Mechanical Engineering Publications Ltd.: London, 1991.

G. E. Leese and D. Socie, ed. *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*. Soc. of Automotive Engineers: Warrendale. PA., 1989.

K. J. Miller and M. W. Brown, ed. *Multiaxial Fatigue*. Vol, STP 853. ASTM: Philadelphia, PA., 1985.

G. Sines, *Behavior of Metals Under Complex Static and Alternating Stresses*, in *Metal Fatigue*, G. Sines and J. L. Waisman, ed. McGraw-Hill: New York, 1959.

R. M. Wetzel, ed. *Fatigue Under Complex Loading: Analyses and Experiments*. SAE Pub. No. AE-6, Soc. of Automotive Engineers: Warrendale, PA., 1977.

6.18 PROBLEMAS

*6-1 Para os dados na(s) linha(s) escolhida(s) da Tabela P6-1, encontre a gama de tensões, a componente alternada da tensão, a componente média da tensão, a razão de tensões, *R*, e a amplitude relativa, *A*.

6-2 Para os valores de resistência do aço na(s) linha(s) escolhida(s) da Tabela P6-2, calcule o limite de fadiga não corrigido e desenhe o diagrama resistência-vida (*S-N*).

*6-3 Para o conjunto braço-pedal de bicicleta da Figura P6-1, pressuponha uma força aplicada pelo ciclista sobre o pedal que varia entre 0 e 1500 N em cada ciclo. Determine as tensões variadas no braço do pedal de diâmetro 15 mm. Encontre o coeficiente de segurança se S_{ut} = 500 MPa.

6-4 Para os valores de resistência do alumínio nas linhas escolhidas da Tabela P6-2, calcule a resistência à fadiga não corrigida para 5×10^8 ciclos, e desenhe o diagrama resistência-vida (*S-N*) para esse material.

6-5 Para os dados nas linhas escolhidas da Tabela P6-3, encontre o limite de (ou resistência à) fadiga corrigido, escreva equações para a curva *S-N* e desenhe o diagrama *S-N*.

***6-6** Para o engate de reboque do Problema 3-6 (ver também a Figura P6-2 e a Figura 1-5), encontre os coeficientes de segurança para vida infinita em fadiga para todos os modos de falha, pressupondo que a força de impacto horizontal do reboque sobre a esfera seja alternada. Use aço com S_{ut} = 600 MPa e S_y = 450 MPa.

****6-7*** Projete o pino de conexão da biela ao pistão do Problema 3-7 para vida infinita com um coeficiente de segurança de 1,5 se a aceleração de 2500g for alternada e S_{ut} = 130 kpsi.

****6-8*** Uma máquina de papel processa rolos de papel com densidade de 984 kg/m^3. O rolo de papel tem as medidas 1,50 m de diâmetro externo, 0,22 m de diâmetro interno e 3,23 m de comprimento, e está sobre um eixo oco feito de aço com S_{ut} = 400 MPa, biapoiado. Encontre o diâmetro interno do eixo necessário para se obter um coeficiente de segurança igual a 2, para 10 anos de vida girando a 50 rpm, três turnos de 8 horas por dia, se o diâmetro externo do eixo tem 22cm.

Tabela P6-1
Dados para o Problema 6-1

Linha	σ_{max}	σ_{min}
a	1000	0
b	1000	–1000
c	1500	500
d	1500	–500
e	500	–1000
f	2500	–1200
g	0	–4500
h	2500	1500

Tabela P6-2
Dados para os Problemas 6-2, 6-4

Linha	S_{ut} (psi)	material
a	90000	aço
b	250000	aço
c	120000	aço
d	150000	aço
e	25000	alumínio
f	70000	alumínio
g	40000	alumínio
h	35000	alumínio

Tabela P6-3 Dados para o problema 6-5

Linha	Material	S_{ut} (kpsi)	Forma	Tamanho (in)	Acabamento superficial	Carreg.	Temp. (°F)	Confiab.
a	aço	110	redonda	2	retificado	torção	ambiente	99,9
b	aço	90	quadrada	4	usinado	axial	600	99,0
c	aço	80	viga I	16 x 18†	laminado a quente	flexão	ambiente	99,99
d	aço	200	redonda	5	forjado	torção	–50	99,999
e	aço	150	quadrada	7	laminado a frio	axial	900	50
f	alumínio	70	redonda	9	usinado	flexão	ambiente	90
g	alumínio	50	quadrada	9	retificado	torção	ambiente	99,9
h	alumínio	85	viga I	24 x 36†	laminado a frio	axial	ambiente	99,0
i	alumínio	60	redonda	4	retificado	flexão	ambiente	99,99
j	alumínio	40	quadrada	6	forjado	torção	ambiente	99,999
k	ferro dúctil	70	redonda	5	fundido	axial	ambiente	50
l	ferro dúctil	90	quadrada	7	fundido	flexão	ambiente	90
m	bronze	60	redonda	9	forjado	torção	50	90
n	bronze	80	quadrada	6	fundido	axial	212	99,999

† largura × altura

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

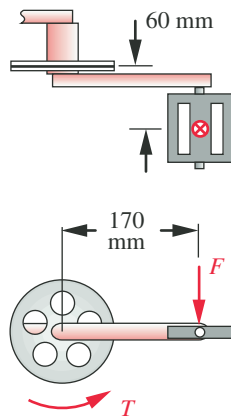



FIGURA P6-1

Problema 6-3. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

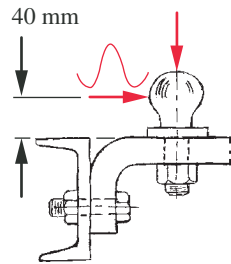



FIGURA P6-2

Problema 6-6. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

grade de 0,5 cm

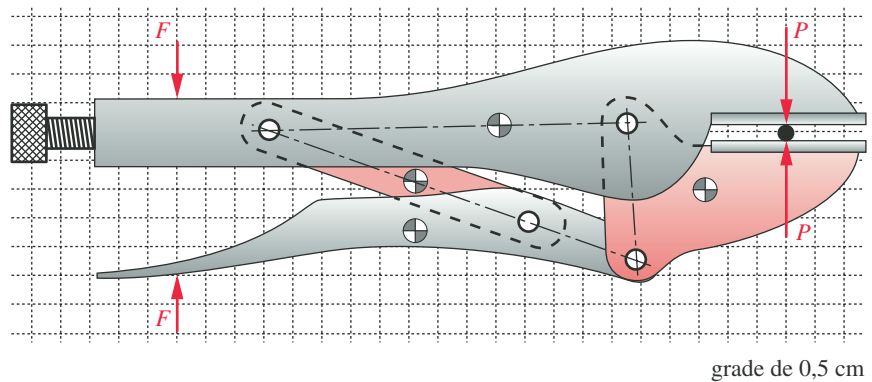



FIGURA P6-3

Problema 6-9. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

6-9 Para o alicate de pressão (ViseGrip®) desenhado em escala na Figura P6-3, cujas forças foram analisadas no Problema 3-9 e tensões, no Problema 4-9, encontre os coeficientes de segurança para cada um dos pinos, para uma força de pressão assumida de $P = 4000$ N na posição mostrada. Os pinos de aço têm 8 mm de diâmetro e têm $S_y = 400$ MPa, $S_{ut} = 520$ MPa e estão todos sujeitos ao cisalhamento duplo. Assuma uma vida finita desejada de 5×10^4 ciclos.

***6-10** Um trampolim na forma de um viga biapoiada, com extremidade em balanço, é mostrado na Figura P6-4*a*. Uma pessoa de 100 kg está de pé sobre a extremidade livre. Pressuponha dimensões da seção transversal de 305 mm × 32 mm. Qual o coeficiente de segurança em fadiga para vida finita, se o material é fibra de vidro frágil com $S_f = 39$ MPa @ $N = 5 \times 10^8$ ciclos e $S_{ut} = 130$ MPa na direção longitudinal?

***6-11** Repita o Problema 6-10 assumindo que a pessoa de 100 kg pula 25 cm para cima e cai sobre a prancha. Pressuponha que a prancha pese 29 kg e defleta 13,1 cm estaticamente quando a pessoa está parada na extremidade. Qual o coeficiente de segurança à fadiga para vida finita, se o material é fibra de vidro frágil com $S_f = 39$ MPa @ $N = 5 \times 10^8$ ciclos e $S_{ut} = 100$ MPa na direção longitudinal?

6-12 Repita o Problema 6-10 utilizando o projeto de trampolim com prancha engastada da Figura P6-4*b*.

6-13 Repita o Problema 6-11 utilizando a configuração do trampolim mostrada na Figura P6-4*b*. Pressuponha que a prancha pese 19 kg e defleta 8,5 cm estaticamente quando a pessoa está estacionada sobre a extremidade da prancha.

6-14 A Figura P6-5 mostra um brinquedo de criança chamado pula-pula. A criança fica de pé sobre os apoios, aplicando metade de seu peso sobre cada um dos lados. Ela pula para cima segurando os apoios contra seus pés e volta a pular com a mola absorvendo o impacto e armazenando energia para ajudar no próximo salto. Pressuponha que a criança tem 60 lb e a constante da mola é 100 lb/in. O

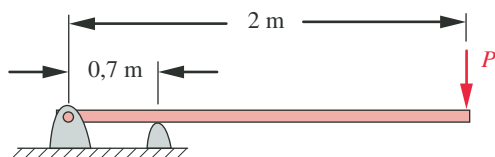
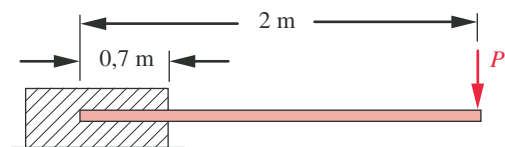
* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

(*a*) Trampolim biarticulado em balanço

(*b*) Trampolim engastado

FIGURA P6-4

Problemas 6-10 a 6-13.

Tabela P6-4 Dados para o problema 6-15

Linha	S_{ut} (kpsi)	K_t	r (in)	Material	Carregamento
a	100	3,3	0,25	aço	flexão
b	90	2,5	0,55	aço	torção
c	150	1,8	0,75	aço	flexão
d	200	2,8	1,22	aço	torção
e	20	3,1	0,25	alumínio macio	flexão
f	35	2,5	0,28	alumínio macio	flexão
g	45	1,8	0,50	alumínio macio	flexão
h	50	2,8	0,75	alumínio duro	flexão
i	30	3,5	1,25	alumínio duro	flexão
j	90	2,5	0,25	alumínio duro	flexão

peso do pula-pula é 5 lb. Projete as seções da viga engastada de alumínio para que ela sobreviva aos pulos de 2 in acima do solo com um coeficiente de segurança dinâmico igual a 2 para uma vida finita de 5×10^4 ciclos. Utilize alumínio série 2000. Defina a forma e o tamanho da viga.

***6-15** Para uma peça com entalhe de raio r, fator geométrico de concentrações K_t, resistência do material S_{ut} e carregamento como indicado nas linhas escolhidas da Tabela P6-4, encontre o fator de Neuber a, a sensibilidade ao entalhe do material q e o fator de concentração de tensões sob fadiga K_f.

6-16 Uma trilha para guiar bolas de boliche é projetada com duas barras cilíndricas, como mostrado na Figura P6-6. As barras têm um pequeno ângulo entre si. As bolas rolam sobre as barras antes de escapar pelo vão deixado e cair em uma outra trilha. Cada barra tem comprimento total não apoiado de 30 in, e o ângulo entre elas é de 3,2°. As bolas têm 4,5 in de diâmetro e pesam 2,5 lb. A distância entre os centros das duas barras de 1 in de diâmetro é 4,2 in na extremidade mais estreita. Encontre o coeficiente de segurança para vida infinita das barras de aço SAE 1010 de 1 in de diâmetro laminadas a frio.

(a) Pressuponha que as barras são biapoiadas.
(b) Pressuponha que as barras estão engastadas nas duas extremidades.

***6-17** Uma pinça para gelo é ilustrada na Figura P6-7. O gelo pesa 50 lb e tem largura de 10 in. A distância entre as alças é de 4 in, e o raio médio r de cada garra da pinça de aço é 6 in. As dimensões da seção transversal retangular são 0,750 in de altura 0,312 in de largura. Encontre o coeficiente de segurança para as garras para 5*E*5 ciclos se seu S_{ut} = 50 kpsi.

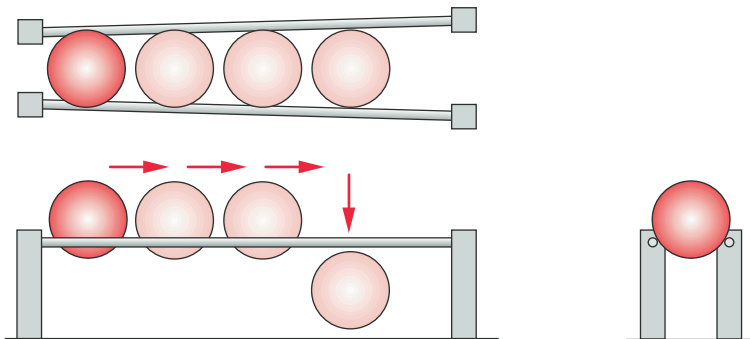



FIGURA P6-6

Problema 6-16.

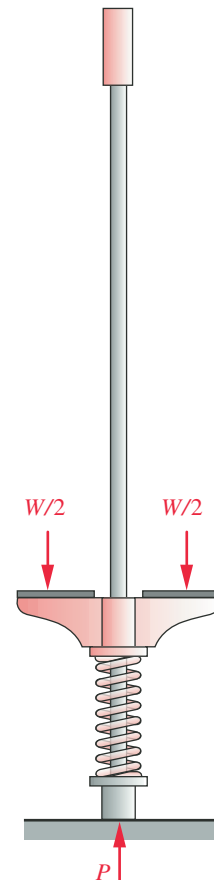



FIGURA P6-5

Problema 6-14.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

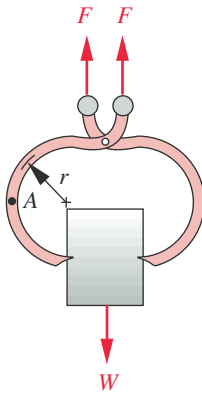



FIGURA P6-7

Problema 6-17.

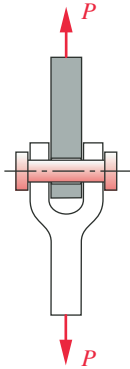



FIGURA P6-8

Problema 6-19.

FIGURA P6-10

Problema 6-22.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

6-18 Repita o Problema 6-17, com a pinça feita de ferro fundido cinzento Classe 40.

****6-19*** Determine o tamanho do pino de articulação da Figura P6-8 necessário para suportar uma força aplicada pulsante que varia entre 0 e 130000 lb, para vida infinita. Determine também o raio externo do engate em forma de "U" (garfo) para não falhar por rasgamento nem por esmagamento, se as flanges dele têm, cada uma, espessura de 2,5 in. Utilize um coeficiente de segurança igual a 3. Assuma S_{ut} = 140 kpsi para o pino e S_{ut} = 80 kpsi para o engate.

6-20 Um torque de ±100 N-m é aplicado a um eixo maciço, cilíndrico, de 1 m de comprimento. Projete-o para ter seu ângulo de torção limitado a 2° e selecione uma liga de aço para ter um coeficiente de segurança à fadiga igual a 2, para vida infinita.

6-21 A Figura P6-9 mostra uma roda de automóvel com dois tipos de chave de roda: uma em "L" (*a*) e outra em "T" (*b*). A distância entre os pontos *A* e *B* é 1 ft em ambos os casos, e o diâmetro da chave de roda é 0,625 in. Quantos ciclos de aperto podem ser esperados antes da falha por fadiga, se o torque médio de aperto é de 100 lb-ft e a resistência S_{ut} do material é igual a 60 kpsi?

***6-22** Um patim *roller-blade* em linha é mostrado na Figura P6-10. As rodas de poliuretano têm 72 mm de diâmetro e seus centros estão espaçados de 104 mm. O conjunto pé + bota + rodas pesa 2 kg. A "constante de mola" equivalente do sistema pessoa-patins é 6000 N/m. Os eixos são pinos de aço, sob cisalhamento duplo, com 10 mm de diâmetro, de aço com S_{ut} = 550 MPa. Encontre o coeficiente de segurança dos pinos para vida infinita à fadiga quando uma pessoa de 100 kg aterrissa de um salto de 0,5 m sobre uma só perna.

(a) Pressuponha que todas as quatro rodas aterrissem simultaneamente.
(b) Pressuponha que uma roda sozinha absorva toda a força de aterrissagem.

*6-23 A viga da Figura P6-11*a* está sujeita a uma força senoidal em função do tempo, com $F_{max} = F$ e $F_{min} = -F/2$, onde *F* e os outros dados da viga são dados nas linhas da Tabela P6-5. Encontre o estado de tensão na viga devido a esse carregamento, e escolha um material que forneça um coeficiente de segurança igual a 3 para $N = 5 \times 10^8$ ciclos.

*6-24 A viga da Figura P6-11*b* está sujeita a uma força senoidal em função do tempo, com $F_{max} = F$ e $F_{min} = F/2$, onde *F* e os outros dados da viga são dados nas linhas da Tabela P6-5. Encontre o estado de tensão na viga devido a esse carregamento

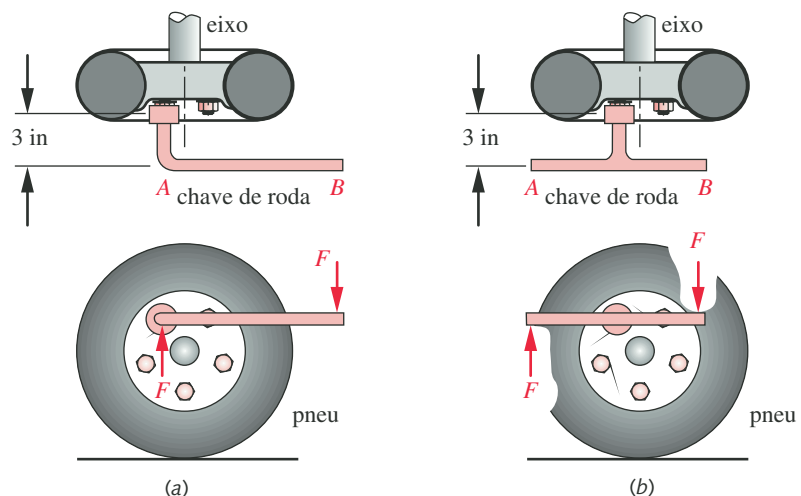



FIGURA P6-9

Problema 6-21.

Tabela P6-5 Dados para os problemas 6-23 a 6-26

Use somente os dados relevantes para o problema em questão. Comprimentos em m, forças em N, I em m^4

Linha	l	a	b	F	I	c	E
a	1,00	0,40	0,60	500	2,85E–08	2,00E–02	aço
b	0,70	0,20	0,40	850	1,70E–08	1,00E–02	aço
c	0,30	0,10	0,20	450	4,70E–09	1,25E–02	aço
d	0,80	0,50	0,60	250	4,90E–09	1,10E–02	aço
e	0,85	0,35	0,50	750	1,80E–08	9,00E–03	aço
f	0,50	0,18	0,40	950	1,17E–08	1,00E–02	aço
g	0,60	0,28	0,50	250	3,20E–09	7,50E–03	aço
h	0,20	0,10	0,13	500	4,00E–09	5,00E–03	alumínio
i	0,40	0,15	0,30	200	2,75E–09	5,00E–03	alumínio
j	0,20	0,10	0,15	80	6,50E–10	5,50E–03	alumínio
k	0,40	0,16	0,30	880	4,30E–08	1,45E–02	alumínio
l	0,90	0,25	0,80	600	4,20E–08	7,50E–03	alumínio
m	0,70	0,10	0,60	500	2,10E–08	6,50E–03	alumínio
n	0,85	0,15	0,70	120	7,90E–09	1,00E–02	alumínio

* Observe que w é força por unidade de comprimento, N/m.

FIGURA P6-11

Vigas e carregamentos para os problemas 6-23 a 6-26: ver Tabela P6-5 para os dados correspondentes.

e escolha um material que forneça um coeficiente de segurança igual a 1,5 para $N = 5 \times 10^8$ ciclos.

*6-25 A viga da Figura P6-11*c* está sujeita a uma força senoidal em função do tempo, com $F_{max} = F$ e $F_{min} = 0$, onde F e os outros dados da viga são dados nas linhas da Tabela P6-5. Encontre o estado de tensão na viga devido a esse carregamento, e escolha um material que forneça um coeficiente de segurança igual a 2,5 para $N = 5 \times 10^8$ ciclos.

*6-26 A viga da Figura P6-11*d* está sujeita a uma força senoidal em função do tempo, com $F_{max} = F$ lb e $F_{min} = -F$, onde F e os outros dados da viga são dados nas linhas da Tabela P6-5. Encontre o estado de tensões na viga devido a esse carregamento, e selecione um material que dará um coeficiente de segurança igual a 6 para $N = 5 \times 10^8$ ciclos.

****6-27*** Deve-se projetar um suporte para o rolo de papel do Problema 6-8, como mostrado na Figura P6-12. Determine um valor adequado para a dimensão a da figura para um coeficiente de segurança para vida infinita igual a 2. Pressuponha que a dimensão b é igual a 100 mm e que o mandril é um cilindro maciço e se insere até a metade do comprimento do rolo de papel:

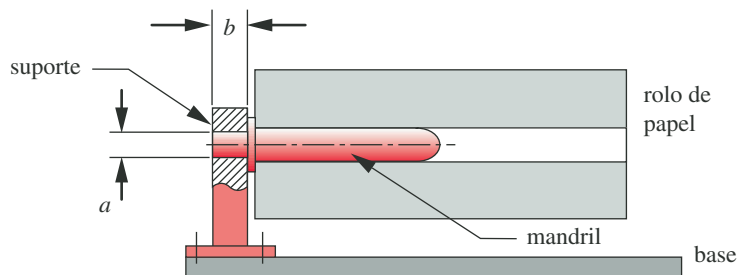



FIGURA P6-12

Problema 6-27.

* As respostas para esses problemas estão no Apêndice D.

FIGURA P6-13

Problema 6-28.

(a) se o mandril é feito de material dúctil com S_{ut} = 600 MPa;
(b) se o mandril é feito de material fundido frágil com S_{ut} = 300 MPa.

6-28 A Figura P6-13 mostra uma empilhadeira transpondo uma rampa de 15° para subir a uma plataforma de carregamento de altura 4 ft. A empilhadeira pesa 5000 lb e tem uma distância entre eixos de 42 in. Projete duas rampas em aço (uma para cada lado) de 1 ft de largura para ter um coeficiente de segurança igual a 2 para vida infinita para o pior caso de carregamento em que a empilhadeira sobe a rampa. Minimize o peso das rampas pela utilização de uma geometria de seção transversal adequada. Escolha um aço ou uma liga de alumínio apropriados.

*6-29 Uma barra com secção transversal de 22 mm × 30 mm é carregada axialmente em tração com $F(t) = \pm 8$ kN. Um orifício de diâmetro 10 mm atravessa o centro do lado de 30 mm. Encontre o coeficiente de segurança para vida infinita se o material tem S_{ut} = 500 MPa.

6-30 Repita o Problema 6-29 com $F_{min} = 0$ e $F_{max} = 16$ kN.

*6-31 Repita o Problema 6-29 com $F_{min} = 8$ kN e $F_{max} = 24$ kN.

6-32 Repita o Problema 6-29 com $F_{min} = -4$ kN e $F_{max} = 12$ kN.

***6-33** O suporte da Figura P6-14 está sujeito a uma força senoidal em função do tempo, com $F_{max} = F$ e $F_{min} = -F$, onde F e os outros dados da viga são dados nas linhas da Tabela P6-6. Encontre os estados de tensão nos pontos A e B devido a esse carregamento alternado e escolha como material um aço ou alumínio que forneça um coeficiente de segurança igual a 2 para vida infinita no caso do aço, ou $N = 5 \times 10^8$ ciclos no caso do alumínio. Pressuponha um fator geométrico de concentração de tensões igual a 2,5 em flexão e 2,8 em torção.

***6-34** O suporte da Figura P6-14 está sujeito a uma força senoidal em função do tempo, com $F_{max} = F$ e $F_{min} = 0$, onde F e os outros dados da viga são dados nas

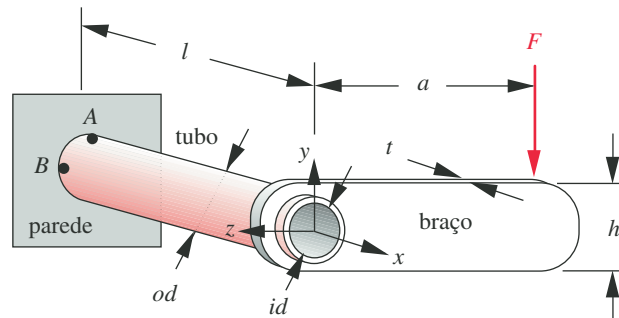



FIGURA P6-14

Problemas 6-33 e 6-36. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

Tabela P6-6 Dados para os problemas 6-33 a 6-36

Use somente os dados relevantes para o problema em questão. Comprimentos em mm, forças em N.

Linha	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*OD*	*ID*	*E*
a	100	400	10	20	50	20	14	aço
b	70	200	6	80	85	20	6	aço
c	300	100	4	50	95	25	17	aço
d	800	500	6	65	160	46	22	alumínio
e	85	350	5	96	900	55	24	alumínio
f	50	180	4	45	950	50	30	alumínio
g	160	280	5	25	850	45	19	aço
h	200	100	2	10	800	40	24	aço
i	400	150	3	50	950	65	37	aço
j	200	100	3	10	600	45	32	alumínio
k	120	180	3	70	880	60	47	alumínio
l	150	250	8	90	750	52	28	alumínio
m	70	100	6	80	500	36	30	aço
n	85	150	7	60	820	40	15	aço

linhas da Tabela P6-6. Encontre os estados de tensão nos pontos *A* e *B* devido a esse carregamento variado e escolha como material um aço dúctil ou alumínio que forneça um coeficiente de segurança igual a 2 para vida infinita no caso do aço, ou $N = 5 \times 10^8$ ciclos no caso do alumínio. Pressuponha um fator geométrico de concentração de tensões igual a 2,8 em flexão e 3,2 em torção.

6-35 Repita o Problema 6-33 usando como material ferro fundido.

6-36 Repita o Problema 6-34 usando como material ferro fundido.

*__6-37__ Uma viga curva semicircular, como mostrado na Figura P6-15, tem 150 mm de diâmetro externo, 100 mm de diâmetro interno e $t = 25$ mm. Para um par de forças $F = \pm 3$ kN aplicadas ao longo do diâmetro, encontre o coeficiente de segurança à fadiga nas fibras interna e externa:

(a) se a viga é de aço, com $S_{ut} = 700$ MPa;
(b) se viga é de ferro fundido, com $S_{ut} = 420$ MPa.

6-38 Um eixo de aço de 42 mm de diâmetro contendo um orifício transversal de 19 mm é submetido a um carregamento combinado, que produz uma tensão de flexão $\sigma = \pm 110$ MPa e uma tensão de torção constante de 110 MPa. Encontre seu coeficiente de segurança para vida infinita, caso $S_{ut} = 1$ GPa.

*6-39 Um eixo de aço de 42 mm de diâmetro contendo um orifício transversal de 19 mm é submetido a um carregamento combinado, que produz uma tensão de flexão $\sigma = \pm 110$ MPa e uma tensão de torção alternada de ± 110 MPa. Encontre seu coeficiente de segurança para vida infinita, caso $S_{ut} = 1$ GPa.

6-40 Reprojete o suporte para rolo de papel do Problema 6-8 para ter o aspecto indicado na Figura 6-16. O madril se insere até 10% do comprimento do rolo. Projete as dimensões *a* e *b* para coeficiente de segurança para vida infinita igual a 2:

(a) Se o mandril é de aço, com $S_{ut} = 600$ MPa.
(b) Se o mandril é de ferro fundido, com $S_{ut} = 300$ MPa.

*__6-41__ Um tubo de aço de 10 mm de diâmetro interno conduz um líquido a 7 MPa. A pressão varia periodicamente de zero até o máximo. O aço tem $S_{ut} = 400$ MPa. Determine o coeficiente de segurança para vida infinita à fadiga, se a espessura da parede do tubo for:

(a) 1 mm,
(b) 5 mm.

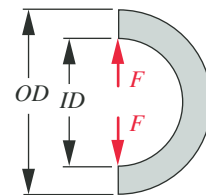
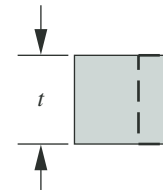



FIGURA P6-15

Problema 6-37. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

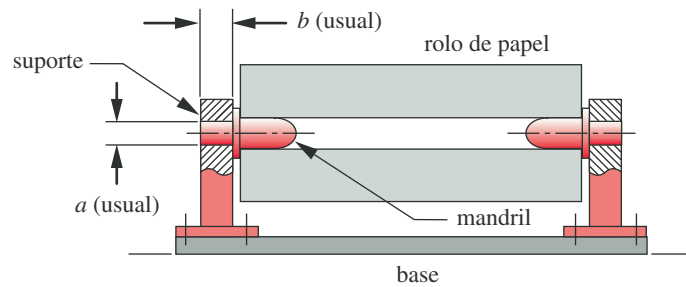



FIGURA P6-16

Problema 6-40. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

6-42 Um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas é requerido para suportar ar comprimido a 150 psi a temperatura ambiente. A pressão tem ciclo variável de zero até o máximo. O aço tem S_{ut} = 500 MPa. Determine o coeficiente de segurança para vida infinita à fadiga se o diâmetro do tanque é 0,5 m, a espessura de parede, 1 mm e o comprimento do tanque, 1 m.

6-43 Os rolos de papel na Figura 6-17 têm as medidas 0,9 m de diâmetro externo, 0,22 m de diâmetro interno e o comprimento é de 3,23 m; sua densidade é de 984 kg/m^3. Os rolos são transferidos da esteira automática (não mostrada) para a empilhadeira através da barra em "V" do mecanismo de descarregamento, que é girado 90° por um cilindro pneumático. O papel, então, rola para "dentro" dos garfos da empilhadeira. Esses garfos têm 38 mm de espessura, 100 mm de largura e 1,2 m de comprimento, e são inclinados 3° em relação à horizontal, tendo S_{ut} = 600 MPa. Encontre o coeficiente de segurança para vida infinita em fadiga para os dois garfos da empilhadeira quando o papel rola sobre eles em duas diferentes condições (faça todas as hipóteses necessárias):

(a) Os dois garfos não estão apoiados em suas extremidades livres.
(b) Os dois garfos tocam a mesa no ponto *A*.

Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

6-44 Determine uma espessura adequada para o mecanismo em V da estação de descarregamento da Figura P6-17, para limitar a deflexão em suas extremidades a 10 mm, em qualquer posição durante sua rotação. Dois mecanismos em "V" suportam o rolo, posicionados a 1/4 e a 3/4 do comprimento de seu eixo, e cada um dos braços do "V" tem 10 cm de largura por 1 m de comprimento. Qual é o seu coeficiente de segurança para vida infinita em fadiga quando projetados para

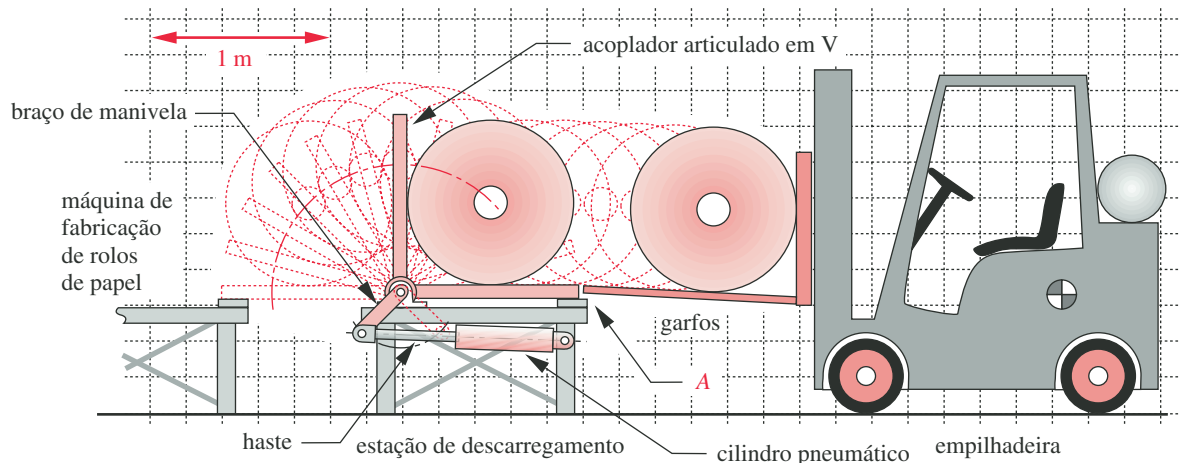



FIGURA P6-17

Problemas 6-43 e 6-47.

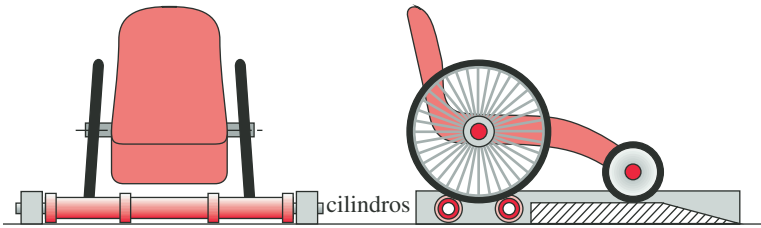



FIGURA P6-18

Problema 6-48.

limitar a deflexão, como mostrado? $S_{ut} = 600$ MPa. Ver o Problema 4-43 para mais informações.

6-45 Determine, para a haste do cilindro pneumático da Figura P6-17, o coeficiente de segurança para vida infinita em fadiga. As cargas de tensão repetem ciclos de zero ao valor máximo (cargas de compressão abaixo do valor crítico para flambagem não afetam a vida em fadiga). A manivela que o pistão movimenta tem 0,3 m de comprimento, e sua haste tem curso máximo de 0,5 m. A haste, de 25 mm de diâmetro, é feita em aço maciço com $S_{ut} = 600$ MPa. Explicite todas as hipóteses.

6-46 As barras em "V" da Figura P6-17 são giradas pela manivela através de um eixo de 60 mm de diâmetro e 3,23 m de comprimento. Determine o máximo torque aplicado a este eixo durante o movimento das barras em "V" e encontre o coeficiente de segurança do eixo para vida infinita em fadiga, caso seu S_{ut} seja igual a 600 MPa. Veja o Problema 6-43 para mais informações.

*__6-47__ Determine as forças máximas sobre os pinos de fixação em cada uma das extremidades do cilindro pneumático da Figura P6-17. Determine seu coeficiente de segurança para vida infinita em fadiga, se eles tiverem 30 mm de diâmetro e se há apenas uma área sob cisalhamento em cada pino. $S_{ut} = 600$ MPa. Ver o Problema 6-43 para maiores informações.

6-48 A Figura P6-18 mostra um aparelho de exercício para um corredor em cadeiras de rodas de 100 kg de peso. A cadeira tem rodas motoras de 65 cm de diâmetro, separadas por uma distância de 70 cm. Dois tubos livres sobre mancais de rolamento suportam as rodas traseiras. O movimento lateral da cadeira de rodas é limitado por flanges. Projete os tubos acima com 1 m de comprimento em alumínio (selecione a liga) para minimizar a altura da plataforma e também limitar a deflexão dos cilindros rolantes a 1 mm, no pior dos casos. Especifique eixos de aço adequadamente dimensionados para suportar os tubos sobre mancais. Calcule os coeficientes de segurança em fadiga para uma vida $N = 5 \times 10^8$ ciclos.

6-49 A Figura P6-19 mostra um eixo de articulação usinado que é montado com interferência na peça *A* e com folga na peça *B*. Se $F = 100$ lb, $l = 2$ in e $d = 0,5$ in, qual é o coeficiente de segurança contra fadiga do pino, quando feito de aço SAE 1020 laminado a frio? O carregamento é alternado, e deseja-se uma confiabilidade de 90%. Há um fator de concentração de tensões em flexão $K_t = 1,8$ na seção do pino entre as peças *A* e *B*.

6-50 A Figura P6-19 mostra um eixo de articulação usinado que é montado com interferência na peça *A* e com folga na peça *B*. Se $F = 100$ N, $l = 50$ mm e $d = 16$ mm, qual é o coeficiente de segurança contra a fadiga do pino, quando feito de ferro fundido classe 50? O carregamento é alternado, e deseja-se uma confiabilidade de 90%. Há um fator de concentração de tensões em flexão $K_t = 1,8$ na seção do pino entre as peças *A* e *B*.

6-51 Uma grande placa fina deve ser fabricada com alumínio 7075-T651, o qual possui uma tenacidade à fratura $K_c = 24,2$ MPa-m^{0,5} e um limite de escoamento de 495 MPa. Determine o número de ciclos de carregamento que a peça pode suportar, se a tensão nominal varia de 0 à metade do limite de escoamento e se uma trinca inicial tem um comprimento total de 1,2 mm. Os valores do coeficiente e do expoente na Equação 6.4 para esse material são $A = 5 \times 10$ (mm/ciclo) e $n = 4$.

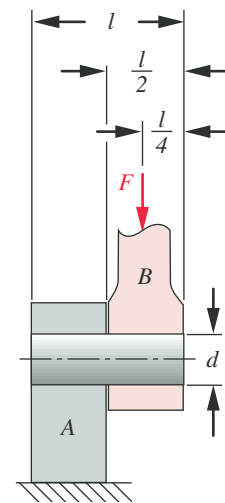



FIGURA P6-19

Problemas 6-49 e 6-50.

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares de capítulos anteriores com o mesmo número após o hífen. Problemas em capítulos posteriores podem estender estes problemas.

*6-52 Uma grande placa fina deve ser fabricada com aço SAE 4340, que possui uma tenacidade à fratura $K_c = 98{,}9$ MPa-m^{0,5}. A placa é inspecionada à procura de trincas após a fabricação, mas o aparelho de inspeção não é capaz de detectar defeitos menores do que 5 mm. Determine a espessura mínima requerida para que a placa tenha uma vida de no mínimo 10 ciclos (usando os critérios da mecânica da fratura) se sua largura é de 400 mm e a carga normal à trinca varia de 20 a 170 kN. Os valores do coeficiente e do expoente na Equação 6.4 para esse material são $A = 4 \times 10^{-9}$ (mm/ciclo) e $n = 3$.

6-53 Um tubo cilíndrico fechado de paredes finas é feito de uma liga de alumínio que tem tenacidade à fratura de 38 MPa-m^{0,5} e as seguintes dimensões: comprimento = 200 mm, diâmetro externo = 84 mm e diâmetro interno = 70 mm. Uma trinca semicircular de 2,8 mm de profundidade é descoberta no diâmetro interno, longe das extremidades, orientada ao longo de uma linha paralela ao eixo do cilindro. Se o cilindro é repetidamente pressurizado de 0 a 75 MPa, quantos ciclos de pressão ele consegue suportar? Os valores do coeficiente e do expoente na Equação 6.4 para esse material são $A = 5 \times 10^{-12}$ (mm/ciclo) e $n = 4$. (*Dica:* o valor do fator de geometria para um defeito em superfície semicircular *é* $b = 2 / p$ *e a* trinca cresce na direção radial.)

6-54 Uma viga não rotativa de aço laminado a quente tem um perfil industrial tipo C como seção transversal de altura $h = 64$ mm e largura $b = 127$ mm. Ela é carregada em flexão pulsante, com a linha neutra paralela à alma da seção. Determine seu limite de fadiga corrigido com 90% de confiabilidade se ela for usada em um ambiente com temperatura inferior a 450°C e tiver um limite de resistência em tração de 320 MPa.

6-55 Uma barra não rotativa de aço usinada tem uma seção transversal circular de diâmetro $d = 50$ mm. Ela é carregada com uma força normal variada. Determine seu limite de fadiga corrigido com 99% de confiabilidade se ela for usada em um ambiente com temperatura inferior a 450°C e tiver um limite de resistência na tração de 480 MPa.

6-56 Uma barra não rotativa de aço estirada a frio tem uma seção transversal circular de diâmetro $d = 76$ mm. Ela é solicitada à torção pulsante. Determine seu limite de fadiga corrigido com 99% de confiabilidade se ela for usada em um ambiente com temperatura de 500°C e tiver um limite de resistência na tração de 855 MPa.

6-57 Uma viga não rotativa de aço retificada tem uma seção transversal retangular com altura $h = 60$ mm e largura $b = 40$ mm. Ela é carregada em flexão pulsante. Determine seu limite de fadiga corrigido com 99,9% de confiabilidade se ela for usada em um ambiente com temperatura inferior a 450°C e tiver um limite de resistência em tração de 1550 MPa.

6-58 Um eixo de aço ranhurado similar ao mostrado na Figura C-5 (Apêndice C) é carregado em flexão. Suas dimensões são: $D = 57$ mm, $d = 38$ mm, $r = 3$ mm. Determine o fator de concentração de tensões em fadiga se o material tem $S_{ut} =$ 1130 MPa.

6-59 Um eixo de aço com um furo transversal, similar àquele mostrado na Figura C-8 (Apêndice C) é carregado em torção. Suas dimensões são: $D = 32$ mm e $d = 3$ mm. Determine o fator de concentração de tensões em fadiga, se o material tem $S_{ut} = 808$ MPa.

6-60 Uma barra plana com adelgaçamento de alumínio encruado similar àquela mostrada na Figura C-9 (Apêndice C) é carregada axialmente. Suas dimensões são: $D = 1{,}20$ in, $d = 1{,}00$ in e $r = 0{,}10$ in. Determine o fator de concentração de tensões em fadiga se o material tem $S_{ut} = 76$ kpsi.

6-61 Um eixo em rotação, com rebaixo arredondado colocado na face interna de um rolamento de contato rolante e com o rebaixo colocado contra a ponta do rolamento, é mostrado na Figura P6-20. O rolamento possui uma sutil excentricidade que induz um momento de total reversão no eixo à medida que este gira. As medidas indicam que a amplitude resultante de tensão alternada, devido à

* As respostas para estes problemas estão no Apêndice D.

flexão, é de $\sigma_a = 57$ MPa. O torque no eixo flutua de uma elevada de 90 N-m a uma baixa de 12 N-m e está em fase com a tensão de flexão. O eixo é baixo, e suas dimensões são $D = 23$ mm, $d = 19$ mm e $r = 1{,}6$ mm. O material do eixo é aço SAE 1040 laminado a frio. Determine o fator de segurança de fadiga para vida infinita para o eixo, com confiabilidade de 99%.

6-62 Um elemento de tensão em uma máquina é filetado, como mostra a Figura P6-21. A peça tem um defeito de fabricação que faz com que a carga de tensão flutuante seja aplicada excentricamente, resultando em uma carga de tensão também flutuante. As medidas indicam que a tensão máxima de flexão é 16,4 MPa e a mínima é de 4,1 MPa. A carga de tração flutua de uma alta de 3,6 kN para uma baixa de 0,90 kN e está em fase com a tensão de flexão. A peça é usinada, e suas dimensões são $D = 33$ mm, $d = 25$ mm, $h = 3$ mm e $r = 3$ mm. O material é aço SAE 1020 laminado a frio. Determine o fator de segurança de fadiga para vida infinita para a peça, com confiabilidade de 99%.

6-63 Para uma barra plana com rebaixo arredondado em tensão similar à mostrada na Figura C-9 (Apêndice C) e os dados da(s) linha(s) destacada(s) da Tabela P6-7, determine as tensões axiais alternadas e médias, como as modificadas pelos fatores apropriados de concentração de tensão na barra.

6-64 Para uma barra plana com rebaixo arredondado em flexão similar à mostrada na Figura C-10 (Apêndice C) e os dados da(s) linha(s) destacada(s) da Tabela P6-7, determine as tensões de flexão alternadas e médias, como as modificadas pelos fatores apropriados de concentração de tensão na barra.

6-65 Para um eixo com rebaixo arredondado com tensão similar à mostrada na Figura C-1 (Apêndice C) e os dados da(s) linha(s) destacada(s) da Tabela P6-7, determine as tensões axiais alternadas e médias, como as modificadas pelos fatores apropriados de concentração de tensão na barra.

6-66 Para um eixo com rebaixo arredondado em flexão similar à mostrada na Figura C-2 (Apêndice C) e os dados da(s) linha(s) destacada(s) da Tabela P6-7, determine as tensões de flexão alternadas e médias, como as modificadas pelos fatores apropriados de concentração de tensão na barra.

6-67 A peça de uma máquina é submetida a tensões flutuantes, simples e multiaxiais. As faixas de tensão totalmente corrigidas e diferentes de zero são: $\sigma_{xmin} = 50$ MPa, $\sigma_{xmax} = 200$ MPa, $\sigma_{ymin} = 80$ MPa, $\sigma_{ymax} = 320$ MPa, $\tau_{xzmin} = 120$ MPa, $\tau_{xymax} = 480$ MPa. As propriedades de material são $S_e = 525$ MPa e $S_{ut} = 1200$ MPa. Usando uma linha de carga do Caso 3, calcule e compare os fatores de segurança para vida infinita dados pelos métodos de Sines e von Mises.

6-68 Um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas foi construído com aço laminado a quente com $S_{ut} = 380$ MPa. O diâmetro externo do tanque é de 300 mm e a parede tem 20 mm de espessura. A pressão pode flutuar de 0 a um máximo desconhecido. Para um fator de segurança à fadiga para vida infinita de 4

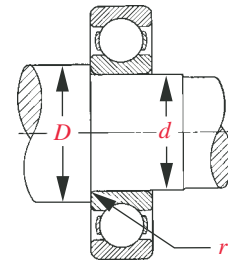



FIGURA P6-20

Problema 6-61

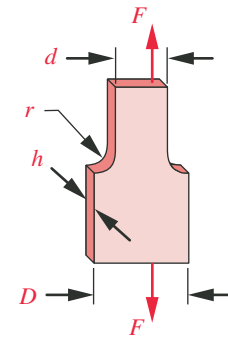



FIGURA P6-21

Problema 6-62

Tabela P6-7 Dados para os Problemas 6-63 a 6-66

Use somente os dados relevantes para o problema em questão. Comprimentos em mm, forças em N e momentos em N-m.

Linha	D	d	r	h	M_{min}	M_{max}	P_{min}	P_{max}	*Material*
a	40	20	4	10	80	320	8000	32000	SAE 1020 CR
b	26	20	1	12	100	500	9500	47500	SAE 1040 CR
c	36	30	1,5	8	60	180	6500	19500	SAE 1020 CR
d	33	30	1	8	75	300	7200	28800	SAE 1040 CR
e	21	20	1	10	50	150	5500	16500	SAE 1050 CR
f	51	50	1,5	7	80	320	8000	32000	SAE 1020 CR
g	101	100	5	8	400	800	15000	60000	SAE 1040 CR

Tabela P6-8
Dados para o Problema 6-70

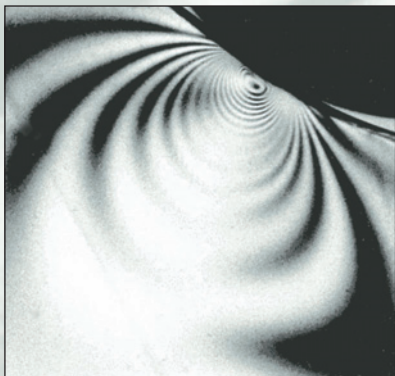
Linha	σ_m'	σ_a'
a	50	30
b	70	30
c	100	10
d	20	60
e	80	40
f	40	40
g	120	50
h	80	80

com confiabilidade de 99,99%, qual é a pressão máxima a que o tanque pode ser submetido?

6-69 Um eixo em rotação foi projetado e fabricado com aço SAE 1040 HR. Ele foi feito a partir de um tubo que possui um diâmetro externo de 60 mm e uma parede com espessura de 5 mm. As medidas de resistência elétrica indicam que há uma tensão axial totalmente reversa de 68 MPa e uma tensão torcional que flutua de 12 MPa para 52 MPa em fase com a tensão axial no ponto crítico do eixo. Determine o fator de segurança em fadiga de vida infinita do eixo com confiabilidade de 99,99%.

6-70 Para os valores médios e alternados de tensão (em MPa) na(s) linha(s) destacada(s) na Tabela P6-8, encontre o fator de segurança para cada um dos casos de variação de carga baseado no diagrama de Goodman modificado se S_e = 100, S_y = 150 e S_{ut} = 200 MPa.

6-71 Um eixo com rebaixo arredondado em torção similar à mostrada no Apêndice C, Figura C-3, é feita de aço SAE 1020 CR e possui dimensões D = 40 mm, d = 20 mm, e r = 4 mm. O eixo é baixo e sujeito a um torque totalmente reverso de +/– 80 N-m. Determine o fator de segurança para vida infinita do eixo com confiabilidade de 99,99%.

7

FALHA SUPERFICIAL

Use-o até o fim, gaste-o completamente;
faça-o fazer, ou faça sem ele.
Máxima da Nova Inglaterra

7.0 INTRODUÇÃO

Existem apenas três maneiras segundo as quais peças ou sistemas podem "falhar": *obsolescência, quebra* ou *desgaste acentuado.* O meu velho computador ainda funciona bem, mas está obsoleto e não serve mais para mim. O vaso favorito da minha esposa está em pedaços, pois eu o deixei cair no chão, e é irrecuperável. No entanto, meu automóvel com 123.000 milhas rodadas ainda é aproveitável e útil, apesar de mostrar alguns sinais de desgaste. A maior parte dos sistemas está sujeita aos três tipos possíveis de falha. A falha por obsolescência é de alguma maneira arbitrária – minha meta está agora fazendo bom uso do velho computador. A falha por quebra é frequentemente repentina e pode ser permanente. A falha por desgaste geralmente é um processo gradual e, em alguns casos, reparável. Em último caso, qualquer sistema que não seja vítima de um dos dois outros modos de falha irá inevitavelmente falhar por desgaste se mantido em serviço por um tempo suficientemente longo. Desgaste é o modo final de falha ao qual nada escapa. Assim, deve-se perceber que não se pode projetar para evitar completamente todos os tipos de desgaste, somente adiá-los.

Os capítulos anteriores trataram de falhas em peças por deformação (escoamento) e quebra (ruptura). **Desgaste** é um termo amplo que engloba vários tipos de falhas, todas envolvendo alterações na **superfície** da peça. Alguns destes chamados *mecanismos de desgaste* ainda não são totalmente compreendidos, e teorias rivais existem em alguns casos. A maior parte dos *experts* descreve cinco categorias gerais de desgaste: **desgaste por adesão**, **desgaste por abrasão**, **erosão**, **desgaste por corrosão** e **fadiga superficial**. As próximas seções discutem esses tópicos em detalhe. Além desses, existem outros tipos de falha de superfície que não se encaixam claramente em nenhuma das cinco categorias ou que podem se encaixar em mais de uma. **Fadiga por corrosão** tem aspectos das duas últimas categorias, assim como **corrosão por microabrasão**. Para simplificar, discutiremos esses casos híbridos como parte de uma das cinco categorias principais listadas acima.

Falhas por desgaste normalmente envolvem a perda de algum material das superfícies de peças sólidas do sistema. Os movimentos de desgaste mais im-

Tabela 7-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
a	metade da largura da região de contato	in	m	Seção 7.8–7.10
A_a	área aparente de contato	in^2	m^2	Seção 7.2
A_r	área real de contato	in^2	m^2	Equação 7.1
B	fator de geometria	1/in	1/m	Equação 7.9*b*
b	metade do comprimento da região de contato	in	m	Seção 7.8–7.10
d	profundidade do desgaste	in	m	Equação 7.7
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	tudo
F, P	força ou carga	lb	N	tudo
f	força de atrito	lb	N	Equação 7.2
f_{max}	força tangencial máxima	lb	N	Equação 7.22*f*
K	coeficiente de desgaste	nenhuma	nenhuma	Equação 7.7
l	comprimento do contato linear	in	m	Equação 7.7
L	comprimento do contato cilíndrico	in	m	Equação 7.14
m_1, m_2	constantes de material	1/psi	m^2/N	Equação 7.9*a*
H	dureza à penetração	psi	kg/mm^2	Equação 7.7
N	número de ciclos	nenhuma	nenhuma	Equação 7.26
N_f	coeficiente de segurança sob fadiga superficial	nenhuma	nenhuma	Exemplo 7-5
p	pressão na região de contato	psi	N/m^2	Seção 7.8–7.10
p_{avg}	pressão média na região de contato	psi	N/m^2	Seção 7.8–7.10
p_{max}	máxima pressão na região de contato	psi	N/m^2	Seção 7.8–7.10
R_1, R_2	raios de curvatura	in	m	Equação 7.9*b*
S_{us}	limite de resistência ao cisalhamento	psi	Pa	Seção 7.3
S_{ut}	limite de resistência à tração	psi	Pa	Seção 7.3
S_y	limite de escoamento	psi	Pa	Seção 7.3
S_{yc}	limite de escoamento à compressão	psi	Pa	Seção 7.3
V	volume	in^3	m^3	Equação 7.7
x, y, z	variáveis de comprimento generalizadas	in	m	tudo
μ	coeficiente de atrito	nenhuma	nenhuma	Equação 7.2–7.6
ν	coeficiente de Poisson	nenhuma	nenhuma	tudo
σ	tensão normal	psi	Pa	tudo
σ_1	tensão principal	psi	Pa	Seção 7.11
σ_2	tensão principal	psi	Pa	Seção 7.11
σ_3	tensão principal	psi	Pa	Seção 7.11
τ	tensão de cisalhamento	psi	Pa	tudo
τ_{13}	tensão máxima de cisalhamento	psi	Pa	Seção 7.11
τ_{21}	tensão principal de cisalhamento	psi	Pa	Seção 7.11
τ_{32}	tensão principal de cisalhamento	psi	Pa	Seção 7.11

portantes são o deslizamento, o rolamento ou alguma combinação dos dois. O desgaste apresenta um custo elevado para a economia nacional.* Basta simplesmente a perda de um pequeno volume de material para tornar todo o sistema inoperante. Rabinowicz[1] estima que um automóvel de 4000 lb, quando "com-

* Um estudo de 1977, patrocinado pela ASME, estimou que o custo de energia para os Estados Unidos associado com a substituição de equipamentos que falharam por desgaste correspondia a 1,3% de todo o consumo de energia do país. Nessa época, isso era equivalente a cerca de 160 milhões de barris de petróleo por ano. Veja O. Pinkus e D. F. Wilcock, *Strategy for Energy Conservation through Tribology*, ASME, New York, 1977, p. 93.

pletamente desgastado", terá perdido somente algumas onças de metal das suas superfícies de trabalho. Além disso, essas superfícies danificadas não serão visíveis sem uma desmontagem completa. Assim, é frequentemente difícil monitorar e antecipar os efeitos do desgaste antes da ocorrência da falha.

A Tabela 7-0 mostra as variáveis usadas neste capítulo e as referências das equações, tabelas ou seções nas quais elas são empregadas. No final do capítulo é apresentado um resumo que agrupa todas as equações significativas para facilitar a consulta e identifica a seção do capítulo na qual sua discussão pode ser encontrada.

7.1 GEOMETRIA DE SUPERFÍCIES

Antes de discutir em detalhes os tipos de mecanismos de desgaste, será útil definir as características de uma superfície de engenharia relevantes para esses processos. (Resistência do material e dureza também são parâmetros importantes no desgaste.) A maior parte das superfícies sólidas que são submetidas a desgaste em máquinas é usinada ou retificada, ainda que algumas mantenham suas superfícies finais dos processos de fundição ou forjamento. Em qualquer um desses casos, a superfície terá algum grau de rugosidade que é compatível com seu processo de acabamento. Seu grau de rugosidade terá influência tanto no tipo como na intensidade de desgaste a que a peça estará sujeita.

Mesmo superfícies uniformes e aparentemente lisas têm irregularidades microscópicas. Estas podem ser medidas por qualquer um dos vários métodos disponíveis. Um perfilômetro passa uma ponta dura e levemente carregada (por exemplo, diamante) sobre a superfície com velocidade controlada (baixa) e registra suas ondulações. A ponta tem um raio muito pequeno (aproximadamente 0,5 μm) que funciona, na verdade, como um filtro passa-baixa, já que contornos menores do que seu raio não são percebidos. Apesar disso, ele fornece um perfil de superfície razoavelmente preciso, com uma resolução de 0,125 μm ou maior. A Figura 7-1 mostra os perfis e fotografias SEM* (100x) de duas superfícies de camo em aço encruado: (*a*) retificada e (*b*) usinada. Os perfis foram medidos com um perfilômetro Hommel T-20 que digitaliza 8.000 pontos sobre o comprimento

* Microscópio eletrônico de varredura (Scanning Electron Microscope).

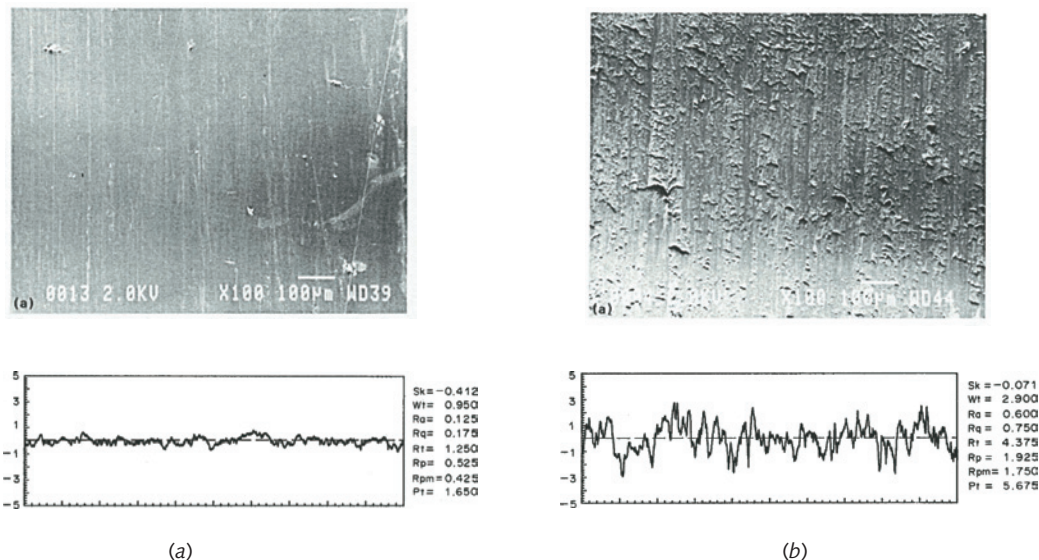



FIGURA 7-1

Fotografias de microscópio eletrônico de varredura (SEM) (100x) que reproduzem superfícies de um camo, com respectivos perfis: retificado (*a*) e fresado (*b*).

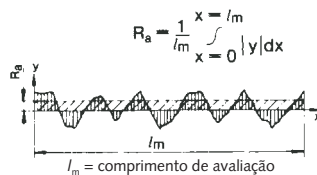
de amostra (aqui, 2,5 mm). Os "picos de montanhas" microscópicos na superfície são chamados de **asperezas**.

A partir desses perfis, uma série de parâmetros estatísticos pode ser calculada. A ISO define pelo menos 19 desses parâmetros. Alguns deles são mostrados na Figura 7-2 juntamente com suas definições matemáticas. Talvez os parâmetros mais comumente utilizados sejam R_a, que é a média dos valores absolutos medidos em cada ponto, ou R_q, que é o desvio médio quadrático. Esses dois parâmetros são muito parecidos em valor e significado. Infelizmente, muitos engenheiros especificam somente um desses dois parâmetros, nenhum dos quais fornece informação suficiente sobre a superfície. Por exemplo, as duas superfícies mostradas nas Figuras 7-3*a* e *b* têm os mesmos valores de R_a e R_q, porém têm naturezas claramente distintas. Uma tem propriedades predominantemente favoráveis, e outra, predominantemente desfavoráveis. Essas duas superfícies irão reagir de maneira bastante diferente ao deslizar ou rolar contra uma outra superfície.

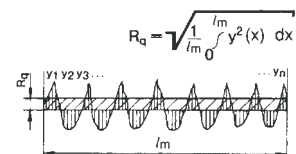
Para diferenciar essas superfícies que têm valores idênticos de R_a ou R_q, outros parâmetros devem ser calculados. A assimetria S_k é uma estimativa da média da primeira derivada do contorno da superfície. Um valor negativo de S_k indica que a superfície tem uma predominância de vales (Figura 7-3*a*), e um valor positivo de S_k define uma predominância de picos (Figura 7-3*b*). Vários outros parâmetros podem ser computados (ver Figura 7-2). Por exemplo, R_t define o

R_a (CLA) (AA) **Rugosidade média aritmética** DIN 4768 DIN 4762 ISO 4287/1

Valor da média aritmética do perfil de rugosidade filtrado, determinado a partir dos desvios em relação à linha de centro e dentro do comprimento de avaliação l_m.

$$R_a = \frac{1}{l_m}\int_{x=0}^{x=l_m} |y|\,dx$$

R_q (RMS) **Rugosidade desvio médio quadrático** DIN 4762 ISO 4287/1

É a raiz quadrada da média dos quadrados dos desvios do perfil de rugosidade filtrado sobre o comprimento de avaliação l_m.

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{l_m}\int_0^{l_m} y^2(x)\,dx}$$

R_{pm} **Média da altura de pico acima da linha média** DIN 4762

Valor da média aritmética das alturas dos 5 picos mais altos acima da linha média (Rp1a Rp5), similar à definição de Rz, especificada na norma DIN 4768.
Os cinco picos mais altos são determinados a partir da "linha central" do perfil de rugosidade filtrado, cada um contido em um comprimento de amostragem l_e.

$$R_{pm} = \frac{1}{5}\cdot(R_{p1}+R_{p2}+\ldots+R_{p5})$$

R_p **Altura do pico máximo, acima da linha média** DIN 4762 ISO 4287/1

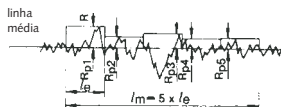
Valor da máxima altura de pico acima da linha central do perfil de rugosidade filtrado, obtido da mesma forma que R_{pm}.

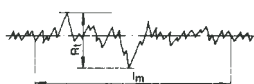
S_k **Assimetria do perfil**

Medida da forma ou simetria da curva de distribuição de amplitudes, obtida a partir do perfil de rugosidade filtrado. Uma assimetria negativa representaria propriedades favoráveis para um mancal.

Curva de distribuição de amplitudes DIN 4762 ISO 4287/1

$$S_k = \frac{1}{R_q^3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(y_i-\bar{y})^3$$

Gráfico da freqüência, em %, do perfil de amplitudes.

R_t (R_h) (R_d) **Máxima altura pico-a-vale** DIN 4762 (1960); desde 1978, é chamada R_{max}

Máxima altura pico-a-vale do perfil de rugosidade filtrado sobre o comprimento de avaliação l_m, independentemente dos comprimentos de amostragem l_e.

W_t **Profundidade de ondulação** DIN 4774

Máxima altura pico-a-vale do perfil de ondulação nivelado (eliminada a rugosidade), dentro do comprimento de avaliação l_m.

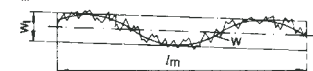



FIGURA 7-2

Definições de parâmetros DIN e ISO para rugosidade superficial, ondulação e assimetria. (*Cortesia da Hommel America Inc., New Britain, Ct.*)

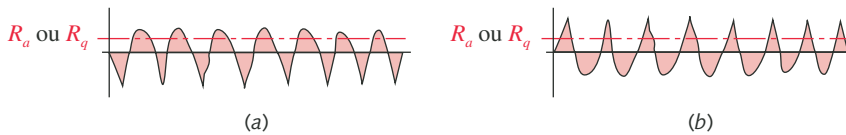



FIGURA 7-3

Diferentes contornos de superfície podem ter os mesmos valores de R_a ou R_q.

máximo valor de amplitude pico-a-vale no comprimento da amostra, R_p a máxima altura de pico acima da linha média e R_{pm} a média das cinco alturas máximas. Todas as medidas de rugosidade são calculadas a partir de medições filtradas eletronicamente que eliminam (zeram) qualquer onda de baixa frequência sobre a superfície. Uma linha média é computada, a partir da qual todas as medidas pico/vale são efetuadas. Além dessas medidas de rugosidade (denotadas por R), a *ondulação,* W_t, da superfície pode, também, ser computada. O parâmetro W_t filtra o sinal da medição sobre a superfície, eliminando todos os contornos de alta frequência e preservando somente as oscilações de grande período. Caso deseje caracterizar completamente a condição de acabamento da superfície, observe que somente a utilização de R_a ou R_q não é suficiente.

7.2 SUPERFÍCIES EM CONTATO

Quando duas superfícies são pressionadas uma contra a outra por uma força, sua área aparente de contato A_a é facilmente calculada por geometria, porém sua área real de contato A_r é afetada pelas asperezas presentes em suas superfícies, e é mais difícil de se determinar com precisão. A Figura 7-4 mostra duas peças em contato. As pontas das asperezas de uma das peças vão inicialmente entrar em contato com pontos da outra peça, e a área inicial de contato será extremamente pequena. As tensões resultantes sobre as asperezas serão muito altas e podem facilmente ultrapassar o limite de escoamento em compressão do material. À medida que a força de junção das duas peças é aumentada, as pontas das asperezas escoam e se alargam até que sua área combinada seja suficiente para reduzir a tensão média a um nível sustentável, isto é, algo como *resistência à penetração por compressão* do material menos resistente.

Pode-se obter uma medida da resistência à penetração por compressão a partir de ensaios convencionais de dureza (Brinell, Rockwell, etc.), os quais forçam uma ponta bastante fina contra o material e o deformam (escoam) na forma dessa ponta. (Ver Seção 2.4.) A resistência à penetração, S_p, é facilmente calculada a

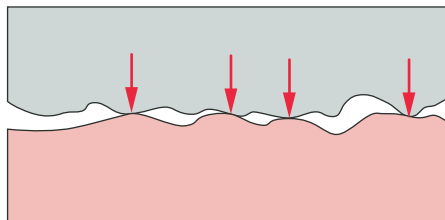



FIGURA 7-4

O contato real entre duas superfícies está somente nas pontas das asperezas.

partir desses dados experimentais e tende a ser da ordem de 3 vezes o limite de escoamento em compressão, S_{yc}, para a maior parte dos materiais.[2]

A área real de contato pode ser, então, estimada por

$$A_r \cong \frac{F}{S_p} \cong \frac{F}{3S_{yc}} \tag{7.1}$$

onde F é a força externa normal às superfícies em contato e as resistências são, como definido no parágrafo anterior, tomadas para o material menos resistente dentre os dois. *Observe que a área de contato para um material de determinada resistência sob uma certa carga será fixa, independentemente da área de contato aparente entre as duas superfícies.*

7.3 ATRITO

Observe que a área real de contato A_r (Equação 7.1) é independente da área de contato aparente A_a definida pela geometria das peças. É essa a razão pela qual o atrito de Coulomb entre dois sólidos é, também, independente da área de contato aparente A_a. A equação para o atrito de Coulomb com escorregamento é

$$f = \mu F \tag{7.2a}$$

onde f é a força de atrito, μ é o coeficiente de atrito dinâmico e F é a força normal.

A força normal comprime as duas superfícies uma contra a outra e cria deformações elásticas e adesões (ver próxima seção) nas pontas das asperezas. Pode-se definir a força de atrito dinâmico de Coulomb, f, como sendo a força necessária para cisalhar as asperezas aderidas e elasticamente intertravadas, de maneira a permitir o movimento de deslizamento. Essa força de cisalhamento é igual ao produto da resistência ao cisalhamento do material menos resistente pela área real de contato A_r, somada a uma "força de sulcamento" P.

$$f = S_{us} A_r + P \tag{7.2b}$$

A força de sulcamento, P, se deve a partículas livres que penetram as superfícies, e é desprezível quando comparada à força de cisalhamento,* podendo, portanto, ser ignorada. Retomando a Equação 7.1, tem-se

$$A_r \cong \frac{F}{3S_{yc}} \tag{7.2c}$$

Substituindo a Equação 7.2*c* na Equação 7.2*b* (ignorando P), obtém-se

$$f \cong F\frac{S_{us}}{3S_{yc}} \tag{7.2d}$$

A combinação das Equações 7.2*a* e 7.2*d*, fornece

$$\mu = \frac{f}{F} \cong \frac{S_{us}}{3S_{yc}} \tag{7.3}$$

o que indica que o coeficiente de atrito μ é uma função somente de uma razão de resistências do material menos resistente entre os dois em contato.

O limite de resistência ao cisalhamento, S_{us}, pode ser estimado com base no limite de resistência à tração do material.

$$\begin{aligned} &\text{aços:} && S_{us} \cong 0{,}8 S_{ut} \\ &\text{outros metais dúcteis:} && S_{us} \cong 0{,}75 S_{ut} \end{aligned} \tag{7.4}$$

* Isso será verdadeiro apenas se as duas superfícies tiverem aproximadamente a mesma dureza. Se uma superfície for mais dura e mais rugosa que a outra, poderá haver uma força de sulcamento significativa.

O limite de escoamento na compressão como uma fração do limite de resistência à tração varia conforme o material e a liga sobre uma banda bastante larga, talvez

$$0,5S_{ut} < S_{yc} < 0,9S_{ut} \tag{7.5}$$

A substituição das Equações 7.4 e 7.5 na Equação 7.3 resulta em

$$\frac{0,75S_{ut}}{3(0,9S_{ut})} < \mu < \frac{0,8S_{ut}}{3(0,5S_{ut})}$$

$$0,28 < \mu < 0,53 \tag{7.6}$$

o que é aproximadamente a faixa de valores usual de μ para metais secos expostos ao ar. Observe que, se as superfícies dos metais forem inteiramente limpas, seu μ atingirá valores duas vezes maiores do que os acima apresentados. No vácuo, o μ para superfícies limpas pode se aproximar de infinito devido ao fenômeno da soldagem a frio. Ocorre tanta variação do coeficiente de atrito com o grau de contaminantes existente entre as superfícies e outros fatores que o engenheiro deve obter dados experimentais para os materiais empregados e nas condições reais de serviço. O teste para obter o coeficiente de atrito é bastante simples de realizar.

O efeito da rugosidade no atrito

Pode-se esperar que a rugosidade superficial tenha grande influência sobre o coeficiente de atrito. Experimentos, contudo, mostram apenas uma fraca correlação. Com acabamentos superficiais extremamente finos, correspondentes a uma faixa de R_a inferior a 10×10^{-6} in, o coeficiente de atrito μ realmente aumenta até um fator próximo de 2, devido a um aumento na área real de contato. Com acabamentos muito grosseiros, correspondentes a R_a acima de 50×10^{-6} in, μ também aumenta levemente devido à energia necessária para suplantar interferências entre asperezas (sulcamento), bem como para cisalhar as ligações adesivas formadas durante o escorregamento.

O efeito da velocidade no atrito

O atrito cinético de Coulomb é usualmente modelado como sendo independente da velocidade de escorregamento V, exceto por uma descontinuidade em $V = 0$, onde um coeficiente de atrito estático, maior, é medido. Na realidade, existe uma queda contínua e não linear do coeficiente de atrito μ com o aumento da velocidade, V. Essa função fica muito próxima de uma reta quando plotada contra o logaritmo da velocidade, V, e sua inclinação negativa é de um pequeno percentual por década.[7]§ Acredita-se que esse fenômeno ocorra porque a maior temperatura na interface resultante das altas velocidades reduz o limite de resistência ao cisalhamento do material na Equação 7.3.

Atrito de rolamento

Quando uma peça rola sobre outra sem nenhum escorregamento, o coeficiente de atrito é bem mais baixo, com μ na faixa de 5*E*-3 a 5*E*-5. A força de atrito irá variar em função de uma potência qualquer da carga (de 1,2 a 2,4) e como o inverso do raio de curvatura dos elementos rolantes. A rugosidade superficial tem, sim, um efeito sobre o atrito de rolamento, e a maior parte das peças com esse tipo de junção recebe acabamento por retificação para minimizar sua rugosidade. Utilizam-se normalmente materiais de alta dureza para obter a resistência necessária e permitir finos acabamentos retificados. Há pouca variação do atrito de rolamento com a velocidade.[7]

§ N. de R. T.: A variação do atrito é de poucos centésimos de seu valor quando a velocidade é aumentada em 10 vezes.

O efeito de lubrificação no atrito

A introdução de um lubrificante na interface onde se dá o deslizamento tem vários efeitos benéficos sobre o coeficiente de atrito. Os lubrificantes podem ser líquidos ou sólidos, mas ambos devem partilhar das propriedades de baixa resistência ao cisalhamento e alta resistência à compressão. Um lubrificante líquido como óleo derivado de petróleo é essencialmente incompressível nos níveis de tensão de compressão encontrados em mancais, porém cisalha facilmente. Por isso, ele se torna o material de menor resistência na interface, e seu baixo limite de cisalhamento na Equação 7.3 reduz o coeficiente de atrito. Os lubrificantes também agem como contaminantes nas superfícies dos metais e os cobrem com uma camada simples de moléculas que inibem a adesão, até mesmo entre metais compatíveis (ver a próxima seção). Muitos óleos lubrificantes comerciais recebem a mistura de vários aditivos que reagem com os metais para formar uma monocamada de contaminantes. Os chamados lubrificantes EP (*extreme pressure*) têm em sua composição ácidos graxos ou outros componentes que atacam o metal quimicamente para formar uma camada de contaminante que protege e reduz o atrito, mesmo em situações em que o filme de óleo é expulso da interface pelas altas cargas de contato. Os lubrificantes, especialmente os líquidos, também servem para retirar calor da interface. Temperaturas mais baixas reduzem as interações de superfície e o desgaste. Lubrificantes e fenômenos de lubrificação serão discutidos com mais detalhes no Capítulo 10. A Tabela 7-1 mostra alguns valores típicos de coeficientes de atrito para pares de materiais comumente encontrados.

7.4 DESGASTE POR ADESÃO

Quando superfícies (limpas) como aquelas mostradas na Figura 7-1 são pressionadas uma contra a outra por uma carga, algumas das asperezas em contato tenderão a aderir umas às outras devido às forças de atração entre os átomos superficiais dos dois materiais.[3] À medida que se introduz um escorregamento entre as superfícies, essas adesões são quebradas, seja ao longo da interface original ou em um novo plano através do material do pico de aspereza. No último caso, um pedaço da peça A é transferido à peça B, causando rompimento superficial e danos para a peça. Algumas vezes, uma partícula de um dos materiais será quebrada e permanecerá livre como escombros na interface, podendo, então,

Tabela 7-1 Coeficientes de atrito para algumas combinações de materiais

		Estático		Dinâmico	
Material 1	Material 2	Seco	Lubrificado	Seco	Lubrificado
aço doce	aço doce	0,74		0,57	0,09
aço doce	ferro fundido		0,183	0,23	0,133
aço doce	alumínio	0,61		0,47	
aço doce	latão	0,51		0,44	
aço duro	aço duro	0,78	0,11–0,23	0,42	0,03–0,19
aço duro	metal branco (*babbitt*)	0,42–0,70	0,08–0,25	0,34	0,06–0,16
Teflon	Teflon	0,04			0,04
aço	Teflon	0,04			0,04
ferro fundido	ferro fundido	1,10		0,15	0,07
ferro fundido	bronze			0,22	0,077
alumínio	alumínio	1,05		1,4	

Fonte: *Mark's Mechanical Engineers Handbook*, T. Baumeister, ed., McGraw-Hill, New York.

riscar a superfície e cavar sulcos em ambas as peças. Esse tipo de dano é por vezes chamado de **escoreamento (*scoring*)** ou ***scuffing**** da superfície. A Figura 7-5 mostra o exemplo de um eixo que sofreu falha por desgaste por adesão na ausência de lubrificação adequada.[6]

A teoria original da adesão postulava que todos os contatos entre asperezas resultariam em escoamento devido às altas tensões atuantes. Atualmente, acredita-se que na maioria dos casos de contato, especialmente com fricção repetida, somente uma pequena fração dos contatos entre asperezas realmente resulte em escoamento e adesão; deformações elásticas das asperezas também têm um papel importante nas forças de agarramento (atrito) desenvolvidas na interface.[32]

Compatibilidade Um fator importante que afeta a adesão é a compatibilidade metalúrgica dos materiais em contato. A **compatibilidade metalúrgica** entre dois metais é definida como a *alta solubilidade mútua* ou a *formação de compostos intermetálicos*.† Davies define duas condições para a **incompatibilidade** metalúrgica, significando que *os metais podem, então, deslizar um sobre o outro com intensidade de arrancamento de material relativamente baixa*:[5]

1 *Os metais devem ser insolúveis um no outro, com nenhum dos materiais sendo dissolvido no outro nem formando uma liga com ele.*

2 *Ao menos um dos materiais deve ser do subgrupo B, isto é, os elementos à direita da coluna Ni-Pd-Pt na Tabela Periódica.*†

Infelizmente, essa terminologia pode gerar confusão, pois a palavra *compatibilidade* geralmente significa uma capacidade de trabalhar em conjunto, ao passo que, neste contexto, significa que os materiais não trabalham (deslizam) bem um sobre o outro. Sua "compatibilidade" metalúrgica nesse caso está relacionada com a *aderência mútua*, a qual age no sentido de evitar o deslizamento, tornando-os **incompatíveis em termos de atrito**.

Rabinowicz[33] agrupa pares de materiais em categorias (metalurgicamente) idênticas, compatíveis, parcialmente compatíveis e incompatíveis, baseado nos critérios acima. As combinações idênticas e compatíveis não deveriam ser colocadas para trabalhar em aplicações com deslizamento não lubrificado. Materiais das categorias incompatível e parcialmente compatível podem ser colocados para trabalhar em conjunto. A Figura 7-6 mostra um diagram de compatibilidade para metais comumente utilizados, com base nas categorias de Rabinowicz. Os círculos que contêm um ponto indicam metais **metalurgicamente compatíveis** (isto é, não aceitáveis para contato com deslizamento). Um círculo com um quarto preenchido indica metais **parcialmente compatíveis**, e um círculo metade preenchido indica combinações **parcialmente incompatíveis**. Os últimos são melhores para o contato deslizante do que os primeiros. Os círculos completa-

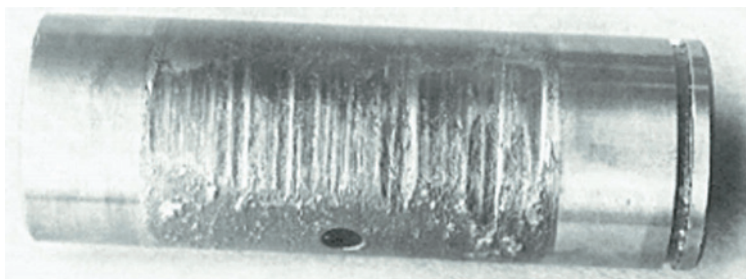



FIGURA 7-5

Desgaste por adesão em um eixo. Fonte: D. J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*. American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1990, com permissão.

* Observe que o fenômeno de *scuffing* é frequentemente associado a dentes de engrenagem, que tipicamente trabalham em uma combinação de rolamento e deslizamento. Ver o Capítulo 11 para uma discussão mais aprofundada.

† Alguns metais neste subgrupo B que podem ser de interesse para ligas para mancais de custo acessível são (em ordem alfabética): alumínio (Al), antimônio (Sb), bismuto (Bi), cádmio (Cd), carbono (C), chumbo (Pb), cobre (Cu), estanho (Sn), silício (Si), zinco (Zn).

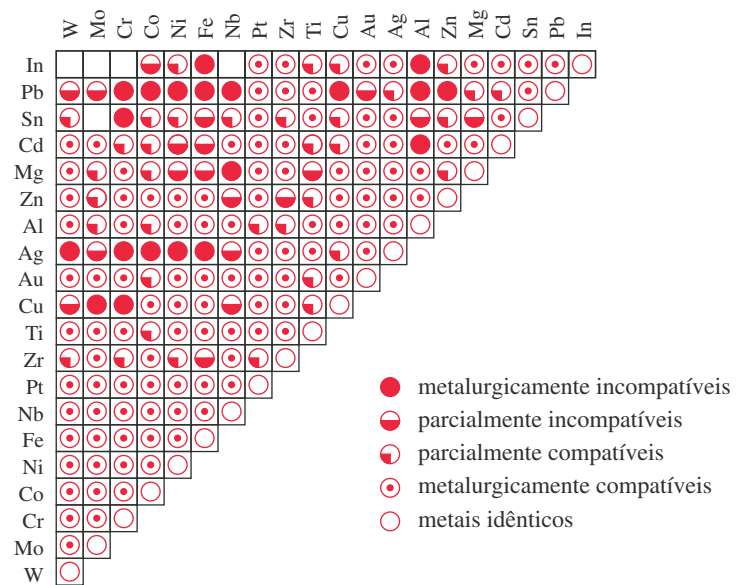



FIGURA 7-6

Diagrama de compatibilidade para pares de metais baseado em diagramas de fase binários. (Adaptado da Figura 7, p. 491, E. Rabinowicz, *Wear Coefficients – Metals*, in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson e W. O. Winner, ed., ASME, New York, 1980, com permissão.)

mente preenchidos indicam pares de metais **metalurgicamente incompatíveis**, dos quais se pode esperar os melhores índices de resistência ao desgaste por adesão dentre todas as combinações mostradas.

Contaminantes A adesão das asperezas só pode ocorrer se o material estiver limpo e livre de contaminantes. Os contaminantes podem ter a forma de óxidos, óleos da pele humana impregnados no manuseio, umidade atmosférica, etc. Os contaminantes, nesse caso, também incluem materiais deliberadamente introduzidos na interface como revestimentos ou lubrificantes. Na realidade, uma das funções principais de um lubrificante é evitar essas adesões e, com isso, reduzir o atrito e os danos à superfície. Um filme de lubrificante efetivamente isola os dois materiais e pode evitar a adesão, mesmo entre materiais idênticos.

Acabamento superficial Não é necessário que as superfícies sejam "rugosas" para que o mecanismo de desgaste por adesão ocorra. Percebe-se que o acabamento superficial com retificação fina da peça da Figura 7-1*a* produz tantas asperezas para esse processo quanto a superfície fresada da Figura 7-1*b*.

Soldagem a frio Se os materiais forem metais, compatíveis e extremamente limpos, as forças adesivas serão altas, e o atrito dinâmico pode gerar suficiente calor localizado para soldar duas asperezas uma na outra. Se as superfícies limpas de metal receberem também um acabamento que lhes confira baixas rugosidades (isto é, polidas) e depois forem friccionadas uma contra a outra (com força suficiente), elas podem sofrer soldagem a frio (engripar) com uma união praticamente tão forte quanto o metal bruto. Esse processo é aprimorado se realizado em vácuo, já que a ausência de ar elimina a contaminação por oxidação da superfície. O processo de **junção por rolagem**, no qual dois metais compatíveis são soldados a frio (ao ar) por rolamento ou cunhagem sob altas cargas normais, é utilizado comercialmente para fabricar fitas bimetálicas para termostatos e também moedas.

Escoriação (*galling*) descreve uma situação de soldagem a frio incompleta em que, por algum motivo (normalmente contaminação), as peças não se soldam completamente. Porções da superfície, no entanto, aderem, causando a transferência de grandes quantidades de material de uma parte a outra e produzindo marcas visíveis a olho nu. A escoriação geralmente arruína a superfície em uma só passada.

Esses fatores explicam as razões pelas quais é conhecimento geral entre todos os técnicos em usinagem e engenheiros: *de maneira geral, um material não deve ser levado a contato consigo mesmo*. Existem algumas exceções a essa regra, notadamente para aço endurecido sobre aço endurecido, porém outras combinações como alumínio sobre alumínio *devem* ser evitadas.

O coeficiente de desgaste por adesão

Em geral, o desgaste é inversamente proporcional à dureza. A taxa de desgaste pode ser determinada pelo ensaio de um pino contra um disco girante sob condições controladas de carregamento e lubrificação, sobre uma distância de deslizamento conhecida e medindo-se a perda de volume. O volume de desgaste é independente da velocidade de deslizamento e pode ser expresso como

$$V = K\frac{Fl}{H} \tag{7.7a}$$

onde V = volume de desgaste do material mais mole, F = força normal, l = comprimento de deslizamento e H é a dureza à penetração em kg_f/mm^2 ou psi. Pode-se expressar H em escala Brinell (HB), Vickers (HV) ou outra unidade de dureza absoluta. Uma leitura de dureza Rockwell pode ser utilizada se ela for previamente convertida para uma das outras escalas com unidades reais. (Ver Tabela 2-3.) O fator K é o **coeficiente de desgaste** e é uma propriedade adimensional do sistema deslizante. K é uma função dos materiais utilizados e também da condição de lubrificação.

Já que a profundidade de desgaste d pode ser de maior interesse em engenharia do que o volume, a Equação 7.7*a* pode ser escrita nesses termos como

$$d = K\frac{Fl}{HA_a} \tag{7.7b}$$

onde A_a é a área aparente de contato da interface.

Valores de K para os mesmos materiais, testados sob as mesmas condições, variam de um fator de aproximadamente 2 de ensaio para ensaio. Também se observa esse tipo de variabilidade em ensaios de coeficiente de atrito, que tipicamente têm desvios-padrão de ± 20%. As razões dessas variações não são completamente compreendidas, mas são atribuídas à dificuldade de reproduzir com precisão as mesmas condições superficiais de um ensaio a outro.[33] Apesar dessa grande variação, os dados obtidos são melhores do que nada e são úteis para fazer estimativas de taxas de desgaste em situações nas quais o ensaio do projeto real não é possível.

Tabelas de valores empíricos para várias combinações de pares de materiais e condições de lubrificação têm sido publicadas na literatura.[33] Mesmo sendo possível encontrar dados para o coeficiente de desgaste que se aproximam bastante de uma situação particular desejada, o grande número de permutações possíveis fatalmente leva a situações de projeto que não se encaixam nos dados disponíveis. A Figura 7-7 mostra um gráfico generalizado do coeficiente de desgaste K como função da condição de lubrificação e das categorias de compatibilidade de Rabinowicz. Um valor aproximado de K pode ser obtido desta figura para qualquer situação de projeto. Tenha em mente que somente um programa de ensaios

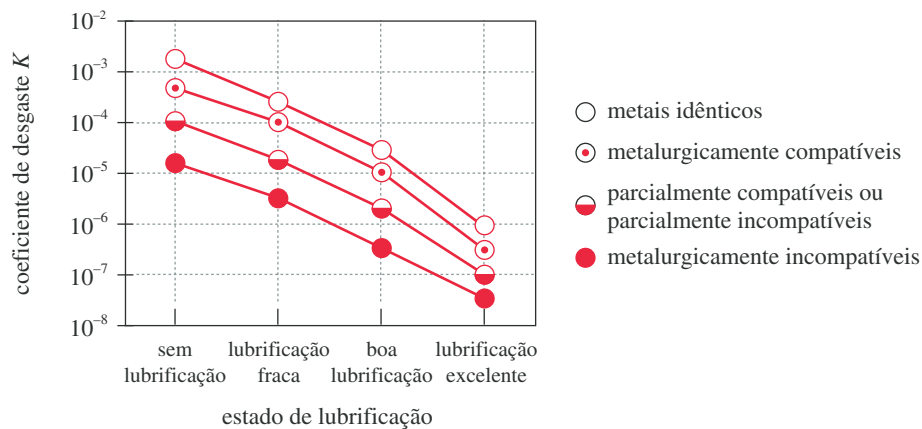



FIGURA 7-7

Coeficiente de desgaste por adesão como função da compatibilidade e da lubrificação. (Adaptado da Figura 11, p. 495, E. Rabinowicz, "Wear Coefficients – Metals", in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson and W. O. Winer, ed., ASME, New York, 1980, com permissão.)

pode fornecer dados de vida sob desgaste suficientemente precisos para um dado projeto. Observe que os dados da Figura 7-7 se baseiam no coeficiente de desgaste associado à perda de material. Tem-se também a transferência de material de um dos materiais deslizantes ao outro por adesão. O coeficiente de desgaste para transferência adesiva tem magnitude aproximadamente três vezes maior do que aquele para perda de material do sistema.[33]

7.5 DESGASTE POR ABRASÃO

A abrasão ocorre de dois modos distintos, denominados processos de desgaste por abrasão a *dois corpos* ou *três corpos*.[9] A **abrasão a dois corpos** *se refere a um material duro e rugoso deslizando sobre um material mais mole*. A superfície mais dura penetra na superfície mais mole e dela retira material. Um exemplo é uma ferramenta utilizada para usinar uma peça de metal. A **abrasão a três corpos** se refere à *introdução de partículas duras entre duas superfícies deslizantes, sendo pelo menos um dos dois corpos mais mole do que as partículas*. As partículas duras causam abrasão em uma das superfícies ou em ambas. O esmerilhamento e o polimento se encaixam nessa categoria. **Abrasão** é, então, *um processo de remoção de material no qual as superfícies afetadas perdem massa a uma taxa controlada ou não*. O desgaste por abrasão também obedece à Equação 7.7. Ver a Figura 7-8 para uma indicação de coeficiente de desgaste em condições de abrasão. A Tabela 7-2 também relaciona valores típicos para os coeficientes de desgaste por abrasão.

Abrasão não controlada Equipamentos de movimentação de terra como uma retroescavadeira, uma pá carregadora e equipamentos de mineração operam em

Tabela 7-2 Coeficientes de desgaste *K* para abrasão

	Lima	Lixa fina nova	Partículas abrasivas soltas	Polimento grosseiro
Superfícies secas	5*E*–2	1*E*–2	1*E*–3	1*E*–4
Lubrificado	1*E*–1	2*E*–2	2*E*–3	2*E*–4

Fonte: E. Rabinowicz, "Wear Coefficients – Metals", in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson e W. O. Winer, ed., ASME, New York, 1980.

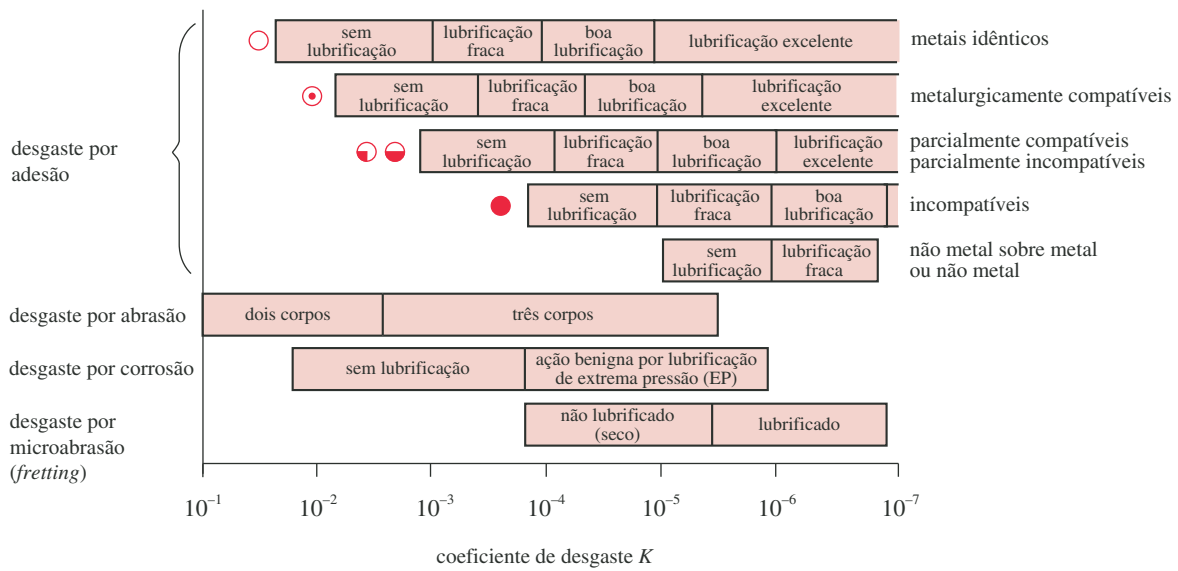



FIGURA 7-8

Coeficiente de desgaste para várias condições de deslizamento. Fonte: E. Rabinowicz, "Wear Coefficients – Metals", in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson and W. O. Winer, ed., ASME, New York, 1980.

um modo relativamente descontrolado de abrasão a três corpos, uma vez que a terra ou os minerais escavados frequentemente contêm materiais mais duros do que as superfícies de aço do equipamento. Sílica (areia) é o material sólido mais abundante na superfície terrestre, e ela é mais dura do que a maioria dos metais (dureza absoluta de 800 kgf/mm^2). A dureza absoluta de aços moles é somente da ordem de 200 kgf/mm^2, mas ferramentas de aço endurecido podem atingir até 1000 kgf/mm^2, podendo, portanto, sobreviver a tais aplicações. Ferramentas de aço duro podem, por isso, ser utilizadas para abrasão de metais mais moles, não metais e até mesmo vidro (que é uma forma de sílica). Muitas aplicações de projeto de máquinas envolvem o manuseio de materiais de produção que são abrasivos. O bombeamento de concreto úmido, a quebra de rochas, a escavação de terra e

(*a*) (*b*) (*c*)

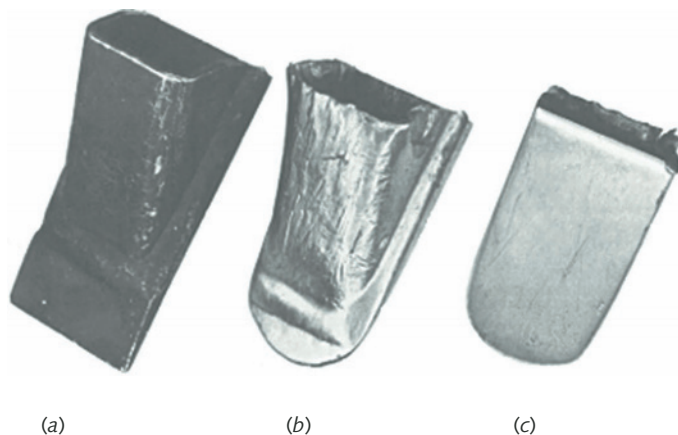



FIGURA 7-9

Um dente de escavadeira: (*a*) novo, (*b*) desgaste por abrasão na face posterior mole, (*c*) desgaste por abrasão sobre a face anterior dura. Fonte: D. J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, American Society for Metals, Park, Ohio, 1990.

o transporte de peças cerâmicas são exemplos de meios abrasivos que devem ser manuseados. A Figura 7-9 mostra o efeito da abrasão não controlada sobre os dentes substituíveis de uma escavadeira. Uma peça nova (*a*) é contrastada com uma que sofreu desgaste no lado posterior (*b*) e no anterior (*c*). O lado anterior é feito de aço 8640 de média dureza, enquanto que o lado posterior é de aço 1010.[6]

Peças de máquinas que operam em ambientes mais limpos podem ser projetadas para minimizar ou eliminar desgaste por abrasão por meio da seleção apropriada de materiais e acabamentos. Materiais lisos e duros não causarão abrasão em materiais mais moles em contato a dois corpos. Mancais de deslizamento e eixos são tipicamente acabados com rugosidades muito baixas e fabricados com um par adequado de materiais, como indicado na Seção 7.4. Os acabamentos lisos minimizam a abrasão no início de operação e, a menos que partículas duras contaminantes sejam posteriormente introduzidas na interface em serviço, essa situação deveria ser mantida. Uma razão para se fazer mancais de deslizamento de materiais moles (deslizando contra eixos duros) é a de promover a incrustação nesse material de qualquer partícula dura que consiga chegar ao mancal. As partículas são, então, aprisionadas (enterradas) no material mole, e seu dano potencial para o eixo é minimizado. Partículas podem adentrar o mancal seja como contaminantes estranhos no lubrificante ou como produtos de oxidação gerados internamente no mancal. Os óxidos de ferro são mais duros do que o aço que os produz e irão causar abrasão no eixo. Se for utilizada lubrificação hidrostática (na qual o lubrificante é circulado ativamente – ver Capítulo 10), então deve-se realizar uma filtração do lubrificante para remover qualquer partícula que entre no sistema. Um mancal com lubrificação hidrostática projetado corretamente não deve apresentar desgaste por abrasão se tiver lubrificante limpo e em quantidade suficiente.

Abrasão controlada Os engenheiros não apenas projetam sistemas para evitar abrasão como também os projetam para *criar* um desgaste por abrasão controlado. A abrasão controlada é amplamente utilizada em processos de manufatura. A **retificação** entre dois corpos é, provavelmente, o exemplo mais comum, no qual um meio abrasivo, como o carboneto de silício (carborundo), é forçado contra uma peça com grandes velocidades de deslizamento, para remoção de material e controle de dimensão e acabamento. Um refrigerante é comumente usado, tanto para proteger o material de tratamentos térmicos indesejados como para aumentar o processo de abrasão. A mistura intensifica a taxa de abrasão por volta de 15% em relação à abrasão a seco.[10] Uma lixa de papel ou tecido permite aplicar um agente abrasivo também em quaisquer superfícies curvas. O jateamento com areia é um exemplo de erosão, no qual um corpo é a areia e o outro, a superfície a ser erodida ou desgastada.

Um exemplo comum de abrasão controlada entre três corpos na manufatura é a **decapagem em tambor rotativo**, no qual peças são colocadas em um tambor, juntamente com partículas abrasivas, e postas em agitação. As peças se atritam e colidem umas contra as outras na mistura. O resultado é a remoção de rebarbas e cantos vivos, além de um polimento geral de todas as superfícies expostas. Um outro exemplo é o processo de **polimento de superfície**, que envolve o uso de particulados muito finos e duros aprisionados entre um material relativamente macio e maleável (por exemplo tecido) e a superfície a ser polida. As velocidades relativas são altas e, frequentemente, o sistema é umedecido.

O tamanho das partículas influencia a eficiência do processo de abrasão. Há um tamanho limite para cada situação, acima do qual a abrasão continuará rapidamente, mas abaixo do qual a taxa de desgaste diminui. Acredita-se que essa queda aconteça quando as partículas retiradas da peça têm a mesma dimensão, ou são até maiores, que o particulado abrasivo. Nesse caso, elas os impedem de atingir a peça.

Materiais abrasivos

Os dois requisitos para um material abrasivo são dureza e afiação. O abrasivo deve ser mais duro que o material a ser desgastado. Dureza excessiva, acima de 150% em relação à peça, não propicia um aumento na taxa de desgaste, mas prolonga a "vida de corte" do abrasivo, que perde essa capacidade ao longo do tempo.[11] Ela é conseguida utilizando-se materiais frágeis, que se quebram em partículas com cantos vivos. As classes de materiais que melhor atingem esses dois quesitos são cerâmicas e não metais com alta dureza. A maioria dos abrasivos comerciais são desses tipos. A Tabela 7-3 mostra alguns materiais abrasivos e suas respectivas durezas. O óxido de alumínio (corindo) e o carboneto de silício (carborundo) são os mais usados, devido à combinação favorável de alta dureza e baixo custo. Carboneto de boro e diamante são utilizados quando se necessita de materiais ainda mais duros, mas ambos são caros.

Materiais resistentes à abrasão

Alguns materiais de engenharia são mais adequados nas aplicações de desgaste por abrasão que outros, com base nas suas durezas. No entanto, a dureza muitas vezes é acompanhada da fragilidade. Desse modo, a resistência ao impacto e à fadiga podem não ser ótimas. A Tabela 7-4 traz a dureza de alguns materiais apropriados para aplicações de desgaste por abrasão.

Recobrimentos Algumas cerâmicas podem ser pulverizadas na forma de plasma sobre substratos metálicos para promover uma face dura, que também apresenta alta resistência química e à corrosão. Esses recobrimentos pulverizados ficam bastante rugosos depois da aplicação e, por isso, devem ser retificados com diamante, para se obter um acabamento adequado para uma junta de deslizamento. Esses revestimentos também são muito frágeis e podem se separar do substrato, se submetidos a altas tensões tanto mecânicas como térmicas.

Observe que o óxido de alumínio pode ser obtido de uma forma controlada sobre alumínio por anodização e ter um acabamento tão bom quanto o do substrato. O assim chamado tratamento anódico de endurecimento é meramente um recobrimento anodizado mais espesso que o usado para proteção contra corrosão e é comumente usado para proteger peças de alumínio em condições de desgaste por abrasão. (Ver seção 2.5.)

Tabela 7-3 Materiais para uso como abrasivos

Material	Composição	Dureza (kg/mm^2)
Diamante	C	8000
Carboneto de boro	B_4C	2750
Carboneto de silício	SiC	2500
Carboneto de titânio	TiC	2450
Corindo (alumina)	Al_2O_3	2100
Carboneto de zircônio	ZrC	2100
Carboneto de tungstênio	WC	1900
Granada	Al_2O_3 3FeO $3SiO_2$	1350
Zircônia	ZrO_2	150
Quartzo, sílica, areia	SiO_2	800
Vidro	Silicato	≅ 500

Fonte: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpresso com permissão de John Wiley & Sons, Inc., New York.

Tabela 7-4 Materiais resistentes à abrasão

Material	Dureza (kg/mm^2)	Desgaste relativo
Carboneto de tungstênio (sinterizado)	1400-1800	0,5-5
Ferro fundido branco com alto teor de cromo		5-10
Aço ferramenta	700-1000	20-30
Aço para rolamentos	700-950	
Cromo (eletrodepositado)	900	
Aço cementado	900	20-30
Aço nitretado	900-1250	20-30
Ferro perlítico branco		25-30
Aço austenítico com manganês		30-50
Aço perlítico baixa-liga (0,7% C)	480	30-60
Aço perlítico sem componente de liga (0,7%C)	300	50-70
Aço normalizado ou como laminado com baixo teor de carbono (0,2%C)		100

Fontes: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpresso com permissão de John Wiley & Sons, Inc., New York T. E. Norman, *Abrasive Wear of Metals,* in *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson, ed., U. Mich. Press, 1961.

7.6 DESGASTE POR CORROSÃO

A corrosão ocorre em ambientes normais, em praticamente todos os materiais, exceto naqueles denominados nobres como, por exemplo, ouro, platina, etc. A forma mais comum de corrosão é a oxidação. A maioria dos metais reage com o oxigênio presente no ar ou na água para formar óxidos. Em alguns materiais, como o alumínio, a oxidação pode se manter estagnada por si só, desde que a superfície não sofra perturbações. No alumínio exposto ao ar forma-se uma camada de óxido, gradualmente, até uma espessura de 0,02 μm, quando, a partir desse ponto, a reação cessa, porque a ausência de porosidade do filme de óxido de alumínio isola o substrato do contato com o oxigênio do ar. (Esse é o princípio da anodização, que cria uma camada de óxido de alumínio uniforme e com espessura controlada na peça antes de ser colocada em uso.) Ligas de ferro, por outro lado, formam um filme de óxido descontínuo e poroso, que facilmente se lasca, expondo mais substrato. A oxidação continuará até que todo o ferro seja convertido em óxido. Temperaturas elevadas aumentam bastante a taxa de todas as reações químicas.

O desgaste por corrosão leva a um rompimento, no meio corrosivo, da camada da superfície, devido ao contato deslizante ou por rolamento entre dois corpos. Esse contato de superfície pode agir quebrando o filme de óxido (ou outro tipo de filme), expondo novo substrato aos elementos reativos, aumentando, assim, a taxa de corrosão. Se os produtos da reação química forem duros e frágeis (como os óxidos), as lascas dessa camada podem se tornar partículas livres na interface e contribuir para outras formas de desgaste, como a abrasão. Ver a Figura 7-8 para indicações de coeficientes de desgaste por corrosão.

Alguns produtos de reações metálicas, como cloretos metálicos, fosfatos e sulfetos, são menos duros que o material do substrato, além de também não serem frágeis. Esses produtos de corrosão podem agir como contaminantes benéficos para reduzir o desgaste por adesão, já que a bloqueiam das asperezas metálicas. Essa é a razão pela qual compostos contendo cloro, enxofre e outros agentes reativos são adicionados em óleos a pressões extremas (EP – *extreme pressure*). Essa estratégia é para negociar um desgaste por adesão mais rápido e prejudicial por uma baixa taxa de desgaste por corrosão em superfícies metálicas,

como dentes de engrenagens e camos, onde pode haver uma lubrificação escassa, devido à sua geometria não conforme.

Corrosão por fadiga

O Capítulo 6 discutiu os mecanismos da mecânica de fratura e falhas por fadiga detalhadamente e fez uma breve menção ao fenômeno chamado de corrosão por fadiga ou corrosão sob tensão. Esse mecanismo ainda não é entendido na sua totalidade, mas as evidências empíricas de seus resultados são fortes e inequívocas. Quando uma peça está sob tensão em um meio corrosivo, o processo de corrosão é acelerado e a falha ocorrerá mais rapidamente do que o esperado de um estado de tensões isolado, ou de um processo de corrosão por si só.

Tensões estáticas são suficientes para acelerar o processo de corrosão. A combinação de tensão e meio corrosivo tem um efeito sinérgico e o material corrói mais rapidamente do que se não estivesse sob tensão. Essa condição combinada de tensão estática e corrosão é denominada **corrosão sob tensão**. Se a peça é *tensionada ciclicamente em um ambiente corrosivo*, a trinca crescerá mais rapidamente do que cresceria considerando cada fator separadamente. Isso é chamado de **corrosão por fadiga**. Enquanto a frequência do ciclo de tensão (contrariamente ao número de ciclos) aparenta não ter efeito prejudicial no crescimento da trinca em um meio não corrosivo, em um ambiente sujeito à corrosão, ela influencia. Ciclos com baixa frequência proporcionam mais tempo para o meio agir na ponta da trinca tensionada, enquanto ela é mantida aberta sob tração, o que aumenta substancialmente sua taxa de crescimento. Veja as Figuras 6-30 a 6-32 e seus comentários no Capítulo 6 para mais informações sobre esse fenômeno.

Corrosão por microabrasão

Quando duas superfícies metálicas estão em contato íntimo, como em juntas por interferência ou em uniões por elementos de fixação, é de se esperar que não ocorra corrosão severa na interface, especialmente se expostas ao ar. No entanto, esses tipos de contato são sujeitos a um fenômeno chamado de **corrosão por microabrasão** (*fretting*), que pode causar perdas significativas de material na interface. Apesar de não ser possível um grande deslizamento nessas situações, mesmo as pequenas deflexões (da ordem de milésimos de polegada) são suficientes para causar microabrasão. Vibrações são outra possível fonte de pequenos movimentos que causam microabrasão.

Acredita-se que a microabrasão seja uma combinação entre abrasão, adesão e corrosão.[12] Superfícies livres se oxidarão no ar, mas a taxa declinará à medida que os óxidos formados gradualmente bloquearem o acesso do substrato à atmosfera. Como já comentado acima, alguns metais, na realidade, autolimitam sua oxidação, se essa não for perturbada. A presença de vibrações ou deflexões mecânicas repetitivas tende a perturbar o filme de óxido, arrancando-o e expondo novo metal-base ao oxigênio. Isso promove a adesão de asperezas metálicas "limpas" entre as partes e também fornece abrasivos na forma de partículas duras de óxido na interface, para uma abrasão a três corpos. Todos esses mecanismos tendem a diminuir lentamente o volume dos materiais e produzir um pó de material oxidado/abrasivo. Com o tempo, uma perda dimensional significativa pode ocorrer na interface. Em outros casos, o resultado pode ser apenas uma leve descoloração das superfícies ou uma adesão similar à escoriação (*galling*). Tudo isso em uma junta que não foi projetada para ter movimento relativo e que foi imaginada pelo projetista como rígida! Obviamente, nada é realmente rígido, e a microabrasão é uma evidência de que movimentos microscópicos são suficiente para causar desgaste. A Figura 7-10 mostra um caso de microabrasão em um eixo

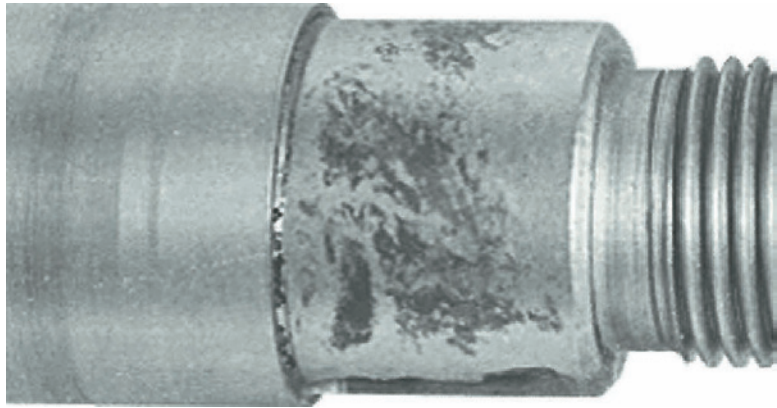



FIGURA 7-10

Desgaste por microabrasão em um eixo montado ao cubo por interferência. Fonte: D. J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990.

montado no cubo por interferência.[6] Ver a Figura 7-8 para indicações de coeficientes de desgaste por microabrasão.

Algumas técnicas que provaram reduzir a microabrasão são a redução das deflexões (ou seja, projetos mais rígidos ou uniões mais firmes) e a introdução de lubrificantes sólidos ou fluidos nas junções, para agirem como uma barreira ao oxigênio e diminuírem o atrito. A introdução de gaxetas de vedação, especialmente com certa elasticidade (como a borracha), tem ajudado na absorção de vibrações. O uso de superfícies mais duras, polidas e mais resistentes à abrasão nas peças metálicas reduzem os danos causados por microabrasão. Recobrimentos resistente à corrosão, como o cromo, são usados algumas vezes. O melhor método (inaplicável na maioria dos casos) é a eliminação do oxigênio, operando-se no vácuo ou em uma atmosfera de gás inerte.

7.7 FADIGA SUPERFICIAL

Todos os modos de falha de superfície comentados anteriormente são aplicáveis em situações nas quais o movimento relativo entre as superfícies é, essencialmente, deslizamento puro. Quando duas superfícies estão em contato por **rolamento puro**, ou principalmente quando rolam em combinação com uma pequena porção de deslizamento, um mecanismo de falha de superfície entra em cena, chamado **fadiga superficial**. Existem muitas aplicações dessa condição, como em rolamentos de esferas ou rolos, camos com seguidores de rolete, cilindros de laminação e no contato entre os dentes de engrenagens retas ou helicoidais. Exceto nos dentes de engrenagens e nos cilindros de laminação, todos os outros contatos citados são tipicamente por rolamento puro, com apenas 1% de deslizamento. Dentes de engrenagem têm um deslizamento significativo no contato e isso altera o estado de tensões significativamente quando comparado aos casos de rolamento puro, como veremos mais adiante. Outros tipos de engrenagens, como cônicas de dentes espirais, hipoidais e coroa sem-fim, têm, essencialmente, contato por deslizamento nas suas interfaces e um ou mais dos mecanismos de desgaste discutidos anteriormente são aplicados. Cilindros de laminação (como os usados para laminar chapas de aço) funcionam com ou sem deslizamento, dependendo do propósito.

As tensões introduzidas nos materiais em contato em uma situação de rolamento são altamente dependentes da geometria das superfícies em contato, bem como do carregamento e das propriedades do material. No caso geral, é permi-

tida qualquer geometria tridimensional em cada membro em contato e, como é de se esperar, seus cálculos são muito complexos. Duas geometrias especiais de interesse prático são, até certo modo, mais simples de serem analisadas. Elas são *esfera contra esfera* e *cilindro contra cilindro*. Em todos os casos, os raios de curvatura das superfícies em contato são fatores significativos. Variando-se o raio de curvatura de uma das superfícies, esses casos especiais podem ser estendidos a fim de se incluir os subcasos *esfera contra plano*, *esfera no interior de uma cavidade esférica*, *cilindro contra plano* e *cilindro no interior de um tubo*. É necessário somente levar o raio de curvatura de um elemento ao infinito para se obter um plano, assim como um raio de curvatura negativo define uma cavidade esférica ou uma superfície de cilíndrica côncava. Por exemplo, alguns rolamentos de esferas podem ser modelados como *esfera contra plano* e alguns rolamentos de rolos como *cilindro no interior de um tubo*.

Quando uma esfera passa sobre uma outra superfície, a região de contato teórica é um ponto de dimensão nula. Um rolo e uma superfície cilíndrica ou plana entram em contato, teoricamente, ao longo de uma reta sem espessura. Como a área de cada um desses contatos é nula, qualquer força aplicada criará uma tensão infinita. Sabe-se que isso não pode ser verdade, senão os materiais falhariam instantaneamente. De fato, os materiais se deformam, criando uma área de contato suficiente para suportar o carregamento a uma tensão finita. Essa deformação gera uma distribuição elipsoidal de pressão na região de contato. No caso geral, a região de contato é elíptica, como mostrado na Figura 7-11*a*. As esferas possuem uma região de contato circular e os cilindros geram uma região retangular de contato conforme pode ser visto na Figura 7-11*b*.

Considere o caso de uma esfera rolando em linha reta sobre uma superfície plana sem deslizamento e sob carregamento normal constante. Se a carga for tal que o material é solicitado abaixo do ponto de escoamento, a deformação na região de contato será elástica e a superfície retornará à sua geometria curva após passar pelo contato. O mesmo ponto na esfera entrará novamente em contato com a superfície plana a cada revolução sucessiva. As tensões resultantes na região de contato são denominadas **tensões de contato** ou **tensões de Hertz**. As tensões de contato nesse pequeno volume da esfera são **repetidas** na frequência de rotação. Isso, com o tempo, levará à **fadiga superficial**.

(*a*) Distribuição de pressão elipsoidal no contato geral – para contato esférico $a = b$.

(*b*) Distribuição de pressão elipsoidal prismática no contato cilíndrico.

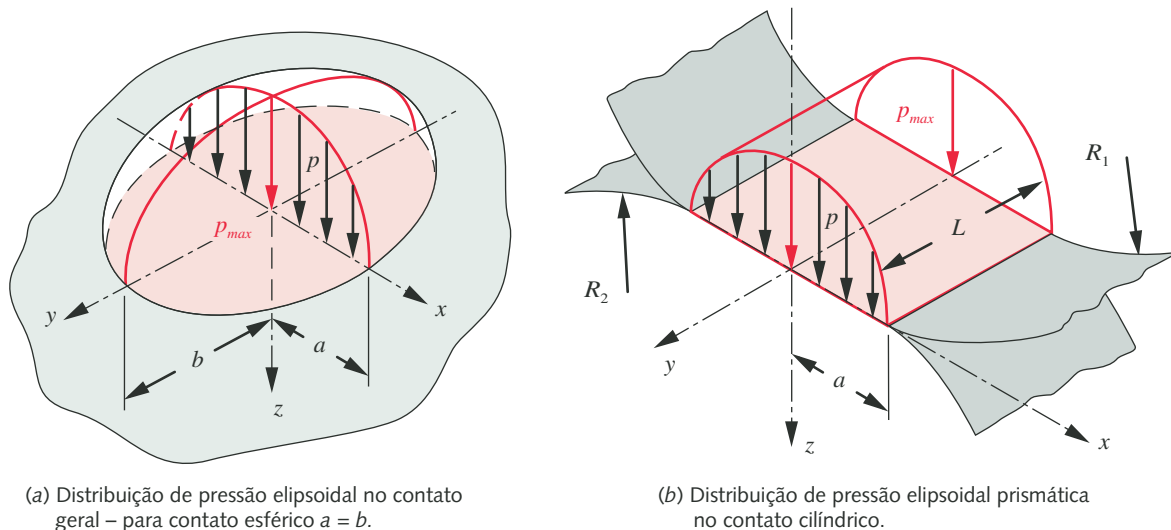



FIGURA 7-11

Distribuições de pressão e zonas de contato de Hertz esférico, cilíndrico e geral.

Esse carregamento repetitivo é similar ao caso mostrado na Figura 6-1*b*. Uma diferença significativa, nesse caso, é que as tensões principais no centro do contato são todas de compressão, não de tração. Lembre, como visto no Capítulo 6, que falhas por fadiga são iniciadas por tensões de cisalhamento e se propagam devido a tensões de tração. Há também uma tensão de cisalhamento associada a essas tensões de compressão no contato, e acredita-se que são a causa do surgimento de trincas após muitos ciclos de tensão. Mais cedo ou mais tarde, o crescimento das trincas pode resultar em falha por **crateração** (*pitting*) – *falha e remoção de pequenas porções de material da superfície*. Quando o processo de crateração se inicia, o acabamento da superfície é comprometido e rapidamente se transforma em falha por **lascamento** (*spalling*) – *perda de porções maiores de material da superfície*.* A Figura 7-12 mostra alguns exemplos de crateração e lascamento em superfícies.

Se a carga é alta o suficiente para elevar as tensões de contato acima da tensão de escoamento na compressão do material, então a deformação da região de contato criará um achatamento permanente na esfera. Essa condição é, às vezes, chamada de **falso brinelismo** (*false brinelling*) devido à aparência similar à endentação feita quando se mede a dureza Brinell de um material. Tal achatamento, mesmo que em apenas uma das esferas (ou rolos), inutiliza o rolamento.

Agora investigaremos a geometria das regiões em contato, distribuições de pressão, tensões e deformações nos contatos por rolamento, começando pela *geometria esfera contra esfera*, relativamente simples, tratando, posteriormente, do caso *cilindro contra cilindro* e, finalmente, analisando o caso geral. As deduções das equações para esses casos estão entre os exemplos mais complexos da teoria da elasticidade. As equações para a área de contato, deformação, distribuição das pressões e tensões de contato na linha de centro de dois corpos carregados estaticamente foram, originalmente, deduzidas por Hertz em 1881.[13] Uma tradução para língua inglesa pode ser encontrada na referência 14. Muitos outros, desde então, contribuíram para o entendimento desse problema.[15, 16, 17, 18]

* De acordo com Ding e Gear[36]

... Não há definição unificada estabelecida na literatura para, consistentemente, distinguir crateração de lascamento. Na literatura, utilizou-se muito os termos crateração e lascamento ou, às vezes, microcrateração, indiscriminadamente: enquanto alguns, dentro da literatura, usaram crateração, microcrateração e lascamento para designar os diferentes níveis de severidade em fadiga de contato superficial, Tallian definiu lascamento como fadiga de contato de macroescala causada por propagação de trincas [crack propagation] e reservou crateração como dano superficial causado por fontes outras além de propagação de trincas. Um dos motivos para a confusão deve-se provavelmente ao fato de que as causas físicas da crateração e do lascamento não tenham sido ainda estabelecidas. A fim de discutir a questão em um terreno consistente, Ding definiu crateração e lascamento. Toma-se a crateração como a formação de crateras rasas [≤ 10 μm] desenvolvidas principalmente a partir de defeitos superficiais; enquanto o lascamento é considerado a formação de cavidades mais profundas desenvolvidas principalmente a partir de defeitos subsuperficiais.

7.8 CONTATO ENTRE ESFERAS

As seções transversais de duas esferas são mostradas na Figura 7-13. As linhas tracejadas indicam a possibilidade de um dos corpos ter uma superfície plana ou cavidade esférica. A diferença está apenas na magnitude ou no sinal de seu raio de curvatura (convexo +, côncavo −). A Figura 7-11*a* mostra a distribuição de pressão semielipsoidal na região de contato. Para um contato esfera contra esfera, essa região será um semielipsoide de revolução com um contato circular ($a = b$).

Pressões de contato e região de contato no contato entre esferas

A pressão de contato é máxima no centro (p_{max}) e nula nas bordas. A carga total aplicada F na região de contato é igual ao volume da semielipsoide de revolução:

$$F = \frac{2}{3}\pi a^2 p_{max} \tag{7.8a}$$

onde a é metade do diâmetro (raio) da região de contato. Portanto, a máxima pressão é:

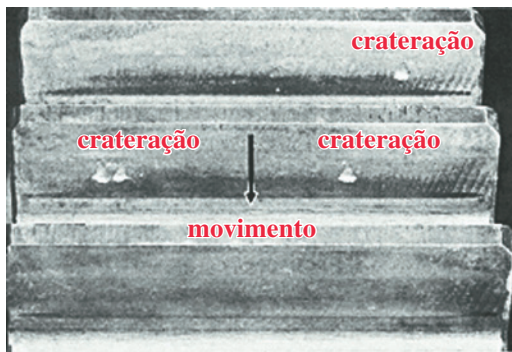
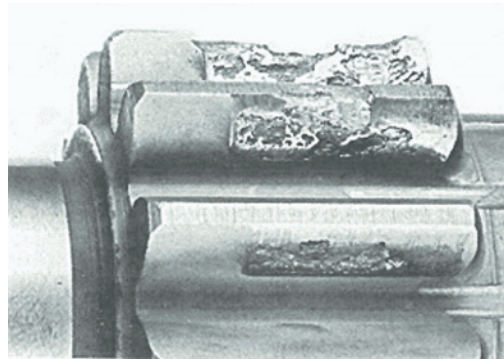
$$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2} \tag{7.8b}$$

(*a*) Crateração moderada em dente de engrenagem

(b) Crateração severa, lascamento e desintegração de dentes de engrenagem

FIGURA 7-12

Exemplos de falhas superficiais por crateração e lascamento devido à fadiga superfícial. Fonte: J. D. Graham, *Pitting of Gear Teeth*, in *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson, ed., U. Mich. Press, 1961, pp. 138, 143, com permissão.

A pressão média na região de contato é a força de contato dividida por sua área:

$$p_{média} = \frac{F}{área} = \frac{F}{\pi a^2} \tag{7.8c}$$

e, substituindo-se a Equação 7.8*c* na 7.8*b*, resulta em:

$$p_{max} = \frac{3}{2} p_{média} \tag{7.8d}$$

Definimos agora as seguintes *constantes de material* para as esferas

$$m_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \qquad m_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \tag{7.9a}$$

(*a*) Sem carregamento

(*b*) Com carregamento

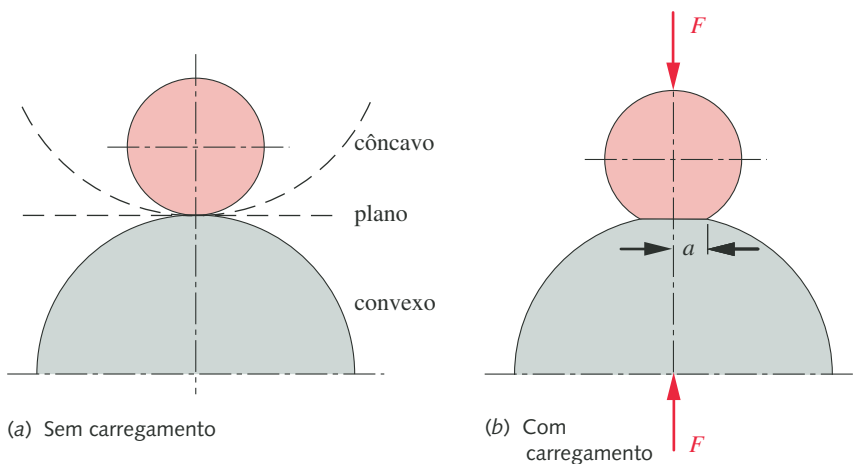



FIGURA 7-13

Zona de contato entre duas esferas ou cilindros.

onde E_1, E_2, ν_1 e ν_2 são os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson para os materiais das esferas 1 e 2, respectivamente.

As dimensões da área de contato são tipicamente muito pequenas se comparadas aos raios de curvatura dos corpos, o que permite considerá-los constantes na região de contato, apesar das pequenas deformações ocorridas no local de contato. Pode-se definir uma *constante geométrica* que depende apenas dos raios R_1 e R_2 das duas esferas,

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{7.9b}$$

Para se considerar o caso de esfera contra plano, R_2 se torna infinito, fazendo $1/R_2$ igual a zero. Para um contato esfera contra cavidade esférica, R_2 torna-se negativo. (Ver Figura 7-13) Do contrário, R_2 é finito e positivo, assim como R_1.

O raio da região de contato a é, portanto, obtido a partir de:

$$a = \frac{\pi}{4} p_{max} \frac{m_1 + m_2}{B} \tag{7.9c}$$

Substituindo a Equação 7.8*b* na 7.9*c*:

$$a = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2}\right)\frac{m_1 + m_2}{B}$$

$$a = \sqrt[3]{0,375\frac{m_1 + m_2}{B}F} \tag{7.9d}$$

A distribuição de pressão dentro da semi-helipsóide é:

$$p = p_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}} \tag{7.10}$$

Pode-se normalizar a pressão p em relação à magnitude de $p_{média}$ e as dimensões x ou y para o raio da região a e plotar a distribuição de pressão normalizada ao longo da região, que formará uma elipse, como é mostrado na Figura 7-14.

Distribuições de tensões estáticas no contato entre esferas

A pressão na região de contato cria um estado triplo de tensões no material. As três tensões aplicadas σ_x, σ_y e σ_z são de compressão e são máximas na superfície da esfera, no centro da região. Elas diminuem rapidamente e não linearmente com a profundidade e a distância do eixo de contato. Elas são denominadas **tensões de Hertz** em homenagem ao seu descobridor original. A dedução completa dessas equações pode ser encontrada na referência 19. Observe que essas tensões aplicadas nas direções x, y e z também são as tensões principais neste caso. Se observarmos essas tensões, conforme variam ao longo do eixo z (com z crescendo para dentro do material), encontraremos:

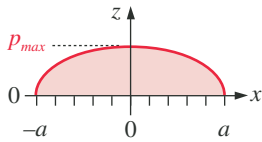



FIGURA 7-14

Distribuição de pressão na região de contato.

$$\sigma_z = p_{max}\left[-1 + \frac{z^3}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}\right] \tag{7.11a}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{p_{max}}{2}\left[-(1 + 2\nu) + 2(1 + \nu)\left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) - \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)^3\right] \tag{7.11b}$$

Nesses cálculos, o coeficiente de Poisson é obtido do material da esfera sendo considerada. Essas tensões normais (e principais) são máximas na superfície, onde $z = 0$:

$$\sigma_{z_{max}} = -p_{max} \tag{7.11c}$$

$$\sigma_{x_{max}} = \sigma_{y_{max}} = -\frac{1+2\nu}{2} p_{max} \tag{7.11d}$$

Há, também, uma tensão de cisalhamento devido a essas tensões normais:

$$\tau_{13} = \frac{p_{max}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2} + (1+\nu)\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^3\right] \tag{7.12a}$$

que não é máxima na superfície, mas a uma certa distância $z_{@\tau_{max}}$ abaixo da superfície.

$$\tau_{13_{max}} = \frac{p_{max}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right] \tag{7.12b}$$

$$z_{@\tau_{max}} = a\sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} \tag{7.12c}$$

A Figura 7-15 mostra o gráfico das tensões principais normais e a máxima tensão de cisalhamento, em função da profundidade z, ao longo do raio da esfera. As tensões são normalizadas pela pressão máxima p_{max}, e a profundidade é normalizada à metade do diâmetro da região de contato, a. Isso propicia um gráfico adimensional da distribuição de tensão na linha de centro do contato entre esferas. Observe que todas as tensões diminuíram para < 10% da p_{max} quando $z = 5a$. A localização da máxima tensão de cisalhamento abaixo da superfície também pode ser vista. Se ambos os materiais são aço, ela ocorre a uma profundidade por volta de $0{,}63a$ e sua magnitude é próxima a $0{,}34\ p_{max}$. Na superfície, $z = 0$, a tensão de cisalhamento fica ao redor de $0{,}11\ p_{max}$.

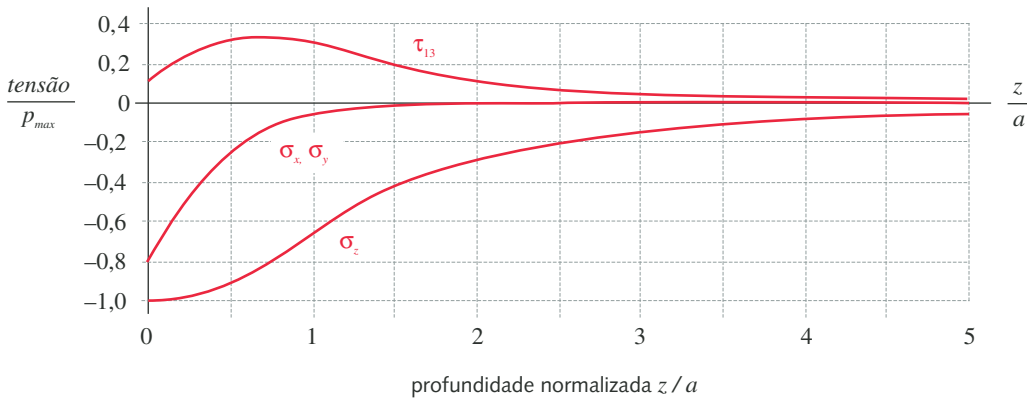



FIGURA 7-15

Distribuição das tensões normalizadas ao longo do eixo z, no contato estático esférico – xyz são tensões principais.

Acredita-se que a localização abaixo da superfície da máxima tensão de cisalhamento é um fator significativo na falha por fadiga superficial. A teoria diz que as trincas se iniciam abaixo da superfície e crescem até que o material acima se separe, formando uma pequena cratera, como pode ser visto na Figura 7-12.

A Figura 7-16 mostra um modelo fotoelástico das tensões de contato em um camo imediatamente abaixo do ponto de contato com o seguidor de rolete.[20] A análise experimental fotoelástica de tensões utiliza um modelo físico da peça a ser analisada feito de um material plástico transparente (Lexan é um exemplo) que mostra franjas de tensões de magnitude constante quando sob carregamento e observadas em luz polarizada. A máxima tensão de cisalhamento pode ser vista claramente a uma pequena profundidade no camo, diretamente abaixo do seguidor. Apesar de esse contato ser entre cilindros em vez de esferas, suas distribuições de tensão ao longo da linha de centro são similares, como será visto na próxima seção.

Quando se afasta da linha de centro na área de contato na superfície da esfera, as tensões diminuem. Na borda da região a tensão radial σ_z é nula, porém há um estado de cisalhamento puro com a magnitude:

$$\tau_{xy} = \frac{1-2\nu}{3} p_{max} \tag{7.13a}$$

Visualize o círculo de Mohr para o caso de cisalhamento puro. As duas tensões principais não nulas serão $\pm\,\tau_{xy}$, o que significa que há, também, uma tensão de tração naquele ponto de

$$\sigma_{1_{borda}} = \frac{1-2\nu}{3} p_{max} \tag{7.13b}$$

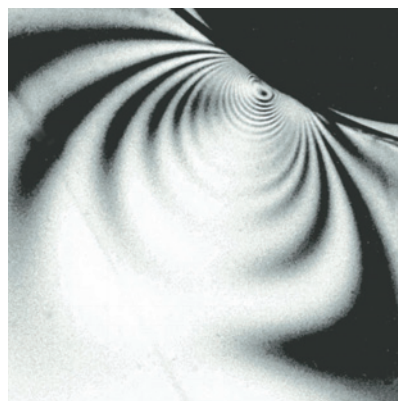



FIGURA 7-16

Análise fotoelástica das tensões de contato abaixo da superfície de um camo com seguidor de rolete. Fonte: V. S. Mahkijani, *Study of Contact Stresses as Developed on a Radial Cam Using Photoelastic Model and Finite Element Analysis*. M. S. Thesis, Worcester Polytechnic Institute, 1984.

EXEMPLO 7-1

Tensões em um rolamento axial de esferas

Problema **Um rolamento axial composto por 7 esferas é carregado axialmente através de suas pistas pelas esferas. Qual o tamanho da área de contato com a pista e quais são as tensões desenvolvidas nas esferas e na pista? Qual a profundidade da máxima tensão de cisalhamento em uma esfera?**

Dados **As 7 esferas têm 10 mm (0,394 in) de diâmetro e as pistas de rolamento são planas. Todas as peças são de aço encruado. A carga axial é de 151 lb, ou 21,5 lb por esfera.**

Hipóteses **A carga é distribuída igualmente entre as 7 esferas. A velocidade angular é suficientemente pequena para poder considerá-lo um carregamento estático.**

Solução

1 É preciso, primeiramente, determinar o tamanho da região de contato, para a qual devemos achar as constantes geométrica e dos materiais a partir das Equações 7.9*a* e *b*.

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0,197} + \frac{1}{\infty}\right) = 2,54 \qquad (a)$$

Observe que o raio de curvatura R_2 foi tomado como infinito.

$$m_1 = m_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} = \frac{1-0,28^2}{3E7} = 3,072E-8 \qquad (b)$$

Observe que, neste exemplo, as duas superfícies são do mesmo material. Agora, as constantes geométrica e dos materiais podem ser usadas na Equação 7.9*d*.

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8}\frac{m_1+m_2}{B}F} = \sqrt[3]{0,375\frac{2(3,072E-8)}{2,54}21,5} = 0,005\ 8 \text{ in} \qquad (c)$$

onde a é a metade do diâmetro (raio) da região de contato. A área circular de contato é, então

$$área = \pi a^2 = \pi\left(0,0058^2\right) = 1,057E-4 \text{ in}^2 \qquad (d)$$

2 Agora, as pressões média e máxima de contato podem ser calculadas pelas Equações 7.8*c* e *d*.

$$p_{média} = \frac{F}{área} = \frac{21,5}{1,057E-4} = 203587 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$p_{max} = \frac{3}{2}p_{média} = \frac{3}{2}(203587) = 305381 \text{ psi} \qquad (f)$$

3 As máximas tensões normais no centro da região de contato na superfície podem, então, ser determinadas, utilizando-se as Equações 7.11*c* e *d*.

$$\sigma_{z_{max}} = -p_{max} = -305381 \text{ psi} \qquad (g)$$

$$\sigma_{x_{max}} = \sigma_{y_{max}} = -\frac{1+2\nu}{2}p_{max} = -\frac{1+2(0,28)}{2}(305381) = -238197 \text{ psi} \qquad (h)$$

4 A máxima tensão de cisalhamento e sua localização abaixo da superfície são calculadas pelas Equações 7.12*b* e *c*.

$$\tau_{yz_{max}} = \frac{p_{max}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right]$$

$$= \frac{305381}{2}\left[\frac{(1-2(0,28))}{2} + \frac{2}{9}(1+0,28)\sqrt{2(1+0,28)}\right] = 103083 \text{ psi} \qquad (i)$$

$$z_{@\tau_{max}} = a\sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} = 0,0058\sqrt{\frac{2+2(0,28)}{7-2(0,28)}} = 0,0037 \text{ in} \qquad (j)$$

5 Todas as tensões determinadas até agora se encontram na linha de centro da região de contato. Nas bordas da região de contato, na superfície, a tensão de cisalhamento será de

$$\tau_{xy} = \frac{1-2\nu}{3}p_{max} = \frac{1-2(0,28)}{3}(305381) = 44789 \text{ psi} \qquad (k)$$

e uma tensão de tração de mesma magnitude.

6 Como ambas as peças são do mesmo material, todas essas tensões podem ser aplicadas às duas.

7 Os arquivos EX07-01 podem ser encontrados no CD-ROM que acompanha este livro.

7.9 CONTATO ENTRE CILINDROS

O contato entre cilindros é comum em máquinas. Cilindros em contato são muito usados para puxar material texturizado, como papel, através das máquinas ou para alterar a espessura de um material nos processos de laminação e por calandragem. Rolamento de rolos são outro tipo de aplicação. Ambos os cilindros podem ser convexos, um convexo e outro côncavo (cilindro interno/externo), ou no limite, cilindro contra plano. Em todos esse contatos há a possibilidade tanto de deslizamento como de rolamento na interface. A presença de forças tangenciais de deslizamento produzem um efeito significativo nas tensões, quando comparadas ao rolamento puro. Primeiramente será considerado o caso de dois cilindros em rolamento puro e, posteriormente, será introduzido uma componente de deslizamento.

Pressões de contato e região de contato no contato entre cilindros paralelos

Quando dois cilindros rolam juntos, sua região de contato será retangular, como é mostrado na Figura 7-11*b*. A distribuição de pressão terá a forma de um prisma semielíptico de meia-largura a. A zona de contato terá aparência semelhante à mostrada na Figura 7-13. A pressão de contato é máxima p_{max} no centro e nula nas bordas, como é mostrado na Figura 7-14. A força aplicada F na região de contato é igual ao volume do prisma semielíptico:

$$F = \frac{1}{2}\pi a L p_{max} \qquad (7.14a)$$

onde F é a força total aplicada e L o comprimento do contato ao longo do eixo dos cilindros. Resolvendo-se para a máxima pressão:

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi a L} \tag{7.14b}$$

A pressão média é a força aplicada dividida pela área da região de contato:

$$p_{média} = \frac{F}{área} = \frac{F}{2aL} \tag{7.14c}$$

Substituindo a Equação 7.14c na 7.14b, obtém-se:

$$p_{max} = \frac{4}{\pi} P_{média} \cong 1{,}273 P_{média} \tag{7.14d}$$

Agora definimos uma constante geométrica que depende dos raios R_1 e R_2 dos dois cilindros (observe que é igual à Equação 7.9b, para esferas),

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{7.15a}$$

Para considerar o caso de um cilindro sobre um plano, R_2 se torna infinito, fazendo-se $1/R_2$ igual a zero. Para um contato entre uma cavidade cilíndrica e um cilindro convexo, R_2 se torna negativo. Caso contrário, R_2 é finito e positivo, como R_1. A metade da largura a da área de contato é, então, calculada a partir de

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1 + m_2}{B}\frac{F}{L}} \tag{7.15b}$$

onde m_1 e m_2 são as constantes de material, como definidas nas Equações 7.9a.

A distribuição das pressões dentro do prisma semielíptico é

$$p = p_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \tag{7.16}$$

que é uma elipse, como mostrado na Figura 7-11.

Distribuição de tensão estática no contato paralelo entre cilindros

A análise das tensões de Hertz é feita para carregamento estático, mas também é aplicada aos contatos de rolamento puro. As distribuições de tensão no material são similares àquelas mostradas na Figura 7-15 para o caso de esfera contra esfera. Dois casos são possíveis: *estado plano de tensões*, onde os cilindros são axialmente bastante curtos, como em alguns camo-seguidores, e *estado plano de deformação,* onde os cilindros são longos axialmente, como em cilindros de laminação. No caso do estado plano de tensões, uma das tensões principais é nula. No estado plano de deformações, todas as três tensões principais podem não ser nulas.

A Figura 7-17 mostra as distribuições das tensões principais, de cisalhamento máxima e de von Mises através da largura da região de contato na superfície e ao longo do eixo z (onde elas são maiores), para dois cilindros sob carregamento estático ou em rolamento puro. As tensões normais são todas de compressão e máximas na superfície. Elas diminuem rapidamente com a profundidade no material e também diminuem ao se afastar da linha de centro, como mostrado na Figura 7-17.

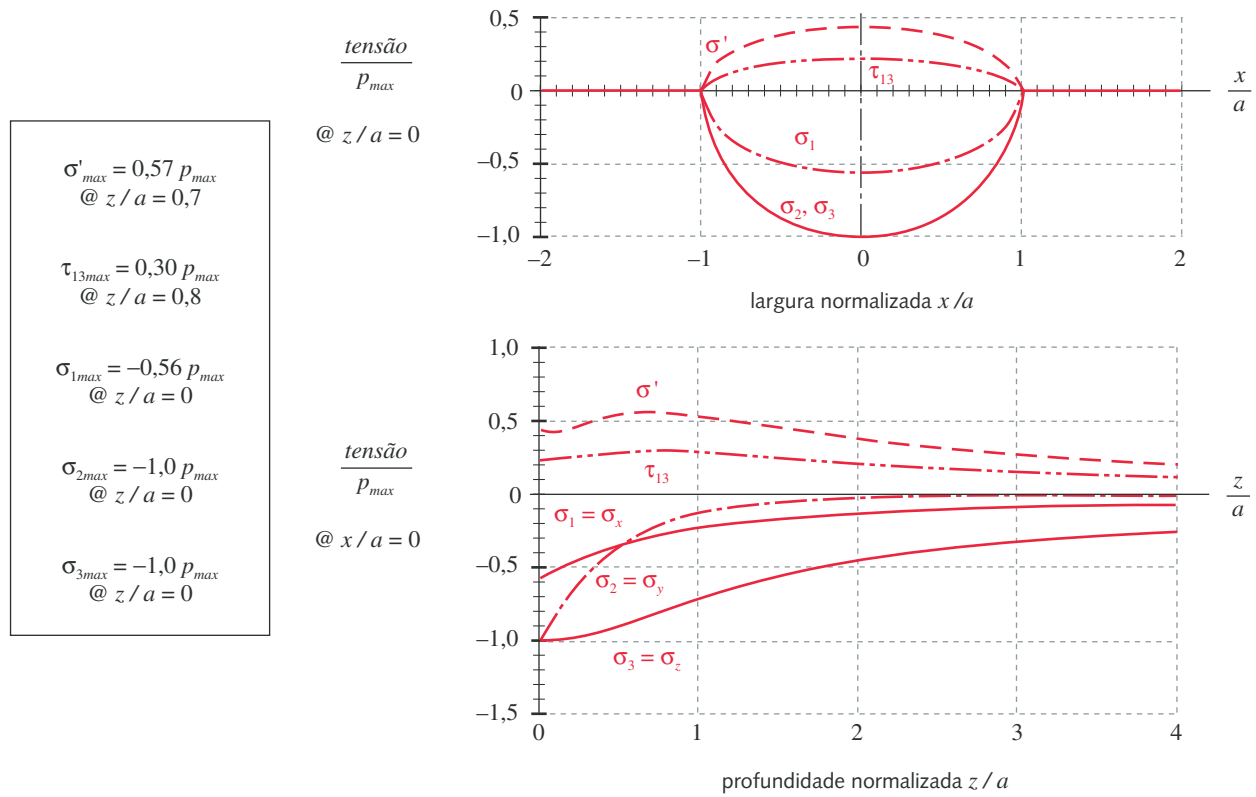



FIGURA 7-17

Distribuições das tensões principais, de cisalhamento máxima e de von Mises para cilindros de aço sob carregamento estático ou em rolamento puro.

Na superfície, na linha de centro, as máxima tensões normais aplicadas são

$$\sigma_x = \sigma_z = -p_{max}$$
$$\sigma_y = -2\nu\, p_{max} \tag{7.17a}$$

Essas são tensões principais, já que não há tensões de cisalhamento aplicadas. A máxima tensão de cisalhamento τ_{13} no eixo z, que resulta da combinação das tensões do círculo de Mohr, fica abaixo da superfície, como no caso do contato entre esferas. Para dois cilindros de aço em contato estático, o valor de pico e a localização da máxima tensão de cisalhamento são[19]

$$\tau_{13_{max}} = 0{,}304\, p_{max}$$
$$z_{@\tau_{max}} = 0{,}786a \tag{7.17b}$$

No entanto, observe na Figura 7-17 que a tensão de cisalhamento não é nula no eixo z, mas vale 0,22 p_{max} na superfície, e não tem grandes variações para profundidades de $0 < z < 2a$. A Figura 7-18 mostra a distribuição tridimensional de tensões normais e subsuperficiais de cisalhamento em contato cilíndrico.[35]

(*a*) Tensão normal σ_x

Tensão de cisalhamento [MPa]

(*b*) Tensão de cisalhamento τ_{xy}

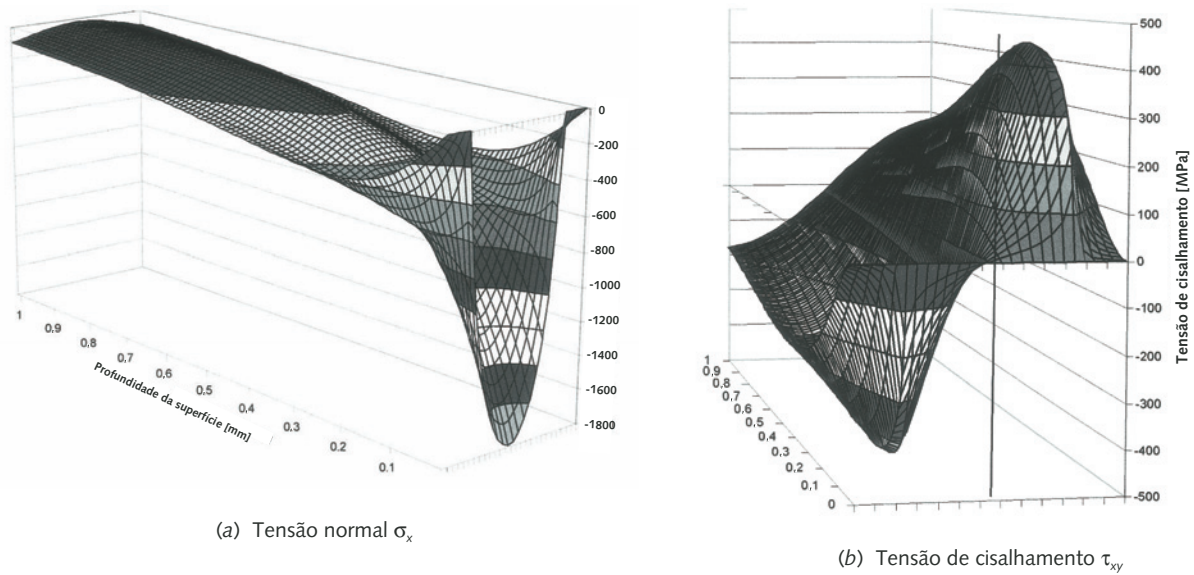



FIGURA 7-18

Distribuição de tensão superficial em contato cilíndrico.[35]

EXEMPLO 7-2

Tensões no contato entre cilindros

Problema **Uma roda de uma ponte rolante rola vagarosamente sobre um trilho. Qual é o tamanho da região de contato e quais são as tensões?**

Dados **A roda tem 12 in de diâmetro por 0,875 in de espessura e o trilho é plano. Ambas as partes são de aço. A carga radial é de 5000 lb.**

Hipóteses **A velocidade angular é suficientemente pequena para poder considerá-lo um carregamento estático.**

Solução

1 Primeiramente, determine o tamanho da região de contato para o qual as constantes geométrica e dos materiais são calculadas pelas Equações 7.15*a* e 7.9*a*.

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + 0\right) = 0{,}083 \qquad (a)$$

Observe o raio de curvatura infinito para R_2.

$$m_1 = m_2 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} = \frac{1 - 0{,}28^2}{3E7} = 3{,}072E - 8 \qquad (b)$$

Observe que os materiais são os mesmos para os dois corpos, no exemplo. As constantes geométrica e dos materiais podem, agora, ser usadas na Equação 7.15*b*.

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1 + m_2}{B}\frac{F}{L}} = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{2\left(3,072E-8\right)}{0,083}\left(\frac{5000}{0,875}\right)} = 0,051\ 8 \text{ in} \qquad (c)$$

onde a é a metade da largura da região de contato. A área da região de contato retangular é:

$$área = 2aL = 2\left(0,051\ 8\right)\left(0,875\right) = 0,091 \text{ in}^2 \qquad (d)$$

2 As pressões de contato média e máxima são obtidas pelas Equações 7.14*b* e *c*.

$$p_{média} = \frac{F}{área} = \frac{5000}{0,090\,63} = 55169 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi aL} = \frac{2\left(5000\right)}{\pi\left(0,051789\right)\left(0,875\right)} = 70243 \text{ psi} \qquad (f)$$

3 As máximas tensões normais no centro da região de contato na superfície são encontradas usando-se as Equações 7.17*a*.

$$\sigma_{z_{max}} = \sigma_{x_{max}} = -p_{max} = -70243 \text{ psi} \qquad (g)$$

$$\sigma_{y_{max}} = -2\nu p_{max} = -2\left(0,28\right)\left(70243\right) = -39336 \text{ psi} \qquad (h)$$

4 A máxima tensão de cisalhamento e sua localização (profundidade) são definidas pelas Equações 7.17*b*.

$$\tau_{13_{max}} = 0,304\,p_{max} = 0,304\left(70243\right) = 21354 \text{ psi}$$
$$z_{@\tau_{max}} = 0,786a = 0,786\left(0,0518\right) = 0,041 \text{ in} \qquad (i)$$

5 Todas as tensões encontradas estão localizadas no eixo z e as tensões normais são principais. Essas tensões são aplicadas tanto na roda quanto no trilho, já que ambos são de aço.

6 Os arquivos EX07-02 podem ser encontrados no CD-ROM que acompanha este livro.

7.10 CONTATO GERAL

Quando a geometria de dois corpos em contato têm formas curvas quaisquer, a região de contato é elíptica e a distribuição de pressões é um semielipsoide, como se pode ver na Figura 7-11*a*. Mesmo a superfície curva mais geral pode ser representada por dois raios de curvatura principais em uma pequena região, com um erro mínimo. O tamanho da região de contato, para a maioria dos materiais usados nessas aplicações, é tão pequeno que essa aproximação é razoável. Assim, a curvatura combinada de cada corpo é representada por dois raios de curvatura mutuamente ortogonais no ponto de contato.

Pressão de contato e região de contato no caso geral

A pressão de contato é máxima (p_{max}) no centro e nula nas bordas. A força total aplicada na região de contato é igual ao volume do semielipsoide:

$$F = \frac{2}{3}\pi\, a b\, p_{max} \tag{7.18a}$$

onde a é o semidiâmetro maior e b o semidiâmetro menor da região elíptica de contato. Resolvendo para a pressão máxima:

$$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi ab} \tag{7.18b}$$

A pressão média na região de contato é a força aplicada dividida por sua área:

$$p_{média} = \frac{F}{área} = \frac{F}{\pi ab} \tag{7.18c}$$

e, substituindo a Equação 7.8c na 7.8b, obtém-se

$$p_{max} = \frac{3}{2}P_{média} \tag{7.18d}$$

Devem-se definir duas constantes geométricas que dependem dos raios de curvatura dos dois corpos,

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}\right) \tag{7.19a}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.19b}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \tag{7.19c}$$

onde R_1 e R_1' são os dois raios principais de curvatura do corpo 1, R_2 e R_2' são os raios principais de curvatura do corpo 2,* e θ é o ângulo entre os planos contendo R_1 e R_2.

As dimensões da região de contato a e b são, então, calculadas a partir de

$$a = k_a \sqrt[3]{\frac{3F(m_1 + m_2)}{4A}} \qquad b = k_b \sqrt[3]{\frac{3F(m_1 + m_2)}{4A}} \tag{7.19d}$$

onde m_1 e m_2 são as constantes de material, como definido na Equação 7.9a e os valores de k_a e k_b são obtidos na Tabela 7-5, correspondendo ao valor de ϕ da Equação 7.19c.

* Os quatro medidos em planos mutuamente perpendiculares.

Tabela 7-5 Fatores para uso na Equação 7.19*d*

ϕ	0	10	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
k_a	∞	6,612	3,778	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1
k_b	0	0,319	0,408	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1

Fontes: H. Hertz, *Contact of Elastic Solids*, in *Miscellaneous Papers*, P. Lenard, ed. Macmillan & Co. Ltd.: London, 1896, pp. 146-162. H. L. Whittemore and S. N. Petrenko, *Natl. Bur. Std. Tech. Paper* 201, 1921.

Estimativas mais precisas podem ser obtidas pela interpolação na tabela. As funções foram ajustadas aos dados na Tabela 7-5 e podem ser utilizadas para calcular os valores aproximados de k_a e k_b para qualquer valor do ângulo ϕ (em graus) de:

$$k_a = 50{,}192\phi^{-0{,}86215} \qquad (R = 0{,}99927)$$

$$k_b = 0{,}0045333 + 0{,}043581\phi - 0{,}0017292\phi^2 + 3{,}7374E-5\phi^3 - 3{,}7418E-7\phi^4 + 1{,}4207E-9\phi^5 \qquad (R = 0{,}99949) \tag{7.19e}$$

A pressão de distribuição dentro do semielipsoide é

$$p = p_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{7.20}$$

a qual é uma elipse como a mostrada na Figura 7-11.

Distribuições de tensões no contato geral

As distribuições de tensões no material são similares àquelas mostradas na Figura 7-17 para o caso de contato cilindro-cilindro. As tensões normais são todas de compressão e são máximas na superfície. Elas diminuem rapidamente com a profundidade e quando se afastam da linha de centro. Na superfície na linha de centro, as máximas tensões normais são[19]

$$\sigma_x = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{b}{a+b}\right]p_{max}$$
$$\sigma_y = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{a}{a+b}\right]p_{max} \tag{7.21a}$$
$$\sigma_z = -p_{max}$$

$$k_3 = \frac{b}{a} \qquad k_4 = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \tag{7.21b}$$

Essas tensões aplicadas também são tensões principais. A máxima tensão de cisalhamento na superfície, associada a essas tensões, pode ser obtida pela Equação 4.5. Ela ocorre imediatamente abaixo da superfície, sendo sua profundidade dependente da razão entre os semidiâmetros da elipse de contato. Para $b / a = 1{,}0$, a maior tensão de cisalhamento ocorre em $z = 0{,}63a$, *e* para $b / a = 0{,}34$ em $z = 0{,}24a$. A magnitude de seu pico é, aproximadamente, $0{,}34\, p_{max}$.[19]

Na extremidade do eixo maior da elipse de contato, a tensão de cisalhamento na superfície é[19]

$$\tau_{xz} = (1-2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left(\frac{1}{k_4}\tanh^{-1}k_4 - 1\right)p_{max} \tag{7.21c}$$

Na extremidade do eixo menor da elipse de contato, a tensão de cisalhamento na superfície é

$$\tau_{xz} = (1-2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left[1 - \frac{k_3}{k_4}\tan^{-1}\left(\frac{k_4}{k_3}\right)\right]p_{max} \tag{7.21d}$$

A localização da maior tensão de cisalhamento depende do parâmetro k_3 da elipse. Em alguns casos ela é como mostrado na Equação 7.21*c*, mas em outros ela se move para o centro da elipse e pode ser obtida pelas tensões principais na Equação 7.21*a* usando a Equação 4.5.

EXEMPLO 7-3

Tensões em um seguidor de camo de rolete abaulado

Problema **Um seguidor de camo de rolete abaulado possui um suave raio, transversal à sua direção de rolamento, para eliminar a necessidade de alinhamento crítico de seu eixo com o do camo. O raio de curvatura do camo e a carga dinâmica variam ao redor de sua circunferência. Qual é o tamanho da região de contato entre camo e seguidor e quais são as tensões críticas?**

Dados **O raio do rolete é de 1 in com um raio de abaulamento de 20 in, a 90° em relação ao raio do rolete. O raio de curvatura do camo no ponto de máxima carga é 3,46 in e ele é plano axialmente. Os eixos de rotação do camo e do rolete são paralelos, o que torna o ângulo entre os dois corpos igual a zero. A força é de 250 lb, normal ao plano de contato.**

Hipóteses **Os materiais são aço. O movimento relativo é de rolamento, com menos de 1% de deslizamento.**

Solução

1 Encontre as constantes dos materiais pela Equação 7.9*b*.

$$m_1 = m_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} = \frac{1-0,28^2}{3E7} = 3,072E-8 \qquad (a)$$

2 São necessárias duas constantes geométricas pelas Equações 7.19*a*.

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{20}+\frac{1}{3,46}+\frac{1}{\infty}\right) = 0,6695 \qquad (b)$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(c)$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{3,46}-\frac{1}{\infty}\right)^2+2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{3,46}-\frac{1}{\infty}\right)\cos 2(0)\right]^{\frac{1}{2}} = 0,6195$$

O ângulo ϕ é obtido pela sua definição,

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0,6195}{0,6695}\right) = 22,284° \qquad (d)$$

e é usado na Tabela 7-5 para se obterem os fatores k_a e k_b.

$$k_a = 50{,}192\phi^{-0{,}86215} = 50{,}192(22{,}284)^{-0{,}86215} = 3{,}455$$

$$k_b = 0{,}0045333 + 0{,}043581(22{,}284) - 0{,}0017292(22{,}284)^2 + 3{,}7374E-5(22{,}284)^3$$
$$-3{,}7418E-7(22{,}284)^4 + 1{,}4207E-9(22{,}284)^5 = 0{,}415 \qquad (e)$$

3 As constantes geométricas e dos materiais podem, agora, ser usadas na Equação 7.19*d*.

$$a = k_a \sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} = 3{,}445\sqrt[3]{\frac{3(250)2(3{,}072E-8)}{4(0{,}6695)}} = 0{,}0892$$

$$(f)$$

$$b = k_b \sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} = 0{,}415\sqrt[3]{\frac{3(250)2(3{,}072E-8)}{4(0{,}6695)}} = 0{,}0107$$

onde a é o semidiâmetro maior e b o semidiâmetro menor da elipse da região de contato. A área da região de contato é, portanto,

$$área = \pi ab = \pi(0{,}0892)(0{,}0107) = 0{,}0030 \text{ in}^2 \qquad (g)$$

4 As pressões de contato média e máxima podem ser calculadas pelas Equações 7.18*b* e *c*.

$$p_{média} = \frac{F}{área} = \frac{250}{0{,}003} = 83281 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$p_{max} = \frac{3}{2}p_{média} = \frac{3}{2}(83281) = 124921 \text{ psi} \qquad (i)$$

5 As máximas tensões normais, no centro da região de contato na superfície, são obtidas usando as Equações 7.21*a*.

$$\sigma_x = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{b}{a+b}\right]p_{max}$$
$$= -\left[2(0{,}28) + (1-2(0{,}28))\frac{0{,}0107}{0{,}0892+0{,}0107}\right]124921 = -75849 \text{ psi}$$
$$\sigma_y = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{a}{a+b}\right]p_{max} \qquad (j)$$
$$= -\left[2(0{,}28) + (1-2(0{,}28))\frac{0{,}0892}{0{,}0892+0{,}0107}\right]124921 = -119028 \text{ psi}$$
$$\sigma_z = -p_{max} = -124921 \text{ psi}$$

Essas tensões são principais: $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$. A máxima tensão de cisalhamento associada a elas, na superfície, será de (da Equação 4.5)

$$\tau_{13} = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right| = \left|\frac{-75849 + 124921}{2}\right| = 24536 \text{ psi (na superfície)} \qquad (k)$$

6 A maior tensão de cisalhamento sob a superfície, no eixo z, é aproximadamente

$$\tau_{13} \cong 0{,}34\,p_{max} = 0{,}34(124921) \cong 42168 \text{ psi (sob a superfície)} \qquad (l)$$

7 Todas as tensões achadas até agora se encontram na linha de centro da região de contato. Nas bordas da região, na superfície, também existirá uma

tensão de cisalhamento. Duas constantes são achadas pela Equação 7.21*b* para esses cálculos.

$$k_3 = \frac{b}{a} = \frac{0{,}0107}{0{,}0892} = 0{,}120$$

$$k_4 = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{0{,}0892}\sqrt{0{,}0892^2 - 0{,}0107^2} = 0{,}993 \qquad (m)$$

Essas constantes são usadas nas Equações 7.21*c* e *d*, para se determinar as tensões de cisalhamento na superfície, nas extremidades dos eixos principais.

$$\tau_{xz} = (1 - 2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left(\frac{1}{k_4}\tanh^{-1} k_4 - 1\right)p_{max}$$

$$\tau_{xz} = (1 - 0{,}56)\frac{0{,}120}{(0{,}993)^2}\left(\frac{1}{0{,}993}\tanh^{-1} 0{,}993 - 1\right)124921 = 12253 \text{ psi} \qquad (n)$$

$$\tau_{xz} = (1 - 2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left[1 - \frac{k_3}{k_4}\tan^{-1}\left(\frac{k_4}{k_3}\right)\right]p_{max}$$

$$\tau_{xz} = (1 - 0{,}56)\frac{0{,}120}{(0{,}993)^2}\left[1 - \frac{0{,}120}{0{,}993}\tan^{-1}\left(\frac{0{,}993}{0{,}120}\right)\right]124921 = 5522 \text{ psi} \qquad (o)$$

8 Os arquivos EX07-03 podem ser encontrados no CD-ROM que acompanha este livro.

7.11 TENSÕES DE CONTATO DINÂMICAS

As equações apresentadas anteriormente para tensões de contato pressupõem que o carregamento é de rolamento puro. Quando rolamento e deslizamento estão presentes, o campo de tensões é distorcido pelo carregamento tangencial. A Figura 7-19 mostra um estudo fotoelástico de um par camo-seguidor[20] carregado estática (*a*) e dinamicamente com deslizamento (*b*). A distorção do campo de tensões do movimento de deslizamento pode ser vista na parte *b*. Essa situação corresponde a uma combinação de um contato com rolamento e deslizamento com velocidade relativamente baixa. Quanto maior o deslizamento, maior a distorção do campo de tensões.

Efeito da componente de deslizamento nas tensões de contato

Smith e Lui[18] analisaram o caso de rolos paralelos sujeitos à combinação de deslizamento e rolamento[§] e desenvolveram as equações para a distribuição de tensões abaixo do ponto de contato. A força no deslizamento (atrito) tem um efeito significativo no campo de tensões. As tensões podem ser expressas em componentes separadas, sendo um conjunto devido às forças de atrito tangenciais (identificadas pelo índice *t*) e outro devido ao carregamento normal sobre os rolos (identificadas pelo índice *n*). Elas são, então, combinadas para se obter a situação completa de tensões. O campo de tensões pode ser de duas dimensões, em um rolo bem curto, ou em um camo de chapa ou engrenagem fina, onde se assume o estado plano de tensões. Se os rolos são axialmente longos, então um estado plano de deformação existirá nas regiões afastadas das extremidades, originando um estado triplo de tensões.

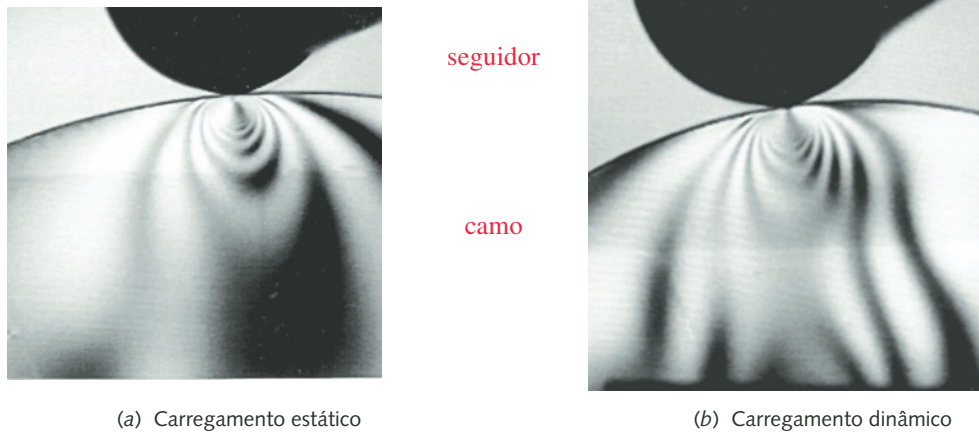
[§] N. de R. T.: O autor chama de *"rolamento puro"* a situação em que a força tangencial é desprezível e de situação *"com deslizamento"* quando a força tangencial não é desprezível. Vale lembrar ao leitor que mesmo sem deslizamento a força tangencial pode ser grande, caso contrário um carro não conseguiria acelerar em uma subida.

(*a*) Carregamento estático (*b*) Carregamento dinâmico

FIGURA 7-19

Estudo fotoelástico das tensões para dois cilindros em (*a*) contato estático e (*b*) carregamento dinâmico com rolamento puro. Fonte: V. S. Mahkijani, *Study of Contact Stresses as Developed on a Radial Cam Using Photoelastic Model and Finite Element Analysis*, M. S. Thesis, Worcester Polytechnic Institute, 1984.

A geometria de contato é como mostrada na Figura 7-11*b*, com o eixo x alinhado à direção do movimento, o eixo z no sentido radial em relação aos rolos e o eixo y axial aos rolos. As tensões devido ao carregamento normal, p_{max}, são

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_n} &= -\frac{z}{\pi}\left[\frac{a^2 + 2x^2 + 2z^2}{a}\alpha - \frac{2\pi}{a} - 3x\beta\right]p_{max} \\
\sigma_{z_n} &= -\frac{z}{\pi}\left[a\beta - x\alpha\right]p_{max} \\
\tau_{xz_n} &= -\frac{1}{\pi}z^2\alpha\, p_{max}
\end{aligned} \tag{7.22a}$$

e as tensões devido à força de atrito unitária, f_{max}, são

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_t} &= -\frac{1}{\pi}\left[\left(2x^2 - 2a^2 - 3z^2\right)\alpha + 2\pi\frac{x}{a} + 2\left(a^2 - x^2 - z^2\right)\frac{x}{a}\beta\right]f_{max} \\
\sigma_{z_t} &= -\frac{1}{\pi}z^2\alpha\, f_{max} \\
\tau_{xz_t} &= -\frac{1}{\pi}\left[\left(a^2 + 2x^2 + 2z^2\right)\frac{z}{a}\beta - 2\pi\frac{z}{a} - 3xz\alpha\right]f_{max}
\end{aligned} \tag{7.22b}$$

onde os fatores α e β são dados por

$$\alpha = \frac{\pi}{k_1}\frac{1 - \sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}}{\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}} + \left(\dfrac{k_1 + k_2 - 4a^2}{k_1}\right)}} \tag{7.22c}$$

$$\beta = \frac{\pi}{k_1} \frac{1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} + \left(\frac{k_1 + k_2 - 4a^2}{k_1} \right)}} \qquad (7.22d)$$

$$k_1 = (a+x)^2 + z^2 \qquad k_2 = (a-x)^2 + z^2 \qquad (7.22e)$$

A força de atrito unitária f_{max} é determinada pela força normal e pelo coeficiente de atrito μ.

$$f_{max} = \mu\, p_{max} \qquad (7.22f)$$

As variáveis independentes nessas equações são, então, as coordenadas x, z na seção transversal do rolo, referentes ao ponto de contato, à metade da largura da região de contato a, e à máxima pressão normal p_{max}, no ponto de contato.

As Equações 7.22 definem o comportamento das funções de tensão abaixo da superfície, mas quando $z = 0$, os fatores α e β tornam-se infinitos e essas equações não são válidas. Outras fórmulas são necessárias para se determinar as tensões na superfície da região de contato.

Quando $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{se } |x| \le a \quad \text{então } \sigma_{x_n} = -p_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{senão } \sigma_{x_n} = 0 \\ &\sigma_{z_n} = \sigma_{x_n} \\ &\tau_{xz_n} = 0 \end{aligned} \qquad (7.23a)$$

$$\begin{aligned} &\text{se } x \ge a \text{ então } \sigma_{x_t} = -2f_{max}\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \\ &\text{se } x \le -a \text{ então } \sigma_{x_t} = -2f_{max}\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \\ &\text{se } |x| \le a \text{ então } \sigma_{x_t} = -2f_{max}\frac{x}{a} \end{aligned} \qquad (7.23b)$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{z_t} = 0 \\ &\text{se } |x| \le a \text{ então } \tau_{xz_t} = -f_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{senão } \tau_{xz_t} = 0 \end{aligned} \qquad (7.23c)$$

A tensão total em cada plano cartesiano é determinada pela sobreposição das componentes relativas aos carregamentos normal e tangencial:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t} \\ \sigma_z &= \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t} \end{aligned} \qquad (7.24a)$$

Para rolos curtos sob o estado plano de tensão, σ_y é nula, mas se os rolos são axialmente longos, então o estado plano de deformação ocorrerá longe das extremidades e as tensões na direção y serão:

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \tag{7.24b}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Essas tensões são máximas na superfície e diminuem com a profundidade. Exceto quando a força tangencial for muito pequena com relação à força normal (< aprox. 1/9),[18, 21] a máxima tensão de cisalhamento ocorre também na superfície, diferentemente do caso de rolamento puro. Um programa de computador foi escrito para analisar as Equações 7.22 e 7.23 para as tensões na superfície e para plotá-las. (Ver o arquivo CONTACT.EXE.) As tensões são todas normalizadas com relação à máxima pressão normal p_{max} e as distâncias na região de contato foram normalizadas em relação à metade de largura, a. Um coeficiente de atrito de 0,33 e rolos de aço com $\nu = 0{,}28$ foram assumidos para os exemplos. As magnitudes e formas das distribuições de tensão são funções desses fatores.

A Figura 7-20*a* mostra as tensões na direção de x na superfície, as quais são consequência dos carregamentos normal e tangencial. Ela também mostra sua soma, referente à primeira das Equações 7.24*a*. Observe que a componente de tensão σ_{xt}, devido à força tangencial, é de tração desde o ponto de contato até a borda da região de contato e além. Isso não deveria surpreender, já que se pode imaginar que a força tangencial tenta acumular material na frente do ponto de contato e esticá-lo atrás daquele ponto, como um tapete que se dobra na frente de um objeto que se tente deslizar por ele. A componente de tensão σ_{xn}, originada pela força normal, é de compressão em toda a região. No entanto, a soma das duas componentes de σ_x tem um valor significativo de tração de duas vezes o coeficiente de atrito (aqui 0,66 p_{max}) e um pico de compressão de aproximadamente −1,2 p_{max}. A Figura 7-20*b* mostra todas as tensões aplicadas nas direções *x, y* e *z* na superfície da zona de contato. Observe que os campos de tensão na superfície se estendem além da região de contato quando uma força tangencial está presente, contrariamente à situação de rolamento puro, onde elas se estendem além da superfície de contato apenas abaixo da superfície. (Ver a Figura 7-17 e o programa CONTACT.EXE.)

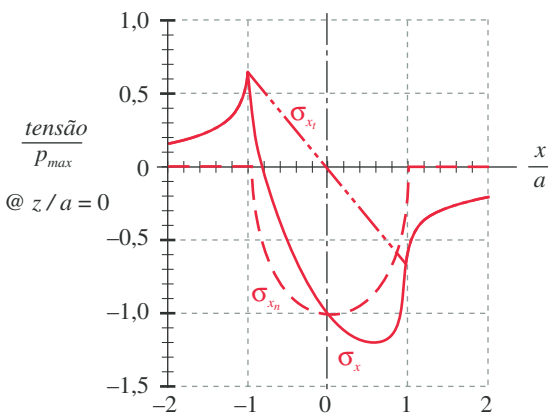
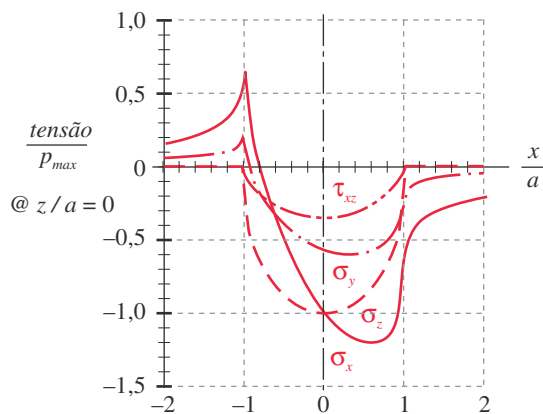
A Figura 7-21 mostra as tensões principais, a máxima de cisalhamento e a tensão equivalente de von Mises para a situação onde ocorre o estado plano de deformações para as tensões aplicadas da Figura 7-20. Observe que a máxima magnitude da tensão principal de compressão é aproximadamente 1,38 p_{max}

(*a*) Componentes normal e tangencial de σ_x

(*b*) Todas as tensões aplicadas na superfície da região de contato

FIGURA 7-20

Tensões tangenciais, normais e de cisalhamento aplicadas na superfície em cilindros com carregamento combinado de rolamento e deslizamento, com $\mu = 0{,}33$.

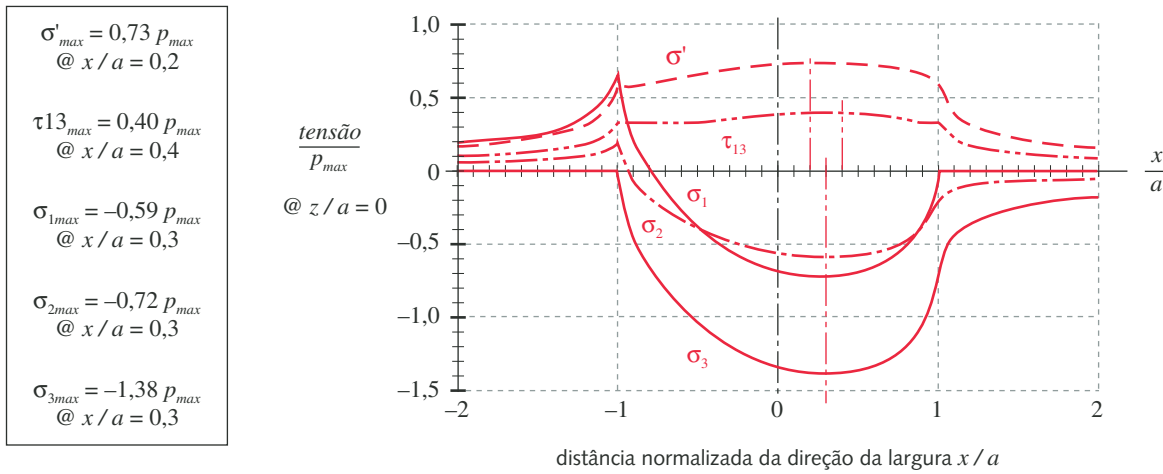



FIGURA 7-21

Tensões principais e de von Mises na superfície para cilindros com movimento combinado de rolamento e deslizamento com $\mu = 0{,}33$.

e a maior tensão principal de tração é 0,66 p_{max} na borda traseira da região de contato. A presença de uma tensão tangencial de cisalhamento aplicada nesse exemplo aumenta a tensão máxima de compressão em 40% em relação ao caso de rolamento puro e introduz uma tensão de tração no material. A tensão de cisalhamento principal atinge seu valor máximo de 0,40 p_{max} para $x / a = 0{,}4$. Todas as tensões mostradas nas Figuras 7-20 e 7-21 estão nas superfícies dos rolos.

Abaixo da superfície, as magnitudes das tensões de compressão, devido ao carregamento normal, diminuem. No entanto, a tensão de cisalhamento τ_{xz_n}, causada pelo carregamento normal, aumenta com a profundidade, tornando-se máxima abaixo da superfície em $z = 0{,}5a$, como é mostrado na Figura 7-22. Observe a troca de sinal no centro da zona de contato. Há uma componente alternada de tensões de cisalhamento agindo em cada elemento diferencial de material à medida que passa pela zona de contato. A amplitude pico a pico dessa tensão de cisalhamento alternada no plano xz é maior, em magnitude, que a máxima amplitude da tensão de cisalhamento e é considerada, por alguns, como responsável por falhas de crateração na subsuperfície.[17]

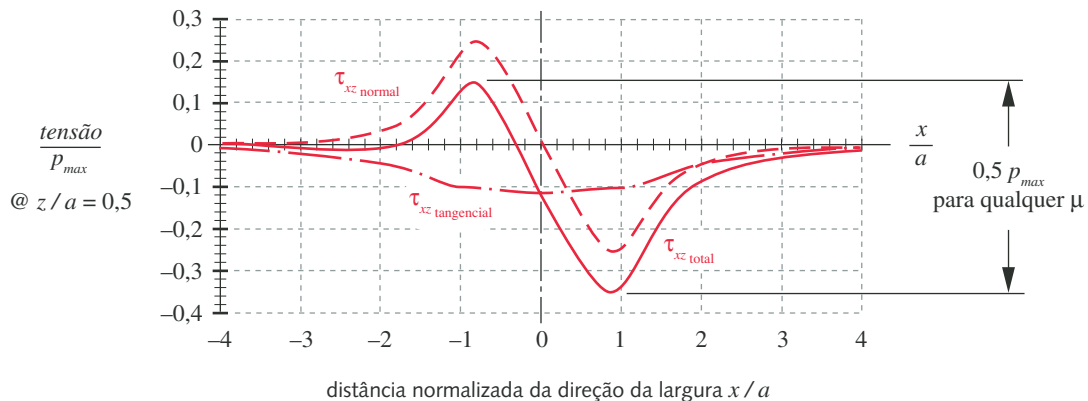



FIGURA 7-22

Tensões de cisalhamento abaixo da superfície para $z / a = 0{,}5$ para cilindros com movimento combinado de rolamento e deslizamento – traçado com $\mu = 0{,}33$.

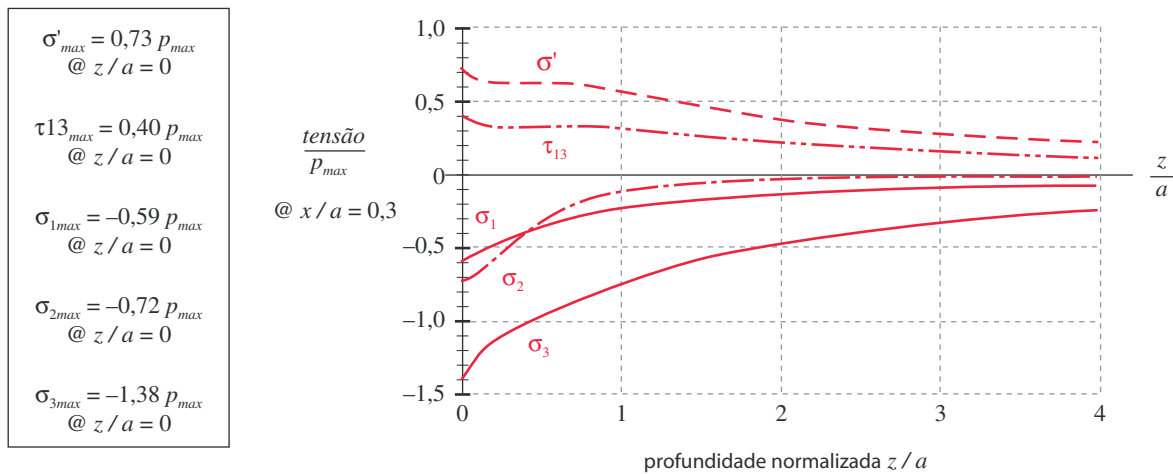



FIGURA 7-23

Tensões principais e de von Mises abaixo da superfície para $x/a = 0{,}3$ para cilindros com movimento combinado de rolamento e deslizamento com $\mu = 0{,}33$.

A Figura 7-23 mostra a variação das tensões principais, da máxima de cisalhamento e de von Mises (calculada para $\mu = 0{,}33$ e um estado plano de deformação) *versus* a profundidade normalizada z / a, para o plano $x / a = 0{,}3$ (onde as tensões principais são máximas, como mostrado na Figura 7-21). Todas as tensões são máximas na superfície. As tensões principais diminuem rapidamente com a profundidade, mas as de cisalhamento e de von Mises se mantêm praticamente constante sobre a profundidade normalizada $1a$.

Na superfície, a máxima tensão de cisalhamento é relativamente uniforme ao longo da largura da região de contato, com um pico de 0,4 para $x / a = 0{,}4$, quando $\mu = 0{,}33$, como mostra Figura 7-21. Essa posição do pico de τ_{max} se move em relação ao centro da região com o aumento da profundidade, mas sua magnitude varia apenas levemente com a profundidade. A Figura 7-24 traça o maior valor de pico da tensão de cisalhamento τ_{13}, ocorrendo em um valor de x qualquer na região de contato, de modo que é um gráfico composto das tensões de cisalhamento máximas em cada plano z. Para $0 < \mu < 0{,}5$, o valor máximo permanece entre 60-80% de seu maior valor no primeiro trecho de profundidade a e ainda continua entre 58-70% de seu valor maior até $z / a = 2{,}0$. Quando o coeficiente de atrito aumenta para 0,5 ou mais, a máxima tensão de cisalhamento normalizada se torna igual a μ e é uniforme na superfície de contato.

A pouca variação de τ_{max} para pequenas profundidades z talvez possa explicar por que algumas falhas por crateração aparentam iniciar na superfície e

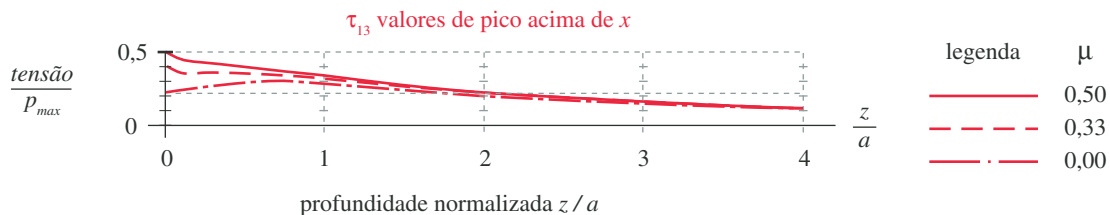



FIGURA 7-24

Valores de pico da máxima tensão de cisalhamento para todos os valores de x/a para cilindros com movimento combinado de rolamento e deslizamento com $0 \le \mu \le 0{,}5$.

outras, logo abaixo dela. Como a magnitude da máxima tensão de cisalhamento é relativamente uniforme em toda região próxima à superfície, qualquer inclusão de material naquela região gera uma concentração de tensão e serve como um ponto para o início de trincas. O fato de o valor de pico da máxima tensão de cisalhamento ocorrer a uma diferente posição transversal em diferentes profundidades dentro da zona de contato é irrelevante, já que uma inclusão em qualquer profundidade particular passará por aquela posição uma vez por revolução e será exposta ao pico de tensão.

As funções de tensão podem ser calculadas e plotadas para qualquer profundidade, usando-se os programas CONTACT, SURFCYLZ e SURFCYLX no CD. Esses programas resolvem e plotam as Equações 7.22, 7.23 e 7.24 para qualquer geometria de rolo, materiais, carregamento e coeficiente de atrito especificados pelo usuário, para qualquer gama de posições na superfície e abaixo.

EXEMPLO 7-4

Tensões em cilindros sujeitos ao rolamento e deslizamento combinados

Problema **Um par de cilindros de calandragem estão em contato e em movimento, com uma combinação de rolamento e deslizamento. Encontre a máxima tensão de tração, de compressão e de cisalhamento nos cilindros.**

Dados **Os raios dos cilindros são 1,25 e 2,5 in e têm 24 in de comprimento. A força é de 5000 lb, normal ao plano de contato.**

Hipóteses **Ambos os materiais são aço. O coeficiente de atrito é de 0,33.**

Solução

1 A geometria da região de contato é determinada da mesma maneira como foi no Exemplo 7-2. Calcule as constantes de material da Equação 7.9*a*.

$$m_1 = m_2 = \frac{1+\nu_1^2}{E_1} = \frac{1+0,28^2}{3E7} = 3,072E-8 \qquad (a)$$

A constante geométrica é achada pela Equação 7.15*a*

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1,25}+\frac{1}{2,5}\right) = 0,600 \qquad (b)$$

e a metade da largura de contato pela Equação 7.15*b*

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1+m_2}{B}\frac{F}{L}} = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{2(3,072E-8)}{0,600}\left(\frac{5000}{24}\right)} = 0,003685 \text{ in} \qquad (c)$$

onde a é a metade da largura da região de contato. A área retangular de contato é, então,

$$\acute{a}rea = 2aL = 2(0,0023)(24) = 0,1769 \text{ in}^2 \qquad (d)$$

2 As pressões de contato média e máxima podem, agora, ser determinadas pelas Equações 7.14*b* e *c*.

$$p_{m\acute{e}dia} = \frac{F}{\acute{a}rea} = \frac{5000}{0,1769} = 28266 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi a L} = \frac{2(5000)}{\pi(0,0037)24} = 35989 \text{ psi} \qquad (f)$$

A pressão tangencial é obtida pela Equação 7.22*f*:

$$f_{max} = \mu p_{max} = 0,33(35989) = 11876 \text{ psi} \qquad (g)$$

3 Com $\mu = 0,33$, as tensões principais na região de contato serão máximas na superfície ($z = 0$) com $x = 0,3a$ da linha de centro, como mostrado nas Figuras 7-20 e 7-22. As componentes das tensões aplicadas são definidas pela Equação 7.23*a* para a força normal e pela Equação 7.23*b* para a força tangencial.

$$\sigma_{x_n} = -p_{max}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = -35989\sqrt{1-0,3^2} = -34331 \text{ psi}$$

$$\sigma_{x_t} = -2 f_{max}\frac{x}{a} = -2(11876)(0,3) = -7126 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$\sigma_{z_n} = -p_{max}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = -35989\sqrt{1-0,3^2} = -34331 \text{ psi} \qquad (i)$$

$$\sigma_{z_t} = 0 \qquad \tau_{xz_n} = 0$$

$$\tau_{xz_t} = -f_{max}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = -11876\sqrt{1-0,3^2} = -11329 \text{ psi} \qquad (j)$$

4 As Equações 7.24*a* e *b* podem ser utilizadas para o cálculo das tensões resultantes ao longo dos eixos *x*, *y* e *z*.

$$\sigma_x = \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t} = -34331 - 7126 = -41457 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} = -34331 + 0 = -34331 \text{ psi} \qquad (l)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t} = 0 - 11329 = -11329 \text{ psi} \qquad (m)$$

5 Uma vez que os cilindros são longos, existe o estado plano de deformação. A tensão na terceira dimensão é obtida da Equação 7.24*b*:

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) = 0,28(-41457 + 34331) = -21221 \text{ psi} \qquad (n)$$

6 Ao contrário do caso de rolamento puro, essas tensões não são principais, devido à existência de tensões de cisalhamento. As tensões principais podem ser calculadas pela Equação 4.4, usando-se um programa para encontrar as raízes de equações cúbicas (veja o arquivo STRESS3D ou o programa MOHR).

$$\sigma_1 = -21221 \text{ psi}$$
$$\sigma_2 = -26018 \text{ psi} \qquad (o)$$
$$\sigma_3 = -49771 \text{ psi}$$

A máxima tensão de cisalhamento é obtida das tensões principais usando-se a Equação 4.5.

$$\tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|-21221 + 49771|}{2} = 14275 \text{ psi} \qquad (p)$$

7 As tensões principais são máximas na superfície, como pode ser visto nas Figuras 7-20 e 7-22.

8 Os arquivos EX07-04 podem ser encontrados no CD-ROM que acompanha este livro.

7.12 MODELOS DE FALHA POR FADIGA SUPERFICIAL – CONTATO DINÂMICO

Existe, ainda, alguma discordância entre especialistas com relação ao mecanismo de falha real que resulta em crateração e lascamento nas superfícies. A possibilidade de se ter uma tensão de cisalhamento máxima na subsuperfície (em rolamento puro) levou alguns a concluírem que a crateração começa nessa região ou próximo dela. Outros concluíram que a crateração se inicia na superfície. É possível que ambos os mecanismos estejam atuando nesses casos, já que o início de falha se dá usualmente nas imperfeições, que podem estar na ou sob a superfície. A Figura 7-25 mostra trincas tanto superficiais como na subsuperfície em um cilindro de aço cementado sujeito a esforços pesados de rolamento.[22]

Uma extensa pesquisa experimental sobre crateração em contatos de rolamento foi realizada por Way[23] em 1935. Foram feitos mais de 80 ensaios com cilindros de eixos paralelos em contato sob rolamento puro de diferentes materiais, lubrificantes e carregamentos, girando até 18 milhões de ciclos, apesar de que a maioria das amostras falharam entre 0,5*E*6 e 1,5*E*6 ciclos. As amostras foram monitoradas para se detectar o aparecimento de trincas superficiais mínimas, que inevitavelmente antecedem as falhas por crateração, em até 100000 ciclos adicionais na presença de um lubrificante.

Superfícies mais duras e mais lisas têm maior resistência a falhas por crateração. Amostras extremamente polidas não falharam antes de 12*E*6 ciclos. Cilindros nitretados com superfícies bastante duras e núcleos dúcteis e tenazes foram os materiais que mais tempo resistiram entre os ensaiados. **Não ocorreu crateração nas amostras na ausência de óleo**, apesar de o rolamento a seco ter produzido trincas na superfície. As peças com trincas continuaram rolando a seco sem falhas por mais 5*E*6 ciclos até que algum lubrificante fosse adicionado. Então a trinca superficial crescia rapidamente, tornando-se crateras com o formato característico de cabeça de seta, dentro dos próximos 100000 ciclos adicionais.

A explicação sugerida para o efeito nocivo do lubrificante foi que, após a formação de trincas superficiais, orientadas de maneira favorável, elas são preenchidas com óleo quando o cilindro se aproxima e fechadas por ele, pressurizando o

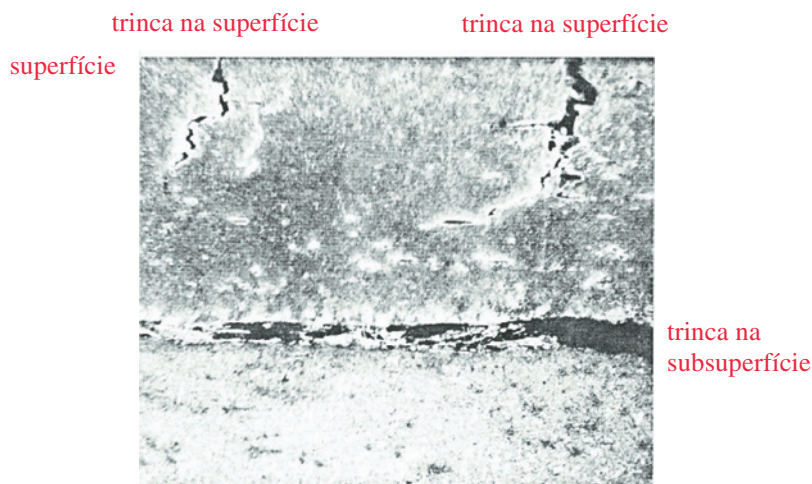



FIGURA 7-25

Fotomicrografia (100x) de trincas na superfície e na subsuperfície em um cilindro cementado e encruado (HRC 52-58) sujeito a um carregamento pesado de rolamento. Fonte: J. D. Graham, *Pitting of Gear Teeth*, in C. Lipson, *Handbook of Mechanical Wear*, U. Mich. Press, 1961, p. 137, com permissão.

fluido aprisionado na trinca. A pressão do fluido gera tensões de tração na ponta da trinca, causando seu rápido crescimento e o consequente surgimento de uma cratera. Lubrificantes de alta viscosidade não eliminaram o contato metal-metal, mas retardaram a falha por crateração, indicando que o fluido tem que conseguir entrar na trinca rapidamente para causar os danos.

Way chegou a várias conclusões a respeito de como se projetar cilindros em contato de rolamento de maneira a se retardar falhas por fadiga de superfície.[23]

1 Não usar óleo (apesar de que ele rapidamente ressaltou que essa não é uma solução prática, já que promove outros tipos de desgaste discutidos em sessões anteriores).
2 Aumentar a viscosidade do lubrificante.
3 Polir as superfícies (entretanto isso é caro de se fazer).
4 Aumentar a dureza da superfície (preferivelmente com um núcleo dúctil e tenaz).

Nenhuma conclusão foi tirada a respeito das razões do surgimento das trincas iniciais na superfície. Embora, no rolamento puro, as tensões de cisalhamento não sejam máximas na superfície, ali elas **são** não nulas em alguns locais (ver Figuras 7-12 e 7-17).

Littmann e Widner[24] efetuaram um extenso estudo analítico e experimental sobre fadiga de contato em 1966 e descreveram cinco diferentes modos de falha no contato com rolamento. Eles estão listados na Tabela 7-6 juntamente com alguns fatores que promovem suas ocorrências. Alguns desses modos se referem à fase de início da trinca e outros à fase de propagação da trinca. Cada um deles será comentado sucintamente, na ordem listada.

ORIGEM DA INCLUSÃO descreve o mecanismo para o surgimento de trincas e é similar à discussão apresentada na Seção 6.1 sobre falha por fadiga. Pressupõe-se que a trinca se origine em um campo de tensões de cisalhamento em superfície ou uma subsuperfície que contenha uma pequena inclusão de causa “externa”. As inclusões mais comumente identificadas são óxidos dos materiais que se formaram durante seu processamento e lá foram capturados. Sua forma é irregular,

Tabela 7-6 Modos de falha na superfície e suas causas

Modo de falha	Fatores que as provocam
Devido à inclusão	Frequência e severidade de óxidos ou outras inclusões duras.
Concentração de tensão geométrica	Geometria da região onde o contato deixa de existir. Deflexões e desalinhamentos. Possíveis efeitos pela espessura do filme lubrificante.
Origem pontual na superfície (OPS)	Baixa viscosidade do lubrificante. Filme elasto-hidrodinâmico fino em comparação com as asperezas nas superfícies de contato. Forças tangenciais e/ou deslizamento acentuado.
Esfoliação (crateras superficiais)	Baixa viscosidade do lubrificante. Frequentemente asperezas na superfície acabada excedem a espessura do filme elasto-hidrodinâmico. Perda da pressão elasto-hidrodinâmica devido a vazamento lateral ou riscos na superfície de contato.
Fadiga abaixo da camada endurecida termoquimicamente	Baixa dureza do núcleo. Camada endurecida fina com relação ao raio de curvatura dos elementos em contato.

Fonte: W. E. Littmann and R. L. Widner, Propagation of Contact Fatigue from Surface and Subsurface Origins, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, vol. 88, pp. 624-636, 1966.

são duros e geram concentração de tensão. Muitos pesquisadores[25, 26, 27] publicaram fotomicrografias de trincas na subsuperfície (ou identificadas de outras maneiras) iniciando-se em inclusões de óxidos. "Essas inclusões de óxidos estão sempre presentes na forma de um fio ou agregados alongados de partículas (...), que proporcionam uma chance muito maior para que um ponto de concentração de tensão esteja localizado em um ponto desfavorável em relação à tensão aplicada."[28] A propagação de uma trinca a partir da inclusão pode permanecer na subsuperfície ou emergir para a superfície. No segundo caso, ela propicia um local para a propagação de pressões hidrostáticas, como descrito anteriormente. De qualquer maneira, resultará em crateração ou lascamento.

A concentração geométrica de tensão (CGT) foi comentada no Capítulo 4. Esse mecanismo pode atuar na superfície quando, por exemplo, uma peça do contato é axialmente menor que a outra (comum em juntas de camo-seguidores e mancais de rolamento). As bordas do cilindro menor geram uma concentração de tensão na linha de contato com o outro cilindro, como é mostrado na Figura 7-26*a*, e a crateração e o lascamento ocorrerão, preferencialmente, nessa região. Esse é um motivo para se usar cilindros abaulados, que tenham um grande raio de abaulamento no plano *yz* em relação ao raio do rolo, no plano *xz*. Se o carregamento de contato puder ser previsto, o raio de abaulamento pode ser dimensionado para propiciar uma distribuição de tensão uniforme axialmente na região de contato devido às deformações dos rolos, como pode ser visto na Figura 7-26*b*. No entanto, para carregamentos mais leves, haverá uma região de contato reduzida e, consequentemente, maiores tensões no centro, e, para tensões maiores que as de projeto, a concentração de tensão nas bordas retornará. Pode ser usado um rolo parcialmente abaulado, como na Figura 7-26*c*, mas que pode causar uma certa concentração de tensão na transição da parte plana para a abaulada. Reusner[29] mostrou que uma curva logarítmica, como na Figura 7-26*d*, gerará uma distribuição mais uniforme das tensões para variados níveis de carregamento.

A origem pontual na superfície (OPS) é o fenômeno descrito por Way e recém-comentado. Littmann et al.[24] consideram a OPS mais uma forma de propagação de trincas do que de sua origem, e sugere que uma inclusão na superfície ou próximo a ela pode ser responsável pelo início da trinca. Manipular pequenas fendas ou amassamentos pode, também, levar a nucleação de trincas na superfície. Uma vez presente, e se orientada na direção certa para a captura de óleo, a trinca se propagará rapidamente até falhar. Quando a lascamento começa, os debris podem criar novas pequenas fendas, criando novos locais para trincas.

Esfoliação (*peeling*) se refere à situação na qual as trincas de fadiga estão a uma profundidade pequena e se estendem por uma grande área, de maneira que a superfície é descascada do substrato. Superfícies ásperas intensificam a esfoliação se as asperezas superficiais forem maiores que a espessura do filme lubrificante.

Fadiga abaixo da camada endurecida termoquimicamente, também chamada de *esmagamento da casca*, ocorre apenas em partes cujas superfícies foram tratadas termoquimicamente (cementação, nitretação, etc.), e é mais provável que ocorra se a camada tratada for tão fina que as tensões na subsuperfície se estendem até o material do núcleo, mais mole e fraco. A trinca de fadiga se inicia abaixo desta casca e, mais cedo ou mais tarde, leva-a a se colapsar sobre o material do núcleo que falhou ou a se romper, criando crateras e lascamentos.

Qualquer que seja a causa detalhada para o início de uma trinca, uma vez começada, os efeitos são previsíveis. Portanto, o projetista precisa tomar todas as precauções possíveis para melhorar a resistência à crateração, bem como a todos os modos de desgaste. A seção de resumo deste capítulo tentará estabelecer algumas diretrizes para tal fim.

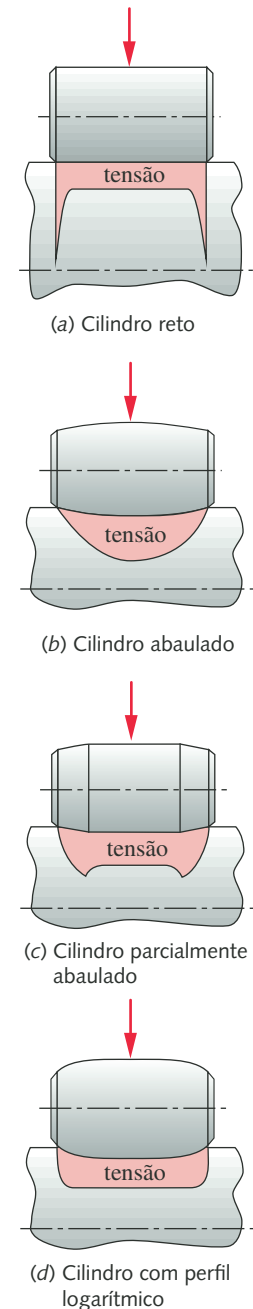



FIGURA 7-26

Concentração de tensão sob várias formas de cilindros em contato com rolamento.

7.13 RESISTÊNCIA À FADIGA SUPERFICIAL

Carregamentos repetidos que variam no tempo tendem a levar peças a falhar em níveis de tensão mais baixos que o material suporta sob solicitação estática. A resistência à fadiga por flexão ou axial foi discutida extensivamente no Capítulo 6. O conceito de **resistência à fadiga superficial** é similar. Enquanto aços e alguns outros materiais solicitados à flexão, ou axialmente, mostram um limite de fadiga, *nenhum material* possui uma propriedade equivalente quando sob fadiga superficial. Deste modo, espera-se que nossas máquinas, mesmo que projetadas cuidadosamente para serem seguras contra quaisquer outras formas de falha, irão sucumbir à fadiga superficial, se for solicitado um número suficiente de ciclos.*

Morrison[30] e Cram[31] relataram separadamente um estudo experimental da resistência à fadiga superficial de materiais realizado na USM Corp., de 1932 a 1956. Quatro máquinas de ensaio de desgaste trabalharam **24 horas por dia durante 24 anos**, a 1.000 rpm com a finalidade de gerar dados sobre fadiga superficial em ferro fundido, aço, bronze, alumínio e materiais não metálicos. Seus ensaios incluíram tanto cilindros em rolamento puro como em rolamento adicionado de várias porcentagens de deslizamento do rolamento, até 75%. A maioria dos dados sobre rolamento/deslizamento foi obtida para 9% de deslizamento, uma vez que essas são as condições médias na superfície dos dentes de engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais. O valor da porcentagem de deslizamento é definido como a velocidade relativa de deslizamento entre os cilindros ou os dentes de engrenagem dividida pela velocidade da circunferência primitiva da interface.

Seções anteriores mostraram a complexidade do estado de tensões que existe nas regiões da superfície e subsuperfície da zona de contato entre cilindros, esferas ou outros corpos. As discussões anteriores a respeito dos mecanismos de origem de trincas indicam que a localização de uma trinca incipiente é praticamente imprevisível, dada a distribuição aleatória das inclusões no material. Por isso, é mais difícil se prever com exatidão o estado de tensão em um ponto de falha esperada na zona de contato do que ao projetar uma viga engastada em balaço, por exemplo. O dilema se resolve usando-se uma tensão na zona de contato calculada facilmente como um *valor de referência* para comparar com as resistências do material. A escolhida é a maior tensão principal de contato negativa (de compressão). No caso de rolamento puro, sua magnitude será igual à máxima pressão de contato aplicada P_{max}. Mas será maior que esse valor, se houver a presença de deslizamento.

Para se estimar a resistência à fadiga superficial, o material é rodado sob condições de carregamento controladas (isto é, P_{max} controlada) e o número de ciclos até a ocorrência de falha é anotado e relatado junto com outros fatores do carregamento, como a porcentagem de deslizamento, lubrificação, geometria do corpo, etc. Essa "resistência virtual" pode ser comparada ao pico da magnitude das tensões de compressão em outras aplicações que tenham fatores de carregamento similares. Dessa maneira, a resistência à fadiga superficial possui apenas uma relação indireta com as tensões reais que possam estar presentes no corpo de prova e na peça em serviço solicitada similarmente, já que as equações de Hertz só valham teoricamente para carregamentos estáticos, Talbourdet constatou que a tensão de compressão encontrada nos seus testes eram muito próximos daquelas previstas pela equação de Hertz.[34]

A expressão para a tensão normal de Hertz estática e de compressão no contato cilíndrico é calculada combinando-se as Equações 7.14*b* e 7.17*a*:

$$\sigma_z = -p_{max} = \frac{2F}{\pi a L} \qquad (7.25a)$$

* Note, no entanto, que avanços recentes na fabricação de aço desenvolveram os chamados aços "limpos", feitos com níveis tão baixos de impurezas que dão provas de um limite de duração de vida infinita em fadiga superficial. [T. A. Harris, Rolling Bearing Analysis. John Wiley & Sons: New York, pp. 872-888, 1991.]

Substitua a expressão para a a partir da Equação 7.15b, elevando ao quadrado os dois lados e simplificando:

$$\sigma_z^2 = \frac{2}{\pi}\frac{F}{L}\frac{B}{\left(m_1 + m_2\right)} \tag{7.25b}$$

Rearranje para explicitar o carregamento F,

$$F = \sigma_z^2 \frac{\pi L\left(m_1 + m_2\right)}{2B} \tag{7.25c}$$

e agrupe os termos em uma constante K,

$$F = \frac{KL}{2B} \tag{7.25d}$$

onde

$$K = \pi\left(m_1 + m_2\right)\sigma_z^2 \tag{7.25e}$$

O fator K é denominado *fator de carregamento experimental* e é usado para se determinar a carga F que, com segurança, pode resistir a um determinado número de ciclos ou um número de ciclos que se pode esperar antes que uma falha ocorra para um dado carregamento.

A Tabela 7-7 mostra fatores de carregamento determinados experimentalmente, K, resistências à fadiga superficial, S_c, e fatores de resistência para um certo número de materiais girando contra eles mesmos ou contra aço ferramenta endurecido.[30] Ver a referência original para uma listagem completa, já que alguns materiais foram omitidos aqui, devido à falta de espaço. Dois modos diferentes de carregamento também estão colocados em seções separadas na tabela: rolamento puro e rolamento com 9% de deslizamento. A primeira coluna da tabela define o material. Em cada seção, as duas colunas a seguir fornecem o valor de K e a resistência à fadiga de superfície para 1E8 ciclos como testado. As duas colunas seguintes contêm fatores de resistência λ e ζ, que representam a inclinação e a intersecção do diagrama S-N (em coordenadas log-log) para resistência à fadiga superficial do material como determinado pela regressão de uma grande quantidade de dados obtidos de ensaios. Esses fatores podem ser usados nas equações da curva S-N ajustada estatisticamente para se determinar a vida, em número de ciclos N, para o nível de tensão aplicada.

$$\log_{10} K = \frac{\zeta - \log_{10} N}{\lambda} \tag{7.26}$$

Os valores de K na Tabela 7-7 podem ser usados diretamente na Equação 7.25d para se calcular um carregamento admissível F para o material selecionado, correspondente a 1E8 ciclos de tensão. Para outros ciclos, primeiro calcule a maior tensão negativa (de compressão) radial para seu projeto a partir das equações apropriadas, como definido em seções anteriores. Calcule, então, K pela Equação 7.25e e use-o, juntamente com os valores de λ e ζ da Tabela 7-7, para achar o valor N, utilizando a Equação 7.26. Como não há nenhum valor limite para a resistência a solicitações de fadiga superficial, pode-se esperar o início de crateração depois de, aproximadamente, N ciclos de tensão no nível de tensão nominal contido no seu fator K calculado.

Alternativamente, um número desejado de ciclos N pode ser escolhido e uma tensão de projeto σ_z para um material pode ser calculado pelas Equações 7-25e e 7.26. Um coeficiente de segurança pode ser aplicado tanto selecionando um material com uma vida mais longa que o necessário como dimensionando as

peças para se obter níveis de tensão abaixo do nível calculado de projeto para um número desejado de ciclos.

Os valores de resistência na Tabela 7-7 foram obtidos usando-se cilindros em contato lubrificados com um óleo mineral de 280-329 SSU a 100° F. Os pesquisadores relataram que "uma transição ordenada ocorre da fadiga por crateração para o desgaste por abrasão à medida que a porcentagem de deslizamento é aumentada." Falhas por crateração foram observadas para deslizamentos tão altos

Tabela 7-7 Dados de resistência à fadiga superficial para vários materiais

Parte 1: Materiais girando contra um rolo de aço ferramenta HRC 60-62

		Rolamento puro				Rolamento e 9% Deslizamento			
#	Material	Kpsi	Sc @ 1E8 ciclos, psi	λ	ζ	Kpsi	Sc @ 1E8 ciclos, psi	λ	ζ
1	Aço 1020, cementado, profundidade mínima 0,045 in HRC 50-60	12700	256000	7,39	38,33	10400	99000	13,20	61,06
2	Aço 1020, HB 130-150	—	—	—	—	1720	94000	4,78	23,45
3	Aço 1117, HB 130-150	1500	89000	4,21	21,41	1150	77000	3,63	19,12
4	Aço X1340, temperado por indução, profundidade mínima 0,045 in HRC 45-58	10000	227000	6,56	34,24	8200	206000	8,51	41,31
5	Aço 4150, t-t[§], HB 270-300, com eletrorrecobrimento de camada fina de cromo	6060	177000	11,18	50,29	—	—	—	—
6	Aço 4150, t-t, HB 270-300, recoberto com fosfato	9000	216000	8,80	42,81	6260	180000	11,56	51,92
7	Aço 4150, t-t, HB 270-300	—	—	—	—	2850	121000	17,86	69,72
8	Aço 4340, temperado por indução, profundidade mínima 0,045 in HRC 50-58	13000	259000	14,15	66,22	9000	216000	14,02	63,44
9	Aço 4340, t-t, HB 270-300	—	—	—	—	5500	169000	18,05	75,55
10	Aço 6150, HB 300-320	1170	78000	3,10	17,51	—	—	—	—
11	Aço 6150, HB 270-300	—	—	—	—	1820	97000	8,30	35,06
12	Aço ferramenta 18% Ni, *maraging*[¶], temperado ao ar, HRC 48-50	—	—	—	—	4300	146000	3,90	22,18
13	Ferro fundido cinzento, Cl. 20, HB 140-160	790	49000	3,83	19,09	740	47000	4,09	19,72
14	Ferro fundido cinzento, Cl. 30, HB 200-220	1120	63000	4,24	20,92	—	—	—	—
15	Ferro fundido cinzento, Cl. 30, t-t (austemperado) HB 255-300, recoberto com fosfato	2920	102000	5,52	27,11	2510	94000	6,01	28,44
16	Ferro fundido cinzento, Cl. 35, HB 225-255	2000	86000	11,62	46,35	1900	84000	8,39	35,51
17	Ferro fundido cinzento, Cl. 45, HB 220-240	—	—	—	—	1070	65000	3,77	19,41
18	Ferro fundido nodular, Gr. 80-60-03, t-t HB 207-241	2100	96000	10,09	41,53	1960	93000	5,56	26,31
19	Ferro fundido nodular, Gr. 100-70-03, t-t HB 240-260	—	—	—	—	3570	122000	13,04	54,33
20	Níquel bronze, HB 80-90	1390	73000	6,01	26,89	—	—	—	—
21	SAE 65 fósforo-bronze fundido, HB 65-75	730	52000	2,84	16,13	350	36000	2,39	14,08
22	SAE 660 bronze fundido continuamente, HB 75-80	—	—	—	—	320	33000	1,94	12,87
23	Alumínio bronze	2500	98000	5,87	27,97	—	—	—	—
24	Zinco fundido, HB 70	250	28000	3,07	15,35	220	26000	3,11	15,29
25	Resina acetal	620	—	—	—	580	—	—	—
26	Borracha de poliuretano	240	—	—	—	—	—	—	—

[§] N. de R. T.: t-t é tratado termicamente.

[¶] N. de R. T.: *Maraging* é um tratamento para endurecimento por meio de precipitação. Aplicado a um certo grupo de ligas de ferro precipitando um ou mais compostos intermetálicos em uma matriz de martensita praticamente sem carbono. *Maraging* = *martensitic* + *aging*.

Tabela 7-7 Dados de resistência à fadiga superficial para vários materiais
Parte 2: Materiais girando contra o mesmo material

		Rolamento puro				Rolamento e 9% Deslizamento			
#	Material	Kpsi	Sc @ 1*E*8 ciclos, psi	λ	ζ	Kpsi	Sc @ 1*E*8 ciclos, psi	λ	ζ
27	Aço 1020, HB 130-170, e o mesmo, mas recoberto com fosfato	2900	122000	7,84	35,17	1450	87000	6,38	28,23
28	Aço 1144 Aço CD, HB 260-290, (resistência garantida por ensaio)	—	—	—	—	2290	109000	4,10	21,79
29	Aço 4150, t-t, HB 270-300 e o mesmo, mas recoberto com fosfato	6770	187000	10,46	48,09	2320	110000	9,58	40,24
30	Aço 4340 com chumbo, recoberto com t-t, HB 270-300	—	—	—	—	3050	125000	6,63	31,1
31	Aço 4340, t-t, HB 320-340, e o mesmo, mas recoberto com fosfato	10300	230000	18,13	80,74	5200	164000	26,19	105,31
32	Ferro fundido cinzento, Cl. 20 HB 130-180	960	45000	3,05	17,10	920	43900	3,55	18,52
33	Ferro fundido cinzento, Cl. 30, t-t (austemperado) HB 270-290	3800	102000	7,25	33,97	3500	97000	7,87	35,90
34	Ferro fundido nodular Gr. 80-60-03, t-t HB 207-241	3500	117000	4,69	24,65	1750	82000	4,18	21,56
35	*Meehanite*§, HB 190-240	1600	80000	4,77	23,27	1450	76500	4,94	23,64
36	Alumínio 6061-T6, recobrimento anódico para endurecimento	350	—	10,27	34,15	260	—	5,02	20,12
37	Magnésio HK31XA-T6, recobrimento HAE	175	—	6,46	22,53	275	—	11,07	35,02

Fonte: R. A. Morrison, "Load/Life Curves for Gear and Cam Materials," *Machine Design,* vol. 40, pp. 102-108, Aug. 1, 1968, A Penton Publication, Cleveland, Ohio, com a permissão do editor.
§ N. de R. T.: *Meehanite* é um processo patenteado para produzir ferro fundido de diversos tipos com composição precisa. Mais informações podem ser obtidas na Internet.

quanto 300% em alguns ferros fundidos, e o desgaste por abrasão foi visto para deslizamentos tão baixos quanto 9% em aços temperados sob alta tensão. Eles também notaram que a adição de recobrimentos de óxidos, lubrificantes fortificados (EP, ver Seção 10.1), ou chumbo como elemento de liga, reduziu os níveis de tensões tangenciais e aumentou a vida à fadiga ou a porcentagem de deslizamento admitida. A adição de recobrimentos de fosfato reduziu o centelhamento e a necessidade de filtragem do lubrificante, reduziu o coeficiente de atrito e também aumentou a vida à fadiga. Eles observaram evidências de início de crateração tanto na superfície com alta porcentagem de deslizamento quanto abaixo da superfície sob rolamento puro ou sob baixa porcentagem de deslizamento.[30] Aumentando-se as porcentagens de deslizamento, reduz-se a vida à fadiga, mas não linearmente. A Figura 7-27 mostra algumas curvas *S-N* (da referência 30) para três materiais com diferentes porcentagens de deslizamento.

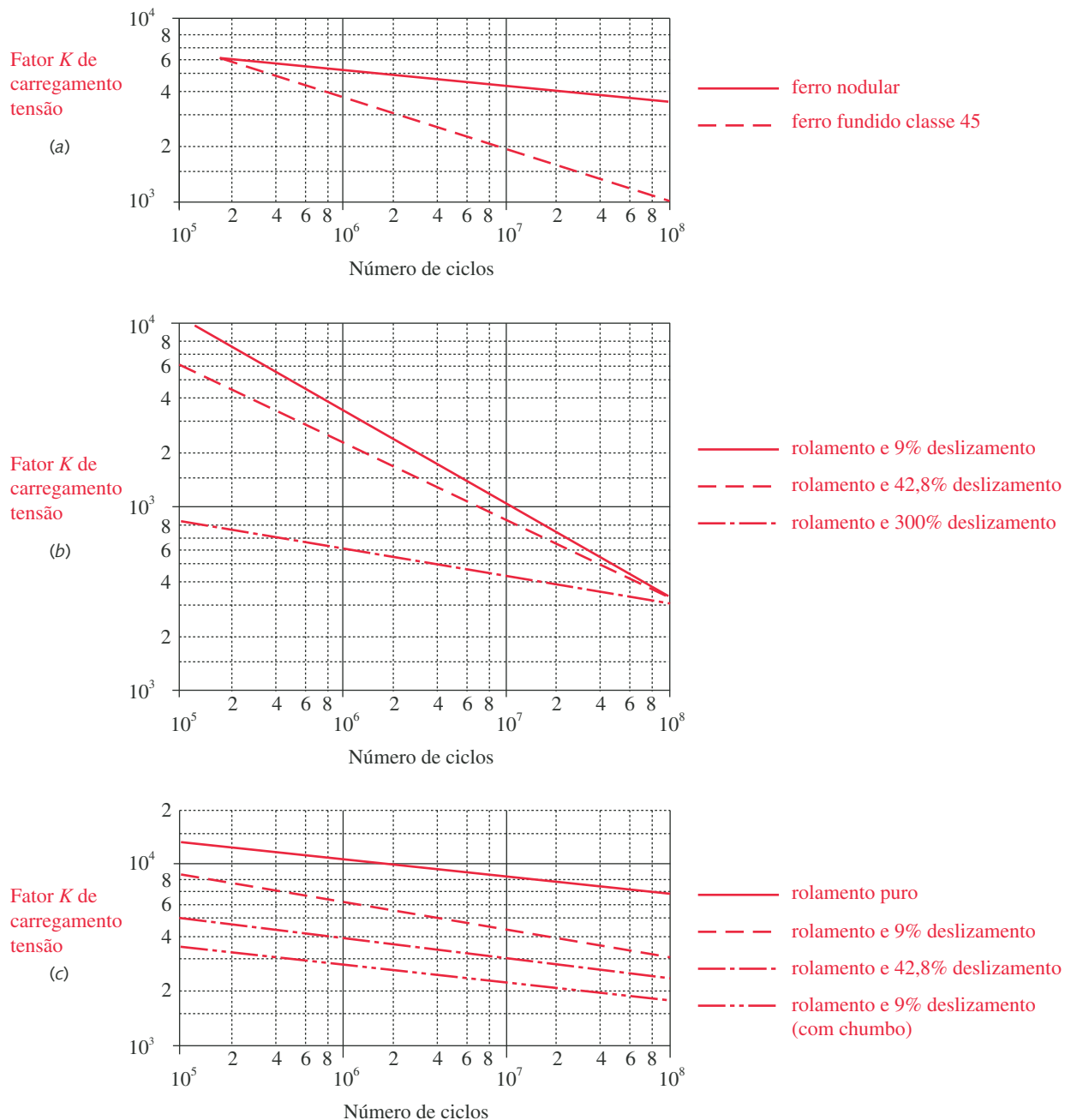
A frequência do ciclo de tensões somente afetou os materiais não metálicos, onde o calor do atrito criou bolhas ou escoou o material. A rigidez de um material é um fator, no entanto. Materiais de baixo módulo de elasticidade reduziram as tensões de contato porque suas grandes deformações aumentaram a área da região de contato. O ferro fundido sobre ferro fundido teve uma vida mais longa do que o ferro fundido sobre aço temperado. A grafita livre no ferro fundido também se mostrou uma boa opção em situações de contato, já que ela retarda a adesão, além de ser um lubrificante sólido, porém os ferros fundidos de baixa resistência possuem resistências baixas demais para serem úteis nessas situações. O ferro nodular em suas formas mais duras pode ser uma melhor opção. Não se encontrou uma relação entre a dureza de um material e sua durabilidade superficial. Alguns aços mais moles tiveram um melhor desempenho do que outros mais duros.[30]

Curvas típicas mostrando relações de carregamento-vida para materiais comuns para engrenagens e camos. As curvas em (*a*) são para ferro nodular 100-70-30 (HB 240-260) e ferro fundido classe 45 (HB 220-240), ambos os materiais girando sobre aço carbono (HRC 60-62). As curvas em (*b*) são para bronze fundido continuamente, rodando em aço temperado. As curvas em (*c*) são para aço 4150 tratado termicamente, rodando contra o mesmo material, mas com recobrimento de fosfato. Em todos os casos, o deslizamento de 9% é 54 fpm; 42,8% de deslizamento é 221fpm.

FIGURA 7-27

Diagramas de carregamento-vida para algumas combinações de materiais em rolamento e deslizamento. Fonte: R. A. Morrison, "Load/Life Curves for Gear and Cam Materials," *Machine Design*, vol. 40, pp. 102-108, Aug. 1, 1968, A Penton Publication, Cleveland, Ohio, com permissão.

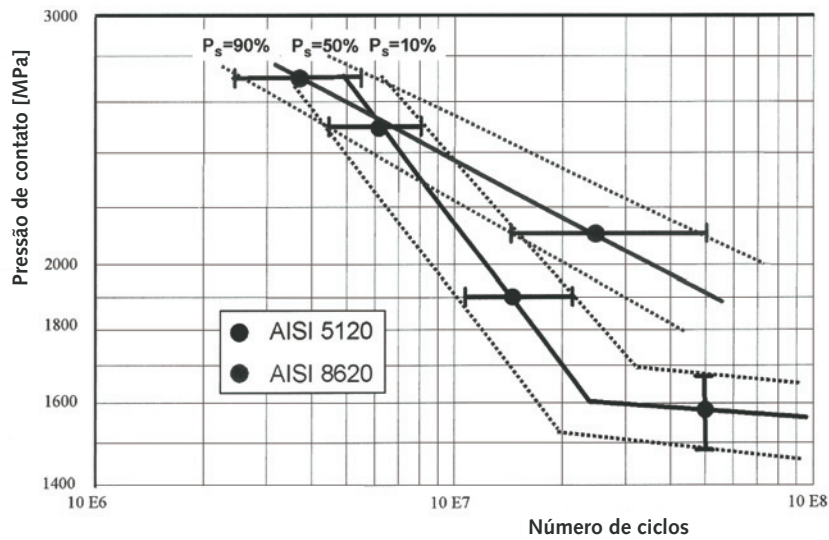



FIGURA 7-28

Diagramas de fadiga superficial para dois aços temperados.[35]

Dados mais recentes sobre teste de fadiga superficial foram relatados em 2007 por Hoffmann e Jandeska.[35] Diversas ligas de aço temperado e materiais de metal sinterizado comumente usados em transmissões automotivas foram submetidos a contato de rolamento cilíndrico sob carregamento controlado e a diferentes percentuais de deslizamento. Os métodos atuais de Eddy foram usados para detectar princípios de rachaduras e taxa de crescimento de rachaduras. Eles observaram rachaduras tanto na superfície quanto abaixo dela em vários testes. Rachaduras de superfície podem surgir em microcrateras formadas por falta de lubrificação ou por inclusões preexistentes e crescimento no material em um ângulo de 30 graus conduzido por uma tensão de cisalhamento. Rachaduras subsuperficiais geralmente se formam em regiões com a mais alta tensão de von Mises, primeiro crescendo paralelamente à superfície antes de irem em direção à superfície e formarem crateras. Um terceiro modo de falha observado foi de núcleo de esmagamento ou subprocesso de fadiga no núcleo mais suave, devido ao tratamento de calor insuficiente. A Figura 7-28 mostra curvas S-N com margens de dispersão para duas ligas de aço temperado. Note que as curvas nunca vão na horizontal, embora uma delas possua uma menor inclinação negativa após um joelho. Essa é uma evidência subsequente da falta de um verdadeiro limite de resistência em fadiga superficial.

EXEMPLO 7-5

Cálculo do coeficiente de segurança para fadiga superficial

Problema **Escolha um material para propiciar 10 anos de vida para os cilindros do Exemplo 7-4.**

Dados **Os cilindros têm raios de 1,25 e 2,5 in e 24 in de comprimento. As tensões principais são mostradas no Exemplo 7-4. O cilindro menor está girando a 4000 rpm.**

Hipóteses **Há 9% de deslizamento combinado com rolamento. Ambas as peças serão do mesmo aço. A máquina opera 3 turnos por dia, 345 dias por ano.**

Solução

1 Calcule o número de ciclos da vida requerida com os dados:

$$ciclos = 4000\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{h}} \cdot 24\frac{\text{h}}{\text{dia}} \cdot 345\frac{\text{dia}}{\text{ano}} \cdot 10 \text{ anos} = 2{,}0E10 \qquad (a)$$

2 A máxima tensão normal calculada no Exemplo 7-4 é 49771 psi de compressão. Seu fator K pode ser calculado da Equação 7.25d. As constantes de material previamente calculadas, m_1 e m_2, são necessárias:

$$m_1 = m_2 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} = \frac{1 - 0{,}28^2}{3E7} = 3{,}072E - 8 \qquad (b)$$

$$K = \pi(m_1 + m_2)\sigma_z^2 = 2\pi(3{,}072E - 8)(49771)^2 = 478 \qquad (c)$$

3 Um material de tentativa deve ser selecionado da Tabela 7-7. Com um K baixo como esse, praticamente qualquer um dos aços poderá ser usado. Tentaremos o aço SAE 1020 HB 130-170, recoberto com fosfato (n° 27, na Parte 2 na tabela), já que os mesmos materiais estão girando juntos. Os fatores de inclinação e intersecção para esse aço em rolamento com 9% de deslizamento são:

$$\lambda = 6{,}38 \qquad \zeta = 28{,}23 \qquad (d)$$

4 Eles são usados na Equação 7.26 juntamente com o valor de K da Equação c acima, para se achar o número de ciclos que podem ser esperados com esse carregamento antes de começar o processo de crateração.

$$\log_{10} K = \frac{\zeta - \log_{10} N_{vida}}{\lambda}$$
$$\log_{10} N_{vida} = \zeta - \lambda \log_{10} K = 28{,}23 - 6{,}38 \log_{10}(478) \qquad (e)$$
$$N_{vida} = 10^{(28{,}23 - 6{,}38 \log_{10}(478))} = 1{,}4E11$$

5 O coeficiente de segurança contra crateração pode agora ser calculado pela relação entre o número de ciclos da vida esperada e o número de ciclos desejado.

$$N_f = \frac{N_{vida}}{ciclos} = \frac{1{,}4E11}{2{,}0E10} = 6{,}9 \qquad (f)$$

6 Os arquivos EX07-05 podem ser encontrados no CD-ROM que acompanha este livro.

7.14 RESUMO

Este capítulo apresentou uma breve introdução ao tópico muito abrangente sobre desgaste de superfície. O desgaste geralmente é considerado divisível em cinco categorias genéricas: *desgaste por adesão, desgaste por abrasão, desgaste por corrosão, fadiga superficial* e *erosão*. Outros mecanismos, como *fadiga por corrosão*, *desgaste por corrosão* e *desgaste por microabrasão*, combinam elementos de mais de uma categoria.

Para se fazer presente, o desgaste geralmente requer que haja algum movimento relativo entre duas superfícies. O **desgaste por adesão** ocorre quando as asperezas de duas superfícies em contato se aderem uma à outra e depois se rompem quando há deslizamento, transferindo-se material de uma peça para a outra, ou para fora do sistema. O **desgaste por abrasão** envolve uma superfície dura e rugosa removendo material de uma mais mole, ou então partículas duras aprisionadas entre duas superfícies, erodindo ambas.

O **desgaste por corrosão** ocorre quando uma atmosfera corrosiva (como oxigênio) está presente para atacar a superfície do material em combinação com o deslizamento, que arranca as camadas de óxido ou de outros contaminantes. Isso faz com que mais material seja exposto aos elementos corrosivos e também transforma os produtos de corrosão, geralmente duros, em abrasivos. A fadiga por corrosão refere-se à combinação de um meio corrosivo com tensões cíclicas. Essa combinação é particularmente terrível e encurta demasiadamente a vida sob fadiga dos materiais. A corrosão por microabrasão ocorre em pontos de junção (como ajuste por interferência) onde não há movimentos muito grandes. Pequenos movimentos vibratórios podem remover volumes significativos de material ao longo do tempo.

A **fadiga superficial** ocorre em contatos com rolamento puro ou em contatos por deslizamento e rolamento, mas não em situações de deslizamento puro. As tensões de contato muito altas, engendradas pelas pequenas áreas de contato, agem causando falhas por fadiga do material, depois de milhares de ciclos de tensões repetidos. **Crateração** é a perda de pequenas porções de material da superfície, gerando pequenas crateras. As crateras crescem atingindo maiores áreas do material que se fragmentam, tornando-se o que é denominado, então, **lascamento**. Um aviso audível é geralmente notado quando o processo de crateração se inicia. Se não for cuidado, ele se tornará uma grande falha na peça.

Requerem-se materiais com alta resistência e com bons acabamentos superficiais em aplicações em que haja tensões de contato. **Nenhum material exibe um limite à fadiga superficial** e, em algum momento, falhará por esse mecanismo, se for sujeito a um número suficiente de ciclos de tensões de contato.

Projeto para evitar falhas de superfície

Há inúmeras precauções que um projetista deve tomar a fim de reduzir as chances de falhas por desgaste por qualquer mecanismo descrito neste capítulo.

1 **Escolha de materiais apropriados:** devem ser observadas as regras de compatibilidade de materiais. Deve-se dar atenção especial ao acabamento superficial e à dureza, bem como à resistência, a fim de reduzir a abrasão e aumentar a vida à fadiga. Meios corrosivos requerem materiais especiais. Os recobrimentos devem ser levados em conta em algumas situações. A homogeneidade de materiais em situações de tensões de contato é desejável. Alguns aços mais caros, processados para gerar microestruturas mais uniformes e livres de inclusões, podem prestar um serviço melhor em superfícies altamente tensionadas em casos de fadiga, e também se tornar mais baratos com o passar do tempo. Em geral, durezas mais altas nas superfícies reduzem tanto o desgaste por abrasão como o adesivo, assim como a fadiga superficial.

2 **Lubrificantes apropriados:** raramente uma junta altamente carregada é posta em operação a seco (exceto se houver alguma situação extrema, como medo de contaminação do produto com o vazamento do lubrificante). Deve-se usar a lubrificação hidrodinâmica ou hidrostática quando possível. A lubrificação marginal é menos desejável, mas, muitas vezes, é inevitável. Se ela for usada, um lubrificante EP pode reduzir significativamente o desgaste por adesão, ao custo de algum desgaste por corrosão. Ver o Capítulo 11 para mais informações a respeito de lubrificação.

3 **Limpeza:** devem-se tomar medidas para garantir que nenhum contaminante externo possa entrar em mancais ou juntas. É preciso providenciar vedações ou outros meios de protegê-los. Se alguma contaminação em particular não puder ser evitada (como em ambientes sujos), materiais mais

macios devem ser escolhidos para mancais, de maneira que partículas aprisionadas possam ser embutidas.

4 **Tensão:** evite ou minimize concentrações de tensão, especialmente em carregamentos que geram fadiga. Considere o uso de um material menos rígido para aumentar a área da região de contato e reduzir as tensões em casos de fadiga superficial. Esteja extremamente atento a situações em que qualquer tipo de fadiga (não só de superfície) esteja presente em combinação com um meio corrosivo, já que a fadiga corrosiva será um grande problema. Um programa de ensaios talvez seja necessário nesses casos, já que poucos dados estão disponíveis a respeito desse fenômeno.

5 **Microabrasão:** considere a possibilidade de falha por microabrasão se há vibração ou deflexões repetitivas em ajustes por interferência ou em juntas de fixação.

Equações importantes usadas neste capítulo

Ver as seções referenciadas para informações do uso adequado destas equações.

Área real de contato (Seção 7.3):

$$A_r \cong \frac{F}{S_p} \cong \frac{F}{3S_{yc}} \tag{7.1}$$

Coeficiente de atrito (Seção 7.3):

$$\mu = \frac{f}{F} \cong \frac{S_{us}}{3S_{yc}} \tag{7.3}$$

Volume de desgaste (Seção 7.4):

$$V = K\frac{Fl}{H} \tag{7.7a}$$

Máxima pressão – contato entre esferas (Seção 7.8):

$$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2} \tag{7.8b}$$

Constantes de material (Seção 7.8):

$$m_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \qquad m_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{7.9a}$$

Constantes geométricas para contato entre esferas ou entre cilindros (Seção 7.8):

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{7.9b}$$

Raio da região de contato – contato entre esferas (Seção 7.8):

$$a = \sqrt[3]{0{,}375\frac{m_1 + m_2}{B}F} \tag{7.9d}$$

Tensões máximas – contato entre esferas (Seção 7.8):

$$\sigma_{z_{max}} = -p_{max} \tag{7.11c}$$

$$\sigma_{x_{max}} = \sigma_{y_{max}} = -\frac{1+2\nu}{2} p_{max} \qquad (7.11d)$$

$$\tau_{13_{max}} = \frac{p_{max}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right] \qquad (7.12b)$$

$$z_{@\tau_{max}} = a\sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} \qquad (7.12c)$$

Máxima pressão – contato entre cilindros (Seção 7.9):

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi a L} \qquad (7.14b)$$

Metade da largura da região de contato entre cilindros (Seção 7.9):

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1+m_2}{B}\frac{F}{L}} \qquad (7.15b)$$

Tensões máximas – contato entre cilindros (Seção 7.9):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_z = -p_{max} \\ \sigma_y &= -2\nu\, p_{max} \end{aligned} \qquad (7.17a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{13_{max}} &= 0{,}304\, p_{max} \\ z_{@\tau_{max}} &= 0{,}786a \end{aligned} \qquad (7.17b)$$

Máxima pressão – contato geral (Seção 7.10):

$$p_{max} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi ab} \qquad (7.18b)$$

Metade das dimensões da região elíptica de contato (Seção 7.10 – Ver Tabela 7-5 para k_a e k_b):

$$a = k_a\sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} \qquad b = k_b\sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} \qquad (7.19d)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2'}\right) \qquad (7.19a)$$

Tensões máximas – contato geral (Seção 7.10):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{b}{a+b}\right]p_{max} \\ \sigma_y &= -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{a}{a+b}\right]p_{max} \\ \sigma_z &= -p_{max} \end{aligned} \qquad (7.21a)$$

Força de atrito por unidade de área – cilindros paralelos em rolamento e deslizamento (Seção 7.11):

$$f_{max} = \mu\, p_{max} \qquad (7.22f)$$

Tensões máximas – cilindros paralelos em rolamento e deslizamento (Seção 7.11):

Quando $z = 0$:

$$\text{se } |x| \le a \text{ então } \sigma_{x_n} = -p_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ senão } \sigma_{x_n} = 0$$

$$\sigma_{z_n} = \sigma_{x_n} \tag{7.23a}$$

$$\tau_{xz_n} = 0$$

$$\text{se } x \ge a \text{ então } \sigma_{x_t} = -2f_{max}\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$$

$$\text{se } x \le -a \text{ então } \sigma_{x_t} = -2f_{max}\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) \tag{7.23b}$$

$$\text{se } |x| \le a \text{ então } \sigma_{x_t} = -2f_{max}\frac{x}{a}$$

$$\sigma_{z_t} = 0$$

$$\text{se } |x| \le a \text{ então } \tau_{xz_t} = -f_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ senão } \tau_{xz_t} = 0 \tag{7.23c}$$

$$\sigma_x = \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t}$$

$$\sigma_z = \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} \tag{7.24a}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t}$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \tag{7.24b}$$

Fator de resistência à fadiga do material (Seção 7.12):

$$K = \pi(m_1 + m_2)\sigma_z^2 \tag{7.25e}$$

Equação da curva *S-N* para fadiga superficial (Seção 7.12 – ver Tabela 7-7 para λ e ζ):

$$\log_{10} K = \frac{\zeta - \log_{10} N}{\lambda} \tag{7.26}$$

7.15 REFERÊNCIAS

1 **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: New York, pp. 110, 1965.

2 ***Ibid***., pp. 21, 33.

3 ***Ibid***., p. 125.

4 ***Ibid***., p. 30.

5 **R. Davies**, Compatibility of Metal Pairs, in *Handbook of Mechanical Wear,* C. Lipson, ed. Univ. of Mich. Press: Ann Arbor. p. 7, 1961.

6 **D. J. Wulpi**, *Understanding How Components Fail*. American Society for Metals: Metals Park, OH, 1990.

7 **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: New York, pp. 60, 1965.

8 ***Ibid***., p. 85.

9 **J. T. Burwell**, Survey of Possible Wear Mechanisms. *Wear*, **1**: pp. 119-141, 1957.

10 **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: New York, pp. 179, 1965.

11 ***Ibid***., p. 180.

12 **J. R. McDowell**, Fretting and Fretting Corrosion, in *Handbook of Mechanical Wear,* C. Lipson and L. V. Colwell, ed. Univ. of Mich. Press: Ann Arbor. pp. 236-251, 1961.

13 **H. Hertz**, On the Contact of Elastic Solids. *J. Math.*, **92**: pp. 156-171, 1881 (em alemão).

14 **H. Hertz**, Contact of Elastic Solids, in *Miscellaneous Papers,* P. Lenard, ed. Macmillan & Co. Ltd.: London. pp. 146-162, 1896.

15 **H. L. Whittemore and S. N. Petrenko**, *Friction and Carrying Capacity of Ball and Roller Bearings*, Technical Paper 201, National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1921.

16 **H. R. Thomas and V. A. Hoersch**, *Stresses Due to the Pressure of One Elastic Solid upon Another*, Bulletin 212, U. Illinois Engineering Experiment Station, Champaign, Ill., July 15,1930.

17 **E. I. Radzimovsky**, *Stress Distribution and Strength Condition of Two Rolling Cylinders*, Bulletin 408, U. Illinois Engineering Experiment Station, Champaign, Ill., Feb 1953.

18 **J. O. Smith and C. K. Lui**, Stresses Due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Application to Some Contact Stress Problems. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **75**: pp. 157-166, 1953.

19 **S. P. Timoshenko and J. N. Goodier**, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill: New York, pp. 403-419, 1970.

20 **V. S. Mahkijani,** *Study of Contact Stresses as Developed on a Radial Cam using Photoelastic Model and Finite Element Analysis*. M. S. Thesis, Worcester Polytechnic Institute, 1984.

21 **J. Poritsky**, Stress and Deformations due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Applications to Contact of Gears and Locomotive Wheels, *J. Appl. Mech*. Trans ASME, **72**: p. 191, 1950.

22 **E. Buckingham and G. J. Talbourdet**, *Recent Roll Tests on Endurance Limits of Materials*. in Mechanical Wear Symposium. ASM: 1950.

23 **S. Way**, Pitting Due to Rolling Contact. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **57**: p. A49-58, 1935.

24 **W. E. Littmann and R. L. Widner**, Propagation of Contact Fatigue from Surface and Subsurface Origins, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, **88**: pp. 624-636, 1966.

25 **H. Styri**, *Fatigue Strength of Ball Bearing Races and Heat-Treated 52100 Steel Specimens*. Proceedings ASTM, **51**: p. 682, 1951.

26 **T. L. Carter, et al.**, Investigation of Factors Governing Fatigue Life with the Rolling Contact Fatigue Spin Rig, *Trans. ASLE,* **1**: p. 23, 1958.

27 **H. Hubbell and P. K. Pearson**, *Nonmetallic Inclusions and Fatigue under Very High Stress Conditions, in Quality Requirements of Super Duty Steels*. AIME Interscience Publishers: p. 143, 1959.

28 **W. E. Littmann and R. L. Widner**, Propagation of Contact Fatigue from Surface and Subsurface Origins, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, **88**: p. 626, 1966.

29 **H. Reusner**, The Logarithmic Roller Profile - the Key to Superior Performance of Cylindrical and Tapered Roller Bearings, *Ball Bearing Journal*, SKF, **230**, June 1987.

Tabela P7-0[†]
Matriz tópicos/problemas

7.2 Superfícies em contato
7-1, 7-25, 7-27, 7-35, 7-37

7.3 Atrito
7-2, 7-26, 7-28. 7-36, 7-38

7.4 Desgaste por adesão
7-12, 7-15, 7-29, 7-39

7.5 Desgaste por abrasão
7-13, **7-14**, 7-30, 7-46, 7-47

7.8 Contato entre esferas
7-4, **7-5**, **7-6**, 7-16, 7-17, 7-40

7.9 Contato entre cilindros
7-7, 7-8, **7-9**, **7-10**, **7-11**, 7-18, 7-19

7.10 Contato geral
7-20, 7-21, **7-22**, 7-41, 7-43, 7-44

7.11 Contato dinâmico
7-23, 7-31, 7-32, 7-42, 7-45

7.13 Resistência à fadiga
7-3, 7-24, 7-33, 7-34, 7-48, 7-49

30 **R. A. Morrison**, "Load/Life Curves for Gear and Cam Materials." *Machine Design*, v. 40, pp. 102-108, Aug. 1, 1968.

31 **W. D. Cram**, Experimental Load-Stress Factors, in *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson and L. V. Colwell, eds., Univ. of Mich. Press: Ann Arbor. pp. 56-91, 1961.

32 **J. F. Archard**, "Wear Theory and Mechanisms", in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson and W. O. Winer, eds., McGraw-Hill: New York, pp. 35-80, 1980.

33 **E. Rabinowicz**, "Wear Coefficients—Metals", in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson and W. O. Winer, eds., McGraw-Hill: New York, pp. 475-506, 1980.

34 **G. J. Talbourdet**, "Surface Endurance Limits of Various USMC Engineering Materials", Research Division of United Shoe Machinery Corporation, Beverly, MA, 1957.

35 **G. Hoffman and W. Jandeska**, "Effects on Rolling Contact Fatigue Performance", *Gear Technology*, Jan/Feb 2007, pp. 42-52.

36 **Y. Ding and J.A. Gear**, "Spalling Depth Prediction Model", *Wear* 267 (2009), pp. 1181-1190.

7.16 PROBLEMAS

*7-1 Dois blocos de aço de 3 × 5 cm com acabamento superficial R_a = 0,6 μm são esfregados um contra o outro com uma força normal de 400 N. Estime a área real de contato entre eles, se suas S_y = 400 MPa.

*7-2 Estime o coeficiente de atrito seco entre as duas peças do Problema 7-1, se suas S_{ut} = 600 MPa.

*[†]**7-3** Para o subconjunto braço-pedal de bicicleta na Figura P7-1, pressuponha uma força aplicada pelo ciclista que varia de 0 a 400 N no pedal em cada ciclo. Determine as máximas tensões de contato na interface entre um dente da roda dentada e um rolete da corrente. Pressuponha que um dente receba todo o torque aplicado, que o rolete da corrente tenha 8 mm de diâmetro, que a roda dentada tenha um diâmetro nominal de 100 mm e que o dente seja essencialmente plano no ponto de contato. O rolete e a roda são feitos de aço SAE 1340, endurecido por indução a HRC 45-58. O contato entre o rolete e a roda se dá ao longo de 8 mm. Assumindo rolamento com 9% de deslizamento, estime o número de ciclos para ocorrer falha nessa combinação particular entre dente e rolete.

***7-4** Para o engate de reboque do Problema 3-4 (ver também P7-2 e Figura 1-5), determine as tensões de contato na esfera e no engate da esfera (não mostrado). Pressuponha que a esfera tenha 2 in de diâmetro e que seu engate com ajuste impróprio tenha uma superfície interna 10% maior que o diâmetro da esfera.

7-5 Para o engate de reboque do Problema 3-5 (ver também Figura P7-2 e Figura 1-5), determine as tensões de contato na esfera e no engate da esfera (não mostrado). Pressuponha que a esfera tenha 2 in de diâmetro e que seu engate com ajuste impróprio tenha uma superfície interna 10% maior que o diâmetro da esfera.

7-6 Para o engate de reboque do Problema 3-6 (ver também P7-2 e Figura 1-5), determine as tensões de contato na esfera e no engate da esfera (não mostrado). Pressuponha que a esfera tenha 2 in de diâmetro e que seu engate com ajuste impróprio tenha uma superfície interna 10% maior que o diâmetro da esfera.

7-7 Para o pino de aço de 12 mm de diâmetro do Problema 3-7, ache a maior tensão de contato se a aceleração de 2500g é alternada. O pistão de alumínio possui um furo para o pino que é 2% maior que o pino e um comprimento de contato de 2 cm.

*7-8 Uma máquina de papel processa rolos de papel com densidade de 984 kg/m^3. O rolo de papel tem 1,50 m de diâmetro externo × 0,22 m de diâmetro interno × 3,23 m de comprimento e tem um módulo de elasticidade efetivo em compres-

*As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

[†] Números de problemas em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

são de 14 MPa e ν = 0,3. Determine a largura dessa região de contato quando o rolo está assentado em uma superfície plana de aço. O carregamento é seu próprio peso.

7-9 Para o alicate de pressão ViseGrip® desenhado em escala na Figura P7-3, para o qual as forças foram analisadas no Problema 3-9, ache a força de aperto necessária para criar uma área plana de contato de 0,25 mm de largura em cada lado de um pino de alumínio de 2 mm de diâmetro preso nas suas garras de 5 mm de largura.

***7-10** Um trampolim é mostrado na Figura P7-4. Uma pessoa de 100 kg está de pé sobre sua extremidade livre. Ele está apoiado em um suporte (da direita) que possui uma superfície de contato cilíndrica de 5 mm de raio. Qual é o tamanho da região de contato entre o trampolim e o suporte de alumínio se o trampolim é de fibra de vidro com E = 10,3 GPa e ν = 0,3?

7-11 Repita o Problema 7-10 pressupondo que a pessoa de 100 kg dê um pulo de 25 cm e caia sobre o trampolim. Pressuponha que ele pese 29 kg e tenha uma deflexão estática de 13,1 cm quando a pessoa está sobre ele. Qual o tamanho da região de contato entre o trampolim e o suporte de 5 mm de raio se o material do trampolim é fibra de vidro com E = 10,3 GPa e ν = 0,3?

7-12 Estime o volume do desgaste por adesão esperado de um eixo de aço HB 270 de 40 mm de diâmetro, girando a 250 rpm, 3 turnos de 8 horas por dia, 360 dias por ano, durante 10 anos em uma bucha de bronze, se o carregamento transversal é de 1000 N.

(a) Para condições de lubrificação escassa.
(b) Para boas condições de lubrificação.

*7-13 Estime quanto tempo levará para limar 1 mm de um cubo de 2 cm de aço HB150 se o operador aplicar uma força de 100 N em um passe de 10 cm a 60 passe/min.

(a) Se feito a seco.
(b) Se feito com lubrificação.

†**7-14** A Figura P7-5 mostra um brinquedo de criança chamado pula-pula. A criança fica de pé nos apoios, aplicando metade do seu peso em cada lado. Ela pula, saindo do chão, segurando os apoios contra seus pés. A mola amortece o impacto no retorno ao solo, armazenando energia para ajudar no próximo salto. Pressuponha uma criança de 60 lb e uma constante de mola de 100 lb/in. O pula-pula pesa 5 lb. Estime a taxa de desgaste por abrasão para a extremidade que atinge o solo, pressupondo uma situação de grão abrasivos soltos (areia) e secos. Expresse a taxa de desgaste em número de pulos para remover 0,02 in de uma ponta de alumínio de 1 in de diâmetro, com S_{ut} = 50 kpsi.

7-15 Faça uma tabela de materiais aceitáveis para girar contra um eixo de aço, com base nas suas compatibilidades metalúrgicas. Ordene de acordo com a adequação.

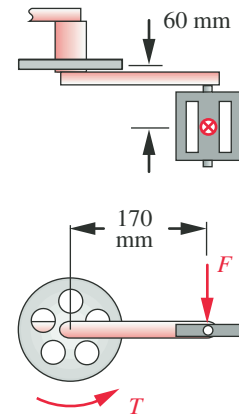



FIGURA P7-1

Problema 7-3. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

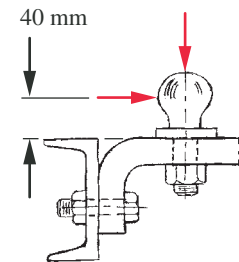



FIGURA P7-2

Problema 7-6. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

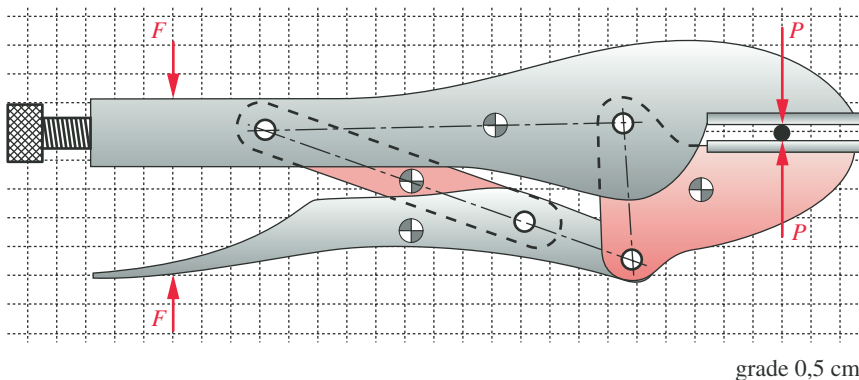



FIGURA P7-3

Problema 7-9. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

*As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

† Números de problemas em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

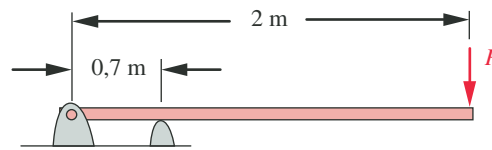



FIGURA P7-4

Problemas 7-10 e 7-11.

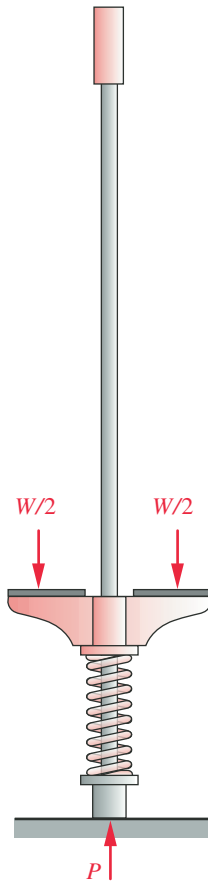



FIGURA P7-5

Problema 7-14.

*7-16 Determine o tamanho da região de contato e as máximas tensões de contato para uma esfera de 20 mm de aço rolando contra uma placa plana de alumínio sujeita a 1 kN.

7-17 Determine o tamanho da região de contato e as máximas tensões de contato para uma esfera de 20 mm de aço rolando contra uma esfera de alumínio de 30 mm de diâmetro com 800 N.

*7-18 Determine o tamanho da região de contato e as máximas tensões de contato para um cilindro de aço de 20 mm de diâmetro, 25 cm de comprimento, rolando contra uma placa plana de alumínio com 4 kN.

7-19 Determine o tamanho da região de contato e as máximas tensões de contato para um cilindro de aço de 20 mm de diâmetro, 25 cm de comprimento, rolando contra um cilindro paralelo de aço de 50 mm de diâmetro, com 10 kN de força radial.

*7-20 Determine o tamanho da região de contato e as máximas tensões de contato para uma esfera de 20 mm de aço rolando contra um cilindro de aço de 40 mm de diâmetro e 25 cm de comprimento, com 10 kN.

7-21 Um sistema de camo-seguidor tem um carregamento dinâmico de 0 a 2 kN. O camo é cilíndrico, com um raio mínimo de curvatura de 20 mm. O seguidor é abaulado, com raio de 15 mm em uma direção e 150 mm na outra. Ache as tensões de contato e o coeficiente de segurança, sendo o seguidor de aço 4150 com HB 300 e $S_{fc'} = 1500$ MPa e o camo de ferro fundido nodular com HB 207. Eles rolam lubrificados, com menos de 1% de escorregamento.[†]

***7-22** Um patim *roller-blade* é mostrado na Figura P7-6. As rodas de poliuretano têm 72 mm de diâmetro por 12 mm de espessura, com raio de "abaulamento" de 6 mm, e a distância entre centros é de 104 mm. A combinação bota, patins e pé pesa 2 kg. A constante elástica efetiva do sistema patins-pessoa é de 6000 N/m. Ache as tensões de contato nas rodas quando uma pessoa de 100 kg aterrissa com um pé de um salto de 0,5 m no concreto. Pressuponha que as rodas de poliuretano têm $E = 600$ MPa com $\nu = 0{,}4$ e o concreto tenha $E = 21E3$ MPa na compressão com $\nu = 0{,}2$.

(a) Pressuponha que as 4 rodas aterrissam simultaneamente.
(b) Pressuponha que uma roda absorve toda a força de aterrissagem.

*7-23 Um par de rolos cilíndricos de aço de 12 in de diâmetro rolam juntos com 9% de escorregamento. Encontre suas tensões de contato para uma força de contato radial de 1000 lb/in de comprimento.[†]

7-24 Estime a vida em número de ciclos dos rolos do Problema 7-23 se eles forem feitos em ferro fundido cinzento classe 30, austemperados com HB 270.[†]

7-25 Uma sapata de ferro fundido cinzento classe 30 com 0,5 in de diâmetro é suportada por uma barra de aço SAE 4340, temperado e revenido a 800°F. A força na sapata é de 850 lb. Estime a área real de contato e a relação entre a área real e a área aparente de contato.

7-26 Estime o coeficiente de atrito seco entre os dois materiais no Problema 7-25 se a resistência ao cisalhamento do ferro fundido é $S_{us} = 45$ kpsi. Como isso se compara ao valor dado na Tabela 7-1?

7-27 Duas sapatas de aço 1040 laminado a quente de 0,5 in × 1 in estão em contato por uma força de 900 lb. Estime a área real de contato e a relação entre a área real e a área aparente de contato.

*As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Números de problemas em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

[†] Ver Tabela 7-7 para informações sobre resistências de materiais para estes problemas.

7-28 Estime o coeficiente de atrito seco entre os dois materiais do Problema 7-27. Como isso se compara ao valor dado na Tabela 7-1?

7-29 Dois materiais foram ensaiados para se determinar a quantidade de desgaste por adesão quando eles rolam juntos. A profundidade média de desgaste é dada na Tabela P7-1, junto com outros parâmetros dos testes para um total de 350 testes. Qual é o coeficiente médio de desgaste para os materiais testados, se a dureza Brinnel do mais mole dos dois é de HB 277?

7-30 Uma peça de aço doce com HB = 280 tem sua espessura reduzida em um esmeril por abrasão. Tanto a roda do esmeril quanto a peça de metal têm a mesma largura, que é de 20 mm. Em cada passe pelo esmeril, 0,1 mm é removido. Se o coeficiente de atrito abrasivo para essa operação é de 0,5, qual é a força normal aproximada na roda do esmeril?

7-31 Duas engrenagens de aço com dentes de perfil evolvente estão em contato. Na linha de contato entre as engrenagens, elas podem ser modeladas como dois cilindros em contato. Quando o contato está fora do ponto primitivo, há uma combinação de rolamento e deslizamento. Determine e plote as tensões principais do contato dinâmico na superfície dos dentes para as seguintes engrenagens, se a força de contato for de 500 lb e o coeficiente de atrito for 0,15: R_1 = 2,0 in, R_2 = 6,0 in. A espessura (largura da face) de ambas as engrenagens é de 0,5 in. Encontre também o valor de x/a para o qual as tensões principais têm valor extremo.

7-32 Duas engrenagens de aço com dentes de perfil evolvente estão em contato. Na linha de contato entre as engrenagens, elas podem ser modeladas como dois cilindros em contato. Quando o contato está fora do ponto primitivo, há uma combinação de rolamento e deslizamento. Determine e plote as tensões principais do contato dinâmico na superfície dos dentes para as seguintes engrenagens, se a força de contato for de 1500 lb e o coeficiente de atrito for 0,33: R_1 = 2,5 in, R_2 = 5,0 in. A espessura (largura da face) de ambas as engrenagens é de 0,625 in.

7-33 Dois rolos em contato são necessários em uma máquina. Eles rolam juntos com uma combinação de rolamento com 9% de deslizamento. Ambos são feitos de aço SAE 1144 laminado a frio. A força de contato radial é de 1200 N e o coeficiente de atrito é de 0,33. Os rolos devem ter o mesmo raio e ambos têm 10 mm comprimento. Se a vida de projeto é de 8*E*8 ciclos, determine um raio apropriado para os rolos.

7-34 Dois rolos em contato são necessários em uma máquina. Eles rolam juntos com uma combinação de rolamento com 9% de deslizamento. Ambos são feitos em Meehanite, têm o mesmo raio (30 mm) e 45 mm de comprimento. Se a vida de projeto é de 1*E*8 ciclos, determine o carregamento aceitável nesses rolos.

7-35 Uma sapata de ferro fundido cinzento classe 20 com 25 mm de diâmetro é suportada por uma barra de aço SAE 4130 com 30 mm de largura, revenido e temperado a 800F. A força na barra é de 2800 N. Estime a área real de contato e a relação entre a área real e a área aparente entre a barra e a sapata.

7-36 Estime o coeficiente de atrito a seco entre os dois materiais no Problema 7-35 se a resistência ao cisalhamento do ferro fundido é S_{us} = 310 Mpa. Como isso se compara ao valor dado na Tabela 7-1?

7-37 Duas sapatas de aço SAE 1020 laminado a quente de 25 mm X 40 mm estão em contato por uma força de 9 kN. Estime a área real de contato e a relação entre as áreas de contato real e aparente.

7-38 Estime o coeficiente de atrito a seco entre os dois materiais no Problema 7-37. Como isso se compara ao valor dado na Tabela 7-1?

*7-39 Um eixo de aço de 25 mm de diâmetro e rigidez HB420 gira a 700 rpm em uma bucha de bronze de 40 mm de comprimento com carga radial média de 500 N. Estime o tempo necessário para remover 0,05 mm do material por desgaste por adesão se a lubrificação se perdesse repentinamente, supondo uma taxa de desgaste uniforme em torno da bucha.

7-40 Uma máquina possui uma base de tripé que utiliza esferas de náilon com 11 a 15 mm de diâmetro como suporte nos seus pés. O tripé repousa sobre uma barra de

FIGURA P7-6

Problema 7-22.

Tabela P7-1

Dados para o problema 7-29

F N	l m	d mm	N°. testes
100	5000	0,180	100
200	5000	0,372	75
200	7500	0,550	75
400	10000	1,470	100

*As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

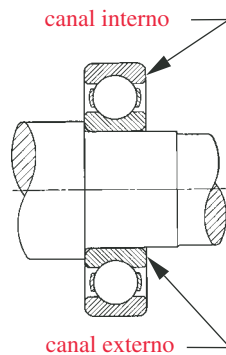



FIGURA P7-7

Problema 7-41.

aço. O peso de 360 N da máquina é distribuído igualmente no tripé. Determine o tamanho da área de contato e as tensões de contato nas esferas de náilon. Suponha que a relação de Poisson para o náilon seja de 0,25.

7-41 Um rolamento de esferas é constituído por um número de esferas de aço (separados por uma gaiola de esferas) e dois anéis com canais como na Figura P7-7. Os canais têm uma curvatura composta. Em um plano que contém o eixo do rolamento, a curvatura é côncava e se conforma estreitamente ao raio da esfera. Em um plano perpendicular ao eixo, a curvatura é convexa para o canal interno e se relaciona com o tamanho do orifício do rolamento. Determine o tamanho da área de contato e as tensões máximas de contato entre uma bola e o canal interno com uma carga radial de 5200 N em um rolamento de aço com as seguintes dimensões: diâmetro da esfera = 8 mm, raio do canal para superfície côncava = 4,05 mm, raio do canal para superfície convexa = 13 mm.

*7-42 Dois rolos de aço usados em um processo de manufatura rolam junto com a combinação de rolamento e deslizamento. Um rolo possui o diâmetro de 75 mm, e o outro possui o diâmetro de 50 mm. Os dois possuem 200 mm de comprimento. A força de contato, que é normal para o plano de contato, é de 18 500 N. Supondo que o coeficiente de atrito entre os rolos seja de 0,33, determine a máxima tensão de tração, de compressão e de cisalhamento nos rolos.

7-43 Repita o Problema 7-41 para o contato entre uma esfera e o canal da pista externa. O raio da pista externa para a superfície côncava é de 4,05 mm, e o raio da pista externa para a superfície convexa é de 17,02 mm.

7-44 Uma máquina possui dois rolos cilíndricos abaulados girando de encontro um ao outro, com uma carga dinâmica que varia de 0 a 3,5 kN. O primeiro rolo tem um raio maior de 14 mm e um raio de abaulamento de 80 mm. O segundo rolo tem um raio maior de 75 mm e um raio de abaulamento de 100 mm. Os dois eixos de rotação possuem um ângulo de 30 graus entre si. Encontre as tensões de contato se os dois rolos forem de aço.

7-45 Um sistema de camo-seguidor tem um movimento que combina rolamento e deslizamento. O camo cilíndrico, um raio de curvatura mínimo de 80 mm. O seguidor de rolo é também cilíndrico, com um raio de 14 mm. Os dois têm 18 mm de comprimento. A força de contato máxima, que é normal ao plano de contato, é 3200 N. Tanto o camo quanto o seguidor são de aço reforçado. Suponha que o coeficiente de atrito entre o camo e o seguidor seja de 0,33 e determine a máxima tensão, compressão e cisalhamento no camo.

7-46 Estime o tempo necessário para remover 2µm de material de 5000 m^2 de superfície de um bloco de aço HB110 se uma máquina de polimento grosseiro aplica uma força de 80 N em um passe de 400 mm a 120 passes/minuto.

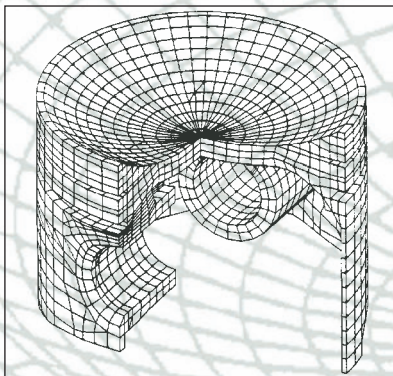
(a) Se feito a seco.
(b) Se feito com lubrificação.

7-47 Grãos abrasivos soltos são introduzidos em erro no sistema de lubrificação de um rolamento de impulso plano de bronze que tem uma dureza de 60HB e uma área de superfície de 500 mm². Se uma parte de aço reforçado exerce uma força de 50 N no rolamento enquanto oscila a 200 passes/minuto com um passe de 30 mm, que profundidade de desgaste ocorre em um período de 8 horas?

7-48 Dois rolos estão em contato com uma combinação de rolamento com 9% de deslizamento. A tensão máxima principal de compressão resultante é de 15 500 psi. Ambos os rolos são feitos de alumínio anodizado duro 6061-T6. O projeto de vida dos canos é de 4 anos operando em dois turnos 260 dias/ano e cada um gira a 200 rpm. Qual é o fator de segurança esperado contra corrosão para o par de rolos?

7-49 Dois rolos em contato rolam juntos em rolamento puro. Os dois são feitos de ferro cinzento classe 20, HB 130-180. Um rolo tem um diâmetro de 2,75 polegadas, e o outro de 3,25 polegadas. Ambos têm 10 polegadas de comprimento. A carga aplicada é de 5500 lbf. Se a vida do projeto é de 1E08 ciclos, determine o fator de segurança contra falha por corrosão.

*As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

8

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS

Se você colocar lixo em um computador, nada sairá além de lixo. Mas esse lixo, tendo passado por uma máquina cara, é, de alguma forma, enobrecido, e ninguém se atreve a criticá-lo.

ANÔNIMO

8.0 INTRODUÇÃO

Todas as análises de tensões e deflexão apresentadas nos capítulos anteriores foram resolvidas utilizando técnicas clássicas de solução analítica, que são o foco principal deste livro. Essas técnicas são principalmente aplicáveis em componentes de geometria simples, como cilindros, prismas retangulares, etc. Contudo, muitos componentes de máquinas têm formas geométricas mais complexas, tornando o cálculo de tensões e deflexão difícil ou mesmo impossíveis de ser feito pelo método analítico. Considere, por exemplo, a complexa forma do virabrequim mostrado na Figura 2-14. Para analisar as tensões e a deflexão em uma peça com tal complexidade, pode-se dividir o seu volume em um conjunto finito de elementos contíguos e discretos e resolver um conjunto (grande) de equações, cada uma das quais aplicadas sobre um elemento e seus nós, que conectam os elementos entre si. A Figura 8-1 mostra os modelos para elementos finitos de um virabrequim, um pistão e uma biela de motor.

O conceito da análise pelo método dos elementos finitos (FEA) é muito simples, mas os cálculos que o acompanham não são. A teoria matemática por trás do FEA está além do escopo deste livro, mas é coberta por um grande número de outros livros, alguns dos quais estão relacionados na bibliografia deste capítulo. O objetivo aqui é informar o leitor da existência da técnica, mostrar algumas exigências e armadilhas e fornecer alguns exemplos do seu uso.

O FEA tornou-se relativamente fácil de usar, devido à disponibilidade de *softwares* comerciais de análise, muitos dos quais têm interface com diversos *softwares* de modelagem de desenho (CAD). Os engenheiros que ingressarem no mercado de trabalho do século XXI terão maior probabilidade de encontrar modeladores sólidos (CAD) e a análise pelo FEA sendo utilizados nas suas empresas para o projeto de produtos e máquinas. A utilização de *softwares* comerciais torna muito fácil obter resultados de análises pelo FEA, mas se o usuário não compreender direito como utilizar esta ferramenta de forma adequada, os resul-

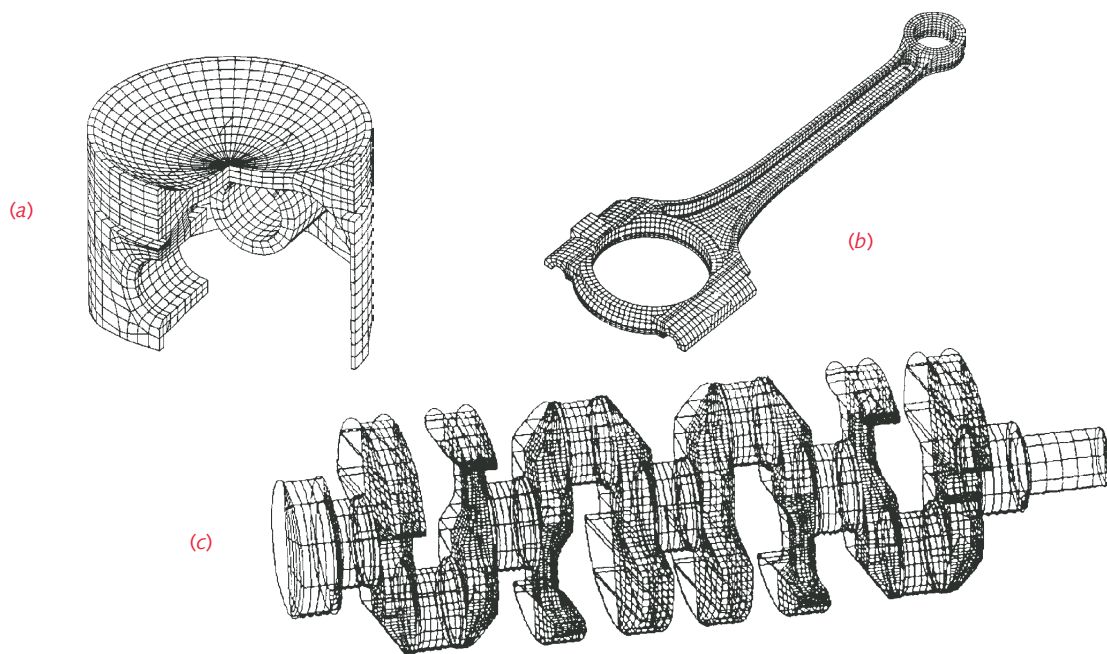



FIGURA 8-1

Modelos de elementos finitos para pistão (a), biela (b) e virabrequim (c) de um motor. (Cortesia da General Motors. Co.)

tados podem conter erros grosseiros. É bastante recomendado que os estudantes de projetos de máquinas façam um curso sobre a teoria e a aplicação do FEA. Muitos currículos de engenheiros já contemplam esta habilidade.

Cálculos de tensão e deformação

As tensões variam através do contínuo de qualquer componente. Dividindo esse componente em um número finito de *elementos* discretos conectados pelos seus *nós* (chamados de *malha*), pode-se obter uma *aproximação* das tensões e deformações, em qualquer parte do componente, para um dado conjunto de condições de contorno e de cargas aplicadas em alguns nós da estrutura.* A aproximação pode ser melhorada pelo uso de mais elementos de tamanho menor, ao custo do aumento do tempo de processamento. Com as atuais velocidades de processamento (que continuarão aumentando no futuro) o problema será menor do que nos primeiros dias de uso do FEA.† Parte do problema do analista é escolher o tipo apropriado, o número e a distribuição de elementos para otimizar o dilema entre precisão e o tempo de processamento. Os elementos de maior tamanho podem ser usados em regiões da peça onde o gradiente (inclinação) de tensão varia suavemente. Nas regiões onde o gradiente de tensão muda rapidamente, próximo a concentrações de tensão ou cargas aplicadas, por exemplo, uma malha mais fina (refinada) é necessária. Observe na Figura 8-1c que os elementos próximos às extremidades do virabrequim, onde o diâmetro é constante, são maiores que aqueles nos braços e munhões.

O método dos elementos finitos não é limitado à análise estrutural. Ele também é utilizado em problemas de mecânica dos fluidos, transferência de calor, acústica, eletromagnetismo e outros problemas mais especializados. Neste livro

* Neste caso, os cálculos de tensão utilizando os métodos clássicos também são simplificações devido às hipóteses simplificadoras que normalmente são feitas para resolver esses problemas.

† Muito embora a velocidade de processamento aumente, os engenheiros desafiam os computadores com problemas de análises ainda mais complexos, e esses, especialmente se não lineares, podem resultar em longos tempos de processamento, mesmo em máquinas de alta capacidade.

será discutido apenas o seu uso em problemas de análise estrutural linear. Esse caso é tratado em todos os *softwares* comerciais de FEA. Outros usuários podem trabalhar com sistemas não lineares nos quais as deformações ultrapassam os limites assumidos para a análise linear estática, as propriedades dos materiais são não lineares ou o contato entre as superfícies deve ser modelado. O FEA fornece informações sobre tensões, deformações, deflexão, frequências naturais e modos de vibração (autovalores e autovetores), impacto e vibrações estruturais transientes ou em regime permanente.

Muitas formulações matemáticas diferentes têm sido propostas e utilizadas desde 1956, quando o método dos elementos finitos foi programado pela primeira vez e ganhou o seu nome no trabalho de Turner *et al*.[1] A abordagem utilizada pela maioria dos *softwares* comerciais é o Método da Rigidez Direta (MRD), que utiliza a rigidez do elemento para calcular os deslocamento nodais e as forças internas resultantes de um conjunto de cargas externas aplicadas e das condições de contorno. As deformações são calculadas a partir dos deslocamentos e as tensões pela lei de Hooke.

8.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Será apresentado o exemplo mais simples possível do processo matemático para a análise de elementos finitos pelo método da rigidez direta. O conceito é fácil de entender nessa forma simples. A sua implementação é matematicamente mais complexa que a descrita aqui e o processamento é intenso, exigindo a solução de grandes matrizes. Muitos livros explicam a matemática e a implementação do FEA em detalhes. Veja a bibliografia para mais informações.

A Figura 8-2a mostra um diagrama de corpo livre do mais simples elemento finito estrutural, uma mola linear em uma dimensão. Ela tem uma rigidez característica (constante de mola) $k_h = f/\Delta u$, de forma que um deslocamento cria uma força no nó. Assuma os deslocamentos positivos u_i e u_j e some as forças em cada nó.

$$\begin{aligned} f_{ih} &= k_h u_i - k_h u_j \\ f_{jh} &= -k_h u_i + k_h u_j \end{aligned} \tag{8.1a}$$

Coloque-os na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_h & -k_h \\ -k_h & k_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ih} \\ f_{jh} \end{Bmatrix} \tag{8.1b}$$

o que pode ser escrito na notação matricial como:

$$[k]\{d\} = \{f\} \tag{8.1c}$$

(*a*) DCL do elemento

(*b*) Malha com 2 elementos e 3 nós

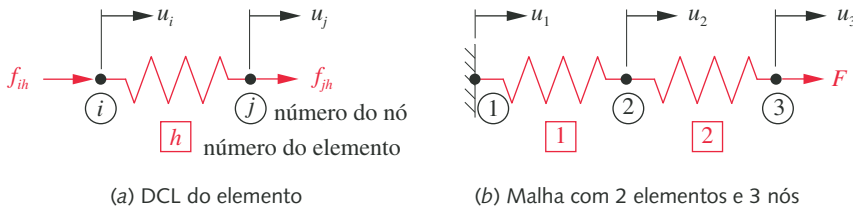



FIGURA 8-2

Modelo e elemento simples de mola.

onde k é a matriz de rigidez, d é o vetor de deslocamento nodal e f é o vetor de forças internas do elemento.

A figura 8-2b mostra dois desses simples elementos conectados entre si para formar uma malha de elementos finitos. O elemento 1 é fixo, o que cria uma condição de contorno de restrição (do movimento), e o elemento 2 tem em seu nó 3 uma força aplicada. Aplique a Equação 8-1a nesses elementos.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{Bmatrix} \tag{8.2a}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{22} \\ f_{32} \end{Bmatrix} \tag{8.2b}$$

As forças na Equação 8.2 são forças internas ao elemento e atuam nos nós. Para o equilíbrio, a soma das forças nodais deve ser igual às forças externas aplicadas aos nós. Deixe F_i representar a força externa em cada nó, onde i é o número que identifica o nó. Assim, somando as forças em cada nó:

$$\begin{aligned} &\text{nó 1} \qquad & f_{11} &= F_1 \\ &\text{nó 2} \qquad & f_{21} + f_{22} &= F_2 \\ &\text{nó 3} \qquad & f_{32} &= F_3 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Substitua as expressões para as forças internas nos nós da Equação 8.2 na Equação 8.3

$$\begin{aligned} k_1 u_1 \quad - k_1 u_2 \quad &= F_1 \\ -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 &= F_2 \\ - k_2 u_2 + k_2 u_3 &= F_3 \end{aligned} \tag{8.4a}$$

e coloque o resultado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{8.4b}$$

ou:

$$[K]\{D\} = \{F\} \tag{8.4c}$$

As forças aplicadas e a matriz rigidez são conhecidas. Os deslocamentos nodais serão calculados, o que requer a pré-multiplicação em ambos os lados pela inversa de $[K]$.* Mas esta matriz $[K]$ é uma matriz singular, ou seja, ela não tem uma solução única. Isso acontece porque o sistema de Equações 8.4 tem um grau de liberdade cinemático e pode estar em equilíbrio em qualquer local de seu universo unidimensional. Ainda não foi levada em conta a restrição de movimento para o nó 1. Para resolver um problema de elementos finitos estático, devem-se remover todos os graus de liberdade cinemáticos utilizando as condições de contorno convenientes. Pode-se fixar este sistema definindo como condição de contorno o deslocamento nulo do nó 1 (u_1). Isso zera a primeira coluna da matriz de rigidez, e o sistema agora tem três equações e duas incógnitas. Se a força de reação F_1 é conhecida, pode-se eliminar a primeira equação e utilizar as duas restantes para calcular os deslocamentos. Também, a partir da figura 8-2b, pode-se observar que nenhuma força externa é aplicada ao nó 2, tornando F_2 nula. Substituindo:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \tag{8.5}$$

* A solução computacional não faz o cálculo da inversa e a sua pré-multiplicação. Essa operação tem um custo de processamento muito alto. Existem várias técnicas numéricas mais eficientes para a solução de um sistema de equações.

A matriz [*k*] é chamada de matriz de rigidez reduzida e tem uma matriz inversa não singular, o que permite a solução para os deslocamentos desconhecidos. Após os deslocamentos terem sido encontrados, as forças internas em cada um dos nós podem ser calculadas pela Equação 8.2. As equações envolvendo as forças de reação desconhecidas, que foram removidas para reduzir a matriz, agora podem ser calculadas para determinar as forças de reação. As deformações são calculadas derivando os deslocamentos e as tensões são calculadas a partir dessas deformações e das propriedades do material. Muitos pós-processadores irão mostrar as tensões principais e as tensões equivalentes de von Mises, bem como as deformações e deslocamentos.

Este exemplo trivial contém os passos essenciais de uma solução de um problema estático com o FEA. Em um problema real, elementos mais complexos com vários graus de liberdade em seus nós podem ser utilizados. Existe um número muito grande de elementos, alguns dos quais têm funções para a análise com comportamento não linear.

8.2 TIPOS DE ELEMENTOS

Os elementos podem ser de uma, duas ou três dimensões ou, ainda, elementos de linha, área e volume, respectivamente.* Eles também podem ser de diferentes "ordens", termo que se refere à ordem da função (normalmente um polinômio) utilizada para interpolar o deslocamento no interior do elemento. A Figura 8-3 mostra alguns dos elementos mais comuns, agrupados por dimensionalidade e ordem. De um modo geral, pode-se usar o mais simples dos elementos que, ainda assim, se obterá a informação desejada, uma vez que elementos e ordens superiores implicam em um tempo computacional muito alto.

Dimensão do elemento e grau de liberdade (GDL)

Na Figura 8-3, os elementos mostrados são divididos em grupos com uma, duas e três dimensões, chamados de 1-D, 2-D e 3-D, respectivamente. Esses grupos dimensionais definem quantos graus de liberdade (GDL) cada nó de um elemento tem.† Note que o elemento de linha existe em todos os três grupos. Elementos de linha são adequados para modelar estruturas como membros de treliças e vigas com área de seção transversal constante, e podem ter 1, 2, 3 e 6 GDL em cada nó. Um elemento de linha 1-D tem dois GDL no total, um em cada nó. Fisicamente, isso representa um elemento de treliça, conectado por pinos nas uniões com seus vizinhos. O elemento de linha pode apenas transmitir força ao longo do seu comprimento (unidimensional) e não pode suportar momento nos nós. Um elemento de linha 2-D tem 3 GDL por nó e pode representar uma viga 2-D, com momento e força em duas direções. Um elemento de linha 3-D tem 6 GDL por nó e pode representar um eixo-viga 3-D com momentos e torques em adição às forças lineares nas três direções. Elementos de geometria mais complexa, como triângulos, quadriláteros, tetraedros e hexaedros (cubo), têm mais GDL.

Observe que um elemento de linha 1-D pode apresentar bons resultados para um membro de treliça carregado axialmente em tração, mas não será capaz de prever com precisão a flambagem se a carga axial for compressiva. A flambagem deve ser verificada separadamente utilizando as expressões de Euler, Johnson ou da secante, como descrito na Seção 4.16. Alguns *softwares* de FEA apresentam um meio de calcular a flambagem separadamente.

Elementos 2-D podem ser utilizados para modelar estruturas tridimensionais se sua geometria e seu carregamento criam um caso de tensão plana ou deformação plana no qual suas magnitudes são nulas na terceira dimensão. Uma viga longa com cargas simétricas de flexão ou axial, em relação à sua largura, pode

* Existem também disponíveis elementos 0-D para modelar molas, elementos de corpo-rígido, massas concentradas e outros tipos especiais de restrições.

† Os "grupos dimensionais" da Figura 8-3 referem-se às dimensões geométricas do modelo.

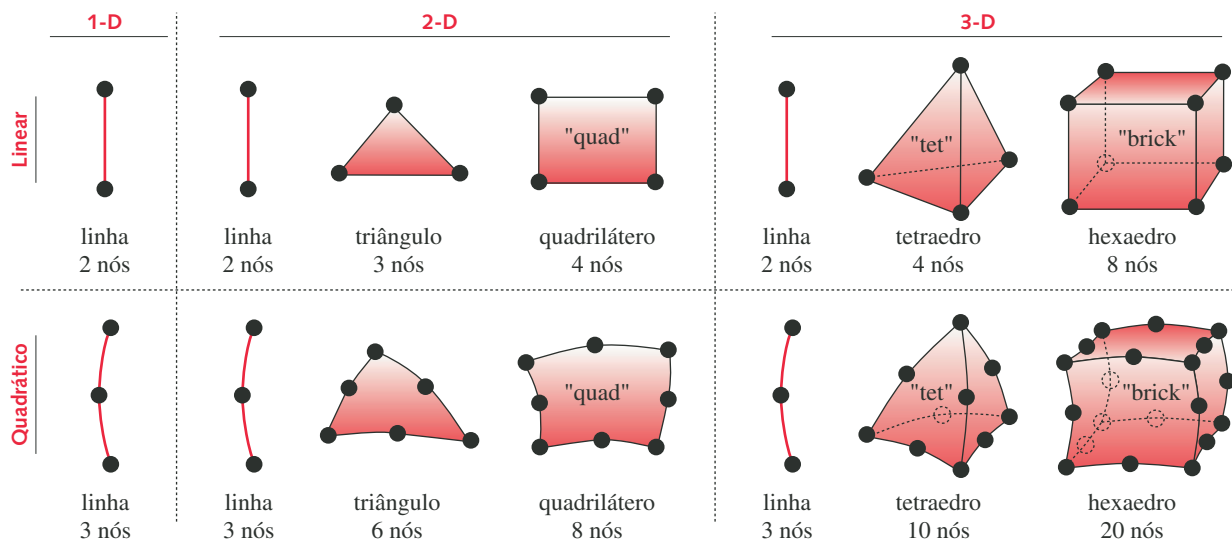



FIGURA 8-3

Alguns elementos finitos comuns.

ser analisada com elementos 2-D. Porém, se o carregamento é excêntrico, será necessário utilizar elementos 3-D. Para uma análise 2-D de uma viga ser válida, todos os planos longitudinais devem permanecer em seus planos originais quando a viga deflete.

Se um componente é axissimétrico e de parede fina, e o carregamento é simetricamente distribuído, como em um tubo ou vaso de pressão sujeitos a uma pressão interna, pode-se usar elementos de superfície 2-D (casca). Neste caso assume-se que o gradiente de tensão através da fina parede é pequeno o suficiente para ser ignorado. Estruturas não axissimétricas podem ser analisadas com elementos de casca desde que a espessura da sua parede seja pequena em comparação com a área da superfície.

Muitos componentes de máquinas têm a geometria e o carregamento de tal forma que requerem o uso de elementos 3-D. Caso a geometria seja simples, pode-se, então, resolver com os métodos clássicos. Os exemplos na Figura 8-1 apresentam uma geometria muito complexa para usar o método clássico de forma precisa, o que somente é possível com o uso da análise por FEA 3-D.

Ordem dos elementos

Elementos de alta ordem são usados em contornos curvos, enquanto elementos lineares aplicam-se aos contornos retos. Os primeiros têm melhor capacidade de representar os contornos de peças complexas e, adicionalmente, podem trabalhar com gradientes de tensão mais altos. Mas o aumento da ordem dos elementos pode aumentar significativamente o tempo de processamento, motivo pelo qual os analistas preferem primeiro usar um modelo linear para modelar o componente.

A deformação é uma função da taxa de variação do deslocamento através do elemento (isto é, do gradiente do deslocamento) e é calculada pela derivada da função de deslocamento no elemento. Para um elemento linear triangular ou tetraédrico, a função deslocamento através do elemento é uma reta (ou um plano) e a deformação é constante. Isso os torna excessivamente rígidos. A tensão é calculada a partir da deformação e das propriedades do material (Lei de Hooke generalizada). Assim, triângulos e tetraedros lineares têm valores de tensão constantes dentro do elemento. Triângulos quadráticos, tetraedros e hexaedros têm funções

de deslocamento parabólicas e distribuição de deformação linear (e tensão) no elemento, o que permite melhores estimativas para as tensões.

Os especialistas não recomendam o uso de elementos triangulares de três nós ou tetraedros de quatro nós por causa das estimativas imprecisas para a tensão e para a rigidez. Melhores estimativas de tensão são alcançadas utilizando um quadrilátero de quatro nós ou um hexaedro de oito nós, os quais têm deformação linear no elemento. Infelizmente, é mais difícil de gerar a malha em componentes de formas complexas com quadriláteros e hexaedros do que com triângulos ou tetraedros. Uma alternativa é aumentar a ordem dos elementos (triângulo ou tetraedro) para aumentar a capacidade de calcular as tensões. Os elementos de alta ordem, como um triângulo de seis nós ou tetraedro de dez nós, permitem melhores aproximações quando comparados aos seus equivalentes de baixa ordem e têm se mostrado tão bons quanto os elementos quadriláteros de quatro nós ou hexaedros de oito nós, respectivamente.

Uma vez que elementos vizinhos (de qualquer ordem) compartilham nós e cada elemento tem um valor diferente de tensão nodal, existirão pelo menos dois valores possíveis para a tensão no nó. Como resultado, o campo de tensão calculado pelo FEA tem uma série de descontinuidades no campo de tensão, elemento a elemento, em vez de um componente real contínuo. A maioria dos pós-processadores de FEA cria um valor médio para a tensão em cada elemento mostrar um contorno de tensão suave.

(*a*) Razão de aspecto boa

(*b*) Razão de aspecto ruim

FIGURA 8-4

Razão de aspecto boa e ruim.

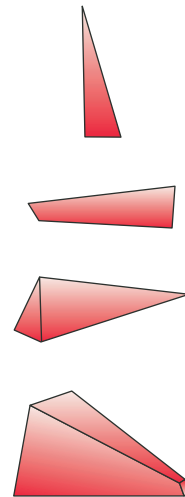
Refinamento h-adaptativo *versus* p-adaptativo

Dois tipos de refinamento são utilizados pelos programas comerciais de FEA, chamados de refino *h-adaptativo* e *p-adaptativo*, respectivamente. O refino h--adaptativo é comumente utilizado e, em geral, a ordem do elemento é limitada à segunda ordem. O refinamento da malha (veja Seção 8.3) deve ser usado para aumentar o número e reduzir o tamanho dos elementos nas regiões próximas aos maiores gradientes de tensões. O refino p-adaptativo permite que a ordem do polinômio interpolador dos elementos possa ser aumentada até nove ou mais, de forma a capturar as variações locais da tensão. O refino p-adaptativo permite que os elementos sejam maiores e em menor quantidade do que os elementos utilizados no refino h-adaptativo, para o mesmo tipo de problema. Eles também podem se adaptar melhor, aos componentes de formas complexas, devido ao uso de funções interpoladoras de alta ordem.

Razão de aspecto do elemento

A razão de aspecto de um elemento é calculada dividindo o comprimento do lado mais longo pelo lado mais curto.[2] Uma razão de aspecto menor que 5:1 é preferível para elementos no refino h-adaptativo, muito embora elementos com refino p-adaptativo permitam razões de até 20:1.[3] Se a forma do elemento difere muito da sua forma básica, erros serão introduzidos. A Figura 8-4 mostra alguns exemplos de elementos com razão de aspecto boa e ruim. O desvio angular da forma retangular (*skew*), o desvio geométrico da forma retangular (*taper*) e a falta de planicidade do elemento (*warp*) também desempenham papel importante na precisão do resultado. Veja a referência [4] para as definições.

8.3 MALHA

No início da utilização do FEA, a geração de malha para um componente exigia um enorme esforço. Atualmente, geradores automáticos de malha e pré-processadores presentes nos *softwares* comerciais tornam essa tarefa muito mais simples. Muitos aplicativos comerciais permitem a importação do modelo direto do CAD, além de autogerar a malha de elementos finitos.

A maioria dos geradores de malha oferece, por padrão, quadriláteros lineares ou malha mista de quadriláteros e triângulos para as regiões onde a geometria da peça tenha uma maior complexidade. Alguns geradores de malha oferecem apenas malhas 3-D com elementos tetraédricos. Esses elementos lineares, como vimos, não são a melhor recomendação para o cálculo das tensões, porém elementos de maior ordem são aceitáveis. Um *software* comercial de FEA oferecerá um pré-processador que permite a geração manual de malhas com elementos da sua escolha. Um resultado melhor na análise 3-D pode ser alcançado gerando uma malha que combina hexaedros de 8 nós e elementos prismáticos com 6 nós (*wedge*), ou aumentando a ordem dos elementos tetraédricos, embora isso aumente o tempo de processamento. À medida que os computadores se tornam mais rápidos, isso vem deixando de ser um problema. Por exemplo, alguns dos casos estudados neste capítulo usam malha de tetraedros com ordem 16. A geração manual de malhas requer mais esforço e habilidade do analista do que a geração automática, mas pode ser necessária para atingir melhores resultados na análise. Geralmente, no projeto de uma nova peça, a geração automática de malha é utilizada, apesar das limitações na precisão dos resultados serem precários, mas isso aumenta a velocidade do processamento. Embora os resultados absolutos sejam menos precisos, podem-se comparar projetos alternativos de análises baseados em malhas geradas automaticamente. Em um processo de projeto é muito melhor ter resultados precoces, mesmo com baixa precisão, para determinar se o projeto é viável, do que perder tempo para descobrir mais tarde que o projeto é inviável. Quando se define o projeto, pode-se gastar mais tempo para gerar uma malha melhor e obter melhores resultados para o projeto final.

Densidade da malha

Uma malha com elementos grosseiros (maiores) é desejada quando se quer minimizar o tempo de processamento. Nas regiões da peça onde o gradiente de tensão é pequeno, mesmo uma malha grosseira fornece bons resultados, mas nas regiões onde o gradiente de tensão é alto, como em locais com concentrações de tensão, uma malha mais refinada com elementos h-adaptativos (ou malha com a mesma densidade, porém com elementos p-adaptativos de ordem superior) é necessária para capturar a variação da tensão. Como exemplo, veja a Figura 4-34 e os pontos de aplicação de carga na Figura 7-19. Dessa forma, pode ser necessário variar a densidade da malha no modelo, processo chamado de refino da malha. Alguns julgamentos de engenharia baseados no entendimento do conceito de fluxo de força (Seção 4.15) são necessários para fazer esta tarefa.

Refino da malha

Uma malha mais grosseira pode ser aplicada inicialmente em um componente, mas o projetista ou analista deve usar conceitos de engenharia baseados na compreensão da distribuição de tensão em membros carregados para decidir se aquela região precisa ter uma malha mais fina. A Figura 8-5 mostra um exemplo de refino de malha em um modelo 2-D. Observe na figura (*a*) a concentração de elementos menores em torno do furo e no ponto de aplicação da força, na mandíbula. As concentrações de tensão nessas posições são visíveis no gráfico de tensões, figura (*b*). O refino da malha é necessário principalmente nas regiões de alta concentração de tensões.

Convergência

Como saber se uma malha foi suficientemente refinada? A maneira usual é aplicar um teste de convergência. A partir de uma malha de certo tamanho, calculam-se as tensões. Nas regiões onde as tensões são maiores, aplica-se um fator de redução e gera-se uma nova malha, mais refinada, calculando-se novamente as

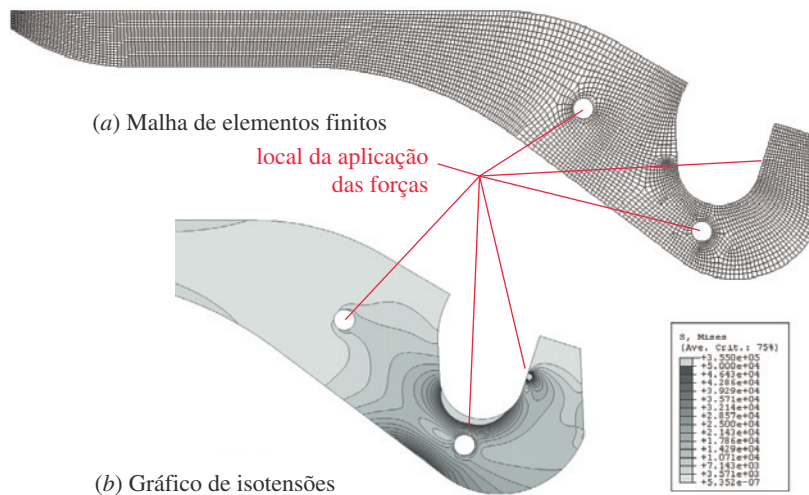



FIGURA 8-5

Análise de tensões por elementos finitos de um alicate de crimpagem referente ao Estudo de Caso 2B.

tensões. Os valores de tensão nessas regiões são comparados para as diferentes densidades de malhas. Se ocorrer uma diferença significativa entre uma solução e outra, isso indica que a malha anterior é ainda muito grosseira e deve ser refinada. Eventualmente, a mudança nos valores calculados para a tensão em malhas sucessivamente mais refinadas se tornará menor, indicando que a solução converge para o valor real. Se os resultados das diversas análises para a tensão em uma região específica forem expressos na forma de um gráfico, ele terá a aparência do gráfico da Figura 8-6. A curva tem crescimento exponencial e aproxima-se assintoticamente do valor real da tensão.*

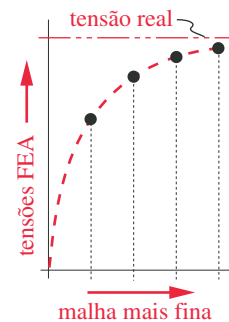



FIGURA 8-6

Resultados do refino de malha.

EXEMPLO 8-1

Análise por elementos finitos de uma viga em balanço com entalhe

Problema **Uma viga em balaço com entalhe é carregada em flexão com uma força transversal completamente reversa. Determine uma malha de elementos finitos compatível e compare a sua predição de máxima tensão e deflexão com a solução analítica para os pontos ao final da viga *l*, na distância *b* e nos entalhes em *a*.**

Dados **As dimensões da viga na Figura 8-7a são: $a = 4$, $d = 7{,}5$, $l = 10$, $b = 0{,}1$, $h = 1$ e $r = 0{,}167$ in. A carga $F = 25$ lb. O material é aço.**

Hipóteses **O engaste é considerado muito mais rígido que a viga. O peso da viga é insignificante quando comparado à força aplicada. A redução na seção transversal da viga, devido ao entalhe, tem o mínimo efeito na deflexão total da viga, mas tem um efeito significante na tensão local. Um modelo de FEA 2-D é suficiente, uma vez que a tensão plana pode ser considerada.**

Solução

1 Inicialmente calcule a solução analítica para determinar os valores teóricos da tensão e da deflexão. A Figura 8-7b mostra um diagrama de corpo livre da força cortante e do momento fletor para essa viga. Três posições interessam:

* Alguns aplicativos comerciais de FEA aplicam uma estratégia de convergência de cima para baixo em vez de de baixo para cima, como mostrado na Figura 8-6. Seja qual for a estratégia empregada, o resultado final deve ser o mesmo.

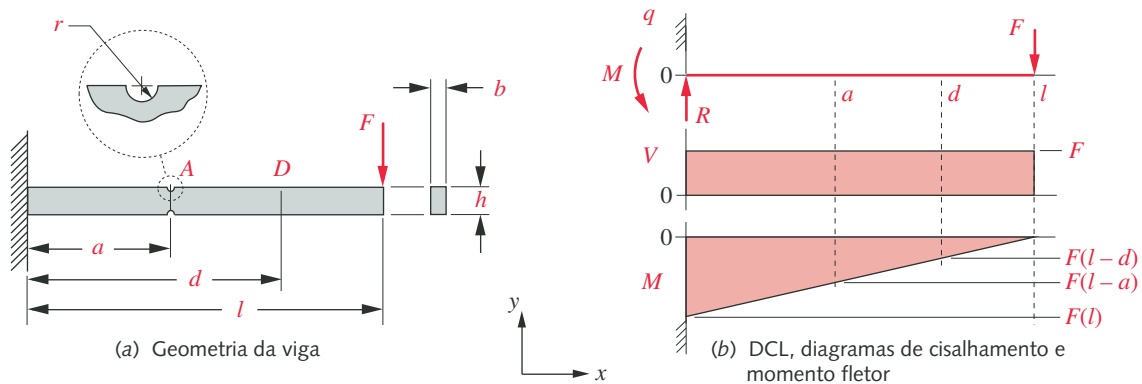



FIGURA 8-7

Viga em balanço para o Exemplo 8-1.

as fibras exteriores no engaste da viga, no ponto D e na raiz do entalhe em A, onde existe uma concentração de tensão. No engaste, a magnitude do momento é $Fl = 250$ in-lb e a tensão de flexão na fibra mais externa é:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{250(0,5)}{\frac{0,1(1)^3}{12}} = \frac{125}{0,0083} = 15.000 \text{ psi} \qquad (a)$$

O ponto D permite uma verificação da tensão de flexão longe de qualquer concentrador de tensão.* À distância d do engaste, o momento é $F(l - d) = 25(10 - 7,5) = 62,5$ in-lb e a tensão de flexão na fibra mais externa no ponto D é:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{62,5(0,5)}{0,1(1)^3/12} = 3750 \text{ psi} \qquad (b)$$

No entalhe, o fator de concentração de tensão, a partir da Figura E-12, é:

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b = 0,98315\left(\frac{0,167}{1-2(0,167)}\right)^{-0,33395} = 1,56 \qquad (c)$$

A magnitude do momento fletor é $F(l - a) = 25(10 - 4) = 150$ in-lb e tensão local de flexão no entalhe é:

$$\sigma = K_t\frac{Mc}{I} = 1,56\frac{150(0,5-0,167)}{\frac{0,1\left[1-2(0,167)^3\right]}{12}} = 1,56\frac{49,950}{0,00246} = 31,676 \text{ psi} \qquad (d)$$

2 A equação para a máxima deflexão devido à flexão é encontrada na Figura D-1:

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI} = \frac{25(10)^3}{3(30E6)(0,0083)} = -0,0335 \text{ in} \qquad (e)$$

3 Elementos quadrangulares são preferíveis aos triangulares, então eles serão utilizados. A Figura 8-8 mostra os quatro tipos de malha utilizados. A Tabela 8-1 mostra as tensões calculadas no ponto D e no entalhe para cada uma das malhas. A Figura 8-9 mostra as tensões no entalhe em função do tamanho da malha. A convergência para o valor calculado analiticamente no ponto D é mais rápida do que no entalhe, devido a ausência de concentração de tensão.† A malha muito refinada da Figura 8-8d foi necessária para obter uma boa convergência no entalhe. A diferença entre o cálculo por FEA para as várias

Tabela 8-1
Valores de tensão FEA *versus* tamanho da malha no Exemplo 8-1

	Tensão (psi)	
Elementos	**Ponto D**	**No entalhe**
535	3158	17.128
1146	3167	21.710
15.688	3653	27.801
97.797	3713	30.363
analítica	3750	31.676

* Pelo princípio de Saint-Venant, as tensões em locais distantes do ponto de aplicação da força ou das reações não serão afetadas pela área de contato da força.

† Observe que não é necessário refinar a malha em toda a peça, como feito aqui. Seria suficiente refinar localmente, na região do entalhe onde a concentração de tensão está presente. Neste exemplo, toda a malha foi refinada para mostrar os efeitos no ponto D, afastado do entalhe, bem como no próprio entalhe.

(*a*) Malha grosseira (535 elementos) (*b*) Malha mediana (1146 elementos)

(*c*) Malha fina (15688 elementos) (*d*) Malha muito fina (97797 elementos)

FIGURA 8-8

Refino da malha na viga do Exemplo 8-1. (Vista parcial da área.)

malhas e o analítico se deve, em parte, ao fato de que a tensão analítica é calculada para a fibra mais afastada da linha neutra, mas pelo FEA as tensões são valores médios das tensões calculadas nos quatro pontos de integração para cada elemento, então diferem dependendo do tamanho do elemento. Outras opções são usar a tensão calculada nos nós dos elementos ou nos quatro pontos de integração, obtendo quatro valores por elemento quadrangular.

4 A Tabela 8-2 mostra as estimativas pelo FEA para a deflexão na linha neutra e na extremidade da viga, para cada tipo de tamanho de malha, comparadas à deflexão calculada analiticamente. Observe que existe uma pequena diferença entre esses resultados para os vários tamanhos de malha, apontando para o fato de que não é necessária uma malha muito fina para ter precisão no cálculo da deflexão, ao contrário do que acontece com a tensão local. Note também que as deflexões calculadas pelo FEA são maiores que a calculada de forma analítica. Isso ocorre porque a solução por FEA inclui os efeitos devidos ao cisalhamento transversal, não levado em conta na equação da deflexão em flexão (*e*), mas que pode ser significante se a viga for curta. Aqui esse efeito acrescenta 10% a mais na deflexão da viga.

5 A Figura 8-10 mostra a distribuição das tensões de von Mises para a viga calculadas pelo FEA. Isso inclui as tensões de cisalhamento transversal. Observe a concentração de tensão no entalhe (ponto *A*) e na extremidade da viga onde a carga foi aplicada (*L*). A solução analítica não calcula automaticamente essas concentrações de tensão. Há de se reconhecer, para o cálculo da tensão, a necessidade de aplicar um fator de concentração de tensão no entalhe. A menos que se faça o mesmo no ponto de aplicação da carga, não se verá o aumento da tensão naquele ponto. Não é muito fácil verificar nesta figura, mas também existe uma pequena concentração de tensão no engaste da viga (*R*) onde as condições de contorno causam um aumento na tensão local. O FEA (utilizando elementos 2-D ou de ordem superior) tem a vantagem de revelar automaticamente as concentrações de tensão, quer devido à geometria local ou às forças aplicadas e condições de contorno. É necessário, no entanto, ter certeza de que se tem uma malha apropriada, especialmente nos locais de concentração de tensão, ou então os resultados poderão ter grandes erros, como pode ser visto na Tabela 8-1 e na Figura 8-9.

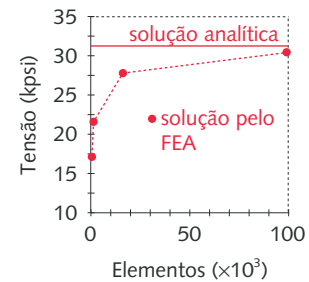



FIGURA 8-9

Convergência da solução, no entalhe para o Exemplo 8-1.

Tabela 8-2
Deflexão *versus* tamanho da malha no Exemplo 8-1

Elementos	Deflexão (in)
535	0,0359
1146	0,0364
15.688	0,0368
97.797	0,0369
analítica	0,0335

(*a*) Gráfico de isotensão

(*b*) Magnitudes de tensão

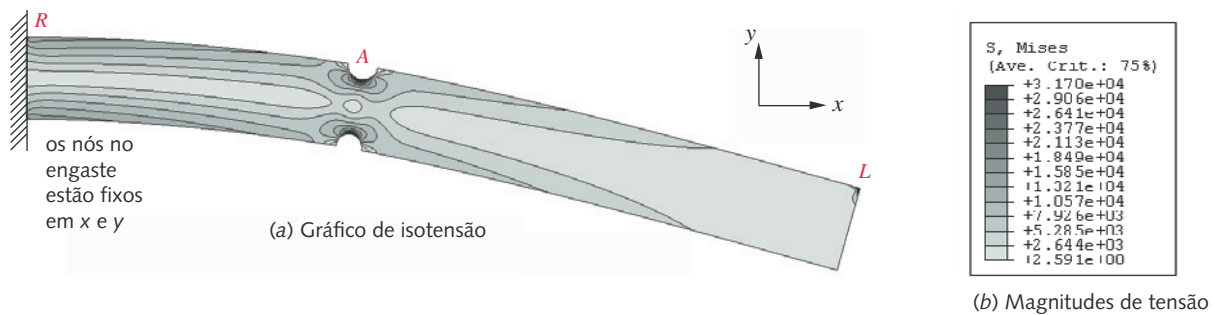



FIGURA 8-10

Tensões de von Mises calculada pelo FEA para o Exemplo 8-1.

8.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A definição de condições de contorno (CC), que representam realisticamente as restrições em um componente, não é uma tarefa trivial e pode fazer a diferença entre uma solução razoável ou ridícula para o problema. Cada nó de um elemento tem certo número de graus de liberdade, como descrito anteriormente. Os nós do elemento quadrangular 2-D têm, cada um, dois graus de liberdade em translação, e aqueles em um hexaedro 3-D têm 3 graus de liberdade translacional. Elementos de linha ou casca também podem ter graus de liberdade rotacional. Restrições externas são aplicadas aos nós do modelo. No mínimo, restrições em número suficiente devem ser aplicadas para remover qualquer grau de liberdade cinemático e manter a peça em equilíbrio estático. Além disso, as conexões físicas de um componente com relação ao seu vizinho, como em uma montagem, devem ser modeladas as mais próximas possíveis. As CC não devem restringir nem permitir deformações que na verdade não ocorreriam. Uma restrição física não apresentará rigidez infinita, mas quando se especifica que um nó não pode se mover em um modelo FEA, ele está realmente fixo e se torna infinitamente rígido. Isso tende a exagerar o efeito da restrição física. Se poucas CC são impostas, o sistema estará sub-restrito (*underconstrained*) e o processamento poderá falhar. Se muitas CC são impostas, o sistema estará super-restrito (*overconstrained*) e será excessivamente rígido.

Por exemplo, considere a travessa deslizante de seção transversal retangular apoiada em dois mancais com uma carga transversal aplicada, como mostrado na Figura 8-11a.* Os mancais lineares são estacionários e estão fixados à estrutura da máquina, que se apoia no piso. O piso é parte de uma construção, a qual, por sua vez, apoia-se na terra. Se a determinação das tensões e a deflexão da travessa, para esse carregamento, é desejada, qual parte desse sistema deve ser modelada? Pode-se apenas modelar a travessa ou é necessário incluir os mancais, a estrutura da máquina, o piso e o pântano sobre o qual o edifício foi construído? Pode-se seguramente concluir, para os nossos propósitos, que nesse caso a inter-relação entre a terra, o edifício e a estrutura da máquina pode ser modelada como infinitamente rígida, a menos que se tenha uma travessa e um carregamento gigantescos, grandes o suficiente para abalar o edifício.

Com essa premissa, é necessário definir como os mancais restringem a travessa para suportar a carga. Os mancais parecem estar em contato com a travessa em todo o seu comprimento, que é uma fração insignificante com comprimento não suportado. Qual tipo de restrição estes mancais fazem à travessa? Se eles evitam a mudança na inclinação da travessa dentro do comprimento do mancal,

* Observe que esse modelo de "travessa deslizante" pode ser considerado como um substituto para um eixo rotativo montado sobre rolamentos, uma vez que os efeitos da escolha das condições de contorno na deflexão são os mesmos. Porém, um modelo de eixo rotativo no FEA requer o uso de modelamento 3-D. O modelo de travessa deslizante pode ser analisado em 2-D sem perda de generalidade.

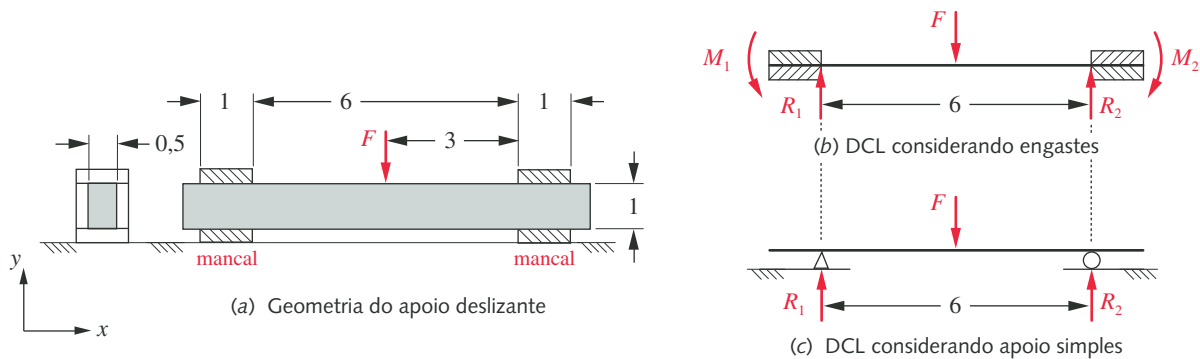



FIGURA 8-11

Viga suportada em mancais de deslizamento com diagramas de corpo livres alternativos.

então eles podem ser modelados como um engaste. Caso contrário, eles podem ser modelados efetivamente como "apoio simples".

As Figuras 8-11b e c mostram os diagramas de corpo livre que resultam dessas duas premissas. Qual é a "correta"? Provavelmente nenhuma das duas. Ambas são idealizações comumente utilizadas em análises de problemas de mecânica pelo método analítico. O uso do engaste assume que o mancal é infinitamente rígido em flexão e que a travessa está acoplada a ele de tal modo que nenhum movimento relativo exista entre eles no plano de flexão. Para isto ser verdadeiro, deveria ter uma folga nula entre a travessa e o mancal, o que tornaria o movimento de deslizar um pouco difícil. O modelo simplesmente apoiado assume que a travessa é apoiada em uma quina afiada em uma extremidade e em um rolo sem fricção na outra. Se essa hipótese for adotada, onde colocar a quina afiada e o rolo: no centro do mancal ou em suas extremidades? Em qual extremidade? Um pouco de reflexão irá revelar que se os mancais são rígidos e o eixo deflete para baixo a partir do centro, a travessa irá fazer contato com as extremidades internas do mancal, como mostrado na Figura 8-11c. Vamos analisar esses dois modelos tanto na forma analítica quanto pelo FEA e ver o que acontece.

EXEMPLO 8-2

Condições de contorno em uma viga deslizante

Problema **Uma viga deslizante de seção transversal retangular é apoiada em mancais de deslizamento e carregada em flexão por uma carga transversal em uma posição definida por *x*, como mostra a Figura 8-11a. Determine um arranjo razoável para as condições de contorno e compare a previsão de deflexão com as soluções analíticas.**

Dados **As dimensões da viga são mostradas na Figura 8-11a. A carga é F = 250 lb. O material é aço.**

Hipóteses **Os mancais de apoio são considerados muito mais rígidos que a viga. O peso da viga é desprezível comparado à carga. Os mancais têm uma folga radial de 0,001 in para permitir o deslizamento.**

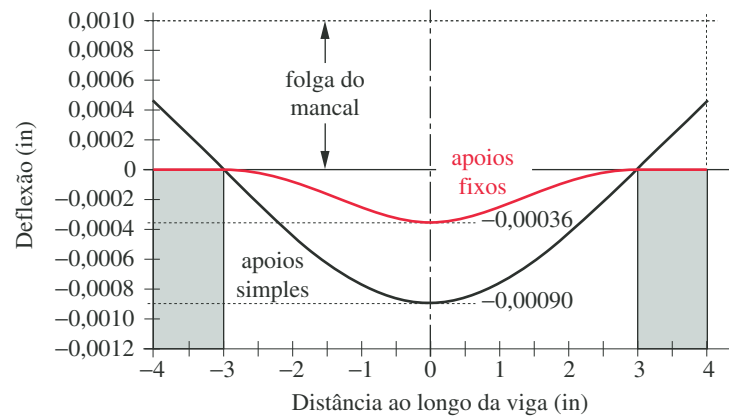



FIGURA 8-12

Deflexões para os dois modelos de condições de contorno do Exemplo 8-2 pela solução analítica.

Solução

1 As curvas da deflexão para a solução analítica para os casos da Figura 8-11b e c são mostradas na Figura 8-12. A deflexão máxima para o modelo fixo-fixo é –0,00036 in e é 0,00090 in para o modelo simplesmente apoiado. A fixação da extremidade reduz a deflexão total de um fator de três. Isso acontece porque a restrição de momento faz a viga ter derivada nula nos mancais e, efetivamente, a torna mais rígida.

2 Embora isso seja um modelo 3-D, primeiro será modelado como 2-D com tensão plana e elementos quadrangulares para simplificar. A análise pelo FEA é baseada no deslocamento, e a deflexão do modelo fornece um bom meio para avaliar se as restrições aplicadas são adequadas. Se as deflexões são consistentes e um teste de convergência for aplicado separadamente, pode-se ter alguma confiança nos resultados. Para este exemplo, a carga é aplicada no centro do vão.

3 A Figura 8-13a mostra a malha para o caso fixo-fixo com os nós de todos os elementos que fazem contato com os mancais restritos nas direções x e y para simular os engastes em cada mancal. A Figura 8-13b mostra a forma defletida e a máxima deflexão encontrada pelo FEA, a qual é –0,00032 in, valor muito próximo ao encontrado no passo 1. Observe as concentrações de tensão no ponto de aplicação da força e nos pontos A e B onde as extremidades internas dos mancais fazem contato com a viga. Isso mostra o efeito das condições de contorno nas tensões locais.

4 A Figura 8-14a mostra o mesmo modelo com malha da Figura 8-13a, mas com as condições de contorno modificadas para simular um apoio simples em cada extremidade. Na extremidade esquerda (assinalada com a letra A), um único nó no lado interno do mancal é fixado em x e y, para representar um pivô. Na extremidade direita (assinalada com a letra B), um único nó é fixo em y para representar o apoio de rolo. A Figura 8-14b mostra a forma defletida e a máxima deflexão da viga simplesmente apoiada, calculada pelo FEA, cujo valor é –0,00099 in, próximo ao valor encontrado na solução analítica no passo 1. Observe as concentrações nos pontos de aplicação da força e nos pontos A' *e* B', onde as quinas do mancal fazem contato com a travessa, mostrando o efeito das condições de contorno nas tensões locais. Observe também que a extremidade superior da viga não faz contato com a superfície interna superior do mancal, o que é consistente com a solução analítica. (Veja a Figura 8-12.)

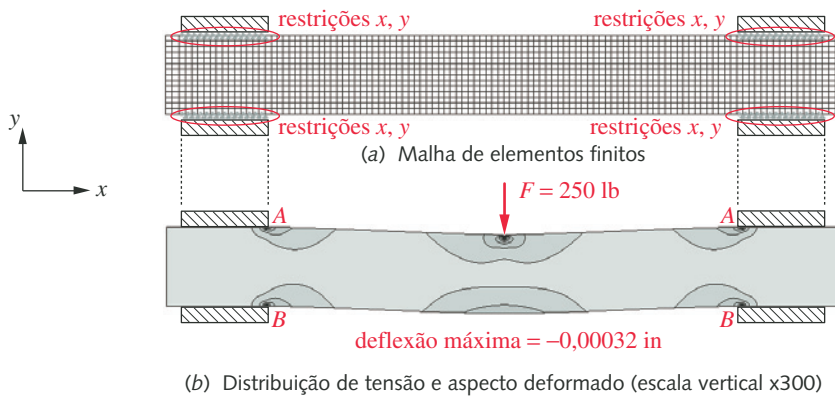



FIGURA 8-13

Modelo FEA para as condições de contorno fixa-fixa para a viga do Exemplo 8-2.

Qual dos modelos tem a melhor condição de contorno? É razoável assumir que os mancais impedem qualquer rotação da travessa no eixo z? Assumindo que exista uma folga de 0,001 in, qual ângulo a travessa pode ter dentro do comprimento do mancal? Um cálculo simples fornece 0,057 graus. A inclinação da travessa no modelo simplesmente apoiado é de 0,035 graus. Uma vez que esse ângulo é menor que a folga angular no mancal, a travessa pode atingir esta inclinação sob a carga aplicada. O mancal não pode aplicar um momento à travessa até que a folga seja preenchida nas partes superior e inferior opostas entre o mancal e a viga. Até esse ponto, ela é simplesmente apoiada, como pode ser visto na Figura 8-12, que mostra uma folga remanescente de aproximadamente 0,00052 in para o lado externo dos mancais. Assim, conclui-se que o modelo simplesmente apoiado está mais próximo da realidade do que o modelo fixo-fixo neste caso.

Mas isso é o melhor que se pode fazer? É razoável assumir que a travessa e o mancal fazem contato em apenas um nó para cada mancal? O nó tem dimensão zero, o que leva à tensão infinita. O que aconteceria se a carga fosse aumentada? Toda a folga seria tomada? Um modelo melhorado de condição de contorno representaria a possibilidade de alguma área de contato entre as duas partes ao mesmo tempo entre a superfície inferior e superior. Alguns *softwares* de FEA têm uma restrição de contato que permite a transmissão de força em apenas uma dire-

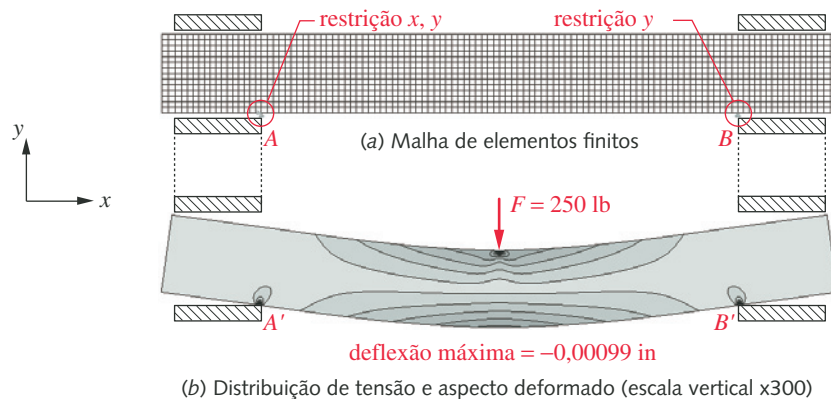



FIGURA 8-14

Modelo de FEA com condições de contorno simplesmente apoiado para a viga do Exemplo 8-2.

ção. Se a força trocar de sinal, eles se separam. Uma maneira melhor de modelar o contorno entre a viga e o mancal no exemplo anterior seria aplicar restrições de contato em todos os nós ao longo do comprimento de ambas as interfaces mancal-viga. Sem carga aplicada, todos os nós na superfície de contato inferior estarão em contato, analogamente ao modelo fixo-fixo. À medida que a carga é aplicada, os elementos na superfície inferior no lado externo do mancal se separam e permitem à viga mover-se em direção ao modelo simplesmente apoiado. Com uma carga aplicada suficiente, a viga entrará em contato com a superfície superior do mancal e mudará a restrição de contorno efetiva. O único porém é que as restrições de contato são não lineares e exigem uma solução pelo FEA não linear, o que aumenta o tempo de processamento. O Exemplo 8-2 será refeito, desta vez usando os elementos de contato no modelo de FEA.

EXEMPLO 8-3

Restrições de contato como condição de contorno no FEA

Problema **A viga de seção retangular do Exemplo 8-2 é apoiada em mancais de deslizamento e carregada em flexão por uma força transversal em uma posição fixa *x*, como mostrado na Figura 8-11a. Construa um modelo FEA utilizando restrições de contato para as condições de contorno e compare a deflexão com os resultados do Exemplo 8-2.**

Dados **O material é aço. As dimensões da viga são mostradas na Figura 8-11a. Considere dois casos de carregamento, uma carga de *F* = 250 lb, como no exemplo 8-2, e uma carga maior de *F* = 1.000 lb.**

Hipóteses **Os mancais de apoios são considerados muito mais rígidos que a viga. O peso da viga é desprezível quando comparado à carga aplicada. Os mancais têm uma folga radial de 0,001 in para permitir o deslizamento.**

Solução

1 A Figura 8-15 mostra uma malha de elementos finitos com elementos de contato (condição de contorno) aplicados em *A* e *B*. Essas restrições são aplicadas nos mancais, não na viga. Elas não permitem que a viga penetre na geometria do mancal, mas permitem que os nós se afastem da superfície do mancal. Dessa forma, os nós podem suportar uma carga compressiva entre a viga e a superfície do mancal, mas não uma carga de tração. À medida que a carga é aplicada à viga e esta se deflete, o contato nodal irá variar ao longo do comprimento do mancal, da mesma maneira que acontece em um sistema real. A viga tem seu movimento na direção *x* restrito por uma condição de contorno em *C*, na linha neutra. A colocação dessa restrição no centro da viga em *x* permite que ambas

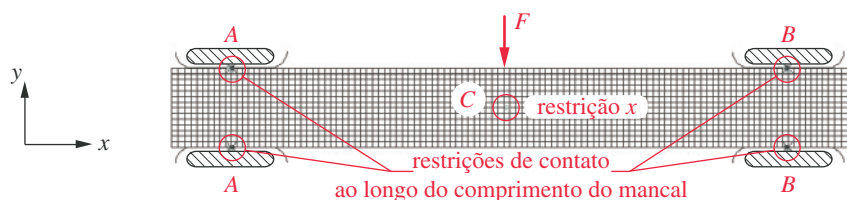



FIGURA 8-15

Modelo de FEA para a viga do Exemplo 8-3 com o uso de condições de contorno com restrições de contato.

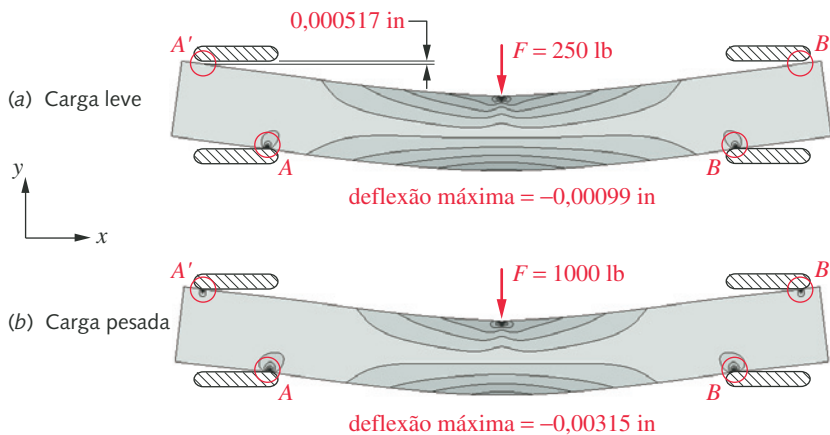



FIGURA 8-16

Tensões e a deflexão utilizando as condições de contorno com contato para a viga do Exemplo 8-3.

as extremidades da viga tenham deslizamento dentro dos mancais, da mesma forma que em um sistema real. Foi dado um acabamento arredondado às extremidades dos mancais para evitar o aparecimento de tensões infinitas que resultariam do ponto de contato à medida que a viga fosse defletindo.

2 A Figura 8-16a mostra as tensões e a deflexão que resultam da aplicação da carga transversal de 250 lb no centro da viga. Observe a similaridade com o caso simplesmente apoiado para a mesma carga, como pode ser visto na Figura 8-14. A viga mantém contato com os mancais nos cantos internos inferiores (pontos A e B), onde podem ser vistas as concentrações de tensão. A superfície superior da viga não entra em contato com a superfície superior do mancal nos pontos A' e B'. A folga é de 0,000517 in, similar àquela mostrada na Figura 8-12. A deflexão máxima calculada para este modelo e carga é de –0,000099 in, o mesmo valor obtido com o modelo de FEA simplesmente apoiado no Exemplo 8-2.

3 A Figura 8-16b mostra as tensões e a deflexão que resultam da aplicação da carga de 1000 lb no centro da viga. O aumento na carga causa uma deflexão na viga o suficiente para causar contato do topo da viga com a superfície interna superior do mancal nos pontos A' e B', onde podem ser vistas as concentrações de tensão. A viga comporta-se agora como o modelo fixo-fixo do Exemplo 8-2. Observe que a deflexão com a carga de 1000 lb é apenas 3,18 vezes maior que com a carga de 250 lb. Se o modelo simplesmente apoiado fosse válido em ambos os casos, poderia se esperar uma deflexão quatro vezes maior, na proporção direta ao aumento da carga.

4 A Figura 8-17 mostra o gráfico da deflexão da viga como função da fração de carga máxima aplicada para cada caso, que pode ser entendida como resultante de um aumento suave e contínuo no valor de cada carregamento, de zero até o valor máximo. Para o caso com carga de 250 lb, o aumento na deflexão com o aumento da carga é linear. Para o caso com a carga de 1000 lb, a deflexão aumenta linearmente até que a viga atinge a superfície do mancal, ponto A. Neste momento, a inclinação muda subitamente porque a viga se torna mais rígida. A curva torna-se não linear além do ponto A devido à mudança dos pontos de contato à medida que ocorre a deflexão. Isso mostra a resposta não linear da viga à medida que a carga diminui a folga entre o mancal e a viga, alterando as condições de contorno.*

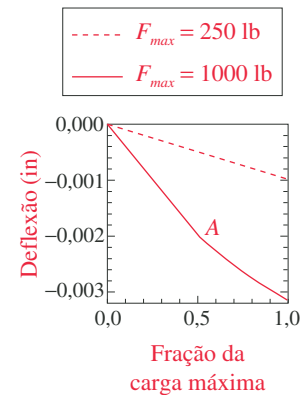



FIGURA 8-17

Mudança na deflexão com a carga aplicada para os dois casos de carregamento do Exemplo 8-3.

* Este fenômeno é comumente utilizado para se obter o resultado esperado que acontece com molas de válvulas variáveis utilizadas nos trens de válvulas automotivos. Algumas das espiras são enroladas mais próximas que as outras (veja a Figura 14-2a), e, à medida que a mola deflete durante o uso, o espaço entre as espiras diminui e a mola torna-se sólida. Isso modifica a rigidez da mola em médias deflexões e ajuda a reduzir sua vibração. A suspensão dos caminhões utiliza um conceito similar: a adição de molas mais rígidas que trabalham apenas quando o curso da suspensão excede certo valor (o que acontece quando o veículo está sobrecarregado ou passa por uma grande lombada). Quando o espaço é preenchido, a suspensão muda rapidamente de rigidez para limitar a deflexão.

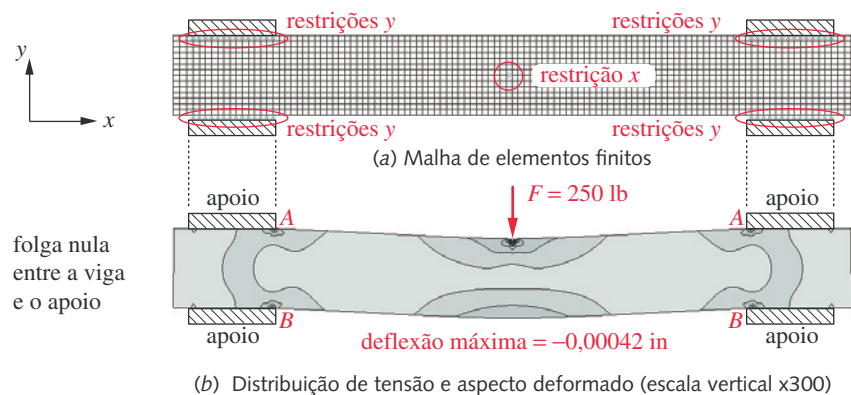



FIGURA 8-18

Modelo de elementos finitos para a viga da Figura 8-11 restrita apenas na direção *y* com um nó restrito em *x*.

Considere um exemplo ligeiramente diferente. Suponha que a viga da Figura 8-11 não precise deslizar, é apoiada em ambas as extremidades engastadas e tem folga nula. No Exemplo 8-2, foi essa a hipótese assumida no passo 3. Os resultados, a malha e as condições de contorno são mostrados na Figura 8-13. A máxima deflexão, calculada pelo FEA, foi –0,00032 in, que poder ser comparada com o valor de –0,00036 in, calculado analiticamente. As condições de contorno da Figura 8-13 restringem todos os nós dentro do mancal em ambas as direções *x* e *y*. Isso simula uma condição na qual a viga é mantida tão firme que nenhum movimento relativo de deslizamento ocorre, nem mesmo movimentos microscópicos. Isso pode ser realístico se, de fato, a viga for prensada. Porém, outra possibilidade é que o mancal não permita nenhum deslocamento na direção *y*, mas permita algum movimento na direção *x*, mesmo na ausência de qualquer folga. Tal situação pode ser simulada pelo FEA utilizando um conjunto diferente de condições de contorno, como mostrado na Figura 8-18a. Nela, todos os nós dentro do mancal estão fixos na direção *y*, mas não na direção *x*. O grau de liberdade em *x* foi removido, como no Exemplo 8-3, pela fixação de um único nó na linha neutra no centro da viga. A Figura 8-18b mostra os resultados para as tensões e deflexão da viga. Observe que a máxima deflexão é de –0,00042 in, maior que o valor para o modelo fixo-fixo da Figura 8-13 ou para o modelo fixo-fixo com solução analítica da Figura 8-12 (o qual impede o movimento nas direções *x* e *y* em ambos os mancais, como mostra a Figura 8-13a).

A análise acima mostra a sensibilidade dos resultados do FEA em relação à escolha das condições de contorno. A próxima discussão irá reforçar esse conceito. A questão aqui tem a ver com as condições de contorno entre um eixo (pino) e seu mancal ou entre um parafuso e seu alojamento.

Um exemplo diferente será utilizado para investigar isso. A Figura 8-19 mostra um braço utilizado em um mecanismo de barras. Deseja-se modelar o sistema para determinar suas tensões e deflexão sob uma dada carga e a partir disso encontrar a constante de rigidez da viga. A viga é apoiada em dois pinos que servem como pivôs e deslizam em mancais de bronze. Ambos o pino e o mancal têm elasticidade. Os pinos são comumente feitos de aço e as buchas de bronze ou de outro material macio como, por exemplo, uma bronzina, que é menos rígida que o aço. Mas o bronze ou a bronzina são comumente muito finos e recobertos

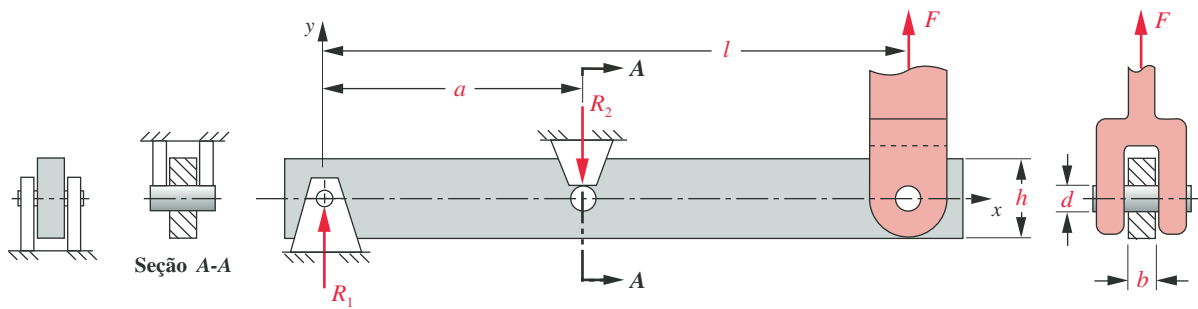



FIGURA 8-19

Viga em balanço para o Exemplo 8-4.

por uma capa de aço. Assim, o mancal pode ser considerado tão rígido quanto o material adjacente, que nesse caso é também de aço.

Neste exemplo, o carregamento é vertical; não existem componentes de forças horizontais. A solução analítica, utilizando a teoria de vigas, determina que as forças atuem no centro dos furos, mas no FEA normalmente não existem elementos dentro dos furos.

Se os pinos foram prensados nos furos, então eles estarão em contato em todo o seu perímetro e distribuirão a carga da mesma forma. Com uma folga diametral, se ambos o pino e a buchas forem infinitamente rígidos, existirá apenas uma linha de contato na posição. Isso pode ser simulado pela restrição de um nó na parte superior ou inferior do furo em um modelo 2-D. As tensões e a deflexão serão obviamente muito diferentes entre esses dois cenários, o primeiro sendo um engaste e segundo um apoio simples. Como se pode prever, a realidade está entre esses dois extremos.

Ambos os componentes irão defletir localmente sob a ação da carga e criar um rastro de contato, como foi descrito na Seção 7.9. Isso resultará em alguma área de contanto que se estenda para ambos os lados da linha de contato teórica na parte inferior (ou superior) do mancal. As condições de contornos têm que levar isso em conta. Mudanças nessas condições de contato afetarão a deflexão da viga e as tensões em posições distantes dos pontos de contato, como de fato ocorreu nas discussões anteriores. Mudanças nas condições de contorno também afetarão a estimativa local de concentração de tensão na região de contato.

Uma escolha que pode ser feita é fixar todos os elementos no perímetro do furo em cada apoio. Isso, contudo, irá sobrerrestringir o componente em comparação com o caso real entre o pino e o furo. A pergunta permanece: se os nós do perímetro do furo devem ser restritos, qual porção deles deve ser restrita?

Esse dilema pode ser facilmente resolvido se o aplicativo utilizado de FEA oferece os elementos de corpo rígido entre as suas opções. A estratégia é colocar um nó no centro do furo e conectá-lo como elemento rígido a todos os outros nós na circunferência do furo. Isso irá se assemelhar muito aos raios de uma roda de bicicleta. O nó do centro do furo será restrito de maneira adequada. Neste exemplo, ambos os furos de centro serão fixos nas direções x e y para representar um pivô. A carga F pode ser tratada da mesma maneira aplicando-a no nó central do furo, o qual está conectado com a circunferência do furo por elementos de corpo rígido. O exemplo a seguir irá analisar duas dessas aproximações aplicando as condições de contorno em um pino pivô e comparar os resultados com as soluções analíticas que utilizam a teoria de vigas.

EXEMPLO 8-4

Condições de contorno entre um pino e um furo

Problema **Uma viga engastada é apoiada por dois pinos em mancais. Determine um cenário de condições de contorno adequadas para a análise e calcule a deflexão máxima, tensão máxima e a constante de rigidez no ponto de carregamento.**

Dados **As dimensões da viga na Figura 8-19 são: $a = 8$, $l = 20$, $b = 0{,}75$, $h = 2$ e $d = 0{,}5$ in. A carga $F = 100$ lb. A viga e os pinos são de aço e as buchas são de bronze revestidas com aço. A seção transversal da viga é constante ao longo do seu comprimento, exceto nos furos, que têm diâmetro de 0,5 in.**

Hipóteses **O carregamento e as reações de apoio são coplanares. Os olhais dos pinos são muito mais rígidos que a viga.**

Solução

1 Primeiro, resolva a viga pelo método analítico, como mostrado no Exemplo 4-6. A equação para o caso dessa viga em balanço pode ser encontrada no Apêndice B, Figura B3, parte (a). A tensão máxima ocorre no apoio direito da Figura 8-19, onde o momento fletor tem a magnitude máxima: $M = F(l - a) = 1200$ lb-in. A tensão de flexão para a fibra mais externa em $x = a$, é:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{1200(1)}{\dfrac{0{,}75\left(2^3 - 0{,}5^3\right)}{12}} = \frac{1200}{0{,}4922} = 2438 \text{ psi} \tag{a}$$

Observe que o momento de inércia, I, da seção transversal foi reduzido pela presença do furo na posição $x = a$.

2 A deflexão máxima ocorre na extremidade direita da viga e pode ser calculada pela equação do Apêndice B, Figura B3, parte (a), com $x = 20$, $a = 8$, $l = 20$, e $I = 0{,}50$ para a seção transversal completa (sem a presença dos furos):

$$y = \frac{F}{6aEI}\left[(a-l)x^3 - a\langle x-l\rangle^3 + l\langle x-a\rangle^3 + l\left(-l^2 + 3al - 2a^2\right)x\right]$$
$$= -0{,}0064 \text{ in} \tag{b}$$

3 A primeira tentativa restringe todos os nós ao redor da circunferência de cada furo em ambas as direções x e y. A malha e as condições de contorno para um furo, bem como a malha original e a malha deformada, são mostradas na Figura 8-20. Observe que não existe movimento de qualquer um dos nós na circunferência.

4 A segunda tentativa posiciona um nó no centro dos furos e os conecta como elementos de corpo rígido a todos os nós da circunferência dos furos. Isso é algumas vezes chamado de acoplamento cinemático. Essa técnica efetivamente restringe os nós do perímetro do furo de qualquer movimento radial, mas permite que ocorra rotação em torno do centro do furo.* A Figura 8-21a mostra a malha na região do furo com a restrição aplicada no nó

* Se o seu *software* não oferece os elementos de corpo rígido, o mesmo efeito pode ser obtido colocando um sistema de coordenadas cilíndricas no centro do furo e aplicando restrição de movimento radial e liberando o movimento angular.

(*a*) Malha ao redor do furo com as restrições

(*b*) Malha não deformada (preta) e malha deformada (colorida) ao redor do furo

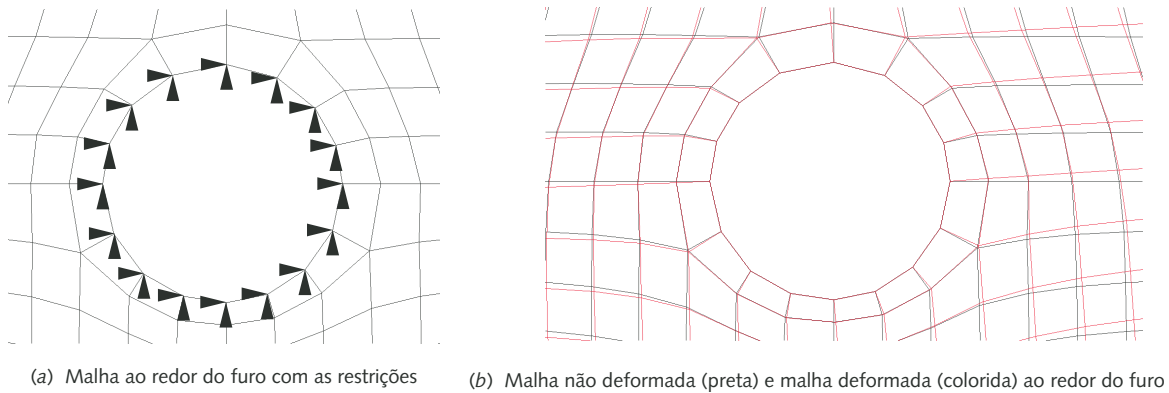



FIGURA 8-20

Malha e condições de contorno na circunferência do furo para o Exemplo 8-4, passo 3.

central. Os nós de ambos os furos são restritos nas direções *x* e *y* porque os furos estão localizados na linha neutra da viga, que não experimenta mudança de comprimento enquanto a viga se deflete. A Figura 8-21b mostra a malha original e a malha deformada superposta. Observe a rotação dos nós na circunferência quando a viga se deflete, permitindo à viga rotacionar em relação ao pino à medida que se deflete.

5 A Figura 8-22 mostra a forma defletida e as deflexões máximas para as duas vigas, além da distribuição de tensões de von Mises. A deflexão calculada usando o acoplamento cinemático foi de 0,0066 in, muito próxima do valor calculado pela teoria de viga no passo 2.

6 A deflexão calculada pela condição de nós circunferenciais fixos foi de 0,0049 in, um erro de 23%. Restringir os nós circunferenciais torna a viga muito mais rígida.

7 A constante de rigidez para a viga é facilmente calculada a partir da deflexão e da força aplicada como $k = F / y = 100 / 0{,}0066 = 15\ 152$ lb/in.

(*a*) Malha ao redor do furo com as restrições

(*b*) Malha não deformada (preta) e malha deformada (colorida) ao redor do furo

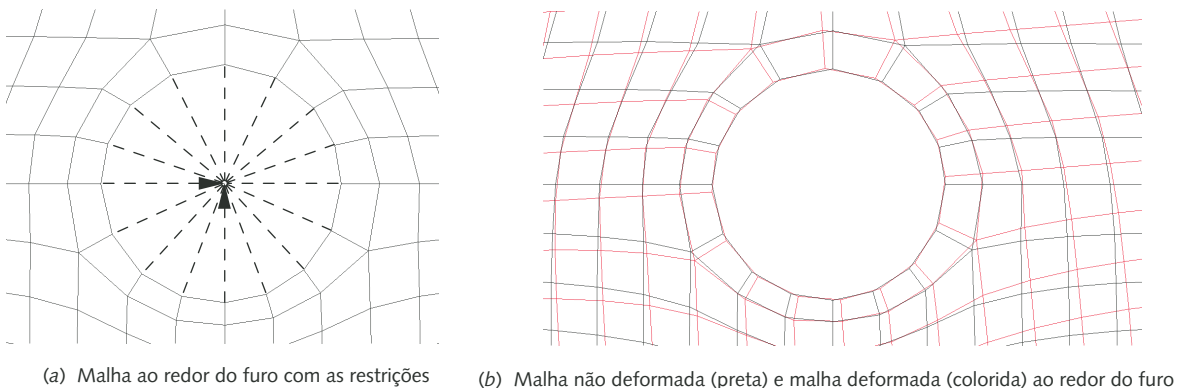



FIGURA 8-21

Malha para a condição de contorno com acoplamento cinemático para o Exemplo 8-4, passo 4.

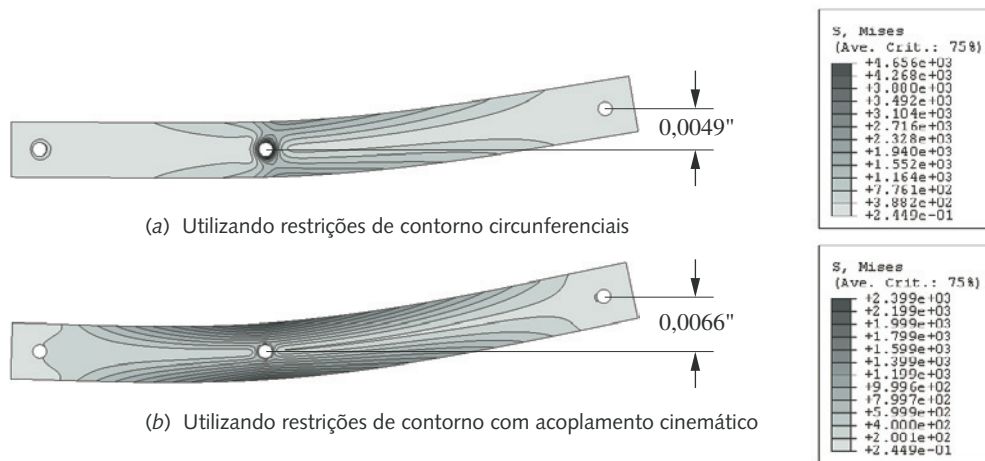



FIGURA 8-22

Deflexão e distribuição de tensões para os dois casos de condições de contorno para o Exemplo 8-4.

8.5 APLICAÇÃO DE CARGAS

A aplicação correta dos carregamentos em um modelo é um problema similar à aplicação das condições de contorno. Nos problemas com solução analítica aplica-se a carga em um ponto.* Isso pode, naturalmente, ser feito pelo FEA, uma vez que uma carga pode ser aplicada diretamente em um nó. Porém, cargas reais são distribuídas em uma pequena porção finita do componente. Se a carga pudesse ser aplicada em um único ponto a tensão local seria infinita.

Muitos aplicativo de FEA fornecem uma grande variedade de modelos de carregamento. Eles irão distribuir um carregamento específico, com magnitude e direção, sobre qualquer porção do modelo desejada, aplicando o valor correspondente de carga nodal de acordo com a função escolhida. A função de carregamento pode ser uniforme sobre um comprimento ou área, ou seguir uma função pré-definida. Carregamento de pressão também pode ser aplicado a uma superfície. Acelerações de qualquer magnitude e direção podem ser aplicadas para representar a gravidade ou forças inerciais em sistema dinâmico. Carregamentos de momento são um pouco mais difíceis de aplicar se os elementos utilizados têm apenas um grau de liberdade translacional. Uma técnica comum é colocar dois elementos de corpo rígido de comprimento igual ao modelo e na direção perpendicular, em lados opostos, ao eixo do momento e aplicar um conjugado na extremidade dos elementos rígidos. Para verificar se tudo está correto, resolva para as reações e momentos e verifique se $\Sigma F = 0$ e $\Sigma M = 0$, o que indica que o arranjo inicial está correto.

Ao aplicar os carregamentos, seja muito cuidadoso com as unidades. Alguns sistemas de CAD vêm por padrão com um conjunto de unidades, e elas podem não ser exatamente as unidades que você gostaria de trabalhar. É muito importante que as unidades de todos os elementos e forças estejam em um sistema conveniente. Quando estiver trabalhando com análises dinâmicas e aplicando carregamentos de acelerações, certifique-se de que as unidades do CAD para a densidade e a massa estão corretas. Muitos sistemas americanos usam por padrão a massa como lb_m. Essa não é a verdadeira unidade de massa, que já é numericamente igual a lb_f e deve ser dividida por g para colocá-la na unidade correta de massa. Veja a Seção 1.9 para o uso apropriado de unidades. É bastante provável que a maioria dos erros em engenharia esteja relacionada com problemas com unidades do que com qualquer outra causa. Mesmo os cientistas de foguetes não estão imunes aos erros com unidades, como mostra a nota de rodapé da p. 22.

* Pelo princípio de Saint-Venant, tensões em posições distantes do ponto de aplicação de carga ou das reações não serão afetadas pela área de contato da força.

8.6 TESTANDO O MODELO (VERIFICAÇÃO)

Os exemplos discutidos anteriormente foram escolhidos por terem uma geometria e carregamentos suficientemente simples de modo a permitir a execução de pelo menos uma verificação pelo método analítico. Problemas reais que são candidatos a uma solução pelo FEA raramente têm uma geometria tão simples que permita uma solução analítica. Se tivessem, seria mais rápido usar o método analítico. No entanto, antes de abordar um problema complicado, é uma boa ideia resolver uma versão simplificada do problema que pode ser solucionada pelo método analítico. A solução analítica pode então ser comparada com os resultados do FEA para o modelo simplificado. Isso permite ajustar as condições de contorno a um estado razoável e pode também ajudar com o refinamento da malha. Depois de ter os resultados da solução analítica equiparáveis aos da solução pelo FEA, pode-se voltar ao problema original, mais complexo, e prosseguir na análise baseada na experiência e conhecimentos adquiridos a partir dos testes com o modelo simplificado, utilizando as condições de contorno comprovadas.

O Exemplo 8-4 foi uma simplificação de um problema real com geometria e carregamentos mais complexos para o qual uma solução analítica precisa seria impossível. O modelo simplificado foi criado para determinar as condições de contorno apropriadas para o problema. O problema real será agora apresentado em outro exemplo.

EXEMPLO 8-5

Análise de um braço camo-seguidor

Problema **Uma viga é apoiada em dois pinos mancalizados com uma pequena folga. Calcule a deflexão máxima e a constante de rigidez no ponto de aplicação da carga.**

Dados **As dimensões da viga na Figura 8-23 são: $a = 8$, $l = 20$, $b = 0{,}75$, $h = 2$, $d = 0{,}5$ in, $e = 0{,}375$ in, $f = 0{,}438$ in e $g = 0{,}375$ in. Os furos para os pinos são de 0,5 in de diâmetro. A carga $F = 100$ lb. A viga e os pinos são de aço e as buchas são de bronze recobertas com aço. A seção transversal da viga é levemente cônica e contém alívios para reduzir sua massa. A geometria básica é como no Exemplo 8-4.**

Hipóteses **O carregamento e as reações de apoio são paralelos, mas fora do plano. Os olhais dos pinos são muito mais rígidos que a viga.**

FIGURA 8-23

Viga em balanço para o Exemplo 8-5.

Solução

1. O Exemplo 8-4 analisou uma versão simplificada dessa viga, onde as cargas e reações foram consideradas coplanares, a seção transversal era constante ao longo de todo o comprimento e não de seção variável e com alívios, como mostra a Figura 8-23. Essas simplificações permitirão uma análise pelo método analítico usando a teoria de vigas para poder comparar os resultados com a análise de FEA 2-D. Isso é um passo importante em qualquer análise por FEA porque permite uma verificação da validade das escolhas para o tamanho de malha e condições de contorno. Uma vez que essas questões tenham sido resolvidas, você estará pronto para analisar geometrias mais complexas de componentes reais com alguma certeza de que os resultados serão válidos.
2. A Figura 8-24 mostra uma malha 3-D, com elemento hexaédrico de oito nós linear, aplicada à viga da Figura 8-23. Uma vez que, para este exemplo, o interesse inicial está na deflexão, o refino da malha não tão é importante como quando se necessita de um valor mais preciso para a tensão.
3. Como a carga aplicada e as reações não estão no plano central da viga, mas afastadas para ambos os lados em relação ao eixo z, as condições de contorno e o carregamento devem ser aplicados aos nós localizados nessas posições. A Figura 8-25 mostra essas condições de contorno com elementos de corpo rígido conectados a um nó, que representa o centro do "pino", e afastados a uma distância apropriada dos nós da viga. Essa é a mesma técnica que foi usada no passo 4 do Exemplo 8-4 (veja a Figura 8-21), mas observe que o afastamento na direção z faz essas conexões terem a forma de um "cone", que une o único nó na condição de contorno (ou carga) aos nós do furo em questão. Essa técnica cria, efetivamente, um "pino" rígido na forma de um nó afastado (do plano da peça) ligado rigidamente ao furo e permite que a viga gire livremente sobre o eixo z do pino.
4. As restrições aplicadas em A impedem o deslocamento nas direções x, y e z, e a rotação em torno do eixo x e y. Em B, os deslocamentos em x e z são mantidos livres porque o camo-seguidor permite deslocamentos nessas direções. A carga de 100 lb é aplicada na direção positiva de y, em C. Veja a Figura 8-25.
5. A Figura 8-26 mostra a deflexão (com a deformação ampliada 10x) e a distribuição das tensões de von Mises para a viga. Os valores de tensão não são mostrados porque a malha não foi refinada para obter valores mais precisos.

FIGURA 8-24

Malha para a viga do Exemplo 8-5.

FIGURA 8-25

Condições de contorno e carga aplicada para a viga do Exemplo 8-5.

O gráfico com as isolinhas de tensão tem a finalidade de mostrar os pontos onde as tensões têm valores maiores. Se isso mostrasse níveis de tensões muito elevados (o que não foi ocaso), então seriam necessárias mais análises com malhas mais refinadas. Observe, contudo, que a viga mostra uma torção significante, bem como uma flexão, devido aos carregamentos excêntricos. Isso não deveria ser uma surpresa, dado esse carregamento fora do plano. A deflexão na direção *y*, no ponto de aplicação da carga, é 0,0193 in.

6 A deflexão calculada pelo modelo 2-D para a mesma viga, mas com geometria simplificada e cargas coplanares, foi de 0,0066 in, aproximadamente 1/3 do valor obtido anteriormente. Pode-se esperar que este modelo 3-D tenha uma deflexão maior, uma vez que a viga foi "enfraquecida" por ter a sua forma levemente cônica e também pelos alívios na alma (para reduzir a massa e melhorar o desempenho dinâmico), e devido às cargas excêntricas que impuseram uma deflexão torcional, além daquela devido à flexão. Lembre-se de que o modelo simplificado dessa viga utilizado no Exemplo 8-4 foi criado com o propósito de determinar o conjunto de condições de contorno mais apropriado possível. Para isso era necessário ter um modelo o mais simples possível para confrontá-lo com a solução analítica. Feito isso, pode-se prosseguir com um modelo mais complexo e ter alguma confiança nos resultados.

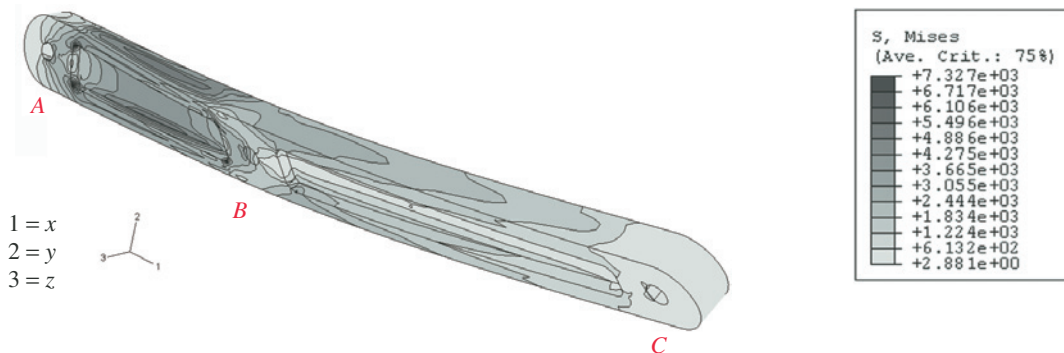



FIGURA 8-26

Deflexão e distribuição das tensões para a viga do Exemplo 8-5.

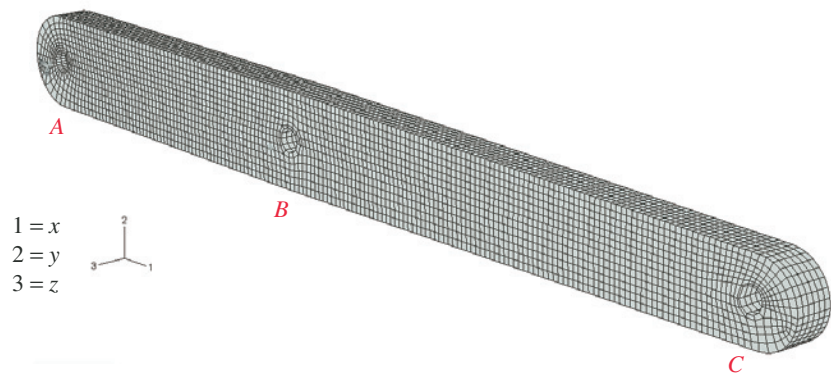



FIGURA 8-27

Malha para a viga redesenhada do Exemplo 8-5 (sem alívios).

7 Neste caso (que é um exemplo real de braço para um camo-seguidor), a deflexão de 0,0193 in (0,5 mm) foi considerada demasiadamente grande. Uma vez que a deflexão torcional foi da mesma grandeza que a deflexão flexional, o modelo de viga foi reprojetado com a retirada dos alívios para aumentar a sua rigidez torcional.* A malha para este braço reprojetado é mostrada na Figura 8-27. As condições de contorno e o carregamento foram aplicados da mesma maneira que no passo 4 e na Figura 8-25.

8 A Figura 8-28 mostra a deflexão (com a deformação ampliada 10x) e a distribuição das tensões de von Mises para a viga redesenhada. A deflexão no ponto de aplicação da carga é agora de 0,0099 in, aproximadamente a metade do valor para a viga com alívios. Esse valor foi considerado aceitável.

9 A constante de rigidez para a viga em flexão pode ser facilmente calculada a partir da deflexão em flexão e da carga aplicada: $k = F / y = 100 / 0{,}0099 = 10\,101$ lb/in.

* Veja o Exemplo 4-8 para revisar por que seções abertas, como a viga I do exemplo em questão, são uma péssima escolha para situações com carregamento torcional.

8.7 ANÁLISE MODAL

Todos os exemplos mostrados até agora envolviam apenas análise estática. O FEA é também capaz de fazer análise modal, a partir da qual as propriedades

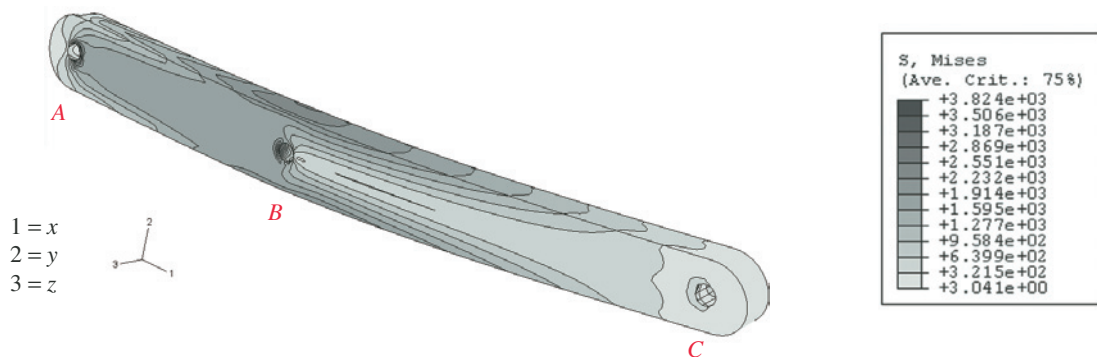



FIGURA 8-28

Deflexão e distribuição de tensões para a viga redesenhada do Exemplo 8-5.

dinâmicas da estrutura podem ser determinadas. A frequência natural e os modos de vibração (autovalores e autovetores) de uma estrutura podem ser calculados pelo FEA. A maioria das ressalvas em relação à seleção adequada de tipos de elementos, convergência da malha e seleção de condições de contorno, ainda se aplica, mas alguns são menos críticos para uma análise modal do que para uma análise de tensões. Por exemplo, uma estimativa razoável dos autovetores e autovalores de uma estrutura pode ser obtida com uma malha grosseira, o que seria impensável para um cálculo preciso de tensões e deflexão. Também, o refino da malha em locais com mudança de geometria é menos crítico para uma análise modal porque nesse tipo de análise as propriedades são globais em vez de locais. Contudo, se cálculos para tensões dinâmicas com carregamento variável no tempo são exigidos a partir da análise modal, então a malha precisa ser refinada como seria em um problema de análise estática.

EXEMPLO 8-6

Análise modal para um braço de camo-seguidor

Problema **Encontre os autovalores (frequências naturais) e os autovetores (modos de vibrar) da viga do Exemplo 8-5 se o pino está sujeito a uma excitação aleatória pela máquina na qual ele está montado.**

Dados **A geometria da viga está definida no Exemplo 8-5 e na Figura 8-23.**

Hipóteses **O carregamento e as reações de apoio são paralelos, mas fora do plano. Os olhais são significativamente mais rígidos que a viga. Os apoios da viga estão sujeitos a uma vibração aleatória.**

Solução

1 O Exemplo 8-5 analisou essa viga estaticamente. A malha, o acoplamento cinemático e as condições de contorno, que funcionaram muito bem na análise estática, podem ser utilizados para a análise modal, a qual foi analisada aqui com o mesmo modelo.

2 A Figura 8-29 mostra o primeiro modo de vibrar para ambas as vigas, com e sem alívio, do Exemplo 8-5. A primeira frequência natural da viga com alívio é 49,48 Hz. Removendo os alívios, o valor de 104,44 Hz mais do que dobra.

(*a*) Versão com alívios (*b*) Versão sem alívios

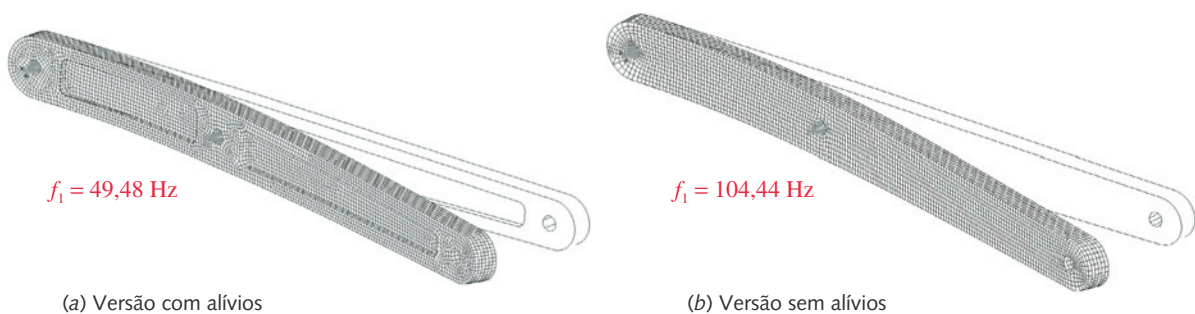



FIGURA 8-29

Primeiro modo de vibração para a viga com e sem alívio do Exemplo 8-6 (as deflexões estão exageradas).

(*a*) Versão com alívios (*b*) Versão sem alívios

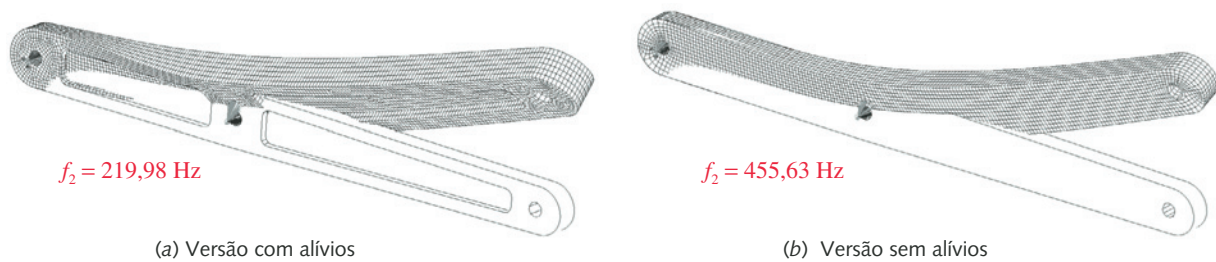



FIGURA 8-30

Segundo modo de vibrar para a viga com e sem alívio do Exemplo 8-6 (as deflexões estão exageradas).

(*a*) Versão com alívios (*b*) Versão sem alívios

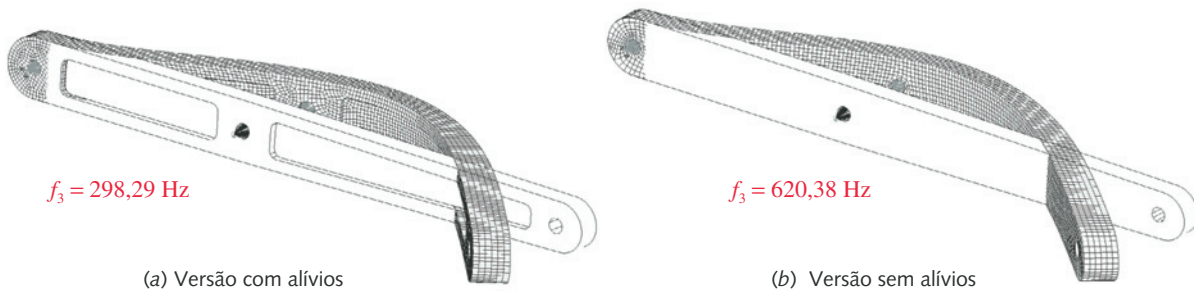



FIGURA 8-31

Terceiro modo de vibrar para a viga com e sem alívio do Exemplo 8-6 (as deflexões estão exageradas).

3 A Figura 8-30 mostra o segundo modo de vibrar de ambas as vigas. A segunda frequência natural da viga com alívio é 219,98 Hz, valor que aumenta para 455,63 Hz quando os alívios são removidos.

4 A Figura 8-31 mostra o terceiro modo de vibrar de ambas as vigas. A terceira frequência natural da viga com alívio é 298,29 Hz, valor que aumenta para 620,38 Hz quando os alívios são removidos.

5 Fica claro a partir desse estudo que os alívios na viga estão prejudicando este projeto mais do que ajudando. Os alívios dobraram o valor da deflexão estática e reduziram a frequência natural por um fator maior que 2. Apesar da redução de massa conseguida pela retirada do material, o custo em rigidez não vale a pena. Isso seria muito mais difícil e demorado de fazer sem o uso do FEA.

8.8 ESTUDOS DE CASO

Os princípios desenvolvidos neste capítulo serão agora aplicados em problemas com geometria mais complexa.

ESTUDO DE CASO 1D

Análise pelo FEA para o manete de freio de uma bicicleta

Problema **O manete de freio de uma bicicleta foi analisado para deflexão e tensões com sua geometria simplificada no Estudo de Caso 1B.**

Analise este conjunto pelo FEA e compare os resultados com o estudo anterior.

Dados **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 1A, e uma solução analítica foi encontrada no Estudo de Caso 1B. A mão humana comum pode gerar uma força de aperto de aproximadamente 267 N (60 lb) na posição mostrada no manete.**

Hipóteses **Uma análise estática é razoável devido ao baixo número de ciclos de carga.**

Solução **Veja as Figuras 8-32 e 8-33.**

1 A Figura 3-1 mostra o conjunto manete do freio e a Figura 4-48 mostra o modelo simplificado da geometria, cargas e restrições que foram utilizadas na solução clássica no Estudo de Caso 1B. A complexa geometria do manete foi ignorada e ele foi modelado com uma viga em balanço cortada ou truncada onde a alavanca se une com o bloco de articulação. Um modelo sólido do braço, que captura precisamente a geometria do manete, foi facilmente criado em CAD. A análise pelo FEA pode agora ser aplicada.

2 Como primeiro passo, um modelo da viga truncada da Figura 4-48a, que foi analisada anteriormente, foi criado, mas com sua verdadeira geometria. A Figura 8-32a mostra o modelo sólido com o carregamento e as condições de contorno aplicadas à viga em balanço. A Figura 8-32b mostra a malha e a Figura 8-32c mostra o gráfico de tensões. A malha utiliza elementos tetraédricos de 16ª ordem com 16 nós por lado. A maior tensão se encontra no ponto marcado na figura com a letra P e seu valor é 69,63 MPa. Esse valor é comparável ao valor de 70,9 MPa calculado pelo método analítico, no qual foi considerado que a seção transversal do manete, para aquele ponto, era circular. O modelo de FEA tem uma seção transversal oval. Esses números concordam dentro da margem de 2%, o que mostra o valor da análise do modelo simples tal qual o usado na solução analítica. A solução pelo FEA, nesse caso, envolveu mais trabalho que a solução pelo método analítico. Nem sempre será este o caso, já que peças com geometria complexa são difíceis de resolver pelo método analítico. O método clássico forneceu uma deflexão de 0,54 mm, e o modelo do FEA obteve 0,69 m devido à geometria verdadeira ser menos rígida que a da Figura 4-48b.

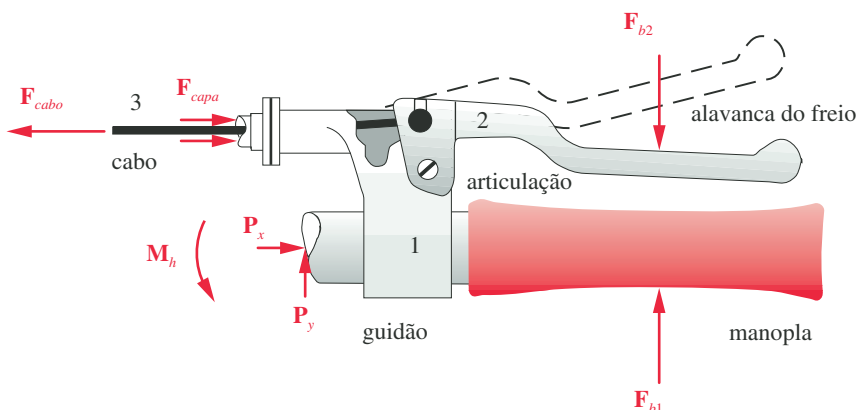



FIGURA 3-1

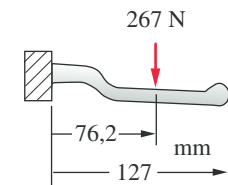
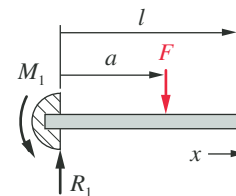
Conjunto da alavanca de freio de bicicleta.

(*a*) A manopla como barra engastada

(*b*) O modelo de barra engastada

FIGURA 4-48

Modelo de barra engastada para a manopla.

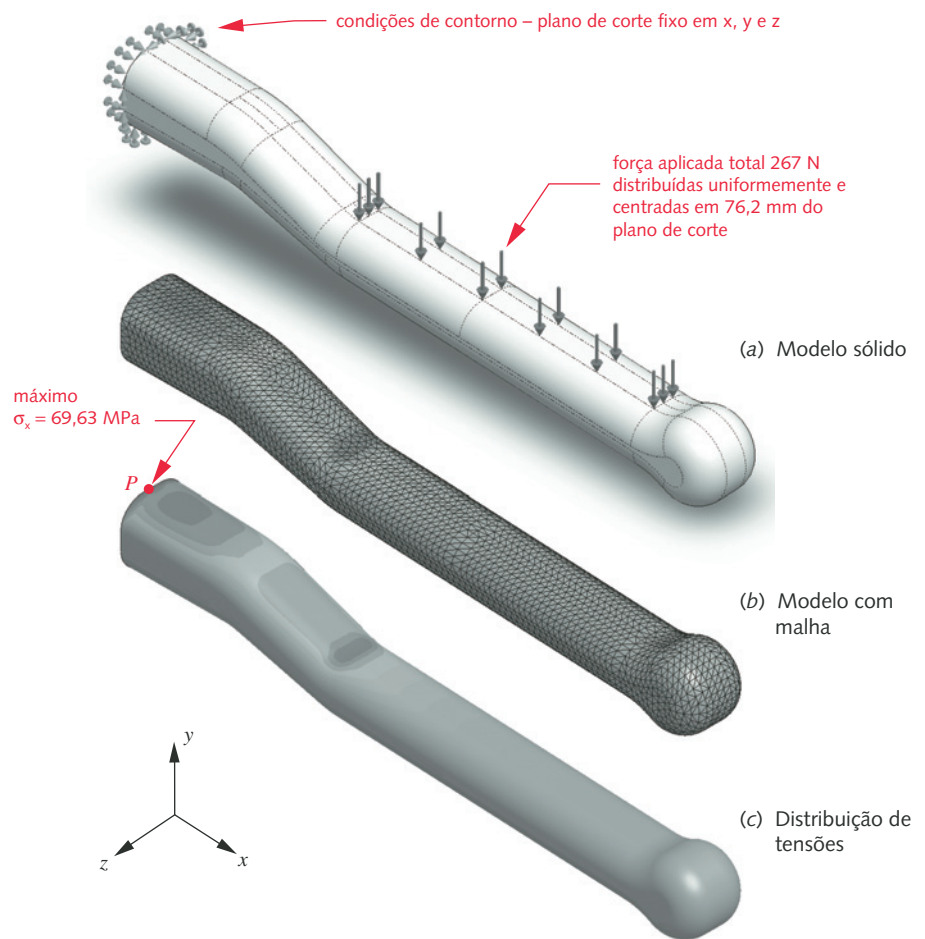



FIGURA 8-32

Modelo sólido, malha de elementos finitos e distribuição de tensões para o modelo de viga truncada do Estudo de Caso 1D.

3 Com a habilidade de modelar geometrias mais complexas pode-se criar um modelo FEA que inclua a porção do conjunto ignorado no modelo da Figura 4-48, isto é, o bloco de articulação do manete, o pino de articulação e o cabo. A Figura 8-33 mostra o modelo que inclui esses detalhes.

4 A Figura 8-33a mostra o manete completo acoplado à base de formato arbitrário por restrições cinemáticas ao redor do pino na base que casa com o furo do manete. A terminação do cabo tem um ressalto cilíndrico que se encaixa no furo que existe no manete. A interação do cabo com o manete também é feita com acoplamento cinemático na metade da superfície do furo que suporta a carga do cabo/ressalto. A carga manual é aplicada ao manete e é equilibrada pela carga do cabo e pelas forças de reação nas condições de contorno fixas à parte inferior da base. Esse arranjo imita a carga real no manete.

5 A Figura 8-33b mostra a malha no modelo do manete. A base e a terminação do cabo também foram modeladas, e o conjunto foi resolvido pelo FEA. Foi utilizada a malha mais refinada disponível e os elementos foram todos tetraedros de 16ª ordem. A Figura 8-33c mostra a distribuição de tensão na articulação e no manete onde são atingidos os maiores valores. A tensão mais elevada está localizada na junção da alavanca do manete com o bloco de articulação (identificado

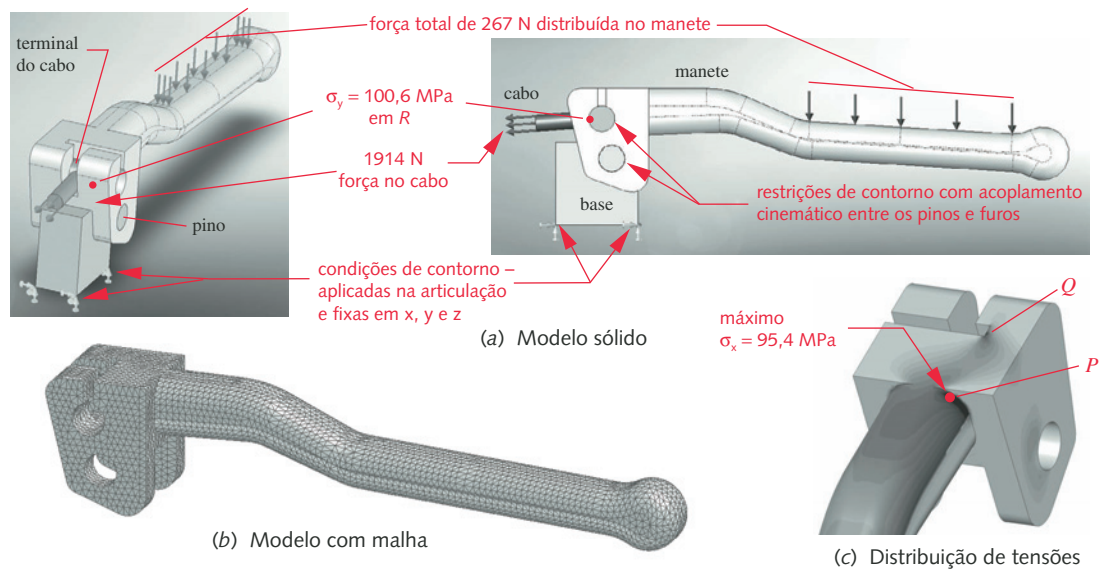



FIGURA 8-33

Modelo sólido, malha, carregamento e distribuição de tensões para o modelo completo do Estudo de Caso 1D.

com a letra *P*), onde a concentração de tensão da quina eleva a tensão para 98,12 MPa. Isso é 1,4 vezes maior que os 69,63 MPa calculados com o modelo simples truncado, significando que a quina tem um fator de concentração de tensão K_c = 1,4. O modelo truncado não pode oferecer a informação da concentração de tensão porque o canto vivo existe em tal modelo. Deste ponto de vista, o modelo mais complexo é superior, mas ele exige mais tempo e esforço que o necessário para essa solução por FEA. O ponto *Q* também apresenta uma tensão elevada na quina. Isso pode ser melhorado reprojetando-o para um raio completo no final do rasgo. A tensão em *R* foi estimada em 91,9 MPa para o modelo clássico e é 100,6 MPa no modelo mais complexo. A deflexão na extremidade do manete para o modelo completo é 0,98 mm. Um modelo *Solidworks* para este estudo pode ser encontrado na pasta Case 1-D no CD-ROM.

ESTUDO DE CASO 2D

Análise pelo FEA para alicate de pressão

Problema **Um alicate de pressão com geometria simplificada foi analisado para a deflexão e tensões pelo método analítico no Estudo de Caso 2B. Analise esse conjunto pelo FEA e compare com os resultados obtidos no estudo anterior.**

Dados **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 2A. A espessura do corpo 1 é 0,313 in, do corpo 2 e 3 é 0,125 in e do corpo 4 é 0,187 in. O material para todas as peças é aço AISI 1095.**

Hipóteses **Uma análise estática é aceitável devido ao baixo número de ciclos de carga.**

Solução **Veja as figuras 8-34 e 8-35.**

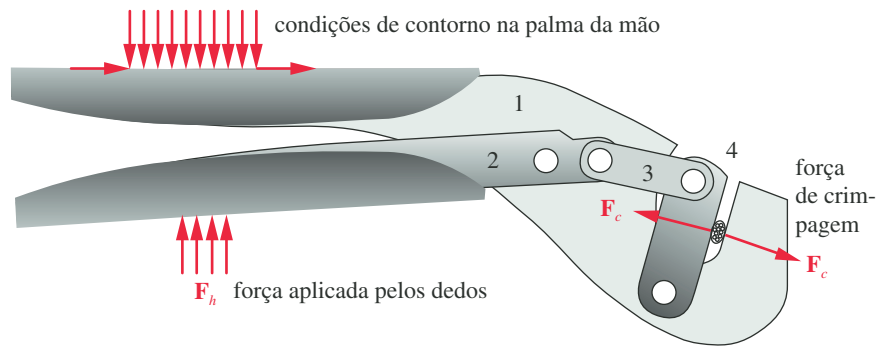



FIGURA 8-34

Alicate de pressão.

1 A figura 8-34 mostra o carregamento e as condições de contorno aplicadas ao alicate do Estudo de Caso 2B. A ferramenta é apoiada (segurada) pela palma da mão na alavanca superior, e uma força é aplicada na alavanca inferior pelos dedos da mão até que a força requerida para crimpar (F_c = 2000 lb) é aplicada pelas mandíbulas do alicate à peça a ser prensada. A geometria foi definida no Estudo de Caso 2A.

2 A Figura 8-35a mostra a malha de elementos quadriláteros aplicados ao conjunto com as condições de contorno e carregamento. Os elos estão conectados com pinos ao modelo. Um conjunto de nós, na superfície superior, é fixado em y e x para representar a fixação pela palma da mão. A força exercida pelos dedos F_h é aplicada à alavanca inferior.

3 A Figura 8-35b mostra a distribuição de tensões no alicate com as condições de contorno e carregamento de 2000 lb aplicados no ponto de crimpagem. Os resul-

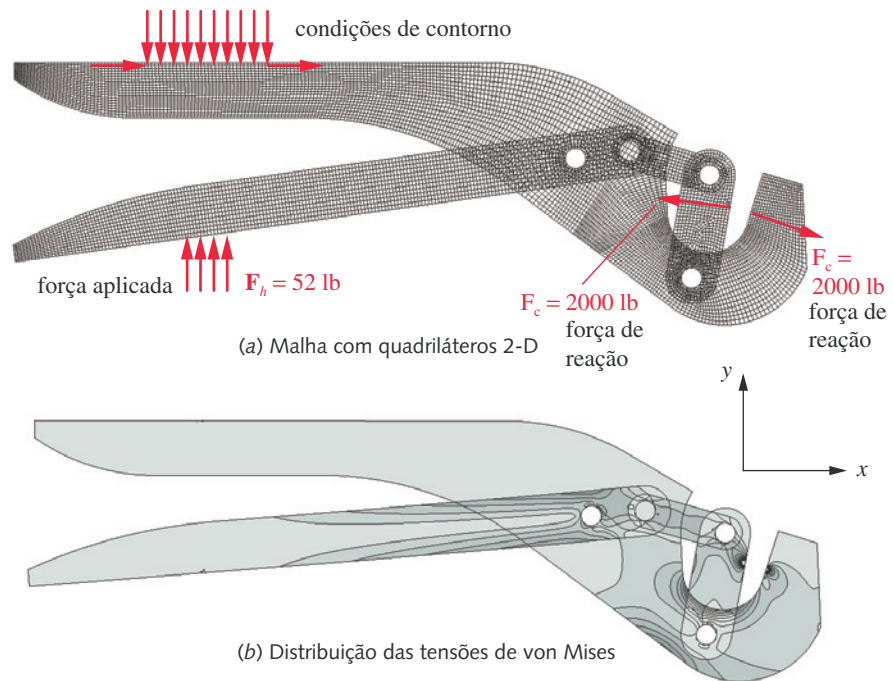



FIGURA 8-35

Malha de elementos finitos, condições de contorno e distribuição de tensão para o alicate de pressão.

tados dos dois métodos de análise são comparados na Tabela 8-3. A Tabela 8-4 mostra as forças nos pinos calculadas pelos dois métodos.*

4 No Estudo de Caso 2B foi feita uma simplificação na geometria na extremidade direita do corpo 1 para torná-lo compatível com a solução analítica para uma viga curva. Aqui não é necessário fazer tal modificação, pois a malha do FEA representa a geometria real da peça. A solução analítica obteve um resultado máximo para a tensão de 74 kpsi no ponto *P*. A solução pelo FEA indicou que a maior tensão na peça é 81 kpsi no mesmo ponto. A diferença deve-se provavelmente à simplificação geométrica que foi feita na solução analítica.

Tabela 8-3
Resultados das tensões principais para a solução analítica (SA) *versus* FEA

Elo	Tensão (kpsi)	
	Analítico	FEA
1	74,0	81,2
2	N.A.	45,5
3	–50,0	–40,0
4	31,0	26,9

Tabela 8-4
Resultados da reação no pino para a solução analítica (SA) *versus* FEA

Força	Magnitude (lb)	
	Analítico	FEA
F_{12}	1560	1574
F_{14}	452	456
F_{23}	1548	1545
F_{43}	1548	1545

ESTUDO DE CASO 4D

Análise pelo FEA do braço do freio de uma bicicleta

Problema **Um braço do freio de uma bicicleta, com geometria simplificada, foi analisado no Estudo de Caso 4B para deflexão e tensão pelo método analítico. Analise este conjunto pelo FEA e compare os resultados com o estudo anterior.**

Dados **A geometria e o carregamento são conhecidos do Estudo de Caso 4A, e o braço é carregado por uma força no cabo de 1.046 N na posição mostrada.**

Hipóteses **As acelerações são desprezíveis. O modelo da carga Classe 1 é apropriado e uma análise estática é aceitável. O coeficiente de atrito entre a sapata do freio e o aro da roda foi medido e vale 0,45 à temperatura ambiente e 0,40 a 150°F.**

Solução **Veja as Figuras 8-36 e 8-37.**

1 A Figura 3-9 mostra a geometria do conjunto do braço do freio. A simetria permitiu que a análise fosse feita com apenas um lado no Estudo de Caso 4B, e isso será repetido aqui. O modelo foi separado em duas vigas em balanço para a solução analítica, o que não será necessário neste estudo de caso, e a análise será realizada considerando o conjunto braço, pino de articulação e restrições para representar o aro da roda. A forma da seção transversal foi grosseiramente modelada em uma forma retangular de Tê para aplicar a solução analítica de vigas de seção curva em flexão. No modelo FEA a geometria real será utilizada e uma análise geral das tensões será realizada. Esperam-se resultados bem distintos entre esses dois modelos.

2 A Figura 8-36 mostra o conjunto sólido modelado. O braço é apoiado em um pino, onde uma das faces é totalmente fixada em *x*, *y* e *z*. O braço é restrito cinematicamente ao pino, permitindo que a superfície do furo possa girar em torno do diâmetro externo do pino, mas é incapaz de se mover nas direções *x* ou *y*. A direção *z* do braço é restrita pela criação de uma "arruela virtual", e esta arruela não pode se mover na direção *z*. A rotação do braço sobre o eixo *z* é bloqueada pela fixação na direção *x* da área *A* na face ranhurada do braço. Isso representa a fixação da sapata do freio no braço, a qual é pressionada contra a lateral do aro. O torque resultante da fricção da sapata no aro é modelado com forças de tração nas direções *y* e *z* na mesma área *A* e na área *B* no lado anterior. Essas forças de tração aparecem como setas tangentes à superfície no lado do braço que suporta a sapata e na superfície rebaixada na ranhura, no lado de trás, onde o parafuso que segura a sapata é assentado. Finalmente, a força no cabo é aplicada no furo *C* com componentes nas direções *x* e *y*.

3 A análise de tensões pelo método analítico feita no Estudo de Caso 4B escolheu diversas posições para analisar, onde se presumia que os valores de tensão seriam altos. Isso compreende o plano X-X na superfície curvada, próximo à raiz, o

* Observe que as reações no pino foram calculadas antecipadamente porque seus valores eram necessários para resolver as equações de tensão na forma analítica. Na análise por elementos finitos, são necessários apenas o carregamento e as condições de contorno para o cálculo das tensões. As forças de reação podem ser retrocalculadas a partir das tensões. Isso é uma boa ideia para verificar as forças de reação que foram calculadas por FEA e compará-las à análise estática do sistema utilizando ΣF=0 e ΣM=0. Se elas concordarem, o modelo utilizado no FEA é apropriado.

FIGURA 3-9 Repetida

Conjunto de acionamento central do braço do freio de uma bicicleta.

FIGURA 8-36

Condições de contorno, restrições e carregamentos no modelo de elementos finitos para o braço do freio de uma bicicleta.

(*a*) Modelo com malha

(*b*) Distribuição de tensão (σ_y)

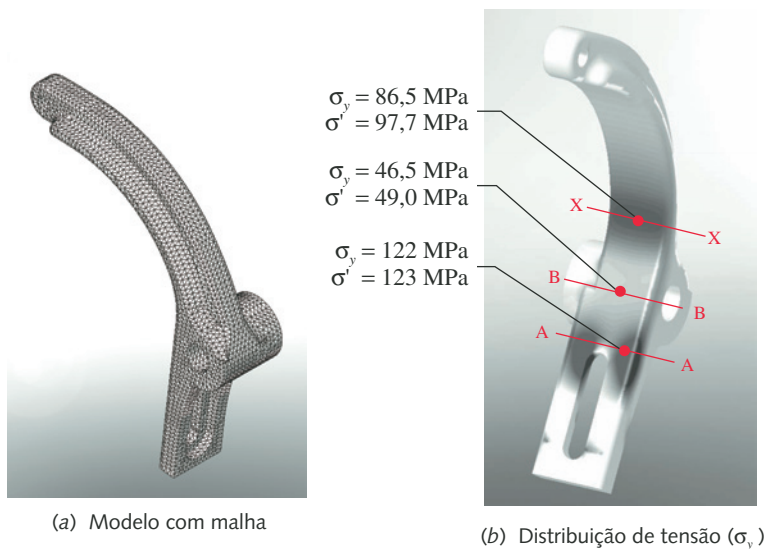



FIGURA 8-37

A malha e a distribuição de tensões na análise pelo FEA para o braço do freio da bicicleta.

plano B-B que secciona o furo do pino de articulação e o plano A-A que corta a seção retangular próximo à raiz do rasgo para montar a sapata de freio. Em todos esses três planos as altas tensões se localizam na superfície interior nos pontos coloridos mostrados na Figura 3-9 (repetida).

4 A Figura 8-37a mostra a malha para o braço com 54.432 elementos tetraédricos de 16ª ordem, e a Figura 8-37b mostra o gráfico de tensão na face interna do braço. O gráfico apresenta a tensão normal σ_y, que é a componente calculada para os pontos nos planos do Estudo de Caso 4B. Linhas mostrando a posição por onde passam os planos A-A, B-B e X-X podem ser vistas na superfície interna do braço. Os pontos com valores máximos para a tensão são visíveis em A-A e X-X, mas não em B-B. Isto se deve ao fato de que os valores de tensão em B-B apresentam valores inferiores aos outros dois. A tensão de von Mises também é mostrada e seu valor é muito próximo ao de σ_y porque este é dominante naqueles pontos.

5 A Tabela 8-5 compara os resultados entre os valores obtidos pelo método analítico e pelo FEA para as tensões de tração na direção *y* na fibra interna para as posições destacadas. A Tabela 8-6 compara os resultados entre os valores obtidos pelo método analítico e pelo FEA para as tensões de compressão na direção na fibra eterna da seção X-X. Para o lado interno da superfície nos planos A-A e X-X, o resultado pelo FEA apresenta resultados menores que a análise clássica. Isso se deve principalmente ao fato de que a análise clássica ignora o aumento na espessura da seção causada pelos raios dos filetes no contorno externo do braço, além de ter considerado que a espessura da viga era constante em toda a região na raiz do cubo. A boa notícia é que o método analítico oferece uma resposta conservativa nessas duas posições. Contudo, o FEA apresenta o dobro do valor para a tensão na seção B-B quando comparado à solução analítica para o mesmo ponto. Nesse caso, o FEA resulta em uma melhor estimativa para a tensão.

6 O FEA apresenta um resultado superior, neste caso, devido à geometria complexa, que teve de ser muito simplificada para poder ser calculada pelo método analítico. O modelo em CAD para o *Solidworks* encontra-se no CD-ROM em uma pasta com o nome CASE 4-D.

Tabela 8-5
Resultados da tensão de tração σ_y na superfície interna para a solução analítica (SA) *versus* FEA

	Tensão (MPa)	
Localização	**Analítico**	**FEA**
A–A	142,2	122,0
B–B	25,4	46,5
X–X	162,0	86,5

Tabela 8-6
Resultados da tensão de compressão σ_y na superfície externa para a solução analítica (SA) *versus* FEA

	Tensão (MPa)	
Localização	**Analítico**	**FEA**
X–X	–190,0	–79,3

Conjunto de engate para reboque

Detalhes do suporte

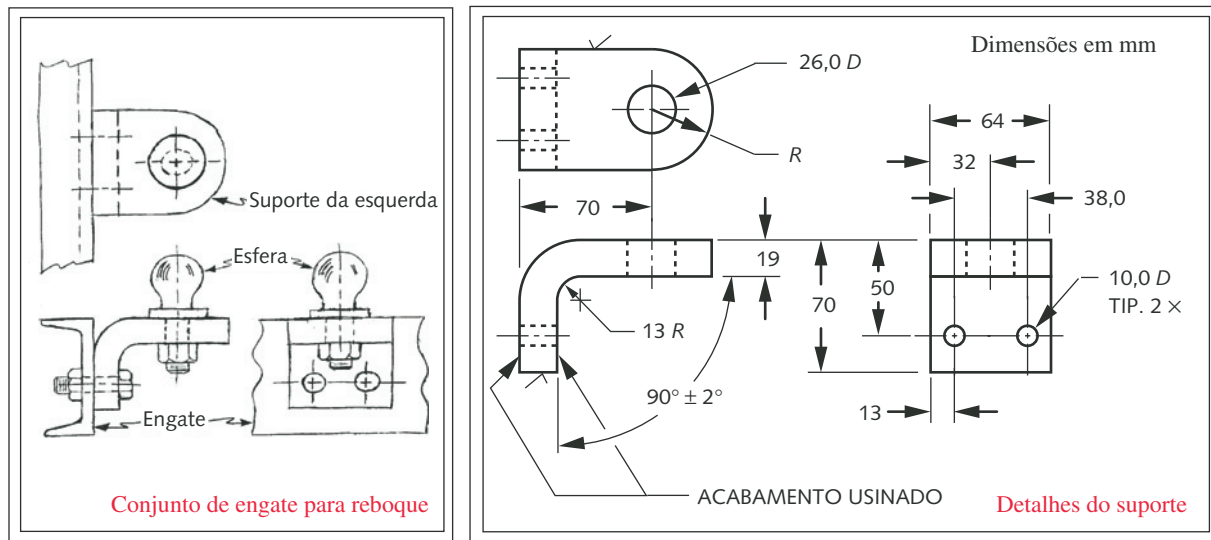



FIGURA 8-38

Conjunto e detalhes para engate de reboque.

ESTUDO DE CASO 7

Análise pelo FEA para o engate de reboque

Problema **Um conjunto de engate para reboque e as dimensões do suporte são mostrados na Figura 8-38. O carregamento é aplicado como mostra a Figura 8-39. Analise este conjunto pelo FEA e determine as suas tensões.**

Dados **O peso do reboque é 998 N e atua na vertical, e a força de tração é de 4905 N e atua na horizontal. Todos os materiais são de aço.**

Hipóteses **A estrutura onde o engate para reboque é parafusado tem rigidez superior à do engate. Os parafusos estão suficientemente apertados, mas sem atingir o valor recomendado para a pré-carga.**

Solução **Veja as figuras 8-38 até 8-41.**

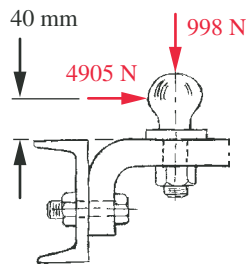



FIGURA 8-39

Carregamento no engate de reboque.

1 Caso os valores de concentrações de tensão nos furos dos parafusos sejam necessários, a geometria da peça requer modelamento 3-D. A Figura 8-40a mostra o componente com malha de elementos hexaédricos lineares (8 nós). Observe o padrão mais refinado da malha próximo aos furos. Essa malha foi refinada até que as tensões convergissem para valores com pouca variação, após sucessivas tentativas de refino, como foi feito no Exemplo 8-1.

2 A Figura 8-40b mostra as condições de contorno que foram aplicadas. Os furos em *A* e *B* têm o mesmo tipo de "restrição cinemática" aplicada nos exemplos anteriores para simular um parafuso em um furo. Um nó foi localizado no centro do furo, na superfície posterior onde o suporte toca a estrutura (não mostrada) na qual será fixado. Elementos de corpo rígido prendem este nó central a todos os outros nós na superfície interna do furo. Os nós centrais em *A* e *B* são fixados nas direções *x*, *y* e *z*.

(*a*) Malha (*b*) Malha com condições de contorno e cargas

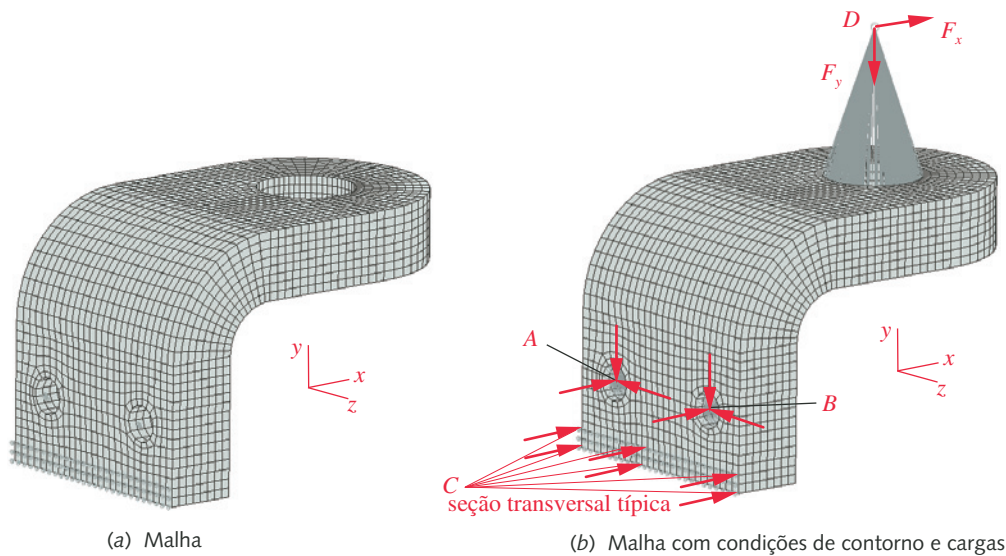



FIGURA 8-40

Malha e condições de contorno para o suporte do engate de reboque para o Estudo de Caso 7.

3 A área marcada com a letra *C*, na face traseira inferior, Figura 8-40, têm os nós de superfície das duas últimas linhas fixos na direção *x* para representar o contato entre o engate do reboque e a estrutura e evitar a rotação de corpo rígido em relação ao eixo *z*. Observe que uma maneira melhor de fazer isso seria prever restrições de contato em todos os nós da superfície traseira que tocam a estrutura. Isso seria responsável por uma possível reversão da carga que tenderia a separar os nós da linha inferior da estrutura. A utilização de elementos de contato também exigiria uma análise de FEA não linear, o que aumentaria consideravelmente o tempo de processamento. A aproximação utilizada aqui permite o cálculo por uma análise de FEA linear. (Observe que, por a peça ter simetria em relação ao plano intermediário e, por ter o carregamento neste mesmo plano, uma análise 2-D sem os furos também retornaria um bom resultado, menos completo, mas com um tempo bastante reduzido.)

4 Um outro nó é colocado em *D*, 40 mm acima da superfície superior e no eixo do furo de 26 mm de diâmetro. As forças aplicadas a este nó representam o carregamento aplicado ao centro da esfera do engate. Este procedimento parte do princípio que a esfera é muito mais rígida que o engate do reboque (isto é, essencialmente rígida). Se houvesse a preocupação em obter as tensões e deflexões na esfera ela teria de ser incluída no modelo à custa de um modelamento mais caro e um maior tempo de processamento.

5 A Figura 8-41 mostra as distribuições de tensões de von Mises no suporte, as quais variam de 11 até 274 MPa. Observe a concentrações de tensões nos furos. O ponto A, na tangência do raio com a superfície traseira do engate, tem uma tensão principal máxima de 75 MPa. Isso se correlaciona muito bem com o valor de 72,8 MPa calculado no mesmo ponto com a teoria clássica de vigas na solução do Problema 4-4e (p. 228) como mostra a resposta no Apêndice D. Observe que existem pontos com tensões mais elevadas que essas na peça, principalmente nos pontos de concentração de tensão ao redor dos furos.

(*a*) Distribuição de tensão de von Mises

(*b*) Magnitude das tensões de von Mises

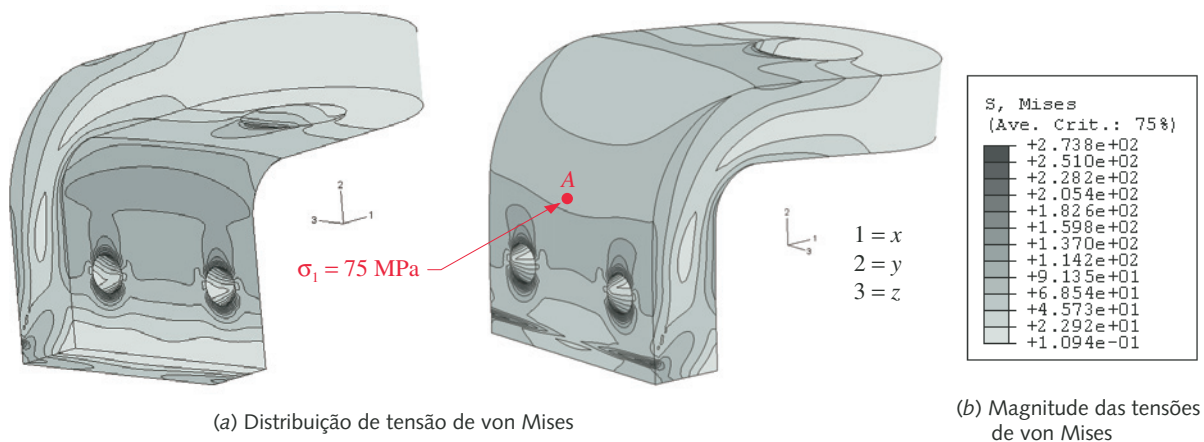



FIGURA 8-41

Distribuição de tensões no engate de reboque do Estudo de Caso 7.

8.9 RESUMO

A análise por elementos finitos é uma ferramenta muito poderosa e muito utilizada na engenharia. Ela permite a solução de problemas cuja geometria é muito complexa para a análise de tensão e deformação na forma analítica. Contudo, como qualquer ferramenta, ela exige alguma experiência para usá-la adequadamente, e, quando usada erroneamente, os resultados podem ser desastrosos. É muito importante compreender a teoria e a base matemática do FEA para estar ciente das suas limitações. É também muito importante testar e verificar qualquer modelo de análise pelo FEA contra uma solução analítica de um problema-teste ou a partir de dados experimentais, em vez de aceitar os resultados encontrados.

Este capítulo apresentou apenas uma breve introdução ao tópico e tentou apontar alguns dos perigos associados à construção de modelos de FEA viáveis. A escolha de um elemento adequado, que melhor se adapte à situação de geometria e carregamento, é o primeiro passo. Verificar que a malha convergiu razoavelmente para uma solução aceitável também é importante. Talvez o aspecto mais difícil da modelagem por elementos finitos seja a criação de condições de contorno realistas que representem razoavelmente bem as condições reais do sistema físico a ser modelado. Vários exemplos neste capítulo mostraram como erros significativos podem ocorrer se esses detalhes não forem devidamente atendidos.

Antes de tentar usar o FEA profissionalmente, o aluno é incentivado a procurar mais informações e/ou instruções na teoria e na prática da análise pelo FEA, seja por meio de cursos dedicados a esse assunto ou lendo a literatura disponível. Um início razoável para o último objetivo pode ser feito com os livros listados na bibliografia a seguir. Essa bibliografia irá levá-lo mais fundo no mundo do FEA. Há também uma riqueza de informações sobre o FEA na internet, incluindo livros completos. Alguns *sites* estão listados a seguir. Uma pesquisa sobre o tema na internet irá revelar muitos outros.

8.10 REFERÊNCIAS

1. **M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin,** and **L. J. Topp**, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *J. Aero. Sci.*, 23, pp. 805-824, 1956.

2. http://www.iti-cae.com/caelabs/user_guide/plasticslab/plasticslab-291.html

3. **V. Adams** and **A. Askenazi**, *Building Better Products with Finite Element Analysis*. Onword Press: Santa Fe, N.M., p. 246, 1998.

4. **D. L. Logan**, *A First Course in the Finite Element Method*. 2ed. PWS Kent: Boston, p. 408, 1992.

8.11 BIBLIOGRAFIA

V. Adams and A. Askenazi, *Building Better Products with Finite Element Analysis*. Onword Press: Santa Fe, N.M., 1998.

K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1982.

D. L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*. 2ed. PWS Kent: Boston, 1992.

I. H. Shames and C. L. Dym, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. Hemisphere Publishing: New York, 1985.

E. Zahavi, *The Finite Element Method in Machine Design*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1992.

8.12 RECURSOS NA WEB

http://caswww.colorado.edu/courses.d/IFEM.d/Home.html

http://www.devdept.com/fem/books.php

http://feaservices.com/intro_fea/intro_fea.html

http://www.memagazine.org/supparch/medesign/mesh/mesh.html

http://caswww.colorado.edu/Felippa.d/FelippaHome.d/Publications.d/Report.CUCAS-00-13.pdf

http://campus.umr.edu/mfge/ugumrmfge/FEMwebpage/Projecta.htm

http://www.engr.usask.ca/~macphed/finite/fe_resources/fe_resources.html

http://www3.sympatico.ca/peter_budgell/Modeling_issues.html

http://www.DermotMonaghan.com/

http://www.femur.wpi.edu/

8.13 PROBLEMAS*

8-1 Resolva o problema 4-10 utilizando a análise pelo FEA.

8-2 Resolva o problema 4-11 utilizando a análise pelo FEA.

8-3 Resolva o problema 4-12 utilizando a análise pelo FEA.

8-4 Resolva o problema 4-13 utilizando a análise pelo FEA.

8-5 Resolva o problema 4-17 utilizando a análise pelo FEA.

8-6 Resolva o problema 4-19 utilizando a análise pelo FEA.

8-7 Resolva o problema 4-23 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

8-8 Resolva o problema 4-24 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

8-9 Resolva o problema 4-25 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

8-10 Resolva o problema 4-26 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

†8-11 Resolva o problema 4-33 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

†8-12 Resolva o problema 4-34 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

8-13 Resolva o problema 4-37 utilizando a análise pelo FEA.

8-14 Resolva o problema 4-59 utilizando a análise pelo FEA.

8-15 Resolva o problema 4-60 utilizando a análise pelo FEA.

8-16 Resolva o problema 4-62 utilizando a análise pelo FEA.

8-17 Resolva o problema 4-63 utilizando a análise pelo FEA.

8-18 Resolva o problema 4-66 utilizando a análise pelo FEA.

†8-19 Resolva o problema 9-4 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

†8-20 Resolva o problema 9-5 para a(s) linha(s) assinalada(s) utilizando a análise pelo FEA.

†8-21 Resolva o problema 4-3 utilizando a análise pelo FEA.

†8-22 Resolva o problema 4-9 utilizando a análise pelo FEA.

†8-23 Resolva o problema 4-33 utilizando a análise pelo FEA.

†8-24 Resolva o problema 4-34 utilizando a análise pelo FEA.

†8-25 Resolva o problema 4-35 utilizando a análise pelo FEA.

†8-26 Resolva o problema 4-40 utilizando a análise pelo FEA.

†8-27 Resolva o problema 4-57 utilizando a análise pelo FEA.

†8-28 Resolva o problema 4-59 utilizando a análise pelo FEA.

†8-29 Resolva o problema 4-60 utilizando a análise pelo FEA.

†8-30 Resolva o problema 4-61 utilizando a análise pelo FEA.

†8-31 Resolva o problema 4-69 utilizando a análise pelo FEA.

†8-32 Resolva o problema 4-70 utilizando a análise pelo FEA.

†8-33 Resolva o problema 4-71 utilizando a análise pelo FEA.

†8-34 Resolva o problema 4-72 utilizando a análise pelo FEA.

---

* Alguns dos problemas relacionados de capítulos anteriores têm resposta no Apêndice D. Para os outros, o seu instrutor pode fornecer as respostas para as soluções analíticas a partir do Manual de Soluções, como uma verificação dos resultados para a análise pelo FEA. Caso contrário, você mesmo pode resolver pelo método analítico para a verificação.

† Os modelos de CAD *Solidworks* para as geometrias desses problemas estão no CD.

Parte

II

PROJETO DE MÁQUINAS

9

ESTUDOS DE CASO DE PROJETO

Aqui, o conhecimento de homem algum pode ir além de sua experiência.

John Locke

9.0 INTRODUÇÃO

Este capítulo introduzirá e apresentará diversos estudos de caso de projeto em escala maior que aqueles apresentados nos capítulos anteriores. Esses estudos de caso serão usados até o final do livro para ilustrar a aplicação do processo de projeto para vários aspectos de cada problema de projeto. Em cada capítulo subsequente se explorará um elemento diferente, como eixos, engrenagens, molas, etc., que são encontrados em geral em maquinarias. Essa coleção de elementos não pode ser exaustiva, mas ela ilustrará a maneira como os princípios da primeira parte do livro podem ser aplicados a problemas práticos de projeto. Os elementos de máquina selecionados para estudo foram escolhidos parte por causa de seu uso comum e parte por causa de sua capacidade de exemplificar alguns dos critérios de projeto e falha discutidos na Parte I do livro. A Tabela 9-0 mostra as variáveis usadas neste capítulo e faz referência aos casos típicos em que elas são usadas.

O projeto é, por sua natureza, um processo iterativo. Quando nos deparamos com o enunciado de um problema de projeto, algumas hipóteses simplificadoras são sempre necessárias a fim de começá-lo. À medida que o projeto toma forma, os resultados das últimas escolhas de projeto forçarão inevitavelmente o projetista a rever suposições iniciais a respeito das partes já projetadas e modificá-las para satisfazer às novas condições. Um exemplo simples desse caso seria o projeto de um conjunto de engrenagens montadas sobre eixos. Se começarmos por projetar os eixos ou as engrenagens (digamos os eixos), quando chegar a hora de analisar o segundo dos dois elementos (digamos as engrenagens), seus requisitos podem forçar mudanças em algumas das suposições a respeito do projeto do eixo feito anteriormente. Mais cedo ou mais tarde, chegaremos a um compromisso que satisfaça todas as restrições, mas somente após algumas iterações que inevitavelmente envolvem o reprojeto das partes feitas anteriormente.

Devido à necessidade de iteração, todo o tempo gasto na colocação da solução do problema em uma ferramenta computacional como uma planilha de

Tabela 9-0 Variáveis usadas neste capítulo§

Simbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área	in^2	m^2	Caso 7A
a	aceleração	in/s^2	m/s^2	Caso 8A
c	constante de amortecimento	lb-s/in	N-s/m	Caso 8A, 9A
C_f	coeficiente de flutuação	nenhuma	nenhuma	Caso 9A
d	diâmetro	in	m	Caso 7A
E	energia	in-lb	joules	Caso 9A
F	força ou carga	lb	N	todos
g	aceleração gravitacional	in/s^2	m/s^2	Caso 8A
k	expoente lei dos gases	nenhuma	nenhuma	Caso 7A
k	constante de mola ou razão de mola	lb/in	N/m	Caso 8A, 9A
l	comprimento	in	m	Caso 7A
m	massa	$lb\text{-}s^2/in$	Kg	todos
P	potência	hp	watts	Caso 8A
p	pressão	psi	Pa	Caso 7A
r	raio	in	m	Caso 7A
T	torque	lb-in	N-m	todos
v	volume	in^3	m^3	Caso 7A
v	velocidade linear	in/s	m/s	Caso 8A
W	peso	lb	N	Caso 8A
y	deslocamento	in	m	todos
ω	velocidade angular ou rotacional	rad/s	rad/s	todos
ω_n	frequência natural	rad/s	rad/s	Caso 9A
ζ	taxa de amortecimento	nenhuma	nenhuma	Caso 9A

§ N. de T.: As unidades inglesas e a nomenclatura correspondente em português foram apresentadas na Tabela 1-4.

cálculo ou uma ferramenta de solução de equações será recompensado quando você tiver que reprojetar cada parte diversas vezes. Um programa de modelagem sólida CAD será também uma ferramenta útil. Na falta de um modelo computacional, você será forçado a refazer todos seus cálculos completamente em cada iteração, o que não é nada agradável. Faremos uso extenso das ferramentas computacionais de auxílio de projeto nestes estudos de caso.

9.1 ESTUDO DE CASO 8A: COMPRESSOR DE AR PORTÁTIL*

Um contratista de construção precisa de um compressor de ar pequeno movido por motor à gasolina para comandar martelos de ar em locais remotos de trabalho. Um esboço preliminar do projeto é mostrado na Figura 9-1. Um motor de um cilindro de 2 tempos com volante está acoplado a uma embreagem para reduzir a velocidade do motor e reforçar seu torque de forma apropriada. A taxa de redução dessas engrenagens precisa ser determinada. O eixo do motor à gasolina de 2,5 hp roda 3800 rpm. O eixo de saída da caixa de engrenagens comanda o eixo de manivela do compressor de um único cilindro Schramm por meio de um acoplamento de chaveta. Alguns cálculos termodinâmicos preliminares (ver arquivos CASE8-A) indicaram que a taxa de fluxo desejada de 9 cfm com uma pressão

* O estudante pode não conhecer ainda todos os aspectos destes problemas de escalas mais amplas, mas não deve ficar preocupado se alguns detalhes destes tópicos de estudos parecerem obscuros. Sem dúvida, podem ser encontradas explicações mais detalhadas destes tópicos em outra disciplina, em experiências posteriores ou em estudos de iniciativa própria. Um dos aspectos mais interessantes do projeto em engenharia é sua abrangência. Devemos continuamente aprender coisas novas a fim de sermos capazes de resolver problemas reais de engenharia. Uma educação em engenharia começa no início da universidade e está longe de encerrar na graduação. O desafio de explorar novos tópicos durante a carreira deve ser sempre bem-vindo.

FIGURA 9-1

Desenho esquemático preliminar de um compressor de ar portátil movido por motor à gasolina, caixa de engrenagens, acoplamentos, eixos e mancais.

média efetiva de 26 psig pode ser obtida a partir de um volume de cilindrada de 25 in^3 em um compressor funcionando a 1500 rpm.

A Figura 9-1 mostra o motor montado em uma base (que pode ser sobre rodas) com seu eixo de saída conectado via uma embreagem ao eixo de entrada de um redutor. O redutor contém um único par de engrenagens para reduzir a alta velocidade do motor a uma velocidade menor apropridada para o compressor. A relação de redução requerida é 1500:3800 ou 0,39:1. O eixo de saída do redutor está conectado via um acoplamento à manivela do compressor. Os eixos no compartimento do redutor são apoiados em mancais apropriados. A seção transversal do compressor mostra a válvula ativa de saída comandada por uma barra operada pelo camo e pelo trem de comando de válvula. A válvula de entrada é passiva, isto é, aberta e fechada pelas diferenças de pressão e por sua mola leve. A mola de válvula na válvula de exaustão deve ser forte o suficiente para manter o seguidor em contato com o camo.

Há vários aspectos deste dispositivo que iremos investigar. Vamos pressupor que o motor à gasolina será comprado como uma unidade. O compressor ditará as cargas nos elementos entre o motor e ele mesmo; portanto, alguma informação se faz necessária a respeito das características carga-tempo do compressor. Os eixos, acomplamentos, mancais e engrenagens que transferem a potência do motor ao compressor serão os elementos principais a serem projetados neste estudo de caso. Olharemos também uns poucos elementos dentro do compressor, como os parafusos e molas de válvula, porque eles proveem excelentes exemplos do

projeto de fadiga. Por causa de suas geometrias complicadas, o projeto de outras partes do compressor como o pistão, a barra de conexão e o eixo de manivela é mais adequado para a aplicação da análise por elementos finitos (FEA) e não será considerado neste estudo de caso. (Veja o Capítulo 8.)

ESTUDO DE CASO 8A

Desenho preliminar de um trem de comando de compressor

Problema **Determine a função força-tempo dentro do cilindro do compressor e a função torque-tempo agindo no eixo de entrada do compressor durante qualquer ciclo.**

Dados **A velocidade do compressor é 1500 rpm. O compressor tem um diâmetro de 3,125 in, um curso de 3,26 in e uma relação eixo de conexão-manivela de 3,5. A pressão de entrada é atmosférica (14,7 psia), a pressão máxima no cilindro é 132 psig e a pressão média efetiva (pme) é 26 psig. O fluxo é 8,9 cfm a pme, dando 1,6 hp.**

Hipóteses **O peso do pistão é 1 lb e o do eixo de conexão é 2 lb, com seu centro de massa a 1/3 da extremidade maior. A manivela pesa 5,4 lb incluindo um contrapeso que a balanceia otimamente para minimizar a força de agitação. O expoente na equação da lei dos gases é *k* = 1,13.**

Solução **Ver as Figuras 9-1 a 9-3 e os arquivos CASE8-A.**

1 A função força-tempo no cilindro depende da pressão do gás comprimido que, por sua vez, depende da geometria do mecanismo biela-manivela e da lei de gás:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \qquad (a)$$

onde p_1 é a pressão atmosférica (em psia), v_1 é o volume deslocado pelo cilindro até o ponto morto inferior (BDC – *bottom dead center*) e p_2, v_2 são a pressão e o volume do ar comprimido no ponto morto superior (TDC – *top dead center*), ou em qualquer outra posição. Pressupõe-se que o expoente k da lei do gás seja 1,13, porque o processo não é isotérmico ($k = 1$) nem adiabático ($k = 1{,}4$). Também se pressupõe como típica uma taxa de compressão de 10,9:1. Uma expressão para o deslocamento y do pistão referida a BDC (supondo a constante da manivela ω) é

$$y = \left(r\cos\theta + l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\theta\right)^2} \right) - l + r \qquad (b)$$

onde r = raio da manivela, l = comprimento da barra de conexão e θ = ângulo da manivela. Ver referência 1 para a derivação da expressão entre parênteses.

2 A combinação dessas funções com os intervalos de pressão supostos com a constante da lei de gás dá uma função aproximada para a pressão do cilindro p como função do ângulo da manivela para os dados deste problema em particular:

$$\text{Se} \quad \pi \le \theta \le 2\pi \quad \text{então} \quad p \cong 924\left(\frac{\theta - \pi}{\pi}\right)^6 - 792\left(\frac{\theta - \pi}{\pi}\right)^7 \quad \text{senão } p \cong 0 \qquad (c)$$

Essa função é mostrada na Figura 9-2.* A força F_g no pistão e na cabeça do cilindro devido à pressão do gás é, portanto,

$$F_g = pA_p = \frac{\pi}{4} p d_p^2 \qquad (d)$$

*As funções nas Figuras 9-2 e 9-3 foram geradas com o programa ENGINE da Referência 1.

onde A_p é a area do pistão e d_p o diâmetro do pistão. Esta é a mesma função que aquela mostrada na Figura 9-2 multiplicada por uma constante. Uma segunda escala está mostrada nas ordenadas dando a força do gás F_g além da pressão do gás p para este problema.

3 O torque requerido para mover a manivela do compressor tem duas componentes, uma da força do gás F_g e outra das forças inerciais F_i devido às acelerações.[1]

$$T = T_g + T_i$$

onde
$$T_g \cong F_g r \operatorname{sen}\theta\left(1 + \frac{r}{l}\cos\theta\right) \qquad (e)$$

e
$$T_i \cong \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l}\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta - \frac{3r}{2l}\operatorname{sen}3\theta\right)$$

A massa m é definida como aquela do pistão e do pino além da porção do eixo de conexão (cerca de 1/3) que se considera estar atuando no pistão.[1] Quando os valores para este problema são substituídos em (e), a função torque-tempo resulta como mostrado na Figura 9-3.*

FIGURA 9-2

Pressão e força dentro do cilindro durante um ciclo.

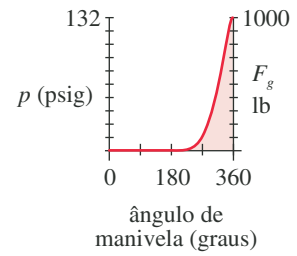
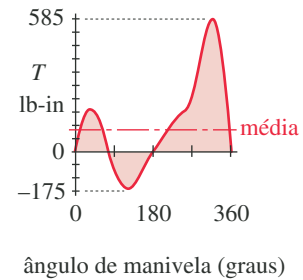
FIGURA 9-3

Função torque-tempo no eixo manivela com ω constante.

As funções força-tempo e torque-tempo mostradas nas Figuras 9-2 e 9-3 pressupõem que a velocidade do eixo seja essencialmente constante. Esta é uma suposição razoável para uma condição de regime, uma vez que o motor que o está comandando seja controlado e tenha um volante para suavizar suas oscilações de velocidade. Essas funções de força e torque definem cargas variáveis no tempo que os eixos, acoplamentos e engrenagens sentirão, e portanto são o ponto de partida para o projeto. Por causa da variação temporal das cargas, todas as partes estarão sujeitas a carregamento de fadiga e devem ser projetadas levando isso em consideração, usando as teorias delineadas nos Capítulos 6 e 7.

9.2 ESTUDO DE CASO 9A: LEVANTADOR DE FARDOS DE FENO

Um produtor de leite em Bellows Falls, Vermont, precisa de um pequeno guincho para levantar fardos de feno e depositá-los no estábulo. Uma ideia preliminar para o projeto é mostrada na Figura 9-4. Um motor elétrico é acoplado a um par de engrenagens sem-fim para reduzir sua velocidade e aumentar o torque adequadamente. A melhor relação para essa redução deve ser determinada. O eixo de saída do redutor está acoplado ao eixo do tambor do guincho, e ambos giram sobre rolamentos a serem escolhidos. O tambor serve como um cabrestante ao redor do qual é enrolada uma corda que tem um gancho forjado na sua extremidade. O conjunto completo do guincho será, por fim, suspenso pelos caibros no sótão, sobre uma escotilha central. Os fardos de feno serão amarrados abaixo manualmente e removidos acima também manualmente. O motor elétrico é reversível, e o conjunto roda e sem-fim deve ser projetado para se travar automaticamente a fim de manter a carga quando o motor for desligado.

A descrição do problema acima está muito desestruturada, porque ela não dá informações a respeito do tamanho e peso de um fardo de feno nem o número de fardos que devem ser levantados de uma vez para uma maior eficiência. Essas considerações, em combinação com a escolha do diâmetro do tambor do guincho, determinarão os requisitos de torque que o trem de comando terá que satisfazer. A carga de arranque pode ser significativamente mais alta que a carga levantada em regime devido à carga de choque que ocorre quando a folga é primeiramente

* As funções nas Figuras 9-2 e 9-3 foram geradas com o programa ENGINE da referência 1.

removida da linha e a carga é levantada. O carregamento dinâmico no arranque será modelado usando um programa de solução para equações diferenciais.

ESTUDO DE CASO 9A

Desenho preliminar de um guincho de levantamento

Problema **Determine a função força-tempo no cabo de alçamento, o diâmetro necessário do tambor e a função torque-tempo que atuam no eixo do tambor do guincho durante qualquer ciclo. Defina a relação de engrenamento, potência e torque requeridos pelo motor.**

Dados **O peso dos fardos de feno variam dependendo do seu conteúdo de umidade, mas pode-se pressupor que pesem, em média, cerca de 60 lb. O caminhão de feno suporta 100 fardos e o fazendeiro gostaria de descarregá-los em 30 min. A altura média de levantamento é 24 ft.**

Hipóteses **A corda de Náilon de 3/4 in tem uma resistência mínima à ruptura de cerca de 8000 lb e uma constante de mola de cerca de 50000 lb/in por ft de comprimento sob tensão axial.**

Solução **Ver as Figuras 9-4 a 9-6 e os arquivos CASE9-A.**

1 A carga nominal depende do número de fardos a serem levantados por vez e do peso de qualquer estrutura usada para aguentar os fardos. Para descarregar 100 fardos do caminhão, um por vez, em 30 min, é preciso que a taxa média de fardos seja de 100/30 = 3,3 fardos/min, ou de um período médio de 18 s por fardo. Uma vez que parte desse tempo deve ser usada para retornar o carregador vazio ao chão, não usamos todos os 18 s para levantar a carga. Também devemos destinar algum tempo para o carregamento manual e o descarregamento dos fardos no alto e no chão. A porção do período completo durante o qual o mecanismo está funcionando é chamado seu *ciclo ativo*. Vamos supor que 1/3 do período seja usado para carga/descarga, 1/3 para levantar e 1/3 para baixar. Isso permite 6 s por fardo se levantarmos somente um fardo por vez. A velocidade média de

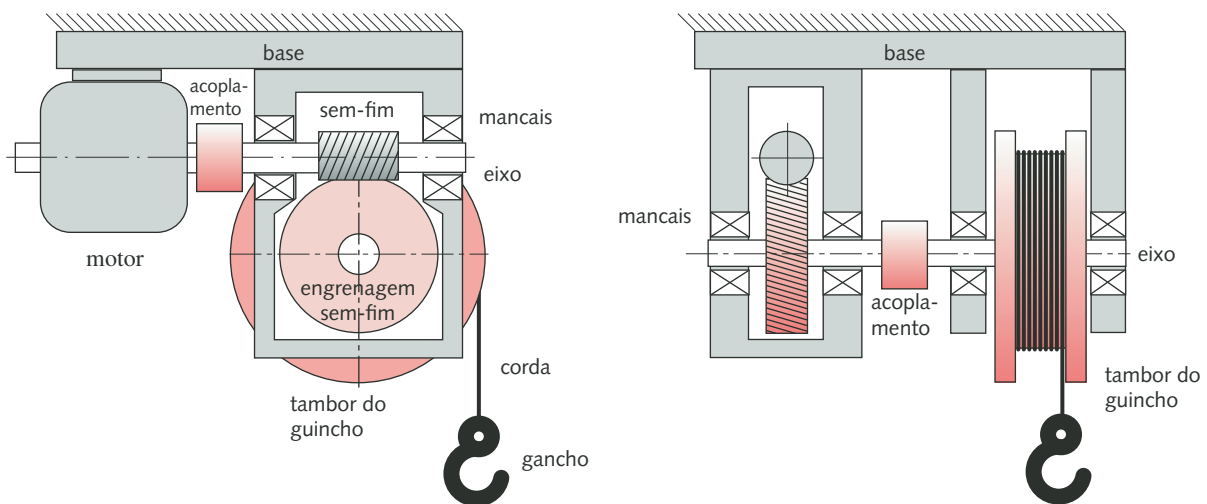



FIGURA 9-4

Guincho movido a motor com trem de engrenagens, eixos, mancais e acoplamentos.

levantamento teria de ser então 24 ft/6 s = 4 ft/s. Um arranjo melhor poderia ser carregar 2 fardos por vez no levantamento. Isso dobra o período para 36 s, duplica o tempo disponível para levantamento para 12 s e baixa a velocidade média para 2 ft/s, ainda mantendo o mesmo ciclo ativo.

2 A carga com dois fardos no carregamento é 120 lb. A carga morta será o peso da corda, do gancho e de qualquer plataforma ou estrutura usada para suportar os fardos. Uma vez que a estrutura ainda tem de ser projetada, seu peso é desconhecido. Nós suporemos que podemos manter esse peso morto abaixo de 50 lb. A carga nominal total será então 170 lb para a fase de levantamento e 50 lb para a fase de descida da carga.

3 Em estado de regime, a carga na corda deve ser o número acima. Contudo, no arranque, a carga pode ser significativamente maior devido à necessidade de acelerar a carga a sua velocidade de regime e devido também ao fato de que existem ambas a massa e a mola no sistema. A combinação de massa e mola em um sistema dinâmico permite oscilações que ocorrem à medida que a energia cinética da massa móvel é transferida à energia potencial na mola elástica e vice-versa. A corda é a mola. Quando a folga na corda é subitamente reduzida em relação à massa da carga, a corda esticará, guardando energia potencial. Quando a força na corda estendida se torna suficiente para mover a carga, ela acelerará a carga para cima, aumentando sua velocidade e transferindo a energia potencial da corda para energia cinética na massa. Se a massa acelerar suficientemente, ela afrouxará a corda outra vez. Quando a massa cai para afrouxar, o ciclo se repete. Assim, à medida que ela arranca, a força na corda pode oscilar de zero até algum valor significativamente maior que aquela carga de regime. Calcular o carregamento dinâmico requer escrever e resolver as equações diferenciais de movimento para o sistema.

4 A Figura 9-5*a* mostra um esquema simplificado da porção do sistema dinâmico contendo a massa levantada e a mola da corda. A Figura 9-5*b* mostra o sistema modelado como uma massa concentrada suportada por uma mola e um amortecedor. A Figura 9-5*c* mostra o diagrama de corpo livre (DCL) da massa sob influência do seu peso W, a força da mola F_s e a força do amortecedor F_d. Escrevendo a equação da segunda lei de Newton para este DCL, temos:

$$\sum F = ma$$

$$F_s + F_d - W = \frac{W}{g}\ddot{y}_2 \qquad (a)$$

onde

$$F_s = k(y_1 - y_2) \qquad (b)$$
$$F_d = c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

Substituindo as condições iniciais:

quando $t = 0$ $\quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = v_0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0 \qquad (c)$

de onde $\quad F_s(0) = 0, \quad F_d(0) = 0 \qquad (d)$

$$m\ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - W$$
$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m}\left[k(y_1 - y_2) + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - W\right]$$

Se $\dot{y}_1 = v, \quad y_1 = vt$

então

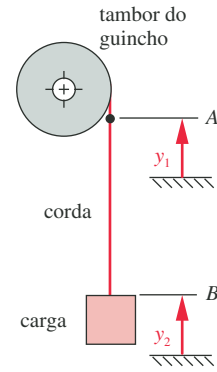
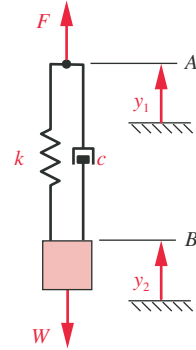
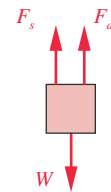
$$\ddot{y}_2 = \left[\frac{k}{m}(vt - y_2) + \frac{c}{m}(v - \dot{y}_2) - g\right] \qquad (e)$$

(*a*) Sistema dinâmico

(*b*) Modelo discretizado

(*c*) Diagrama de corpo livre

FIGURA 9-5
Sistema dinâmico, modelo discretizado e diagrama de corpo livre de uma corda de alçamento.

5 As constantes para esta equação são definidas como segue:

$$v = 24\,\frac{\text{in}}{\text{s}}$$

$$W = 170 \text{ lb}, \qquad m = \frac{W}{g} = \frac{170}{386} = 0{,}44\,\frac{\text{lb-s}^2}{\text{in}} \tag{f}$$

$$k = 50000\,\frac{\text{lb/in}}{\text{ft}}\Big/ 24\,\text{ft} = 2083\,\frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

O amortecimento crítico, c_c, é facilmente calculado a partir dos valores conhecidos da massa e constante de mola. Esse sistema é apenas ligeiramente amortecido pelo atrito interno da corda. Vamos pressupor que sua razão de amortecimento real para o amortecimento crítico, z, seja cerca de 10% (0,1) e utilizá-lo para calcular um valor de amortecimento pela Equação (*e*).

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2(0{,}44)\sqrt{\frac{2083}{0{,}44}} = 61\,\frac{\text{lb-s}}{\text{in}}$$

$$c = \zeta c_c = 0{,}10(61) = 6{,}1\,\frac{\text{lb-s}}{\text{in}} \tag{g}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{6{,}1}{0{,}44} = 14$$

6 A Equação (*e*) foi resolvida com o pacote simulador ASDEQ.* A aceleração da carga durante o primeiro segundo de operação está mostrada na Figura 9-6*a*. A aceleração de descida (gravidade) foi considerada negativa. Observe os períodos de aceleração negativa (um valor limite de $-g$) durante os quais a carga está em queda livre e a corda está frouxa sem tensão. A força na corda durante o primeiro segundo de operação está mostrada na Figura 9-6*b*. Observe que a força de tração sobe a mais de quatro vezes a carga nominal na primeira oscilação e então cai a zero à medida que a corda fica frouxa, porque ela não aguenta força de compressão. Esse padrão se repete por 3 ciclos até quando o amortecimento reduz as oscilações ao ponto em que a corda fica sempre em tração. Depois de 10 ciclos, ele se estabiliza ao valor da carga nominal.

7 O torque requerido para mover o eixo do tambor dependerá das cargas dinâmicas recém-calculadas e do diâmetro do tambor selecionado. Um diâmetro muito pequeno causará tensões muito altas e desgaste da corda. Um diâmetro muito grande aumentará o torque requerido e aumentará o tamanho do pacote. Uma corda de 3/4 in de diâmetro pode ser enrolada ao redor de um tambor de diâmetro de 20 in. Sendo $T = Fr$, o torque requerido no eixo será 10 vezes a tensão na corda (usando in-lb) e teremos as mesmas variações, como mostrado na Figura 9-6*b*.

* *Automatic Solution of Differential Equations* (Solução Automática de Equações Diferenciais), por Maj. Abram Jack e Maj. James D. Brown, U.S. Military Academy, West Point, N.Y. Observe que este pacote está disponível no U.S.M.A. e está incluído no CD.

(*a*) Aceleração da carga

(*b*) Força dinâmica no cabo

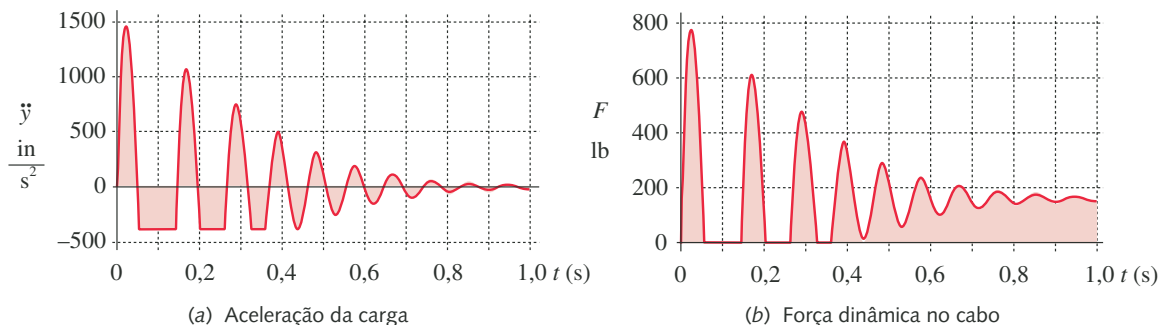



FIGURA 9-6

Aceleração e força no cabo durante o arranque de levantamento da carga.

8 A potência média requerida pode ser facilmente encontrada por meio da mudança na energia potencial no intervalo desejado. Para elevar uma carga de 170 lb, 24 ft em 12 s, é necessário:

$$P = \frac{170 \text{ lb} \left(24 \text{ ft}\right)}{12 \text{ s}} = 340 \frac{\text{ft-lb}}{\text{s}} = 0,62 \text{ hp} \tag{h}$$

Como haverá perdas no trem de engrenagem e no guincho, será preciso uma potência de entrada maior que esta, digamos 1 hp, como primeira tentativa. É desejável mantê-la neste nível ou em um menor, uma vez que motores de maior potência requererão maiores voltagens que 110V.

Essa potência média se baseia na carga nominal. A carga de pico no arranque requer maior potência. Em vez de dimensionar o motor para acomodar o transiente na carga de arranque, outra alternativa é prover efeito de volante no sistema suficiente para suprir o pulso transiente de energia de forma a fazê-lo passar à fase de arranque. É possível que a inércia rotacional do tambor e da engrenagem sem-fim supram a quantidade suficiente de efeito de volante, pressupondo que o guincho ganhe velocidade antes que a corda se tensione.

9 A velocidade angular média do tambor é determinada pela velocidade média linear da corda, que é 2 ft/s. Em um raio de 10 in do tambor, isso resulta em:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{24 \text{ in/s}}{10 \text{ in}} = 2,4 \text{ rad/s} \cong 23 \text{ rpm} \tag{i}$$

10 Motores elétricos para operação a 60 Hz AC são feitos em poucas velocidades rotacionais padronizadas, sendo as mais comuns 1725 rpm e 3450 rpm. Essas velocidades derivam das velocidades sincrônicas da frequência da linha de 1800 rpm e 3600 rpm menos algum escorregamento nesses motores não sincronizados. Para minimizar a relação de engrenamento no conjunto sem-fim, deveríamos escolher a menor das duas velocidades padronizadas, ou 1725 rpm. Isso dá uma relação de engrenamento desejada de 23:1725 ou 1:75. Essa relação pode ser obtida com uma combinação de um único estágio no sem-fim, sendo portanto factível.

11 Para resumir os parâmetros determinados neste estudo de projeto preliminar, estamos buscando projetar um sistema que tenha 1 hp, 1725 rpm, um motor elétrico de 110 V AC, que comande um conjunto sem-fim e roda com relação 1:75 de redução que, por sua vez, comanda o tambor de um guincho de diâmetro de 20 in a 23 rpm. Uma corda de 3/4 in é enrolada ao redor do tambor e seu gancho forjado, atado a uma plataforma que pesa não mais que 50 lb e suporta estavelmente dois fardos de feno de até 60 lb cada. Essas são as especificações que constituem o trabalho para nosso projeto.

O problema, que estava originalmente desestruturado, agora tem uma certa estrutura que pode ser usada como ponto de partida para um projeto mais detalhado de vários componentes. Alguns dos componentes deste tópico de estudos serão analisados nos capítulos a seguir, nos quais os tópicos relevantes, como eixos, engrenagens, mancais, etc., são apresentados. Observe que, embora a carga seja relativamente estável ao longo do tempo neste dispositivo, as oscilações de arranque e os ciclos repetidos de utilização transformam este problema em um problema de projeto de fadiga, como acontece praticamente em qualquer máquina. As partes estão sujeitas a carregamento de fadiga e devem ser projetadas levando isso em conta, usando as teorias descritas nos Capítulos 6 e 7.

9.3 ESTUDO DE CASO 10A: MÁQUINA DE TESTE DE CAMO

Precisa-se de uma máquina que permita a medição das características dinâmicas de camos. Essa máquina deve ser dinamicamente silenciosa, ter deflexões míni-

mas e prover uma velocidade rotacional praticamente constante, mas ajustável por causa das variações nas cargas de torque dos camos. São fornecidos instrumentos para medir as forças dinâmicas e as acelerações do seguidor de camo. A montagem do levantador de 1 in para testar camos pode ser projetada sob medida para ajustar-se à máquina de teste. Os perfis do camo estão definidos. A velocidade rotacional deve ser tão alta quanto possível, sem causar qualquer sobressalto no seguidor. Os camos devem ser fácil e rapidamente substituíveis na máquina. Os camos trabalharão em um banho de óleo que deve estar contido dentro da máquina.

Isto também é a declaração de um problema desestruturado que permite ao projetista uma série de opções com respeito à solução. Procuraremos, a seguir, limitar mais o problema com suposições e cálculos preliminares a fim de permitir que seja possível um projeto mais detalhado.

ESTUDO DE CASO 10A

Desenho preliminar de um dispositivo de teste dinâmico de camo

Problema **Defina um conceito preliminar de projeto para satisfazer as restrições gerais do problema listado acima. Determine a função força-tempo atuando no seguidor e a função torque-tempo no eixo do camo durante qualquer ciclo. Defina a relação de comando, bem como a potência e torque requeridos pelo motor.**

Dados **Os camos de quatro estágios têm um diâmetro mínimo de 6 in e um diâmetro máximo de 8 in. O levantador tem 1 in. O seguidor de rolamento tem diâmetro de 2 in. Os camos são movidos a 180 rpm. A forma do camo está mostrada na Figura 9-7.**

Hipóteses **Devem ser usados mancais de deslizamento em todos os lugares, porque mancais com elementos de rolamento introduzem muito ruído. Um motor DC de velocidade controlada será usado.**

Solução **Ver as Figuras 9-7 a 9-13.**

1 Um projeto preliminar é mostrado na Figura 9-8. O eixo do camo é afunilado para receber um cone no camo. Isso evita o uso de chavetas, que podem introduzir vibração e ruído na reversão do torque. O camo será engastado axialmente ao eixo para localização concêntrica. Um pino redondo para raios grandes tranca o camo ao cubo para estabelecer a posição zero. Esse arranjo permite remoção e instalação rápida ao fazer a mudança dos camos.

2 Um volante é fixado ao eixo do camo para prover modulação das oscilações de velocidade durante variações de torque. O volante também serve como uma polia para uma correia plana proveniente da polia menor do motor a fim de reduzir a velocidade do eixo de camo adequadamente.

3 O braço do seguidor é pivotado a 12 in do eixo do camo e carrega um seguidor comercial de rolamento movendo-se em um mancal de deslizamento. Uma mola helicoidal de tração força o elemento rolante do braço do seguidor contra o camo. Essa mola deve ser descarregada e removida para trocar o camo e, então, retensionada para o novo camo. A tampa, que é pivotada no braço do seguidor, aplica tensão à mola quando fechada e remove a tensão quando ela está aberta.

4 Acelerômetros e transdutores de força são colocados sobre o pivo de rolamento e entre este e o braço do seguidor para medir os parâmetros desejados.

5 O conjunto é montado em uma base com formato de caixa que o suporta, provendo-lhe rigidez, e que também contém uma câmara de óleo, que pode ser aberta, ao redor do camo. A base pode ser montada em rodas para mobilidade, ou em

FIGURA 9-7

Camo de quatro estágios.

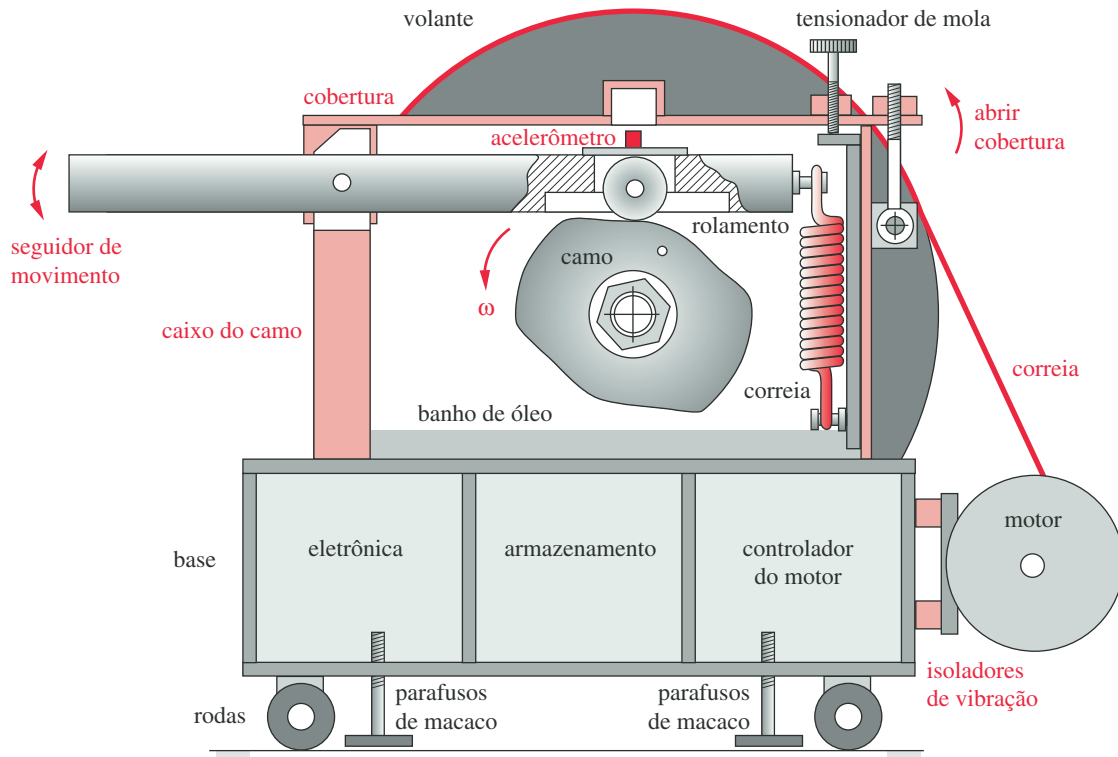



FIGURA 9-8

Mecanismo de teste dinâmico de camo – um esquema geral de projeto.

pernas alçáveis para estabilidade. O motor é montado na base sobre isoladores de vibração de borracha. A eletrônica para o controle do motor e a instrumentação fica contida dentro da base.

6 O projeto do camo em si, junto com sua velocidade rotacional, determina a magnitude e a forma da aceleração do braço do seguidor. Essa função aceleração do seguidor, gerada pelo programa DYNACAM,[2] está mostrada na Figura 9-9. A função aceleração multiplicada pela massa efetiva do seguidor é um componente da força dinâmica necessário para o cálculo da tensão. O sistema dinâmico do camo e seguidor pode ser modelado como um sistema linearizado, de parâmetros discretizados e de um único grau de liberdade, como mostrado na Figura 9-10. O movimento da linha de centro do elemento rolante no braço giratório do seguidor acontece verdadeiramente ao longo de um arco, mas esse arco é bastante plano neste projeto devido ao comprimento do raio do braço. O erro em se pressupor que o movimento do rolamento seja linear sobre sua curta trajetória é mínimo. Uma porção da massa do seguidor móvel é considerada, então, como concentrada no elemento rolante de modo a ser dinamicamente equivalente. Da segunda lei de Newton, a equação diferencial para o sistema discretizado na Figura 9-10 é [3]

$$\sum F = ma$$
$$F(t) - F_d - F_s = m\ddot{y}$$

onde $F_d = c\dot{y}, \qquad F_s = ky + F_{pl}$

e
$$F(t) = m\ddot{y} + c\dot{y} + \left(ky + F_{pl}\right) \qquad (a)$$

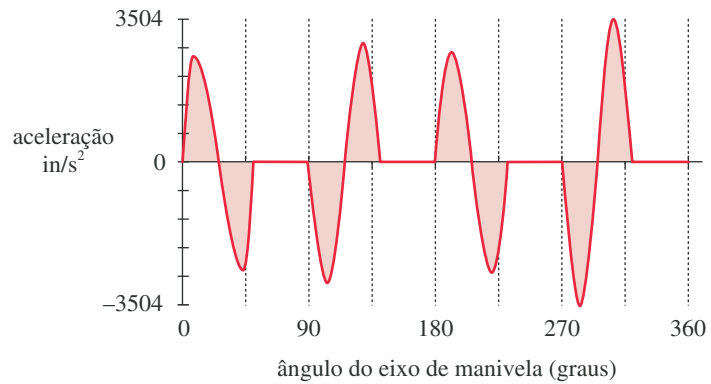



FIGURA 9-9

Função de aceleração para camo sobre 1 ciclo.

A força de mola F_s tem duas componentes. A constante de mola k vezes a deflexão y é adicionada a qualquer força inicial F_{pl} criada pela pré-carga da mola na instalação. A força de amortecimento F_d é proporcional à velocidade por um coeficiente de amortecimento c.

7 A Equação (a) pode ser resolvida cinemática e estaticamente nesse caso, já que estamos mantendo uma velocidade angular constante e que o deslocamento (y), velocidade ($\dot{y}$) e a aceleração ($\ddot{y}$) são funções definidas do tempo. O valor de m dependerá do nosso projeto do braço do seguidor e de qualquer coisa fixada a ele como massa móvel, a exemplo do elemento rolante. O valor do fator de amortecimento, c, é, às vezes, difícil de prever, e a forma usual de estimar seu valor é definir uma taxa esperada de amortecimento ζ para o tipo de sistema e calcular o amortecimento a partir de

$$c = 2\zeta m \omega_n$$

onde
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (b)$$

Koster[4] descobriu que um valor típico do ζ para sistemas de camo-seguidor é de cerca de 0,06. O fator ω_n é a frequência natural não amortecida do sistema. O valor da constante de mola, k, está sob controle do projetista, assim como a quantidade de pré-carga de mola, F_{ps}. Iremos projetar mais tarde uma mola adequada

(*a*) Sistema físico

(*b*) Modelo de parâmetros discretizados

(*c*) Diagrama de corpo livre

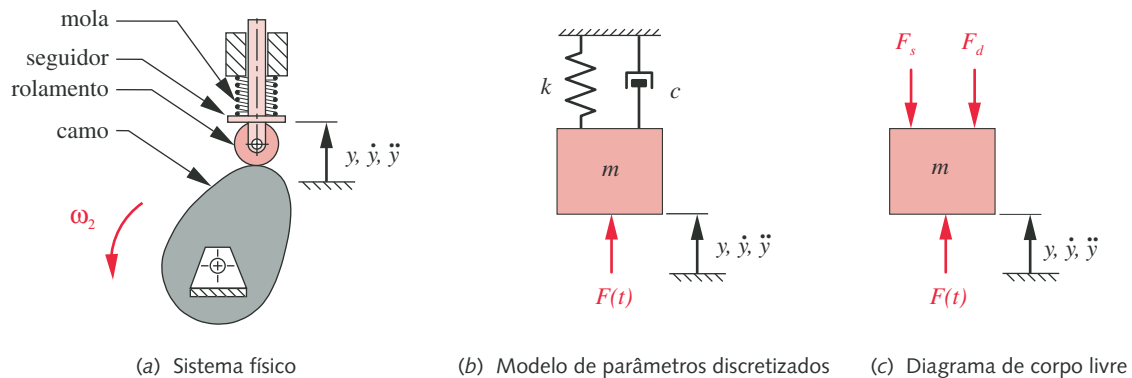
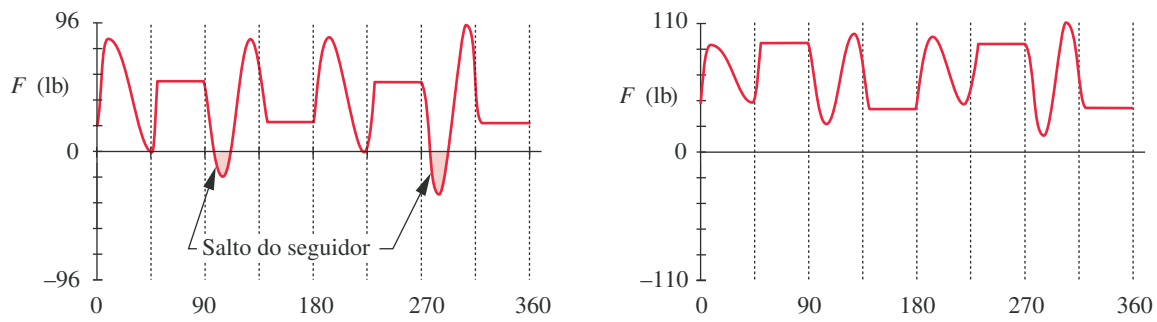



FIGURA 9-10

Sistema linearizado camo-seguidor.

(*a*) Força de mola insuficiente permite saltos ao seguidor

(*b*) Força de mola suficiente mantém a força dinâmica positiva

FIGURA 9-11

Força dinâmica entre o camo e o seguidor do camo.

para este sistema que irá proporcionar valores apropriados para essas variáveis. Observe que não podemos calcular numericamente a carga dinâmica no sistema até que tenhamos projetos preliminares das partes móveis a fim de definir suas massas. Neste ponto, podemos definir um valor adequado de k e F_{pl} e, então, tentar projetar uma mola viável que forneça aqueles valores.

8 Para uma massa, uma razão de amortecimento e uma função de aceleração dadas, a escolha de k e F_{pl} determina se o seguidor saltará para fora do camo durante a descida. A Figura 9-11*a* mostra o efeito na força dinâmica $F(t)$ de uma combinação muito pequena de k e F_{pl}. As áreas sombreadas realçam porções onde a força dinâmica é negativa. Uma união camo-seguidor não pode fornecer uma força negativa, da mesma forma que a corda do tópico de estudos anterior não pode suportar uma força de compressão. Assim, a constante de mola e a pré-carga devem ser aumentadas de alguma maneira até que a função força-dinâmica permaneça positiva durante todo o ciclo, como mostrado na Figura 9-11*b*.

9 Para este estudo de caso, definiremos a geometria do braço do seguidor como mostrado na Figura 9-12. É um sólido de seção transversal retangular de alumínio de 2 in × 2,5 in, recortado internamente ao redor do seguidor por motivos de folga. A distância do pivô ao rolo seguidor é 12 in com uma extensão de 10 in

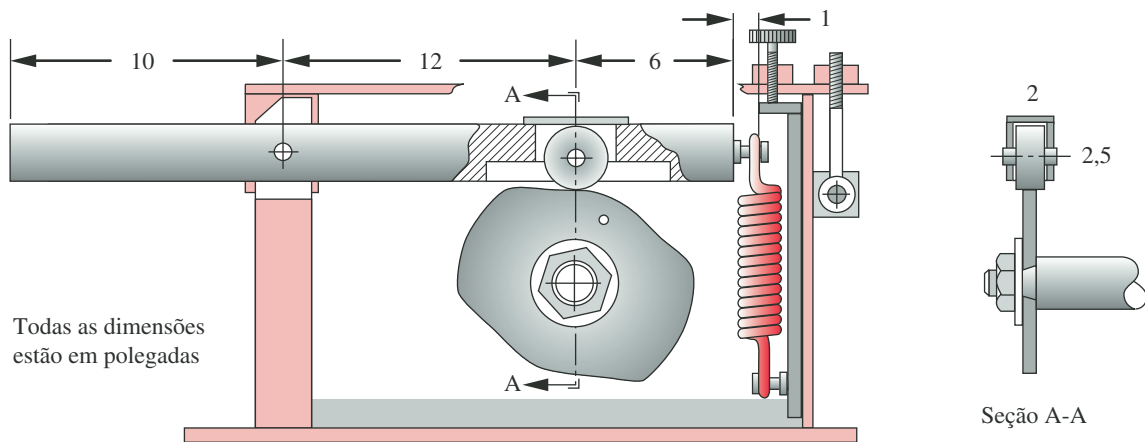



FIGURA 9-12

Dimensões do braço do seguidor.

além do pivô para balanço. Ele se extende 6 in além do rolo seguidor para prender a mola. A massa efetiva do braço do seguidor refletida à linha de centro do rolo, mais a massa do rolo e seu pivô, é 0,02 lb-s^2/in. Usando o valor da massa efetiva e aplicando uma constante de mola à extremidade do braço de $k = 25$ lb/in e uma pré-carga de mola de $F_{pl} = 25$ lb (que se traduz em valores efetivos de $k = 56{,}25$ e $F_{pl} = 37{,}5$ lb no seguidor), chegamos à função força-dinâmica mostrada na Figura 9-11*b*. O pico da força dinâmica é 110 lb e a força mínima é 13 lb no **camo-seguidor**. A deflexão da mola é 1,5 in.

10 O torque no eixo do camo pode ser encontrado por[5]

$$T(t) = \frac{F(t)\dot{y}}{\omega} \tag{c}$$

Essa função torque para os valores supostos acima está mostrada na Figura 9-13. O torque máximo é 176 in-lb e o torque mínimo é –204 in-lb. O torque médio é 7 lb-in.

11 O volante é de 24 in de diâmetro e 1,88 in de espessura de aço sólido. O momento de inércia da massa é $I = 44$ *blob*-in^2. O coeficiente de flutuação, C_f, para este volante foi encontrado por integração da função torque-tempo da Figura 9-13, pulso por pulso, para encontrar a máxima energia de oscilação E sobre um ciclo. Essa integração foi feita numericamente com o programa DYNACAM[2] e dá $E =$ 3980 in-lb de energia para um ciclo. O coeficiente de flutuação é então[6]

$$C_f = \frac{E}{I\,\omega^2} = \frac{3980}{44(18{,}85)^2} = 0{,}25 \tag{d}$$

Apesar do tamanho e do peso (220 lb) relativamente grandes deste volante, ele dá apenas 75% de redução no torque de pico, porque sua velocidade angular é muito baixa. Volantes precisam de alta velocidade ou massa muito alta para serem efetivos. O torque máximo com esse volante é reduzido a 47 in-lb e o torque mínimo é agora –48 in-lb. O torque médio é imutável em 7 lb-in. A forma da função de torque é a mesma que na Figura 9-13 com esses valores reduzidos de pico.

12 A potência média requerida é bem pequena (cerca de 0,02 hp), mas é necessário dimensionar o motor para encarregar-se do torque máximo a fim de manter a velocidade constante requerida. Usando o valor do torque de pico com a velocidade operacional do volante e do eixo do camo, temos um nível de potência mínimo de

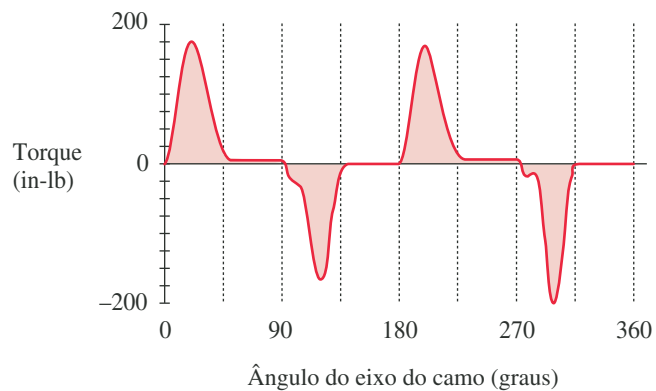



FIGURA 9-13

Torque no eixo do camo sem volante.

$$P_{pico} = T_{pico}\omega = 47 \text{ lb-in}\left(18{,}9\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 888\frac{\text{in-lb}}{\text{s}} = 74\frac{\text{ft-lb}}{\text{s}} = 0{,}14 \text{ hp} \qquad (e)$$

Como as perdas por atrito foram apenas estimadas por alto neste caso e outros camos operarão a velocidades mais altas, um motor de 1/2 hp DC de velocidade controlada foi selecionado para comandar o eixo do camo. Este usa uma fonte de potência de 110-V AC para o controlador de retificação/velocidade do motor.

13 Precisamos selecionar uma razão de velocidade para a correia de comando do motor ao volante. Uma vez que o motor tem velocidade controlada no intervalo de operação de 0–1800 rpm, podemos escolher um intervalo mais amplo para as velocidades operacionais do que aquelas ditadas para o camo em questão, que necessita de 180 rpm. Um intervalo de 0–400 rpm é razoável, desde que ponhamos um motor no meio desse intervalo de velocidades para este camo e permitamos que outros camos sejam operados ou mais rápida ou mais lentamente. O diâmetro da polia de comando é, então,

$$d_{int} = d_{ext}\frac{\omega_{ext}}{\omega_{int}} = 24\frac{400}{1800} = 5{,}33 \text{ in} \qquad (f)$$

14 Os arquivos referentes a este estudo de caso encontram-se no CD com o nome CASE10.

Muitos outros detalhes precisam ser considerados para chegar a um projeto acabado, mas esses cálculos preliminares parecem indicar que o projeto proposto é viável. Para informações mais detalhadas acerca da modelagem da dinâmica do camo neste estudo de caso, ver os Capítulos 8 e 15 da referência 1. Em capítulos posteriores deste texto, continuaremos o estudo dos vários aspectos deste tópico, pois eles se relacionam a tópicos subsequêntes tais como o projeto de mancais e molas.

9.4 RESUMO

Este capítulo apresentou cálculos preliminares de projeto para alguns estudos de caso relacionados a máquinas simples. A intenção é incorporar estudos mais aprofundados sobre esses casos em capítulos subsequentes que lidarão com o projeto de elementos comuns a uma ampla variedade de máquinas. O espaço não nos permitirá um tratamento completo de todos os detalhes envolvidos no projeto de qualquer destes estudos de caso, mas esperamos que suas apresentações deem alguma ideia a respeito da forma em que o projeto deve integrar uma variedade ampla de requisitos, em geral conflitantes, até se obter um produto funcionando.

Vários projetos abertos são também listados no final deste capítulo. Eles podem ser usados como tarefas de projeto de longa duração para serem desenvolvidos por indivíduos ou grupos. Ou, subconjuntos dos projetos sugeridos podem ser escolhidos como tarefas de projeto para várias semanas.

9.5 REFERÊNCIAS

1 **R. L. Norton**, *Design of Machinery,* 3.ed. McGraw-Hill: New York, pp. 645-66, 2004.

2 ***Ibid.***, pp. 794-808.

3 ***Ibid.***, pp. 742-743.

4 **M. P. Koster**, *Vibrations of Cam Mechanisms*. Macmillan: London, 1974.

5 **R. L. Norton**, *Design of Machinery*, 3.ed. McGraw-Hill: New York, p. 750, 2004.

6 ***Ibid.***, p. 591.

9.6 PROJETOS DE DIMENSIONAMENTO

Estes problemas de grande escala estão intencionalmente desestruturados e são típicos dos projetos reais de engenharia. De fato, a maioria deles são problemas reais. Eles têm, portanto, muitas soluções válidas. Se alguns destes problemas de projeto foram "inventados" para este capítulo, a maioria vêm da experiência do autor como consultor ou de projetos mais avançados destinados a alunos do autor no Worcester Polytechnic Institute. Nesse caso, os projetos foram tipicamente feitos por um grupo de dois a quatro estudantes em um período de três a quatro trimestres (21 a 28 semanas) e em geral resultaram em um protótipo funcional da solução. As versões de tais projetos avançados mostrados aqui foram simplificadas ou truncadas com a intenção de que eles possam ser solucionados por um grupo de estudantes em um semestre. Os problemas foram também encurtados para satisfazer a estrutura e o tempo disponíveis em uma disciplina típica sobre projeto em nível de graduação. Alguns dos projetos listados aqui foram usados com sucesso pelo autor como projetos de longo prazo na disciplina para a qual este texto foi feito.

9-1 Complete o projeto de um compressor de ar portátil no Estudo de Caso 8A. Observe que algumas partes deste projeto são enfocadas em capítulo posteriores.

9-2 Complete o projeto do guincho de elevação no Estudo de Caso 9A. Observe que algumas partes deste projeto são enfocadas em capítulos posteriores.

9-3 Complete o projeto da máquina de teste de camo no Estudo de Caso 10A. Observe que algumas partes deste projeto são enfocadas em capítulos posteriores.

9-4 Os Estudos de Caso 5A e 5B, no Capítulo 3, descrevem o projeto de um mecanismo de quatro barras de uma máquina de exposição. Complete o projeto detalhado desse mecanismo com base na informação dada naqueles estudos de caso. Alguns aspectos que não foram enfocados lá são o tamanho do trem de engrenagem para reduzir a velocidade do motor, os mancais, o torque de acoplamento, o volante e as tensões.

9-5 Projete um rachador para troncos de madeira que seja seguro e que possua as seguintes características:

- Que possa ser guinchado a velocidades de rodovias atrás de uma camioneta grande.
- Um motor a gasolina de 8 hp comanda uma bomba hidráulica de dois estágios que, por sua vez, pressuriza um cilindro hidráulico para rachar o tronco de madeira.
- Que acomode troncos de madeira de 2 ft de comprimento.
- Que gere 15 toneladas de força no tronco contra uma cunha cortante estacionária.
- Que tenha uma gaiola de segurança que cubra a área do tronco/cunha/cilindro durante a divisão para prevenir ferimentos no operador. Essa gaiola deve deslizar (manualmente) para fora para carregar/descargar os troncos e estar travada de tal maneira que fique posicionada antes que o cilindro hidráulico se mova.

9-6 Projete uma cápsula de inspeção para ser baixada em um poço de petróleo a uma profundidade de 5000 ft. A cápsula deve caber em um furo de 6 in de diâmetro com pelo menos 10% de folga diametral, ter uma fixação conveniente para descida do cabo e um porto para lente de quartzo de 1,5 in de diâmetro na parede do poço. Cabos de corrente de 0,5 in de diâmetro e cabos de comunicação passam através da extremidade superior do cilindro. Alguns cuidados de projeto são a pressão hidrostática a essa profundidade, a natureza abrasiva das pedras das paredes do poço e a integridade hidráulica da vedação ao redor do porto das lentes e cabos de corrente. A cápsula tem uma atmosfera de nitrogênio seco a 800 psig. Projete para uma vida finita de pelo menos $1E4$ inserções/retiradas de um poço.

9-7 Projete um carrinho de compras motorizado movido à bateria capaz de carregar uma pessoa de 200 lb mais 50 lb de compras pelos corredores de um supermercado. Ele deve acomodar pelo menos metade do volume de produtos alimentícios de um carrinho de compras convencional manual, ter velocidade limitada, ser seguro contra tombamentos e requerer pressão constante nos seus controles para funcionar. Quando a corrente é cortada, um freio automático deve pará-lo dentro de 1 ft. Destinado a usuários que são idosos ou convalescentes. Deve operar por 1 hora entre recargas.

9-8 A Figura P9-1 mostra a geometria e as dimensões do sistema de suspensão traseira de uma motocicleta popular para todo tipo de terreno. A roda é colocada na extremidade do elo 4, que é parte de uma conexão de quatro barras 1-2-3-4, onde 1 é a armação da motocicleta, 2 é um balanço triangular e 3 é um acoplador binário conectando o 2 ao 4. O amortecedor 5 está pivotado ao elo 2 e desliza no cilindro do amortecedor 6. O cilindro do amortecedor 6 está pivotado na armação 1. O deslizamento vertical total do eixo traseiro é de cerca de 12 in.

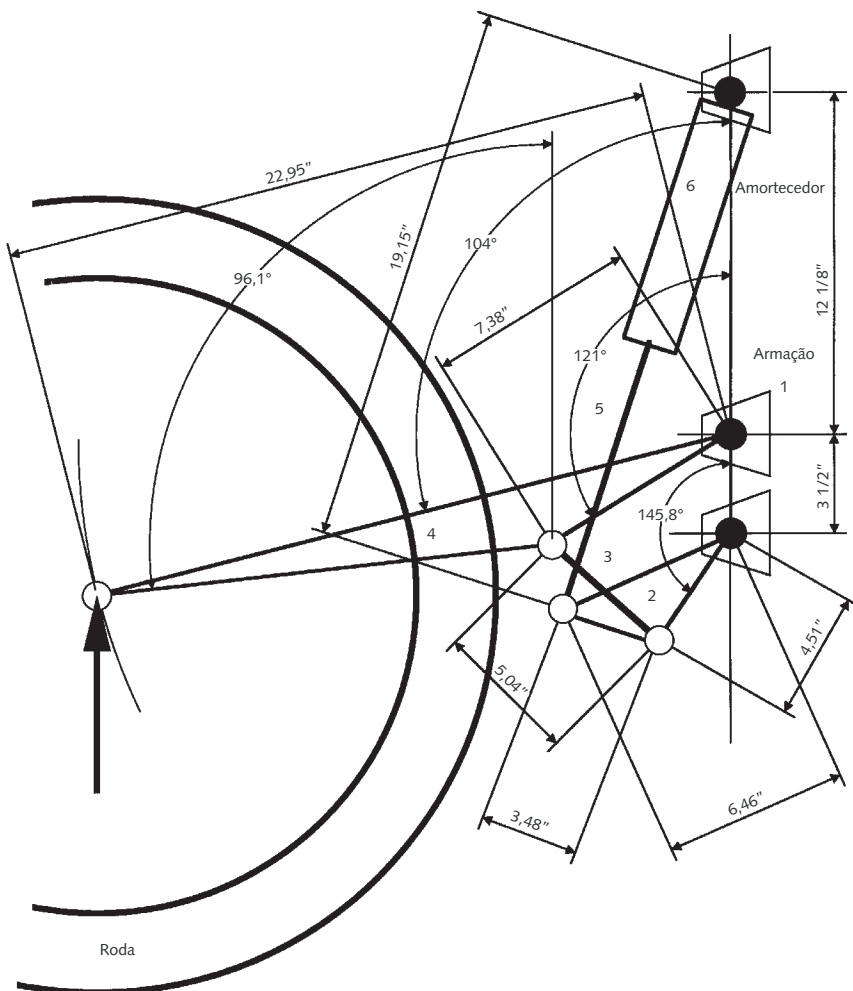



FIGURA P9-1

Geometria de um sistema de suspensão para roda traseira de uma motocicleta para todo terreno.

A Figura P9-2 mostra o resultado de uma simulação dinâmica de uma motocicleta de 250 lb com um passageiro de 200 lb viajando a 18 mph, saltando 3 ft verticalmente e caindo sobre a roda traseira.* Os gráficos na Figura P9-2 mostram a força dinâmica resultante no eixo traseiro e no pivô do elo 4. Calcule a suspensão traseira com base nos dados de carregamento e geometria. Alguns cuidados de projeto são: o amortecedor funciona como uma coluna, os pinos do pivô funcionam em cisalhamento e os elos funcionam em flexão mais tração ou compressão em alguns casos. Será útil inspecionar um sistema de suspensão de motocicleta similar para obter informações adicionais sobre seu projeto geral.

9-9 Motocicletas para todo tipo de terreno tipicamente têm controle de corrente e catraca para o eixo de saída da transmissão para a roda traseira. Algumas motocicletas para estrada usam eixos de transmissão fechados e comandos de engre-

*Esta simulação foi feita usando o pacote de programas *Working Model* da Knowledge Revolution.

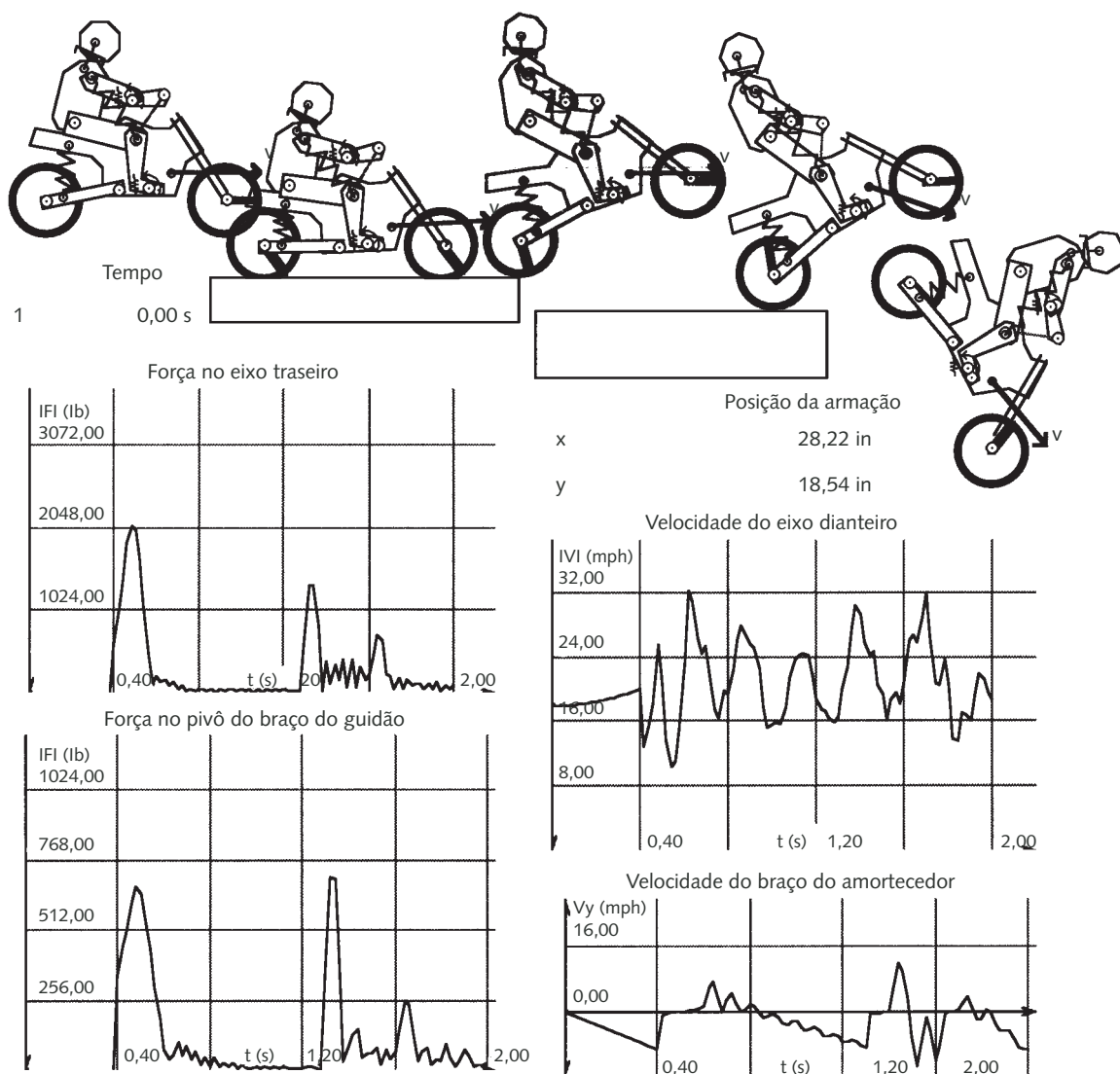



FIGURA P9-2

Simulação das forças geradas pelo salto e queda de uma motocicleta sobre sua roda traseira.

nagem, em vez de corrente e catraca. A vantagem das transmissões por corrente está na sua leveza, mas a exposição à poeira e ao barro das estradas de terra reduz sua confiabilidade. Os comandos de eixos fechados são protegidos desses elementos. Projete um sistema leve de comando por eixo para a motocicleta para todo tipo de terreno das Figuras P9-1 e P9-2. Pressuponha um motor de 60 hp a 9000 rpm. A relação de engrenamento em baixa velocidade é 1:4, e a relação final de transmissão do eixo de saída para a roda traseira seria aproximadamente 1:3,5. Pelo menos uma junta universal será necessária no eixo de comando para acomodar o movimento da suspensão. Alguma combinação de engrenagens retas (ou helicoidais) e cônicas será necessária. Mancais, caixa e vedação convenientes devem ser especificados. Será de grande valia inspecionar um sistema de eixo de comando de uma motocicleta similar para obter informações adicionais sobre seu projeto geral.

9-10 O exército deseja uma máquina para testar botas de combate quanto à sua durabilidade. Essa máquina deve imitar, tão próximo quanto possível, a geometria e as forças de um soldado típico caminhando em botas de combate, como mostrado na Figura P9-3. Ela deve repetir esse movimento por um número ilimitado de ciclos até que o couro da bota se rompa. Somente uma bota será colocada no pé da prótese que está atada à máquina de teste. Projete-a para vida infinita.

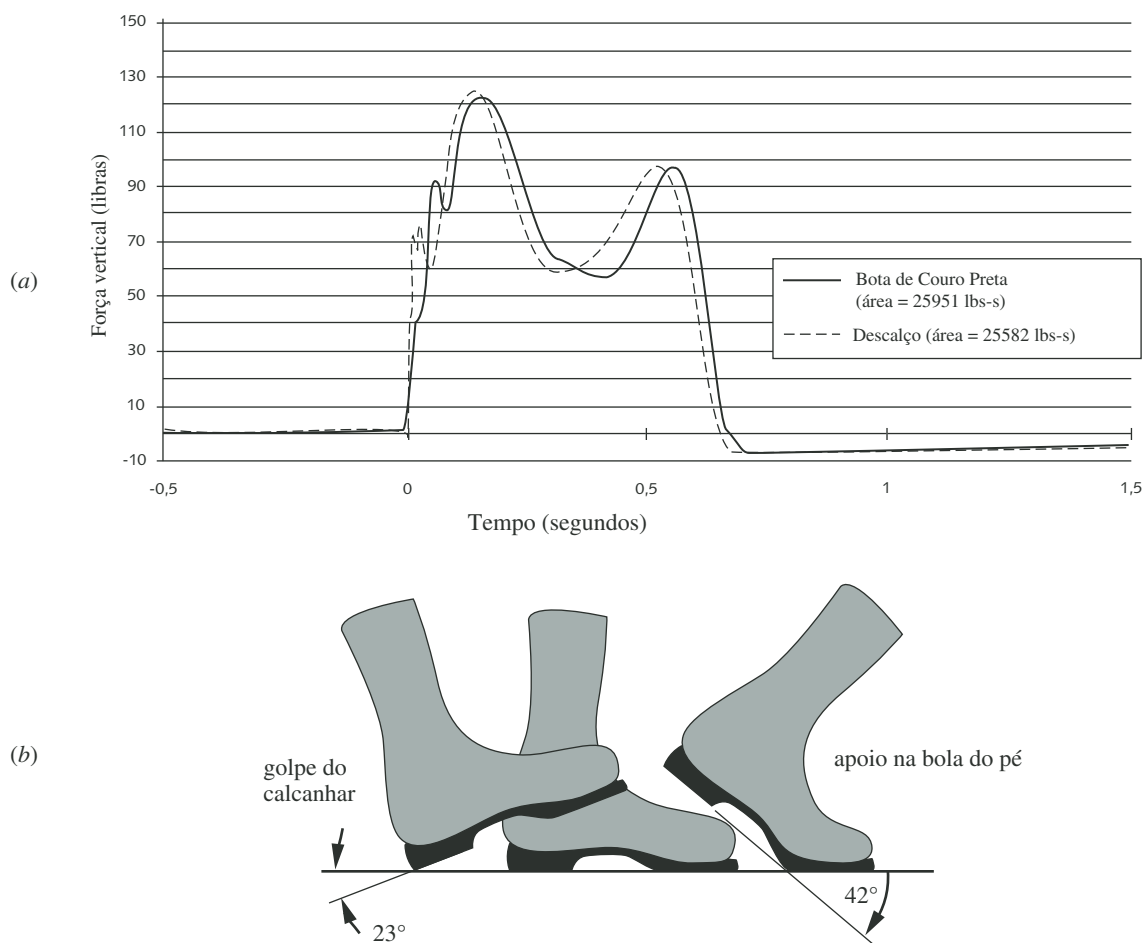



FIGURA P9-3

Forças (*a*) e geometria (*b*) típicas de caminhada.

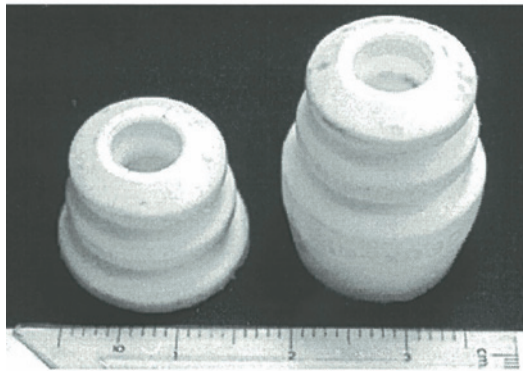



FIGURA P9-4

Absorvedores de choque de uretano em dois tamanhos para uso em sistemas de suspensão automotiva.

9-11 Uma empresa que fabrica absorvedores de choque moldados de uretano, como mostrado na Figura P9-4, quer uma máquina de teste que impacte repetidamente esses absorvedores de choques para determinar sua durabilidade. A força-deflexão estática característica de um absorvedor de choque tamanho 1 é mostrada na Figura P9-5. A ideia sugerida é a de um peso caindo que impactará o absorvedor de choque. Um mecanismo de retorno para levantar e repetidamente deixar cair o peso é requerido. Uma análise dinâmica deve ser feita para determinar o tamanho e a altura do peso necessário para comprimir completamente o absorvedor de choques especificado.

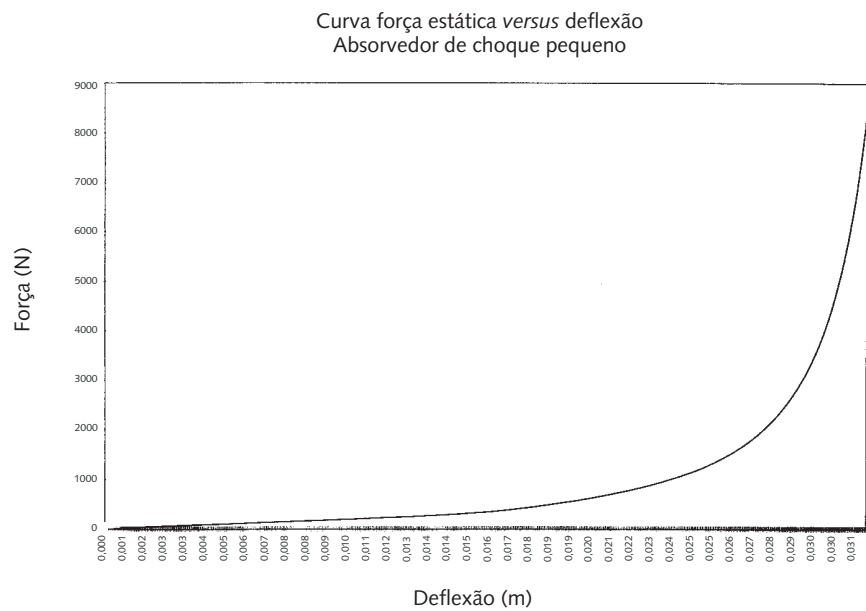



FIGURA P9-5

Curva força-deflexão estática para absorvedor de choques de uretano tamanho pequeno.

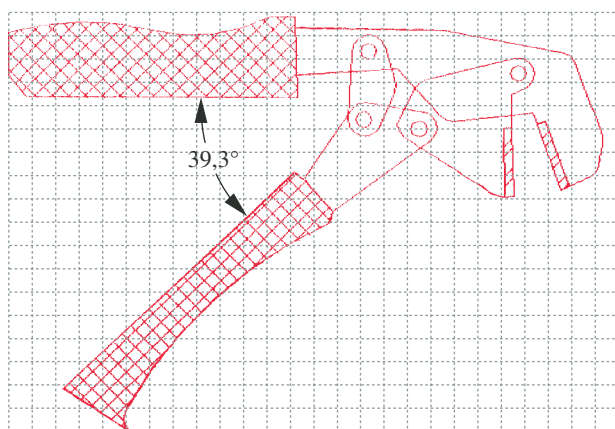



FIGURA P9-6

Geometria da alicate de pressão.

9-12 O alicate de pressão mostrado na Figura P9-6 é usado para amassar (escoar) conectores metálicos no arame. O arame é inserido no conector (não mostrado), o par é, então, posto nas garras da ferramenta de amassar e as hastes da ferramenta são apertadas. O Estudo de Caso 2 analisou as forças, as tensões e os fatores de segurança para uma ferramenta similar de projeto ligeiramente diferente.

Ângulo entre as hastes, graus	Torque, lb_f-in	Distância entre as hastes, in	Força, lb_f
39,3	0	2,89	0
24,4	49,17	1,89	11,84
22,3	73,27	1,74	17,36
20,9	97,53	1,63	22,89
19,7	122,01	1,54	28,42
18,7	146,62	1,46	33,95
17,8	171,38	1,40	39,47
16,5	220,91	1,30	50,52
15,1	271,10	1,19	61,57
13,7	321,77	1,08	72,63
12,6	372,41	1,00	83,68
11,2	423,77	0,89	94,73
9,5	475,78	0,75	105,79
8,0	502,66	0,64	111,32
7,6	528,12	0,60	116,84
5,5	580,52	0,43	127,89
4,8	606,27	0,39	133,42
0,8	653,34	0,06	143,29

FIGURA P9-7

Dados de deslocamento *versus* força e torque em um alicate de pressão.

A Figura P9-7 mostra uma tabela de valores medidos na ferramenta da Figura P9-6 enquanto apertava o arame mais longo. As forças requeridas na haste são bastante grandes. As distâncias entre as hastes são medidas em um raio de 4,56 in. O uso manual repetido de tal tipo de ferramenta com esses níveis de força leva frequentemente a problemas físicos, como a síndrome do carpo-túnel. O manufaturador gostaria de um equipamento que criasse automaticamente a força requerida nas hastes dessa ferramenta de amassar existente para eliminar o uso manual e evitar tais problemas. Alguma das restrições colocadas com relação a esse equipamento são as seguintes:

(a) Não maior que 12 in × 4 in × 6 in.
(b) Autossuficiente, incluindo uma fonte portátil de energia.
(c) Pesar menos que 10 lb.
(d) Requerer somente o uso de uma mão ou de ambas as mãos de um operador.
(e) Realizar a operação de amassamento em menos de 10 s.
(f) Permitir um ângulo máximo das hastes de 40° e 7 in de abertura.

9-13 Precisa-se de um pedestal motorizado com rodas para uma máquina portátil de raios X, como mostrado na Figura 9-8. A cabeça de raios X pesa 65 lb e tem 10 in × 8 in × 16 in de altura. A cabeça deve ser ajustada pelo motor sobre um intervalo vertical de 41 in a 82 in medidos do chão até o braço em balanço de 18 in de comprimento no qual a cabeça de raios X está suspenso. A cabeça deve mover seu trajeto vertical máximo em 20 s ou menos e parar dentro de 0,5 in de uma posição desejada. Interruptores de limite devem automaticamente desligar o motor em cada extremidade do trajeto vertical da cabeça. O pedestal deve ser capaz de passar por uma porta padronizada de 3 ft × 7 ft do interior de um hospital e operar em circuito de 15-A, 110-V AC. Certas especificações do Underwriters Laboratories (UL) também devem ser satisfeitas, como:

- UL 27.4-A – não pode tombar em uma inclinação de 10° com a cabeça na posição mais baixa.

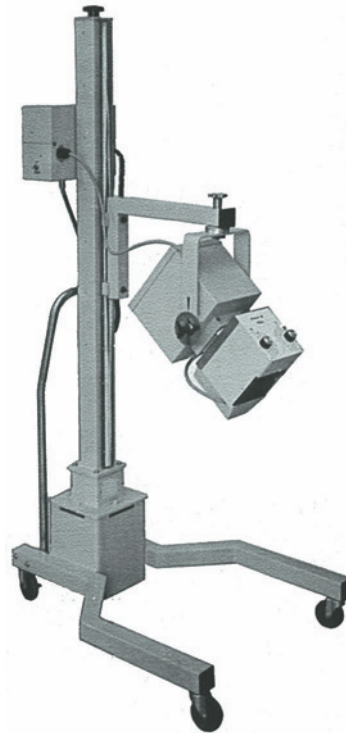



FIGURA P9-8

Pedestal de raios X, motorizado e portátil com rodas.

- UL 27.4-B – não pode tombar em uma inclinação de 5° com a cabeça na posição mais alta.
- UL 27.4-C – não pode tombar em uma inclinação de 0° quando a força horizontal de 25% de seu peso for aplicada na haste de transporte.

9-14 Projete um anexo da cama de caçamba para reforçar um caminhão de cargas existente de tamanho grande. Esse equipamento deve requerer modificações mínimas do caminhão e ser capaz de ativação remota desde a cabine. Deve levantar e soltar até 3/4 ton de carga. Ele deve retirar sua potência do motor do caminhão e poder ser comandado elétrica, mecânica ou hidraulicamente, ou qualquer combinação dessas possibilidades.

9-15 Projete um equipamento de levantamento de cadeira de rodas para operar em uma garagem residencial. O chão da garagem está 1 m abaixo do chão principal da casa. O equipamento deve levantar e baixar a cadeira de rodas e seu ocupante de 100 kg com segurança através do desnível vertical.

9-16 Projete um equipamento para locomover um paciente paraplégico de 100 kg com segurança desde a cama até a cadeira de rodas e vice-versa. O paciente tem uma resistência boa na parte superior do corpo mas não tem controle das extremidades inferiores. Seu projeto deve ser operável pelo paciente com assistência mínima. Segurança é um cuidado primordial.

9-17 Projete uma bicicleta doméstica para exercícios similar em concepção à cadeira de rodas para exercícios mostrada no Problema 6-48. O conceito é prover rolos idênticos para sustentar a roda traseira e um único rolo para a roda dianteira. Os rolos traseiros serão unidos de alguma forma cinemática (a ser projetada) a um gerador DC cuja saída é desviada através de uma carga elétrica que pode ser variada pelo levantador para prover uma resistência dinamométrica. Projete todas as partes com geometrias convenientes e materiais para vida infinita.

9-18 Projete um pedestal de serviço para uma motocicleta que permitirá que a moto seja suspensa a uma altura de trabalho conveniente e rodada para permitir acesso a todos os sistemas de serviço. É de fundamental importância que tenha estabilidade em todas posições de rotação e vários estágios de desmontagem parcial.

9-19 Tubos de luz fluorescente devem ser revestidos internamente com óxido de estanho enquanto quentes. Os tubos de vidro reto de 46 in de comprimento são carregados até um forno de cozimento em uma esteira de corrente metálica que transporta, a uma velocidade constante, 5500 tubos por hora. Os tubos são espaçados 2 in entre si na corrente. À medida que elas saem do forno a 550° C, um mecanismo carregando duas cabeças de jato caça um par de tubos, acelera para igualar as velocidades constantes dos tubos, move-se com elas por uma pequena distância e jateia o óxido de estanho nos tubos quentes em 3/4 s. As duas cabeças do jato estão montadas em uma mesa retangular de 6 in × 10 in que é transportada em mancais lineares. O equipamento de jato, soldado à mesa, pesa 10 lb. Todos os elementos expostos ao jato de óxido de estanho devem ser de aço inoxidável para resistir ao ataque químico de subprodutos do ácido hidroclórico.

Um camo comanda a mesa para igualar a velocidade da esteira e retorna a tempo para acelerar e agarrar os próximos dois tubos. Um camo em forma de placa foi projetado para realizar essa ação, que está definida no arquivo SPRAY.CAM, fornecido no CD que vem com este livro. Este arquivo pode ser colocado no programa DYNACAM (também fornecido no CD) para obter os dados dinâmicos necessários para o projeto requerido. O camo é comandado pela catraca da esteira que tem 8,91 in de diâmetro primitivo.

O que se requer é um projeto detalhado da mesa do jato, seus mancais e seu equipamento de montagem para vida infinita. As cargas dinâmicas no camo e seguidor serão altamente dependentes da massa dessa montagem móvel. Uma vez que uma estimativa da massa móvel esteja disponível pelo projeto preliminar, o programa DYNACAM pode ser usado para calcular rapidamente as forças dinâmicas na interface do camo-seguidor. As tensões em várias partes da montagem podem ser, então, estimadas com base no nível das forças dinâmicas presentes. Ver a referência 2 para informações sobre como usar o programa DYNACAM.

9-20 Em maquinarias de linha de produção comandadas por eixo, deflexões torcionais e vibrações do eixo do camo devido ao torque variável no tempo dos vários camos podem causar problemas de sincronização entre as várias estações na máquina. Precisamos projetar uma máquina de teste que medirá os efeitos da vibração de torção do carregamento dinâmico de torque em um eixo de camo. Essa máquina acomodará dois camos, cada um dos quais comandará seu próprio seguidor de rodas de translação carregado por mola em um mecanismo de deslizamento a velocidades de até 300 rpm.

Esses camos serão projetados para dar, um ao outro, funções torque-tempo aproximadamente opostas. Eles podem, então, ser usados individualmente ou em pares para investigar a efetividade da adição para uma máquina de produção de um camo de torque balanceado para comandar uma carga fictícia. Os camos serão divididos para permitir a remoção e a instalação sem desmontar o eixo. As funções torque-tempo de um camo primário e força-tempo do seguidor são apresentadas como um arquivo Excel P09-20 no CD-ROM. O camo secundário será uma imagem espelhada do camo primário para balancear aproximadamente o torque.

O eixo do camo nesse dispositivo de teste deve ser projetado para ter deflexões torcionais que sejam grandes o suficiente para ser medidas por codificadores óticos de eixo a 5000 pulsos por revolução atados a cada extremidade do eixo do camo, mas não tão grande a ponto de produzir falha por fadiga do eixo. Ao mesmo tempo, queremos que o eixo do camo seja rígido em flexão e tenha uma frequência natural de pelo menos 10 vezes sua frequência natural de torção para minimizar qualquer efeito de acoplamento entre os modos torcionais e flexionais. Dito de outra forma: qual deve ser o diâmetro do eixo para dar deflexões torcionais suficientes para que possa ser mensurável sob as condições de carregamento de projeto, mas não para criar deflexões ou vibrações indesejáveis de flexão?

Deve-se usar mancais planos para evitar vibrações que viriam de mancais de rolamento. A máquina de teste será comandada por um motor DC de velocidade controlada PM através de uma unidade de redução de engrenagem de seu projeto. A seleção do motor também é sua responsabilidade.

O que se requer é um projeto detalhado de uma máquina de teste de vibração torcional de um eixo de camo incluindo o eixo do camo, chavetas, trem de seguidores, mancais, acoplamentos, caixa de engrenagens, armação e dispositivo de montagem. Preferencialmente para vida infinita.

9-21 Nosso cliente (uma companhia da *Fortune 500*) manufatura produtos de consumo em quantidades bastante elevadas. Esses produtos contêm peças plásticas moldadas e para montagem, algumas das quais são feitas em máquinas de molde de injeção de “dois disparos”. Uma peça de dois disparos requer uma matriz de rotação e dois conjuntos de cavidades por peça naquela matriz. A primeira porção da peça acabada é moldada de um material A com a matriz na posição 1. A matriz é, então, aberta e uma metade é girada 180 graus para a posição 2 com a peça moldada ainda em sua cavidade. A matriz se fecha outra vez, colocando a porção I da peça contra a segunda cavidade. O material B é, então, injetado na porção I, criando a porção II da peça. A matriz abre outra vez e o conjunto acabado é expulso.

Nossa tarefa é projetar o mecanismo de rotação de matriz a ser aparafusado na máquina de moldagem e para a qual qualquer número de matrizes diferentes pode ser aparafusado. A matriz maior a ser acomodada tem 910 mm de altura por 790 mm de largura por 326 mm de comprimento ao longo do seu eixo horizontal de rotação. Pressuponha que a matriz seja um bloco sólido de aço. Ela será aparafusada à mesa giratória redonda de seu projeto, que é comandada por um servomotor para conseguir a rotação requerida. Ela deve rodar 180 graus em 0,8 s. A seguir, ela permanecerá estacionária por um período variável de tempo (0,5 a 2 s, dependendo do ciclo de moldagem da parte) depois do qual será outra vez girada 180 graus em 0,8 s. O ciclo então se repetirá. A máquina de molda-

gem operará 24 horas por dia, 7 dias na semana, 50 semanas por ano. Nenhuma falha neste mecanismo é permitida por um período de pelo menos 10 anos.

Quando a matriz é pendurada na mesa giratória, ela não pode defletir mais que 0,001 polegada (0,0025 mm) em ambas as direções vertical ou horizontal em qualquer ponto da face da matriz. Devem-se minimizar as vibrações da matriz nas paradas para evitar atrasos no fechamento de moldes. O comprimento do conjunto na direção axial deve ser mantido tão pequeno quanto for prático. O movimento de abertura/fechamento da matriz será, no máximo, de 25 mm. Um cilindro hidráulico proverá o movimento axial.

A rotação será comandada por um servomotor através de uma unidade de redução por engrenagens do seu projeto. Mancais de rolamento ou planos podem ser usados. A especificação do torque/potência é também de sua responsabilidaede, como é a especificação do tamanho e da potência necessários do cilindro hidráulico para obter o movimento axial no tempo desejado. O torque dinâmico dependerá do momento de inércia da massa do sistema e do perfil de aceleração aplicado ao servomotor por seu controlador. Suponha um perfil de aceleração razoável baseado em boas práticas de projeto de camos.

O que se requer é um projeto detalhado de uma máquina de rotação de molde incluindo a mesa giratória, eixo, trem de engrenagem, acoplamento, estrutura e dispositivo de montagem (fixação).

9-22 Precisa-se de uma cama de teste de trem de engrenagem, motorizada e instrumentada para ser usada para demonstração e experimentação. O equipamento imaginado consistirá em um conjunto de engrenagens comandado por motor elétrico, que, por sua vez, é carregado por um freio. Serão introduzidas falhas deliberadamente nos dentes da engrenagem a fim de produzir vibrações mensuráveis. O equipamento será instrumentado e se tentará detectar e diagnosticar as falhas a partir dos valores medidos de vibrações.

Projete um equipamento que necessite não mais que 1 hp de potência de saída e que não seja maior que um cubo de 3 ft. Um único conjunto de engrenagens de razão 1:2 deve ser apoiado em mancais de radiais e comandado por um motor elétrico de velocidade controlada que seja isolado de vibrações do conjunto de engrenagens.

9-23 Precisa-se de uma cama motorizada e instrumentada de teste de elementos de mancais de rolamento para ser usada para demonstração e instrumentação. O equipamento imaginado consistirá em um eixo comandado por um motor elétrico, que, por sua vez, é carregado por um freio. Serão introduzidas falhas deliberadamente no mancal de rolamento a fim de produzir vibrações mensuráveis. O equipamento será instrumentado e se tentará detectar e diagnosticar as falhas a partir dos valores medidos.

Projete um equipamento que necessite não mais que 1 hp de potência de entrada e que não seja maior que o cubo de 3 ft. Um único mancal de rolamento de tamanho conveniente será usado. Todos os outros mancais devem ser mancais de deslizamento para evitar a introdução de barulho espúrio. O equipamento será comandado por um motor elétrico de velocidade controlada que seja isolado de vibrações do eixo do mancal.

9.24 Uma fabricante de lâminas de barbear precisa testar o produto contra danos após queda de uma altura de 1,5 m em uma superfície dura, como o piso de um banheiro com azulejos. A lâmina, incluindo a cabeça e o cabo, pesa 20 gramas. Após a queda, ela fica em uma posição aleatória. Algumas posições causam mais dano que outras. É difícil repetir o experimento se deixarmos cair manualmente a lâmina. A empresa gostaria de contar com uma máquina capz de simular a queda da lâmina em uma superfície dura a partir da altura de 1,5 m em que a posição da lâmina seja a mesma em todos os testes. Isso deve ser feito sem muitas restrições, de modo a reproduzir tão fielmente quanto possível as condições de contorno da lâmina em queda. A posição do impacto deve, contudo, ser ajustável para simular diferentes possibilidades. Um ajuste de ± 40 graus em torno do eixo deve ser suficiente. Projete um equipamento que transmita a

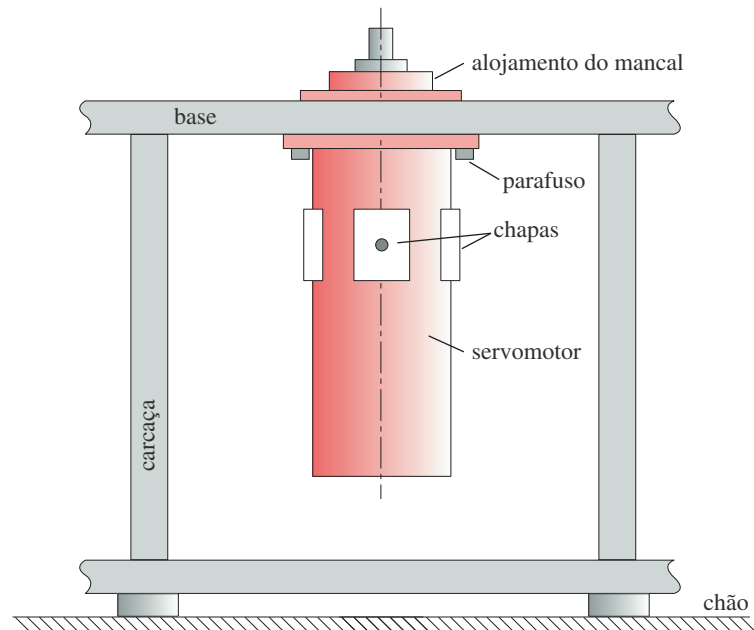
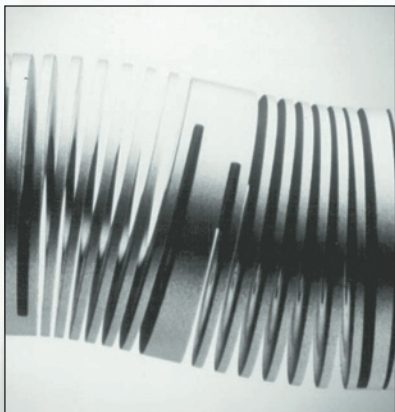



FIGURA P9-9

Instalação de servomotor.

mesma energia de impacto para a lâmina quando em queda real e que permita que o impacto de superfície seja rebatido, mas que a atinja apenas uma vez. O equipamento deve ainda permitir que o evento seja filmado com uma câmera de vídeo de alta velocidade.

9-25 Uma máquina usa um determinado número de servomotores grandes que estão parafusados sob a chapa mostrada na Figura P9-9. A parte de baixo da chapa está a 30 polegadas do chão, e os motores têm 24 polegadas de comprimento com eixo com saliência de 2 polegadas de comprimento na parte de cima. Os motores pesam 300 libras e têm 12 polegadas de diâmetro. Projete um mecanismo capaz de transportar o motor do almoxarifado até a máquina atravessando o piso liso da fábrica, colocar o motor embaixo da base da chapa da máquina, erguê-lo e mantê-lo em posição enquanto um mecânico trata de prendê-lo com parafusos. O motor possui uma flange piloto de 6 polegadas de diâmetro que deve entrar em um orifício na base da chapa e um pino que também deve entrar em um buraco na base da chapa. Há uma folga de 0,002 polegada entre a flange e o orifício e uma folga de 0,001 polegada entre o pino e o orifício. Ou seja, o motor deve estar precisamente alinhado com os orifícios quando estiver posicionado pelo mecanismo. O motor possui quatro chapas com orifícios roscados em seu CG que podem ser usados para anexar o motor ao seu mecanismo.

10

EIXOS, CHAVETAS E ACOPLAMENTOS

Quanto mais aumenta o nosso conhecimento,
mais a nossa ignorância se evidencia.
John F. Kennedy

10.0 INTRODUÇÃO

Eixos de transmissão, ou simplesmente eixos, são usados em praticamente todas as partes de máquinas rotativas para transmitir movimento de rotação e torque de uma posição a outra. Assim, o projetista de máquinas está frequentemente envolvido com a tarefa de projeto de eixos. Este capítulo explorará alguns dos problemas comuns encontrados nesta tarefa. A Tabela 10-0 mostra as variáveis usadas neste capítulo e aponta as equações e seções em que elas aparecem.

No mínimo, um eixo tipicamente transmite torque de um dispositivo de comando (motor elétrico ou de combustão interna) através da máquina. Às vezes, os eixos incluem engrenagens, polias ou catracas, que transmitem o movimento rotativo via engrenagens acoplantes, correias ou correntes de eixo a eixo. O eixo pode ser uma parte integral do acionador, como um eixo de motor ou eixo manivela, ou ele pode ser um eixo livre conectado a seu vizinho por algum tipo de acoplamento. Máquinas de produção automatizada frequentemente possuem eixos em linha que se estendem pelo comprimento da máquina (10 m ou mais) e levam a potência para todas as estações de trabalho. Os eixos são montados em mancais, em uma configuração biapoiada (montagem de sela), em balanço ou saliente, dependendo da configuração da máquina. Os prós e os contras dessas montagens e arranjos de acoplamento serão também discutidos.

10.1 CARGA EM EIXOS

A carga em eixos de transmissão de rotação é predominantemente uma de dois tipos: torção devido ao torque transmitido ou flexão devido às cargas transversais em engrenagens, polias e catracas. Essas cargas frequentemente ocorrem em combinação porque, por exemplo, o torque transmitido pode estar associado com forças nos dentes de engrenagens ou de catracas fixadas aos eixos. O caráter de ambas as cargas de torção e flexão pode tanto ser fixo (constante) quanto variar com o tempo. Cargas torcionais e flexionais fixas ou variáveis com o tempo também podem ocorrer em qualquer combinação no mesmo eixo.

Tabela 10-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área	in^2	m^2	vários
c	distância da fibra externa	in	m	Seção 10.6
C_f	coeficiente de flutuação	nenhuma	nenhuma	Equação 10.19
d	diâmetro	in	m	vários
e	excentricidade de um disco	in	m	Equação 10.26
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	vários
E_k, E_p	energia cinética, energia potencial	in-lb	joule	Equação 10.25
F	força ou carga	lb	N	vários
F_l	flutuação (em velocidade)	rad/s	rad/s	Equação 10.19
f_n	frequência natural	Hz	Hz	Equação 10.24
g	aceleração gravitacional	in/s^2	m/s^2	Seção 10.13, .14
G	módulo de cisalhamento, módulo de rigidez	psi	Pa	vários
I, J	2° momento, 2° momento polar de área	in^4	m^4	Seções 10.6, .14
I_m, I_s	momento de inércia da massa ao redor do eixo	lb-in-s	$N\text{-}m\text{-}s^2$	Seção 10.13
k	razão de mola, ou constante de mola	lb/in	N/m	Seção 10.14
K_f, K_{fm}	fatores de concentração de tensão de fadiga	nenhuma	nenhuma	Seções 10.6, .10
K_t, K_{ts}	fatores geométricos de concentração de tensão	nenhuma	nenhuma	Seção 10.10
l	comprimento	in	m	vários
m	massa	$lb\text{-}s^2/in$	Kg	Seções 10.13, .14
M	momento, função momento	lb-in	N-m	vários
N_f	coeficiente de segurança à fadiga	nenhuma	nenhuma	Equação 10.5–10.8
N_y	coeficiente de segurança em escoamento	nenhuma	nenhuma	Equação 10-7
P	potência	hp	watts	Equação 10.1
p	pressão	psi	N/m^2	Seção 10.12
r	raio	in	m	various
S_e, S_f	limite de resiliência corrigido, resistência à fadiga	psi	Pa	Equação 10.5–10.8
S_{ut}, S_y	última resistência de tração, resistência ao escoamento	psi	Pa	Equação 10.5–10.8
T	torque	lb-in	N-m	Equação 10.1
W	peso	lb	N	vários
α	aceleração angular	rad/s^2	rad/s^2	Equação 10.18
δ	deflexão	in	m	vários
ν	coeficiente de Poisson	nenhuma	nenhuma	vários
θ	deflexão angular ou curvatura da viga	rad	rad	vários
γ	densidade de peso	lb/in^3	N/m^3	Equação 10.23
σ	tensão normal (com vários subscritos)	psi	Pa	vários
σ'	tensão de von Mises (com vários subscritos)	psi	Pa	vários
τ	tensão de cisalhamento (com vários subscritos)	psi	Pa	vários
ω	velocidade angular	rad/s	rad/s	Equação 10.1
ω_n	frequência natural	rad/s	rad/s	Seção 10.14
ζ	razão de amortecimento	nenhuma	nenhuma	Seção 10.14

Se o eixo é estacionário (não rotativo) e as polias e as engrenagens rodam com relação a ele (em mancais), então o eixo se torna um membro carregado estaticamente pela duração em que as cargas aplicadas sejam fixas no tempo. Contudo, tal eixo não rotativo não é um eixo de transmissão, porque ele não está

A foto da página capitular é cortesia da Helical Products Co. Inc., Santa Maria, Calif. 93456.

transmitindo nenhum torque. Ele é meramente um eixo não rotativo, ou uma viga redonda, e pode ser projetado como tal. Este capítulo trabalha com eixos rotativos (de transmissão) e seu projeto para cargas de fadiga.

(*a*) Alternada

(*b*) Repetida

(*c*) Pulsante

FIGURA 10-1

Tensões variando no tempo.

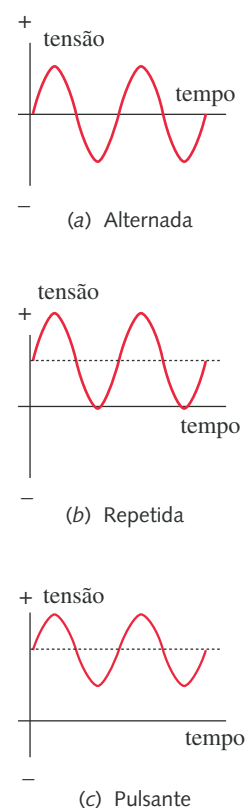
Observe que um eixo rotativo sujeito a cargas de flexão transversal fixas experimentará um estado de tensões completamente alternadas, como mostrado na Figura 10-1*a*. Qualquer elemento de tensão na superfície do eixo vai da tração à compressão em cada volta do eixo. Assim, mesmo para as cargas de flexão fixas, um eixo girando deve ser projetado contra falhas de fadiga. Se qualquer ou ambas as cargas transversais ou torque variarem com o tempo, a carga de fadiga fica mais complexa, mas os princípios de projeto à fadiga permanecem os mesmos, como esboçado no Capítulo 6. O torque, por exemplo, pode ser repetido ou pulsante, como mostrado nas Figuras 10-1*b* e *c*, da mesma forma que as cargas de flexão.

Trataremos primordialmente do caso geral, que possibilita a existência de ambas as componentes fixas e variáveis no tempo para ambas as cargas, flexão e torção. Se a qualquer das cargas falta uma componente fixa ou variável no tempo em um dado caso, isso meramente forçará um termo na equação geral a ser zerado e simplificará o cálculo.

10.2 CONEXÕES E CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

Às vezes é possível projetar eixos de transmissão úteis que não têm variações do diâmetro de seção ao longo de seu comprimento, mas é mais comum que os eixos tenham um número de degraus ou ressaltos onde o diâmetro mude para acomodar elementos fixados, como mancais, catracas, engrenagens, etc., como mostrado na Figura 10-2, que também mostra uma coleção de características comumente usadas para fixar ou localizar elementos em um eixo. Degraus ou ressaltos são necessários para prover precisão e uma localização axial consistente dos elementos fixados, bem como para criar um diâmetro apropriado para alojar peças padronizadas, como mancais.

Chavetas, anéis retentores ou pinos transversais são frequentemente usados para segurar elementos fixados ao eixo a fim de transmitir o torque requerido ou para prender a parte axialmente. As chavetas requerem uma ranhura tanto no eixo quanto na peça e podem precisar de um sistema de parafusos para prevenir o movimento axial. Anéis retentores descavam o eixo e pinos transversais criam um furo através do eixo. Cada uma dessas mudanças no contorno contribuirão para alguma concentração de tensões e isso deve ser incluído nos cálculos das tensões de fadiga para o eixo. Use raios grandes sempre que possível e técnicas como aquelas mostradas nas Figuras 4-37, 4-38 e 10-2 (na polia e anel retentor) para reduzir os efeitos dessas concentrações de tensão.

Chavetas e pinos podem ser evitados usando-se o atrito para fixar elementos (engrenagens, catracas) a um eixo. Existem muitos projetos de **colares de engaste** ou fixação (ajustes sem chaveta*) disponíveis que apertam o diâmetro externo do eixo com uma alta força de compressão para engastar algo a ele, como mostrado no cubo da roda dentada nas Figuras 10-2 e 10-34. O cubo tem um furo ligeiramente afunilado, e o cone similar neste tipo de colar de engaste é forçado no espaço entre o cubo e o eixo através do aperto de parafusos. Fendas axiais na porção afunilada do colar permitem a ele mudar de diâmetro e apertar o eixo, criando atrito suficiente para transmitir o torque. Um outro tipo de colar de engaste, chamado de **colar partido**, usa um parafuso para fechar o rasgo radial e engastar o colar ao eixo. **Ajustes por pressão e de encolhimento** também são usados para esse propósito e serão discutidos em uma seção posterior deste capítulo. Contudo, como veremos, esses acoplamentos por atrito também

* Ver o Padrão ANSI/AGMA 9003- A91, *Flexible Couplings – Keyless Fits.*

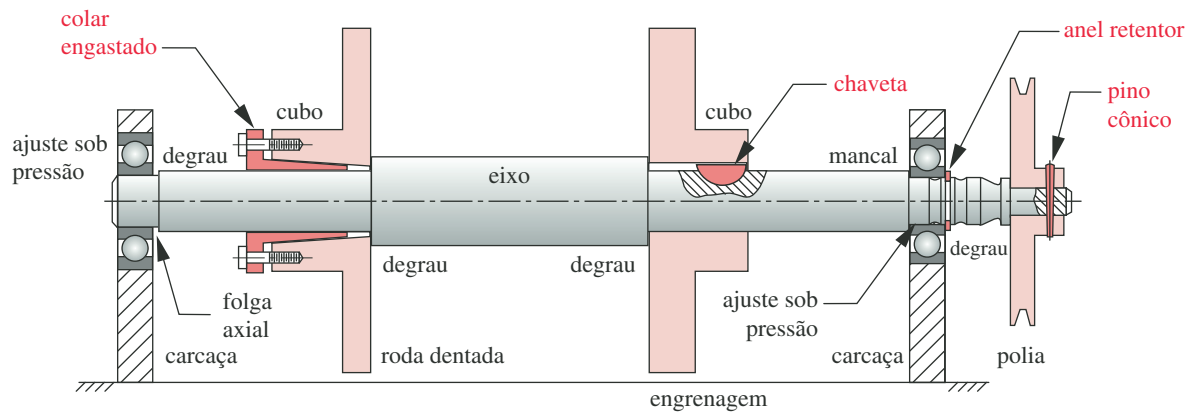



FIGURA 10-2

Vários métodos para fixar elementos a eixos.

criam concentrações de tensão no eixo e podem causar corrosão como descrito na Seção 7-6.

Um pino afunilado padronizado é usado, às vezes, para acoplar elementos a eixos, como visto na polia da Figura 10-2. O furo é aberto para acasalar o pino cônico padronizado e o pino comprado é colocado no local. O afunilamento raso trava-o por atrito. Ele deve ser removido para desmontagem. Essa técnica deve ser usada com cautela em locais de momentos de flexão elevados, porque ela enfraquece o eixo e cria concentração de tensões.

Mancais de rolamento, como mostrado na Figura 10-2, são destinados a ter suas pistas externas e internas ajustadas por pressão ao eixo e à caixa, respectivamente. Isso requer usinagem com tolerâncias apertadas do diâmetro do eixo e requer um ressalto para prover uma parada para o ajuste por pressão e para o posicionamento axial. Assim, devemos começar com um diâmetro de eixo padronizado maior do que o diâmetro interno do mancal e usinar o eixo para se ajustar ao mancal selecionado cujos tamanhos são padronizados (e são métricos). Um anel de retenção é usado, às vezes, para não permitir nenhum movimento axial do eixo contra o mancal, como mostrado na polia da extremidade do eixo na Figura 10-2. Anéis de retenção estão disponíveis comercialmente em uma variedade de estilos e requerem que uma pequena ranhura de tolerância apertada e de dimensão especificada seja usinada no eixo. Observe na Figura 10-2 como a posição axial do eixo é obtida pela fixação axial de apenas um dos mancais (aquele da direita). O outro mancal na extremidade esquerda tem folga axial entre ele e o ressalto. Isso ocorre para prevenir que tensões axiais sejam geradas pela expansão térmica do eixo entre os dois mancais.

Assim, parece que não podemos escapar dos problemas de concentração de tensão em maquinarias. No caso de eixos, precisamos prover degraus, anéis de retenção ou outras formas de posicionar axialmente componentes no eixo com precisão, e temos que pôr chaveta, pino ou apertar o eixo para transmitir o torque.

Cada um desses métodos de fixação tem suas próprias vantagens e desvantagens. Uma chaveta é de simples instalação e os tamanhos são padronizados ao diâmetro do eixo. Ela provê precisão de fase* e pode ser facilmente desmontada e arrumada. Ela pode não ter resistência ao movimento axial e nem sempre prover um acoplamento de torque realmente firme, devido a pequenas folgas entre a chaveta e o rasgo de chaveta. Reversões de torque podem causar pequenos recuos.

Um pino afunilado cria um acoplamento de torque realmente apertado e posiciona-se tanto axialmente quanto radialmente com fase, mas enfraquece o eixo. Ele pode ser desmontado com uma dificuldade um pouco maior que uma chaveta.

* Fase significa os posicionamentos angulares relativos dos vários elementos colocados no eixo.

Um colar engastado é fácil de instalar, mas não tem fase repetível. Esta é uma desvantagem somente se for requerido um sincronismo de rotação do eixo com outros eixos no sistema. Ele permite ajuste fácil (embora sem precisão) da fase se desejado. Ajustes forçados (ou de pressão) são conexões semipermanentes que requerem equipamento especial para desmontagem. Elas não provêm fase repetível.

10.3 MATERIAIS PARA EIXO

A fim de minimizar as deflexões, o aço é a escolha lógica para o material de eixo por causa do seu elevado módulo de elasticidade, embora o ferro fundido ou nodular seja também usado algumas vezes, especialmente se as engrenagens e outras junções forem integralmente fundidas com o eixo. O bronze ou o aço inoxidável é usado às vezes para ambientes marítimos ou corrosivos. Em locais onde o eixo se apoia no mancal, girando dentro de um mancal de deslizamento, a dureza pode tornar-se um aspecto relevante. Aço endurecido total ou parcialmente pode ser a melhor escolha de material para o eixo nesses casos. Ver o Capítulo 11 para uma discussão sobre a dureza relativa desejável e sobre combinações de materiais para eixos e mancais. Mancais de rolamento não requerem eixos endurecidos.

A maior parte dos eixos de máquinas é feita de aço de baixo ou médio carbono, obtido por laminação a frio ou a quente, embora aços-liga sejam também usados quando se precisa de sua alta resistência. Os aços laminados a frio são mais usados para eixos de diâmetros menores (< de 3 in em diâmetro), e os laminados a quente, para tamanhos maiores. A mesma liga quando laminada a frio tem propriedades mecânicas mais elevadas que quando laminada a quente devido ao encruamento a frio, mas este vem à custa de tensões residuais de tração na superfície. A usinagem de rasgos de chaveta, ranhuras ou degraus liberam essas tensões residuais localmente e podem causar empenamento. Barras laminadas a quente devem ser usinadas completamente para remover a camada carbonizada externa, enquanto pedaços de uma superfície laminada a frio podem ser deixados como saíram da laminação, exceto quando a usinagem for necessária para acerto dimensional de mancais, etc. Aços para eixo pré-endurecidos (30HRC) de precisão de retífica (retos) podem ser adquiridos em tamanhos pequenos e podem ser usinados com ferramentas de carbureto. Eixos completamente endurecidos (60HRC) de precisão de retífica também estão disponíveis, mas não podem ser usinados.

10.4 POTÊNCIA NO EIXO

A potência transmitida através de um eixo pode ser encontrada a partir de princípios básicos. Em qualquer sistema rotativo, a potência instantânea é o produto do torque e da velocidade angular,

$$P = T\omega \tag{10.1a}$$

onde ω deve ser expresso em radianos por unidade de tempo. Quaisquer que sejam as unidades básicas usadas para o cálculo, a potência é usualmente convertida em unidades de cavalos (hp) em qualquer sistema inglês ou para kilowatts (kW) em qualquer sistema métrico (ver a Tabela 1-5 para fatores de conversão). Ambos o torque e a velocidade angular podem estar variando com o tempo, embora a maior parte das máquinas rotativas seja projetada para operar a velocidades constantes ou próximas dessas velocidades por grandes períodos de tempo. Em tais casos, o torque frequentemente variará com o tempo. A potência média é encontrada através de

$$P_{média} = T_{média}\,\omega_{média} \tag{10.1b}$$

10.5 CARGAS NO EIXO

O caso mais geral de carregamento de eixo é aquele de um torque variado e um momento variado em combinação. Pode haver cargas axiais também se a linha de centro do eixo for vertical ou se estiver unida à engrenagem helicoidal ou cremalheira tendo uma componente de força axial. (Um eixo deve ser projetado para minimizar a porção de seu comprimento sujeito a cargas axiais fazendo--o descarregá-las, através de mancais axiais, o mais próximo possível da fonte de carga.) Tanto o momento quanto o torque podem variar com o tempo, como mostrado na Figura 10-1, e podem ambos ter componentes médias e alternadas.

A combinação de um momento fletor e um torque em um eixo em rotação cria tensões multiaxiais. As questões discutidas na Seção 6.12 sobre tensões multiaxiais em fadiga são, portanto, relevantes. Se as cargas forem assíncronas, aleatórias ou fora de fase, então será um caso de *tensões multiaxiais complexas*. Porém, ainda que o torque e o momento estejam em fase (ou 180° fora de fase), este ainda pode ser um caso de tensões multiaxiais complexas. O fator crítico na determinação de se o eixo tem tensões multiaxiais simples ou complexas está na direção da tensão alternada principal em um determinado elemento do eixo. Se sua direção for constante ao longo do tempo, então será considerado um caso de tensões multiaxiais simples. Se variar com o tempo, então será considerado um caso de tensões multiaxiais complexas. A maioria dos eixos carregados tanto em flexão quanto em torção estará na categoria complexa. Enquanto a direção da tensão alternada de flexão tenderá a ser constante, a direção das componentes de torção variará à medida que o elemento girar ao redor do eixo. A combinação de ambas no círculo de Mohr mostrará que o resultado é uma tensão principal alternada de direção variável. Uma exceção a essa situação é o caso de um torque constante sobreposto a um momento variável no tempo. Devido ao fato de que o torque constante não tem componente altermada para mudar a direção da tensão alternada principal, este se transforma em um caso de tensão multiaxial simples. Contudo, nem mesmo esta exceção pode ser considerada se estiverem presente concentrações de tensão como furos ou rasgos de chaveta no eixo, porque eles introduzirão tensões biaxiais locais e requerirão uma análise de fadiga multiaxial complexa.

Suponha que a função de momento fletor no comprimento do eixo seja conhecida ou calculável a partir de valores dados e que ela tenha tanto uma componente média M_m quanto uma componente alternada M_a. Da mesma forma, suponha que o torque no eixo seja conhecido ou calculável a partir dos valores fornecidos e que possua ambas as componentes média e alternante, T_m e T_a. A seguir, o procedimento geral segue aquele delineado na lista rotulada **Passos de Projeto para Tensões Variadas** na Seção 6.11 em combinação com os tópicos de tensão multiaxial desenvolvidos na Seção 6.12. Quaisquer posições ao longo do comprimento do eixo que pareçam ter grandes momentos e/ou torques (especialmente se em combinação com concentrações de tensão) precisam ser examinados para verificar a existência de possíveis falhas por tensão e as dimensões transversais ou as propriedades do material ajustadas devidamente.

10.6 TENSÕES NO EIXO

Com o entendimento de que as seguintes equações terão que ser calculadas para uma multiplicidade de pontos no eixo e para seus efeitos multiaxiais combinados também considerados, devemos primeiro encontrar as tensões aplicadas em todos os pontos de interesse. As tensões de flexão média e alternada máxima estão na superfície externa e são encontradas a partir de

$$\sigma_a = K_f \frac{M_a c}{I} \qquad \sigma_m = K_{fm} \frac{M_m c}{I} \tag{10.2a}$$

onde k_f e k_{fm} são fatores de concentração de tensão de fadiga por flexão para componentes média e alternantes, respectivamente (ver Equações 6.11 e 6.17). Como um eixo típico é de seção transversal sólida redonda,* podemos substituir c e I:

$$c = r = \frac{d}{2} \qquad I = \frac{\pi d^4}{64} \tag{10.2b}$$

dando

$$\sigma_a = K_f \frac{32 M_a}{\pi d^3} \qquad \sigma_m = K_{fm} \frac{32 M_m}{\pi d^3} \tag{10.2c}$$

onde d é o diâmetro local do eixo na seção de interesse.

As tensões torcionais de cisalhamento média e alternante são dadas por

$$\tau_a = k_{fs} \frac{T_a r}{J} \qquad \tau_m = k_{fsm} \frac{T_m r}{J} \tag{10.3a}$$

onde K_{fs} e K_{fsm} são fatores de concentração de tensão torcional de fadiga para componentes média e alternantes, respectivamente (ver a Equação 6.11 para K_{fs}; use as tensões aplicadas de cisalhamento e resistência ao escoamento por cisalhamento na Equação 6.17 para obter K_{fsm}). Para uma seção transversal sólida redonda, podemos substituir r e J:

$$r = \frac{d}{2} \qquad J = \frac{\pi d^4}{32} \tag{10.3b}$$

dando

$$\tau_a = K_{fs} \frac{16 T_a}{\pi d^3} \qquad \tau_m = K_{fsm} \frac{16 T_m}{\pi d^3} \tag{10.3c}$$

Uma carga de tração axial F_z, se alguma estiver presente, terá tipicamente apenas uma componente média (como o peso das componentes), e poderá ser encontrada por

$$\sigma_{m_{axial}} = K_{fm} \frac{F_z}{A} = K_{fm} \frac{4 F_z}{\pi d^2} \tag{10.4}$$

10.7 FALHA DO EIXO EM CARREGAMENTO COMBINADO

Extensos estudos de falha por fadiga de ambos aços dúcteis e ferros fundidos frágeis sob flexão e torção combinados foram feitos originalmente na Inglaterra, nos anos 1930, por Davies[3] e Gough e Pollard.[5] Esses resultados pioneiros estão mostrados na Figura 10-3, que foi tomada da Norma B106.1M-1985 da ANSI/ASME sobre o *Projeto de Eixos de Transmissão* (*Design of Transmission Shafting*). Resultados de pesquisas posteriores também estão incluídos nesses gráficos.[2, 4] Descobriu-se que a combinação da torção e flexão em materiais dúcteis em fadiga geralmente segue a relação elíptica como definida pelas equações na figura. Descobriu-se que materiais fundidos frágeis (não mostrados) falham com base na tensão principal máxima. Essas descobertas são similares àquelas das tensões flexionais e torcionais combinadas em carregamento completamente reversos mostrados na Figura 6-15.

* Para um eixo vazado, substitua as expressões apropriadas de I e J.

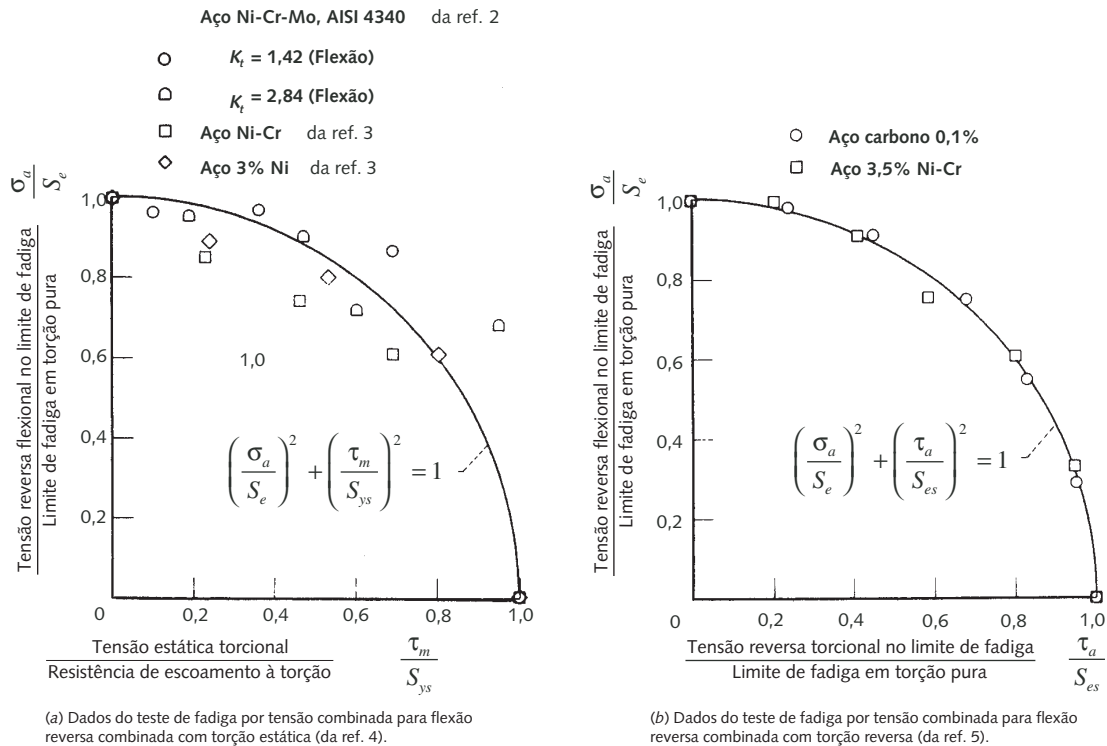



FIGURA 10-3

Resultados dos testes de fadiga para amostras de aço sujeitas à torção e flexão combinadas. (Extraído de *Design of Transmission Shafting*, American Society of Mechanical Engineers, New York, ANSI/ASME Standard B106.1M-1985, com autorização.)

10.8 PROJETO DO EIXO

Precisam ser consideradas tanto as tensões quanto as deflexões para o projeto do eixo. Frequentemente, a deflexão pode ser o fator crítico, porque deflexões excessivas causarão desgaste rápido dos mancais do eixo. Engrenagens, correias ou correntes comandadas pelo eixo podem também sofrer por desalinhamentos introduzidos pelas deflexões do eixo. Observe que as tensões no eixo podem ser calculadas localmente para vários pontos ao longo do eixo com base nas cargas conhecidas e nas seções transversais supostas. Entretanto, os cálculos de deflexão requerem que a geometria inteira do eixo seja definida. Assim, um eixo é tipicamente projetado pela primeira vez usando considerações de tensão, e as deflexões são calculadas uma vez que a geometria esteja completamente definida. A relação entre as frequências naturais do eixo (tanto em torção quanto em flexão) e o conteúdo de frequência das funções força e torque com o tempo também pode ser fundamental. Se as frequências das funções de força forem próximas às frequências naturais do eixo, a ressonância pode criar vibrações, tensões elevadas e grandes deflexões.

Considerações gerais

Algumas regras gerais para o projeto de eixos podem ser enunciadas como segue:

1 Para minimizar as tensões e deflexões, o comprimento do eixo deve ser mantido o menor possível e os trechos em balanço, ser minimizados.

2 Uma viga em balanço terá uma deflexão maior que uma viga biapoiada para o mesmo comprimento e as mesmas carga e seção transversal, de modo que se deve usar a viga biapoiada, a menos que o uso do eixo em balanço seja ditado por restrições de projeto. (*A Figura 10-2 mostra uma situação em que uma seção saliente ou em balanço de um eixo é requerida por razões práticas. A polia na extremidade direita do eixo carrega uma correia em V. Se a polia fosse montada entre os mancais, então todos os anexos ao eixo teriam que ser desmontados para mudar a correia, o que é indesejável. Em tais casos, o eixo em balanço pode ser a escolha menos prejudicial.*)

3 Um eixo vazado tem um razão melhor de rigidez/massa (rigidez específica) e frequências naturais mais altas que aquelas de um eixo comparavelmente rígido ou sólido, mas ele será mais caro e terá um diâmetro maior.

4 Tente colocar concentradores de tensão longe das regiões de grandes momentos fletores, se possível, e minimize seu efeito com grandes raios e aliviadores de tensão.

5 Se a principal preocupação é minimizar a deflexão, talvez o material mais indicado seja o aço de baixo carbono, porque sua rigidez é tão alta quanto aquela de aços mais caros, e um eixo projetado para pequenas deflexões tenderá a ter tensões baixas.

6 As deflexões nas posições de engrenagens suportadas pelo eixo não devem exceder cerca de 0,005 in, e a inclinação relativa entre os eixos da engrenagem deve ser menor que cerca de 0,03°.[1]

7 Se forem usados mancais planos (de luva), a deflexão do eixo ao longo do comprimento do mancal deve ser menor que a espessura da película de óleo no mancal.[1]

8 Se forem usados mancais de rolamento não autoalinhantes, a inclinação do eixo nos mancais deve ser mantida menor que aproximadamente 0,04°.[1]

9 Se estiverem presentes cargas axiais de compressão, elas deverão ser descarregadas por meio de um único mancal para cada direção de carga. Não divida as cargas axiais entre mancais axiais, pois a expansão térmica do eixo pode sobrecarregar os mancais.

10 A primeira frequência natural do eixo deve ser pelo menos três vezes a frequência máxima da carga esperada em serviço, e preferencialmente muito mais. (Um fator de 10× ou mais é preferido, mas normalmente é difícil conseguir isso em sistemas mecânicos.)

Projeto para flexão alternada e torção fixa

Este caso de carregamento é um subconjunto do caso geral de flexão variada e torção variada, e, por causa da ausência de um componente alternativo da tensão torcional, é considerado um caso de fadiga multiaxial simples. (Contudo, a presença de concentrações de tensão localizadas pode causar tensões multiaxiais complexas.) Esse caso de carregamento simples foi investigado experimentalmente, e existem dados para a falha de peças assim carregadas, como mostrado na Figura 10-3. A ASME definiu um método para o projeto de eixos carregados dessa maneira.

O MÉTODO ASME Existe uma norma da ANSI/ASME para o *Projeto de Eixos de Transmissão* publicada como B106.1M-1985. Essa norma apresenta um enfoque simplificado para o projeto de eixos. O procedimento da ASME *pres-*

supõe que o carregamento é constituído de flexão alternada (*componente de flexão média nula*) *e torque fixo* (*componente alternada nula do torque*) em um nível que cria tensões abaixo da resistência ao escoamento por torção do material. A padronização pressupõe que muitos eixos de máquina estão nessa categoria. Ela utiliza a curva elíptica da Figura 10-3 ajustada pelo limite de resistência à fadiga por flexão no eixo σ_a e **pelo limite de resistência ao escoamento em tração** no eixo σ_m como envelope de falha. A resistência de escoamento à tração é substituída pela resistência de escoamento torcional usando a relação de von Mises da Equação 5.9. A derivação da equação do eixo da ASME é apresentada a seguir.

A começar pela relação para o envelope de falha mostrado na Figura 10-3*a*,

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_m}{S_{ys}}\right)^2 = 1 \tag{10.5a}$$

introduza um fator de segurança N_f

$$\left(N_f\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(N_f\frac{\tau_m}{S_{ys}}\right)^2 = 1 \tag{10.5b}$$

Relembre a relação de von Mises para S_y a partir da Equação 5.9

$$S_{ys} = S_y\big/\sqrt{3} \tag{10.5c}$$

e substitua-a na Equação 10.5*b*.

$$\left(N_f\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(N_f\sqrt{3}\frac{\tau_m}{S_y}\right)^2 = 1 \tag{10.5d}$$

Substitua as expressões para σ_a e τ_m das Equações 10.2*c* e 10.3*c*, respectivamente:

$$\left[\left(K_f\frac{32M_a}{\pi d^3}\right)\left(\frac{N_f}{S_e}\right)\right]^2 + \left[\left(K_{fsm}\frac{16T_m}{\pi d^3}\right)\left(\frac{N_f\sqrt{3}}{S_y}\right)\right]^2 = 1 \tag{10.5e}$$

que pode ser organizada para calcular o diâmetro do eixo d como

$$d = \left\{\frac{32N_f}{\pi}\left[\left(K_f\frac{M_a}{S_f}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(K_{fsm}\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{10.6a}$$

A notação usada na Equação 10.6 é ligeiramente diferente daquela usada na norma da ANSI/ASME a fim de manter consistência com a notação usada neste texto. A padronização usa o método de reduzir a resistência de fadiga, S_f, pelo fator de concentração de tensão de fadiga, K_f, em vez de usar K_f como um aumentador da tensão, como é feito consistentemente neste texto. Na maioria dos casos (incluindo este), o resultado é o mesmo. Também a padronização da ASME pressupõe que a concentração de tensão pela tensão média K_{fsm} seja 1 em todos os casos, o que resulta em

$$d = \left\{\frac{32N_f}{\pi}\left[\left(K_f\frac{M_a}{S_f}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{10.6b}$$

A ASME abandonou esse padrão de design do eixo, e isso tem hoje apenas valor histórico. Seja cuidadoso em aplicar a Equação 10.6 apenas a situações em que as cargas forem aquelas previstas na equação, isto é, torque constante e momento alternado. **A norma da ASME dá resultados não conservativos se qualquer uma das componentes do carregamento que se supôs ser zero tiver, na verdade, um valor diferente de zero em um determinado caso. Recomendamos usar o método mais geral da Equação 10-8 (ver a seguir) para design de eixos, uma vez que ele cobre todas as situações de carga.**

A Figura 10-4 mostra a linha de falha elíptica de Gough da Figura 10-3 sobreposta às linhas de Gerber, Soderberg e Goodman modificada. Observe que a linha elíptica aproximadamente iguala a linha de Gerber na extremidade esquerda, mas diverge para interceptar a linha de resistência ao escoamento no eixo de tensões médias. A linha elíptica tem a vantagem de levar em conta um possível escoamento sem necessitar introduzir uma restrição adicional envolvendo a linha de escoamento. Contudo, a linha elíptica de Gough, embora seja uma boa aproximação para os dados de falha, é menos conservadora que a combinação da linha de Goodman com a linha de escoamento usada como um envelope de falha.

Projeto para flexão variada e torção variada

Quando o torque não é constante, sua componente alternada criará um estado de tensão multiaxial complexo no eixo. Nesse caso, pode ser usado o enfoque descrito na Seção 6.12, que computa as componentes de von Mises das tensões alternantes e média usando as Equações 6.22. Um eixo rodando em flexão combinada com torção tem um estado biaxial de tensão que permite que a versão bidimensional da Equação 6.22*b* seja usada.

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\left(\sigma_m + \sigma_{m_{axial}}\right)^2 + 3\tau_m^2} \qquad (10.7a)$$

Essas tensões de von Mises podem agora ser introduzidas em um diagrama modificado de Goodman (DMG) para um material escolhido a fim de encontrar um fator de segurança, ou podem-se usar as Equações 6.18 sem desenhar o DMG.

Para propósitos de projeto, no qual o diâmetro do eixo é a quantidade desejada, as Equações 10.2, 10.3 e 10.6 como apresentadas requerem a iteração para encontrar o valor de *d*, dadas algumas cargas conhecidas e as propriedades pressupostas para o material. Isso não é muito difícil se for usado um programa de solução de equações com alguma capacidade de iteração. Contudo, é muito enfadonho buscar uma solução com calculadora com as equações nessa forma. Se um caso particular de falha for admitido para o DMG, as equações podem ser manipuladas para fornecer uma equação de projeto (similar à Equação 10.6) para o diâmetro do eixo *d* na seção de interesse. Se o modelo de falha usado for o Caso 3 da Seção 6.11, o qual supõe cargas média e alternantes mantendo uma razão constante,* a falha ocorrerá no ponto *R* na Figura 6-46*c*. O coeficiente de segurança como definido pela Equação 6.18*e* é, portanto,

$$\frac{1}{N_f} = \frac{\sigma'_a}{S_f} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} \qquad (10.7b)$$

onde N_f é o coeficiente de segurança desejado, S_f é a resistência de fadiga corrigida para o ciclo de vida selecionado (pela Equação 6.10) e S_{ut} é o limite de resistência à tração do material.

* Observe que esta suposição está também implicita na Equação 10.6 para o método ASME.

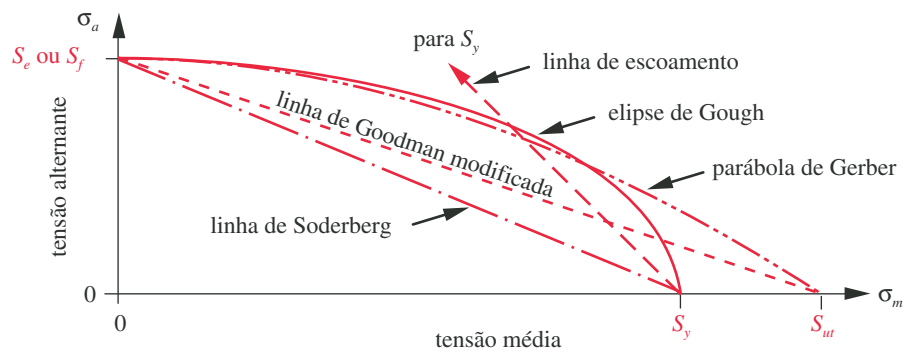



FIGURA 10-4

Linha de falha elíptica usando a resistência de escoamento com outras linhas de falha para tensões variadas.

Se agora também supusermos que a carga axial no eixo é zero e substituirmos as Equações 10.2*c*, 10.3*c* e 10.7*a* na Equação 10.7*b*, obteremos

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left(K_f M_a\right)^2 + \frac{3}{4}\left(K_{fs} T_a\right)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{\left(K_{fm} M_m\right)^2 + \frac{3}{4}\left(K_{fsm} T_m\right)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{10.8}$$

que pode ser usada como uma equação de projeto para determinar um diâmetro de eixo para qualquer combinação de carregamento de flexão e torção com as suposições mencionadas anteriormente de carga axial zero e uma razão constante entre os valores da carga alternante e média no tempo.

EXEMPLO 10-1

Projeto de eixo para torção constante e flexão alternada

Problema **Projete um eixo para suportar os complementos mostrados na Figura 10-5 com um coeficiente de segurança de projeto mínimo de 2,5.**

Dados **Um projeto preliminar da configuração do eixo é mostrado na Figura 10-5. Ele deve transmitir 2 hp a 1725 rpm. O torque e a força na engrenagem são constantes com o tempo.**

Hipóteses **Não há cargas axiais aplicadas. Será usado aço para obter vida infinita. Pressuponha um fator de concentração de tensão de 3,5 para o degrau nos raios em flexão, 2 para o degrau nos raios em torção e 4 nas chavetas.* Uma vez que o torque é constante e o momento fletor completamente reverso, o método ASME da Equação 10.6 pode ser usado e será comparado com o método geral por meio da Equação 10.8.**

Solução **Ver as Figuras 10-5 a 10-8.**

1 Primeiro determine o torque transmitido a partir da potência e velocidade angular dadas usando a Equação 10.1.

* Ver R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, John Willey, 1974, Figuras 72, 79 e 183, que mostram esses números com máximos aproximados para esses contornos e carregamentos. Como estamos criando um projeto preliminar nesta fase e ainda não definimos a geometria do eixo em detalhe, não vale a pena tentar definir esses fatores mais precisamente. Isso pode ser feito mais tarde, e o desenho, aperfeiçoado em conformidade.

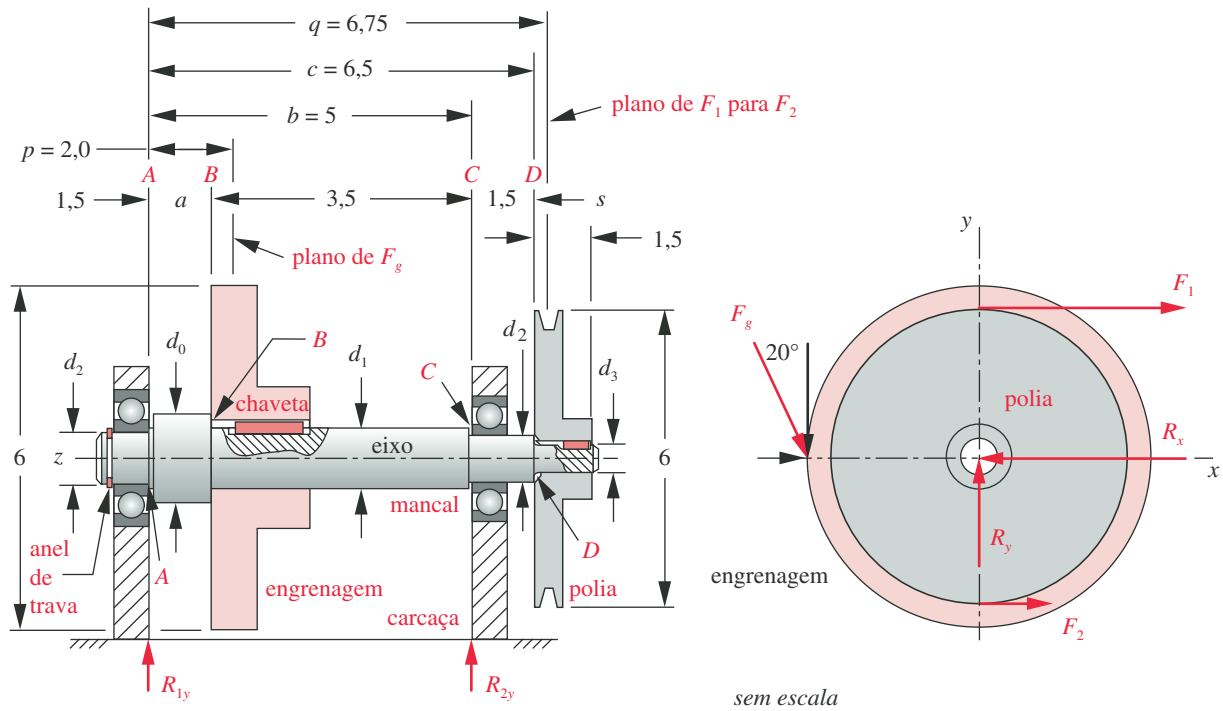



FIGURA 10-5

Geometria de um projeto preliminar para Exemplos de 10-1 a 10-3.

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{2\text{ hp}\left(6600\,\dfrac{\text{in-lb/s}}{\text{hp}}\right)}{1725\text{ rpm}\left(\dfrac{2\pi}{60}\,\dfrac{\text{rad/s}}{\text{rpm}}\right)} = 73{,}1\text{ lb-in} \qquad (a)$$

Esse torque existe somente na porção do eixo entre a polia e a engrenagem, e é uniforme em magnitude sobre aquele comprimento, como mostrado na Figura 10-6.

2 As forças tangenciais na polia e na engrenagem são encontradas a partir do torque e de seus respectivos raios. Uma correia em V tem tensão em ambos os lados, e a razão entre a força F_1 no lado apertado e F_2 no lado folgado é geralmente suposta como sendo aproximadamente 5. A força resultante associada com o torque motor é $F_n = F_1 - F_2$, mas a força que flete o eixo é $F_s = F_1 + F_2$. A combinação dessas relações resulta em $F_s = 1{,}5\,F_n$. Olhando pela extremidade da polia:

$$F_n = \frac{T}{r} = \frac{73{,}1\text{ lb-in}}{3\text{ in}} = 24{,}36\,\hat{\mathbf{i}}\text{ lb}$$
$$F_s = 1{,}5F_n = 36{,}54\,\hat{\mathbf{i}}\text{ lb} \qquad (b)$$

3 A força tangencial no dente da engrenagem é

$$F_{g_{tangencial}} = \frac{T}{r} = \frac{73{,}1\text{ lb-in}}{3\text{ in}} = -24{,}36\,\hat{\mathbf{j}}\text{ lb} \qquad (c)$$

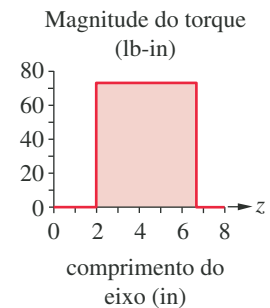



FIGURA 10-6

Torque no Exemplo 10-1.

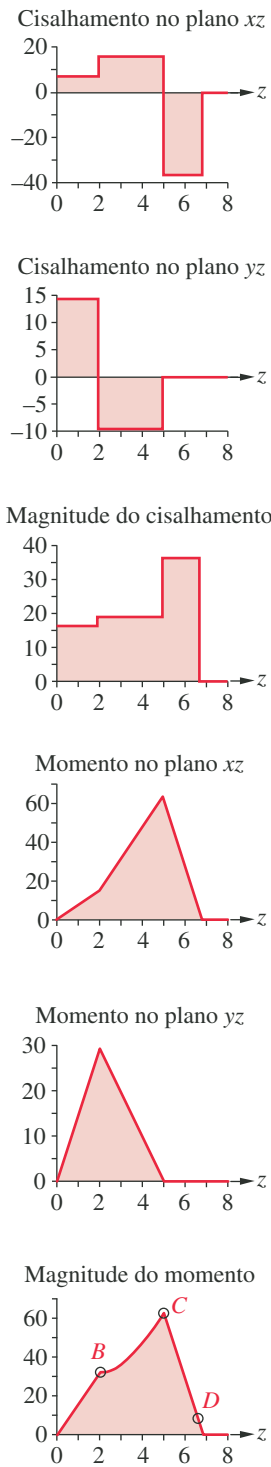



FIGURA 10-7

Carregamento no Exemplo 10-1.

A engrenagem tem um ângulo de pressão de 20°, como mostrado, o que significa que haverá também uma componente radial de força no dente da engrenagem de

$$F_{g_{radial}} = F_{g_{tangencial}} \operatorname{tg}(20°) = 8{,}87\ \hat{\imath}\ \text{lb} \tag{d}$$

4 Vamos considerar que as forças na engrenagem e na polia sejam aplicadas no seus centros. Calculamos as forças de reação nos planos xz e yz usando $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M_y = 0$ com as dimensões supostas de forma tentativa para a viga, $a = 1{,}5$, $b = 5$ e $c = 6{,}5$, o que dá $p = 2$ e $q = 6{,}75$.

$$\sum M_A = R_2 b + F_g p + F_s q = 0$$

$$R_2 = -\frac{1}{b}\left(F_g p + F_s q\right) = -\frac{1}{5}\left(2F_g + 6{,}75F_s\right) = -0{,}40F_g - 1{,}35F_s \tag{e}$$

$$\sum F = R_1 + F_g + F_s + R_2 = 0$$

$$\begin{aligned} R_1 = -F_g - F_s - R_2 &= -F_g - F_s - \left(-0{,}40F_g - 1{,}35F_s\right) \\ &= -\,0{,}60F_g + 0{,}35F_s \end{aligned} \tag{f}$$

As Equações (*e*) e (*f*) podem ser resolvidas em termos de R_1 e R_2 em cada plano, usando as componentes apropriadas das cargas aplicadas F_g e F_s.

$$\begin{aligned} R_{1_x} &= -0{,}60F_{g_x} + 0{,}35F_{s_x} = -0{,}60(8{,}87) + 0{,}35(36{,}54) = 7{,}47 \text{ lb} \\ R_{1_y} &= -0{,}60F_{g_y} + 0{,}35F_{s_y} = -0{,}60(-24{,}36) + 0{,}35(0) = 14{,}61 \text{ lb} \\ R_{2_x} &= -0{,}40F_{g_x} - 1{,}35F_{s_x} = -0{,}40(8{,}87) - 1{,}35(36{,}54) = -52{,}87 \text{ lb} \\ R_{2_y} &= -0{,}40F_{g_y} - 1{,}35F_{s_y} = -0{,}40(-24{,}36) - 1{,}35(0) = 9{,}74 \text{ lb} \end{aligned} \tag{g}$$

5 Agora é possível encontrar a carga de cisalhamento e o momento fletor atuantes no eixo. Escreva uma equação para a função de carregamento *q* usando funções singulares, integre essa função para obter a função de cisalhamento *V* e integre outra vez para obter a função de momento *M*.

$$q = R_1\langle z-0\rangle^{-1} + F_g\langle z-2\rangle^{-1} + R_2\langle z-5\rangle^{-1} + F_s\langle z-6{,}75\rangle^{-1} \tag{h}$$

$$V = R_1\langle z-0\rangle^{0} + F_g\langle z-2\rangle^{0} + R_2\langle z-5\rangle^{0} + F_s\langle z-6{,}75\rangle^{0} \tag{i}$$

$$M = R_1\langle z-0\rangle^{1} + F_g\langle z-2\rangle^{1} + R_2\langle z-5\rangle^{1} + F_s\langle z-6{,}75\rangle^{1} \tag{j}$$

Recorde que as constantes de integração C_1 e C_2 são zero quando incluímos as forças de reação na equação.

6 Substitua os valores das cargas e as forças de reação para cada direção coordenada nas Equações (*h*), (*i*) e (*j*) e faça a avaliação delas para todos os valores de *z* ao longo do eixo. A seguir, combine as componentes da função momento nos planos *xz* e *yz* (usando o teorema de Pitágoras) para encontrar a magnitude máxima da função de momento.

As distribuições de cisalhamento e momento sobre o comprimento do eixo estão mostradas na Figura 10-7. O torque aplicado é uniforme sobre a porção do eixo entre os pontos *B* e *D*, como mostrado na Figura 10-6. Dentro desse comprimento do eixo, há três posições que exigem atenção, nas quais um momento ocorre em combinação com uma concentração de tensões: o ponto *B* entre o degrau e a chaveta sob a engrenagem ($M_B = \pm 33$ lb-in), o ponto *C* no mancal direito onde há um degrau com um raio pequeno para caber o mancal ($M_C = \pm\, 63$ lb-in) e o ponto *D* no degrau da polia ($M_D = \pm\, 9$

lb-in). Observe que, por causa da alta concentração de tensão, o chanfro do anel de retenção usado para posicionamento axial foi colocado na extremidade do eixo onde o momento e o torque são ambos zero.

7 Um material de teste precisa ser escolhido para os cálculos. Primeiramente, tentamos um material barato, aço de baixo carbono laminado a frio, como SAE 1020 com $S_{ut} = 65$ kpsi e $S_y = 38$ kpsi. Embora esse material não seja excepcionalmente forte, ele tem baixa sensibilidade ao entalhe, o que será uma vantagem, dadas as grandes concentrações de tensão. Calcule o limite de resistência à fadiga não corrigido usando a Equação 6.5:

$$S_{e'} = 0{,}5S_{ut} = 0{,}5(65000) = 32500 \text{ psi} \tag{k}$$

Este deve ser reduzido por diversos fatores para levar em conta as diferenças entre a parte e o espécime de ensaio.

$$S_e = C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'}$$
$$S_e = (1)(1)(0{,}84)(1)(1)(32500) = 27300 \text{ psi} \tag{l}$$

O carregamento é flexão e torção, portanto o coeficiente de carga, C_{carreg}, é 1. Como não sabemos ainda o tamanho da peça, temporariamente suporemos que o coeficiente de tamanho, $C_{tamanho}$, é igual a 1 e o ajustaremos depois. O coeficiente de acabamento superficial, C_{superf}, é escolhido para um acabamento de usinagem baseado na Figura 6-26 ou na Equação 6.7*e*. A temperatura não é elevada, portanto o coeficiente de temperatura, C_{temp}, é igual a 1, e pressupomos que temos 50% de confiabilidade no estágio preliminar de projeto com $C_{conf} = 1$.

8 A sensibilidade do material ao entalhe é encontrada pela Equação 6.13 ou pela Figura 6-36 e é $q = 0{,}5$ em flexão e $q = 0{,}57$ em torção, supondo o raio do entalhe de 0,01 in.

9 O fator de concentração de tensão por fadiga é encontrado pela Equação 6.11*b* usando o suposto fator de concentração de tensão geométrico mencionado anteriormente. Para a tensão de flexão no ponto *C* do degrau:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}5(3{,}5 - 1) = 2{,}25 \tag{m}$$

A concentração de tensão é menor para um degrau carregado à torção do que para a mesma geometria carregada à flexão:

$$K_{fs} = 1 + q(K_{ts} - 1) = 1 + 0{,}57(2 - 1) = 1{,}57 \tag{n}$$

Pela Equação 6.17, descobrimos que, neste caso, o mesmo fator deve ser usado na componente de tensão média torcional:

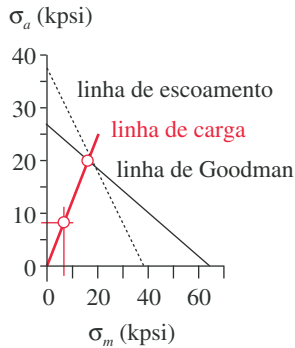
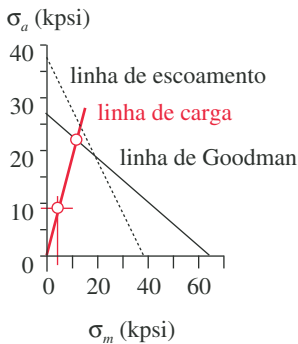
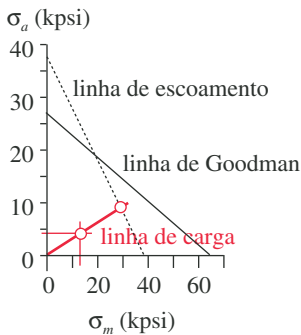
$$K_{fsm} = K_{fs} = 1{,}57 \tag{o}$$

10 O diâmetro do eixo no ponto *C* pode agora ser encontrado pela Equação 10.6 usando a magnitude do momento naquele ponto de 63,9 in-lb

$$d_2 = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(K_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(2{,}5)}{\pi} \left[\left(2{,}25 \frac{63{,}9}{27300} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(1{,}57 \frac{73{,}1}{38000} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0{,}531 \text{ in} \tag{p}$$

Se K_{fsm} for definido igual a 1 como a ASME recomenda, então a Equação 10.6 resulta em $d = 0{,}520$ in. Se a equação mais geral 10.8 for usada, o re-

sultado é $d = 0{,}557$ in. Observe que o método ASME é menos conservativo que a Equação 10.8, visto que dá diâmetros de eixo menores para o mesmo coeficiente de segurança. Um diagrama modificado de Goodman para este elemento de tensão é mostrado na Figura 10-8*b*. Ele prediz falha por fadiga.

11 No ponto *B*, sob a engrenagem, o momento é menor, mas os fatores de concentração de tensão de fadiga K_f e K_{fs} são maiores, portanto esse ponto também deve ser calculado. Em *B*:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}5(4 - 1) = 2{,}50$$
$$K_{fs} = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}57(4 - 1) = 2{,}70 \qquad (q)$$

12 O diâmetro mínimo recomendado no ponto *B* pela Equação 10.6 é

$$d_1 = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(K_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(2,5)}{\pi} \left[\left(2,50 \frac{32,8}{27300} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(2,71 \frac{73,1}{38000} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0,517 \text{ in} \qquad (r)$$

Se K_{fsm} for definido como 1, como recomenda a ASME, então a Equação 10.6 resulta em $d = 0{,}444$ in. Se a equação mais geral 10.8 for usada, o resultado é $d = 0{,}524$ in. Mais uma vez, o método da ASME é não conservativo se comparado à Equação 10.8. Um diagrama modificado de Goodman para esse elemento de tensão está mostrado na Figura 10-8*a*. Ele prevê falha por fadiga.

13 Uma outra posição possível de falha é o degrau no qual a polia se assenta, no ponto *D*. O momento é menor que em *C*, sendo cerca de 9,1 lb-in (ver Figura 10-7). Contudo, o eixo terá um de grau menor lá e terá o mesmo grau de concentração de tensão que no ponto *C*. (A chaveta para a polia está em uma região de momento nulo e, portanto, será ignorada). Usando esses valores na Equação 10.6 para o ponto *D*:

$$d_3 = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(K_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(2,5)}{\pi} \left[\left(2,25 \frac{9,1}{27300} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(1,57 \frac{73,1}{38000} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0,411 \text{ in} \qquad (s)$$

Se K_{fsm} for definido igual a 1 como a ASME recomenda, então a Equação 10.6 resulta em $d = 0{,}360$ in. Se a equação mais geral 10.8 for usada, o resultado será $d = 0{,}387$ in. Um diagrama modificado de Goodman para esse elemento de tensão é mostrado na Figura 10.8*c*. Ele prevê uma falha por escoamento.

14 A partir dos cálculos preliminares, podemos determinar tamanhos razoáveis para os diâmetros dos quatro degraus d_0, d_1, d_2, d_3 da Figura 10-3. O próximo diâmetro padronizado crescente do mancal de esferas para o diâmetro $d_2 = 0{,}531$ in calculado para o ponto *C* é 15 mm ou 0,591 in. Selecionando esse valor para d_2, escolhemos $d_3 = 0{,}50$ in e $d_1 = 0{,}625$ in. O tamanho-padrão d_0 do eixo é, portanto, 0,75 in, que fica laminado para o diâmetro

(*a*) Tensões no ponto *B*

(*b*) Tensões no ponto *C*

(*c*) Tensões no ponto *D*

FIGURA 10-8

Diagramas de Goodman modificados para três pontos no eixo do Exemplo 10-1.

externo na flange da engrenagem. Essas dimensões darão fatores de segurança que satisfazem ou excedem a especificação. As tensões e os fatores de segurança nos três pontos devem agora ser recalculados usando fatores de redução de resistência (por exemplo, $C_{tamanho}$) e fatores de concentração de tensão baseados nas dimensões finais.*

EXEMPLO 10-2

Projeto de eixo para torção repetida com flexão repetida

Problema **Projete um eixo para suportar os anexos mostrados na Figura 10-5 com um coeficiente de segurança de projeto mínimo de 2,5.**

Dados **O torque e o momento no eixo variam no tempo de modo repetitivo, isto é, suas componentes alternantes e média são de igual magnitude. As componentes média e alternante do torque são 73 lb-in, fazendo o torque máximo duas vezes o valor médio do Exemplo 10-1. As componentes média e alternante do momento são iguais em magnitude. A Figura 10-9 mostra o momento de pico e o torque de pico, que são, cada um, o dobro dos valores respectivos dos casos totalmente reversos da Figura 10-5 e do Exemplo 10-1 devido à presença do momento médio.**

Hipóteses **Não há cargas axiais aplicadas. Será usado o aço para se obter vida infinita. Pressuponha um fator de concentração de tensão de 3,5 para os raios de degraus em flexão, 2 para os raios de degraus em torção e 4 nas chavetas. Devido ao fato de que as cargas torcionais não são constantes e o momento de flexão não é totalmente reverso, o método da ASME da Equação 10.6 não deve ser usado.**

Solução **Ver Figuras 10-5, 10-9, 10-10 e Tabela 10-1.**

1 Para propósito de comparação, excetuando a configuração de carregamento, manteremos todos os fatores iguais aos do exemplo anterior. É usado o mesmo aço SAE 1020 de baixo carbono e laminado a frio que tem $S_{ut} = 65$ kpsi, $S_y = 38$ kpsi e um $S_e = 27{,}3$ kpsi corrigido. Sua sensitividade ao entalhe é 0,5.

2 Há três pontos de interesse, etiquetados B, C e D na Figura 10-3. Pressupõe-se que os fatores de concentração de tensão de fadiga sejam os mesmos em C e D e maiores em B. Ver o Exemplo 10-1 para o cálculo deles.

3 O diâmetro requerido do eixo no ponto C pode ser encontrado com a Equação 10.8.

$$d_2 = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{(K_f M_a)^2 + \frac{3}{4}(K_{fs} T_a)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{(K_{fm} M_m)^2 + \frac{3}{4}(K_{fsm} T_m)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(2{,}5)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2{,}25(64)]^2 + \frac{3}{4}[1{,}57(73{,}1)]^2}}{27300} + \frac{\sqrt{[2{,}25(64)]^2 + \frac{3}{4}[1{,}57(73{,}1)]^2}}{65000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_2 = 0{,}614 \qquad (a)$$

Torque médio

Torque de pico

Momento alternante

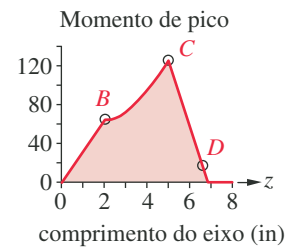
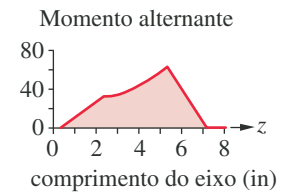
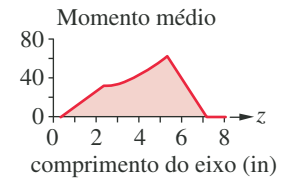
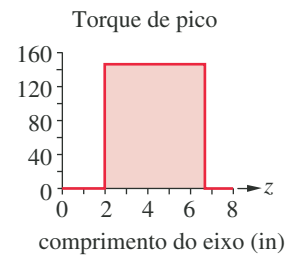
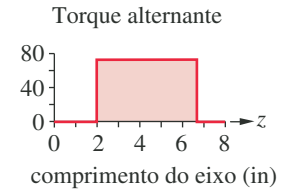
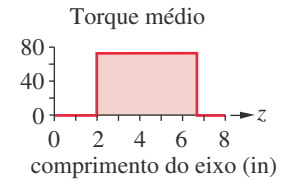



FIGURA 10-9

Torque e momentos no Exemplo 10-2 (lb-in).

* Os arquivos EX10-01*a*, EX10-01*b*, EX10-01*c* e EX10-01*d* estão no CD-ROM.

Compare isso ao valor de 0,557 para a mesma equação no exemplo anterior, no qual as cargas eram constantes.

4 No ponto B, o diâmetro requerido pela Equação 10.8 é

$$d_1 = \left\{ \frac{32(2,5)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left[2,5(32,8)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[2,71(73,1)\right]^2}}{27300} + \frac{\sqrt{\left[2,5(32,8)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[2,71(73,1)\right]^2}}{65000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_1 = 0,632 \qquad (b)$$

Compare isso ao valor de 0,517 para a mesma equação no exemplo anterior, no qual as cargas eram constantes.

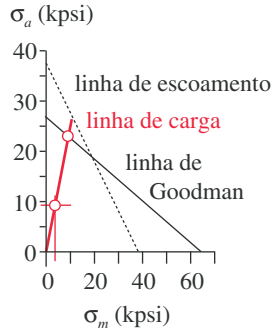
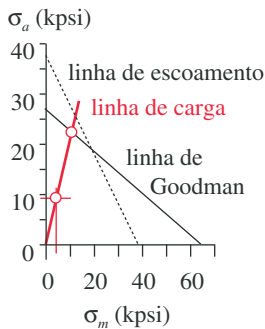
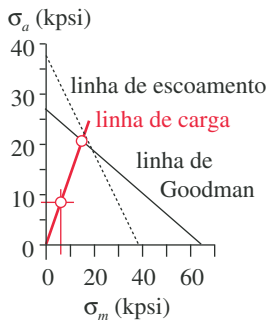
5 E no ponto D:

$$d_3 = \left\{ \frac{32(2,5)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left[2,25(9,1)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[1,57(73,1)\right]^2}}{27300} + \frac{\sqrt{\left[2,25(9,1)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[1,57(73,1)\right]^2}}{65000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_3 = 0,512 \qquad (c)$$

Compare isso ao valor de $d_3 = 0,411$ para a mesma equação no exemplo anterior, no qual as cargas eram constantes.

6 A presença de tensões repetidas requer um eixo maior para manter o mesmo coeficiente de segurança. Precisamos do próximo mancal padronizado de esferas em C, que possui 17 mm (0,669 in) de diâmetro interno. Selecionando esse valor para d_2, tentamos valores de $d_3 = 0,531$ in, que possui um tamanho padronizado menor em polegadas, e $d_1 = 0,750$ in, que possui tamanho padronizado maior em polegadas. O tamanho padronizado do eixo é agora de 0,875 in e é laminado para o diâmetro externo na flange da engrenagem. Essas dimensões darão um coeficiente de segurança que satisfaz e excede a especificação, como mostrado nos diagramas modificados de Goodman da Figura 10-10. As tensões e os coeficientes de segurança nos três pontos devem agora ser recalculados usando fatores mais precisos de redução de resistência e concentração de tensão baseados nas dimensões finais.

7 A Tabela 10-1 compara os resultados dos Exemplos 10-1 e 10-2 para mostrar as diferenças no diâmetro do eixo necessário para carregamento constante e carregamento variado. Observe que a carga de pico no Exemplo 10-1 é metade daquela do Exemplo 10-2. Os fatores de segurança finais são maiores que o mínimo de projeto devido à necessidade de aumentar o eixo para caber no tamanho de rolamento padronizado. Os arquivos EX10-02*a*, EX10-02*b*, EX10-02*c* e EX10-02*d* estão no CD-ROM.

(*a*) Tensões no ponto *B*

(*b*) Tensões no ponto *C*

(*c*) Tensões no ponto *D*

FIGURA 10-10

Diagramas de Goodman modificados para três pontos no eixo do Exemplo 10-2.

10.9 DEFLEXÃO DO EIXO

Um eixo é uma viga que se deflete transversalmente e é também uma barra de torção que se deflete torcionalmente. Ambos os modos de deflexão precisam ser analisados. Os princípios de análise da deflexão foram revistos no Capítulo 4 e não serão detalhados aqui novamente. Na Seção 4.10 foi desenvolvido um método para cálculo das deflexões de viga usando funções singulares, e na Seção 4.12 foi investigada a deflexão torcional.

Tabela 10-1 Comparação dos resultados do projeto de eixo nos Exemplos 10-1 e 10-2
Diâmetros mínimos produzem $N_f = 2{,}5$ em cada ponto

Projeto	Máximo torque alternante	Máximo torque médio	Máximo momento alternante	Máximo momento médio	d_0(in) nominal	d_1(in) Mín/ nominal	d_2(in) Mín/ nominal	d_3(in) Mín/ nominal	S_f em C
Ex. 10-1	0	73,1	63,9	0	0,750	0,517 / 0,625	0,557 / 0,591	0,411 / 0,500	2,5 / 3,0
Ex. 10-2	73,1	73,1	63,9	63,9	0,875	0,632 / 0,750	0,614 / 0,669	0,512 / 0,531	2,5 / 3,8

Eixos modelados como vigas

Os métodos da Seção 4.10 são aplicáveis diretamente. O único fator de complicação é a presença comum dos degraus no eixo que mudam as propriedades da seção transversal ao longo do seu comprimento. A integração da função M / EI torna-se muito mais complicada devido ao fato de que tanto I quanto M são agora funções da dimensão ao longo do eixo-viga. Em vez de fazer uma integração analítica como foi feito na Seção 4.10 para o caso de I constante, usaremos uma técnica de integração numérica como a regra de Simpson ou a regra do trapézio para formar as funções de inclinação e deflexão a partir da função M / EI. Isso será mostrado em um exemplo. Se as cargas transversais e o momento variarem ao longo do tempo, então as magnitudes máximas absolutas deverão ser usadas para calcular as deflexões. A função da deflexão dependerá do carregamento e das condições de contorno da viga, isto é, se biapoiada ou em balanço.

Eixos modelados como barras de torção

Os métodos da Seção 4.12 são diretamente aplicáveis, especialmente a Equação 4.24, mesmo porque a única seção transversal prática para eixos é circular. A deflexão angular θ (em radianos) para um eixo de comprimento l, módulo de cisalhamento G, momento polar de inércia J e com torque T é

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \tag{10.9a}$$

a partir da qual podemos formar a expressão para a constante torcional de mola:

$$k_t = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l} \tag{10.9b}$$

Se o eixo tiver degraus, as mudanças da seção transversal complicam o cálculo da deflexão torcional e da constante de mola devido à mudança do momento polar de inércia J.

Qualquer coleção de seções adjacentes de diferentes diâmetros do eixo pode ser considerada como um conjunto de molas em série, porque suas deflexões se adicionam e o torque passa por elas inalterado. Uma constante efetiva de mola ou um J efetivo pode ser computado para qualquer segmento de eixo a fim de encontrar a deflexão relativa entre suas extremidades. Para um segmento de eixo contendo três seções de distintos J_1, J_2 e J_3 transversais com comprimentos correspondentes l_1, l_2 e l_3, a deflexão total é meramente a soma das

deflexões de cada seção sujeita ao mesmo torque. Pressupomos que o material é uniforme de ponta a ponta,

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{T}{G}\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3}\right) \tag{10.9c}$$

A constante efetiva de mola k_{ef} de um eixo de três segmentos escalonados é

$$\frac{1}{k_{t_{ef}}} = \frac{1}{k_{t_1}} + \frac{1}{k_{t_2}} + \frac{1}{k_{t_3}} \tag{10.9d}$$

Essas expressões podem ser estendidas para qualquer número de segmentos de um eixo escalonado.

EXEMPLO 10-3

Projetar um eixo escalonado para minimizar as deflexões

Problema **Projetar o mesmo eixo como no Exemplo 10-2 para ter uma deflexão máxima de flexão de 0,002 in e uma deflexão angular máxima de 0,5° entre a polia e a engrenagem.**

Dados **O carregamento é o mesmo que no Exemplo 10-2. O torque de pico é 146 lb-in. A Figura 10-9 mostra a distribuição do momento de pico ao longo do comprimento do eixo. Os valores são 65,6 lb-in no ponto *B*, 127,9 lb-in no ponto *C* e 18,3 lb-in no ponto *D*.**

Hipóteses **Os comprimentos permanecerão os mesmos do exemplo anterior, mas os diâmetros poderão ser mudados para enrijecer o eixo, se necessário. O material é o mesmo que no Exemplo 10-2.**

Solução **Ver as Figuras 10-11 a 10-13.**

1 A deflexão torcional é encontrada a partir das Equações 10.9. Os comprimentos de cada segmento são (segundo a Figura 10-3): AB = 1,5 in, BC = 3,5 in e CD = 1,5 in. Os momentos polares de inércia são primeiramente calculados para cada segmento de diâmetro diferente.

$$\text{de } A \text{ para } B: \quad J_{AB} = \frac{\pi d_{AB}^4}{32} = \frac{\pi(0{,}875)^4}{32} = 0{,}057\,5 \text{ in}^4$$

$$\text{de } B \text{ para } C: \quad J_{BC} = \frac{\pi d_{BC}^4}{32} = \frac{\pi(0{,}750)^4}{32} = 0{,}031\,1 \text{ in}^4 \tag{a}$$

$$\text{de } C \text{ para } D: \quad J_{CD} = \frac{\pi d_{CD}^4}{32} = \frac{\pi(0{,}669)^4}{32} = 0{,}019\,7 \text{ in}^4$$

e usados na Equação 10.9*c*.

$$\theta = \frac{T}{G}\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3}\right)$$

$$= \frac{146}{1{,}2E7}\left(\frac{1{,}5}{0{,}057\,5} + \frac{3{,}5}{0{,}0311} + \frac{1{,}5}{0{,}019\,7}\right) = 0{,}15 \text{ grau} \tag{b}$$

Essa deflexão está dentro da especificação requerida.

2 A função momento para esse eixo foi derivada usando funções de singularidade como a Equação (*j*) no Exemplo 10-1. Ela deve ser agora dividida pelo produto de E e o momento de inércia da área I em cada ponto ao longo

do eixo. Embora E seja constante, o valor de I muda com cada mudança do diâmetro no eixo escalonado.

$$\frac{M}{EI} = \frac{M}{E\left[I_{AB}\langle z-0\rangle^0 + (I_{BC}-I_{AB})\langle z-1{,}5\rangle^0 + (I_{CD}-I_{BC})\langle z-5\rangle^0 + (I_D-I_{CD})\langle z-6{,}5\rangle^0\right]} \quad (c)$$

A Figura 10-11*a* mostra a função momento para esse eixo como derivada nos exemplos anteriores e a Figura 10-11*b* mostra a função M / EI para os diâmetros das seções definidas no Exemplo 10-2.

3 A deflexão por flexão é encontrada pela integração dupla da função de momento.

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dz + C_3 \quad (d)$$

$$\delta = \iint \frac{M}{EI} dz + C_3 z + C_4 \quad (e)$$

4 A primeira integração da função M / EI pela Equação (c) dá a inclinação da viga e a segunda integração dá a função de deflexão. Nas discussões prévias sobre a deflexão da viga (ver Seção 4.10 e Exemplos 4-4 a 4-7), a seção transversal I da viga foi constante ao longo do comprimento. Em um eixo escalonado, I é uma função do comprimento do eixo. Isso faz com que a integração analítica da função M / EI seja bem mais complicada. Um enfoque um pouco mais simples é fazer a integração numérica da função duas vezes usando uma regra trapezoidal ou a regra de Simpson. Essa integração numérica deve ser feita para cada direção das coordenadas a fim de obter as componentes x e y da deflexão. Estas, então, devem ser combinadas vetorialmente para obter as funções de magnitude e ângulo de fase da deflexão ao longo do eixo.

5 Uma vez que a deflexão do eixo é zero em $z = 0$, $C_4 = 0$. A outra constante de integração, C_3, pode ser determinada numericamente. A Figura 10-12*a* mostra a inclinação ao longo da viga na direção y obtida pela integração usando uma regra trapezoidal, e também mostra a função de inclinação correta. O resultado da integração numérica foi movido para cima pela constante de integração C_3. Contudo, não sabemos onde essa função cruza o zero, e portanto não podemos determinar C_3 pela função da inclinação da viga.

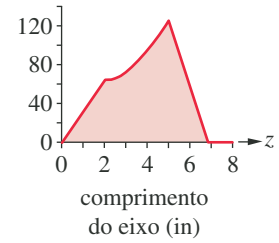
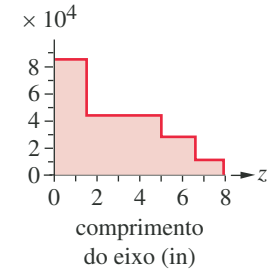
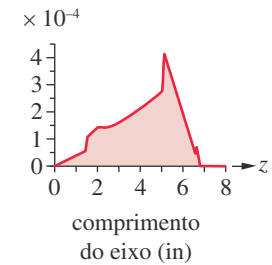
6 A função de deflexão obtida por integração numérica na Figura 10-12*b* não passa pelo zero no segundo apoio. Dado que a deflexão é realmente zero em

(*a*) Magnitude do momento

(*b*) Função EI ao longo do eixo

(*c*) Momento / *E I*

FIGURA 10-11

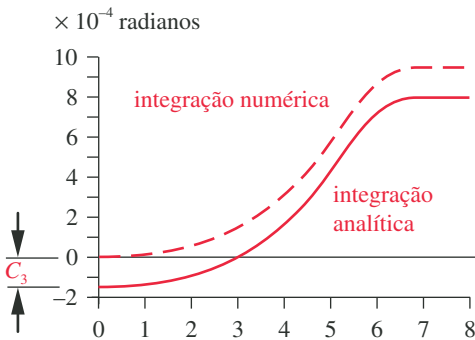
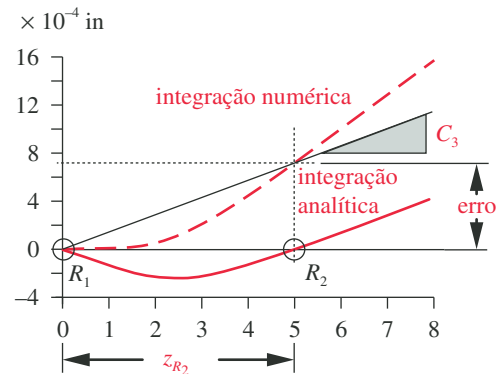
Funções momento e *M*/*EI* para o Exemplo 10-3.

(*a*) Inclinação da viga

(*b*) Deflexão da viga

FIGURA 10-12

Integração numérica da função momento e determinação da constante de integração C_3.

magnitude da deflexão

× 10^{-3} in

2
1
0
z
0 2 4 6 8

comprimento do eixo (in)

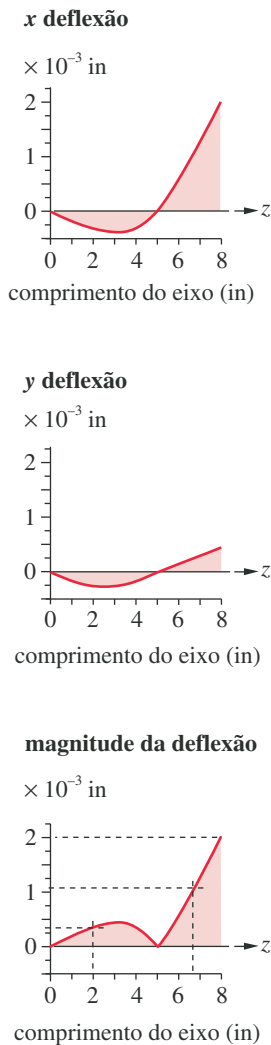



FIGURA 10-13

Funções de deflexão para o Exemplo 10-3.

tal apoio, o erro nesta função integrada pode ser usado para determinar a constante de integração C_3. Uma linha é desenhada na Figura 10-12*b* desde a origem ao ponto na curva $z = 5$ onde a função deve ser zero. A inclinação dessa linha reta é a constante C_3 para a direção *y*, a qual é encontrada a partir de

$$C_{3_y} = \tan^{-1}\frac{erro_y}{z_{R2}} = \tan^{-1}\frac{0{,}0007}{5{,}0} = 0{,}00014 \text{ in} \qquad (f)$$

A constante para a direção *x* é encontrada de maneira similar. As funções são, então, recalculadas usando os valores corretos de C_3.

7 Essas funções de deflexão estão mostradas na Figura 10-13 para diâmetros de eixo $d_0 = 0{,}875$, $d_1 = 0{,}750$, $d_2 = 0{,}669$, $d_3 = 0{,}531$ do Exemplo 10-2. A magnitude da deflexão na engrenagem é 0,0003 in, que está bem dentro da especificação requerida. Na polia, a deflexão é 0,001 in, também dentro da especificação. A deflexão na extremidade direita do eixo é 0,002 in. Os arquivos EX10-03*a* e EX09-02*b* estão no CD-ROM.

10.10 CHAVETAS E RASGOS DE CHAVETA

A ASME define uma **chaveta** como "*uma parte de maquinaria desmontável que, quando colocada em assentos, representa um meio positivo de transmitir torque entre o eixo e o cubo*". As chavetas são padronizadas pelo tamanho e pela forma em diversos estilos.* Uma **chaveta paralela** é de seção transversal quadrada ou retangular e de altura e largura constantes ao longo do seu comprimento. (Ver a Figura 10-14*a*.) Uma **chaveta afunilada** (cônica) é de largura constante, mas sua altura varia com um afunilamento linear de 1/8 in por ft e é empurrada em um rasgo cônico no cubo até que fica travada. Ela pode não ter cabeça ou ter uma **cabeça com formato de quilha** para facilitar a remoção. (Ver a Figura 10-14*b*.) Uma **chaveta Woodruff** é semicircular plana e com largura constante. Ela cabe em uma assento de chaveta fresado no eixo com um cortador circular padrão. (Ver a Figura 10-14*c*.) A chaveta afunilada serve para travar o cubo axialmente no eixo, mas as chavetas paralela e Woodruff requerem alguns outros meios para a fixação axial. Algumas vezes, são usados anéis de retenção e colares para esse propósito.

Chavetas paralelas

As chavetas paralelas são as mais usadas. As padronizações da ANSI e ISO definem os tamanhos particulares das seções transversais e a profundidade dos assentos (rasgos) das chavetas. Uma reprodução parcial dessa informação é apresentada na Tabela 10-2 para o intervalo mais baixo de diâmetro de eixos. Consulte as respectivas normas para eixos de tamanho grande. As chavetas quadradas são recomendadas para eixos de até 6,5 in de diâmetro (US) e 25 mm de diâmetro (ISO), e as chavetas retangulares, para diâmetros maiores. A chaveta paralela é colocada com metade de sua altura no eixo e metade no cubo, como mostrado na Figura 10-14*a*.

As chavetas paralelas são feitas tipicamente a partir de barras padronizadas laminadas a frio, as quais, convencionalmente, têm "tolerância negativa", querendo dizer que ela não será jamais maior que sua dimensão nominal, somente menor. Por exemplo, uma barra quadrada de tamanho nominal de 1/4 in terá uma tolerância na largura e altura de +0,000, –0,002 in. Assim, o assento da chaveta pode ser cortado com um cortador de fresa padrão de 1/4 in, e a chaveta de barra padronizada caberá com uma ligeira folga. Também está disponível uma chaveta padronizada especial, que tem tolerância positiva (por exemplo, 0,250 + 0,002, –0,000). Ela é usada quando se desejar um ajuste mais apertado entre a chaveta e o assento de chaveta e pode requerer uma usinagem da chaveta padronizada às dimensões finais.

* Norma ANSI B17.1-1967, *Keys and Keyseats*, e B17.2-1967, *Woodruff Keys and Keyseats*, disponíveis na American Society of Mechanical Engineers, 345 East 47th St., New York, N.Y. 10017.

(*a*) chaveta paralela (*b*) chaveta afunilada (ou cônica) (*c*) chaveta Woodruff (meia-lua)

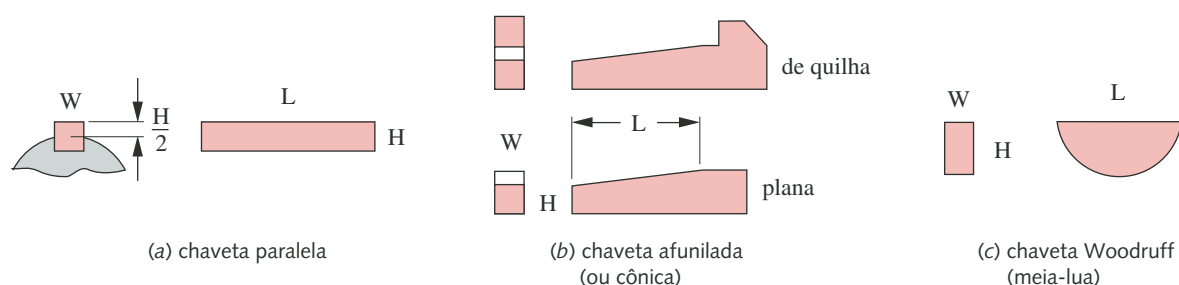



FIGURA 10-14

Vários estilos de chavetas.

O ajuste da chaveta pode exigir cuidados quando a carga de torque alterna de positivo a negativo em cada ciclo. Quando o torque muda de sinal, qualquer folga entre a chaveta e o rasgo aparecerá repentinamente, tendo como resultado um impacto e altas tensões. Isso é chamado de **reação**. Um parafuso no cubo, colocado a 90° da chaveta, pode manter o cubo axialmente e estabilizar a chaveta para que essa reação não ocorra. A padronização ANSI também define o tamanho do parafuso a ser usado com cada tamanho de chaveta na Tabela 10-2. O comprimento da chaveta deve ser menor que cerca de 1,5 vez o diâmetro do eixo para evitar torção excessiva com a deflexão do eixo. Se for necessária maior resistência, duas chavetas podem ser usadas, orientadas a 90° e 180°, por exemplo.

Chavetas cônicas

A largura de uma chaveta cônica para um dado diâmetro de eixo é a mesma que para uma chaveta paralela, como mostrado na Tabela 10-2. A conicidade (afunilamento) e o tamanho da cabeça de quilha são definidos na padronização. A conicidade é para o travamento, o que significa que a força de atrito entre as superfícies mantém a chaveta no lugar axialmente. A cabeça de quilha é opcional e provê uma superfície para retirar a chaveta quando a pequena extremidade não for accessível. Chavetas cônicas tendem a criar excentricidade entre o cubo e o eixo, pois elas forçam toda a folga radial para um lado.

Tabela 10-2 Chavetas padronizadas e tamanhos de parafusos para eixos com dimensões US e métricas

Diâmetro do eixo (in)	Largura nominal da chaveta (in)	Diâmetro do parafuso (in)	Diâmetro do eixo (mm)	Largura x altura da chaveta (mm)
$0{,}312 < d \le 0{,}437$	0,093	#10	$8 < d \le 10$	3 × 3
$0{,}437 < d \le 0{,}562$	0,125	#10	$10 < d \le 12$	4 × 4
$0{,}562 < d \le 0{,}875$	0,187	0,250	$12 < d \le 17$	5 × 5
$0{,}875 < d \le 1{,}250$	0,250	0,312	$17 < d \le 22$	6 × 6
$1{,}250 < d \le 1{,}375$	0,312	0,375	$22 < d \le 30$	8 × 7
$1{,}375 < d \le 1{,}750$	0,375	0,375	$30 < d \le 38$	10 × 8
$1{,}750 < d \le 2{,}250$	0,500	0,500	$38 < d \le 44$	12 × 8
$2{,}250 < d \le 2{,}750$	0,625	0,500	$44 < d \le 50$	14 × 9
$2{,}750 < d \le 3{,}250$	0,750	0,625	$50 < d \le 58$	16 × 10
$3{,}250 < d \le 3{,}750$	0,875	0,750	$58 < d \le 65$	18 × 11
$3{,}750 < d \le 4{,}500$	1,000	0,750	$65 < d \le 75$	20 × 12
$4{,}500 < d \le 5{,}500$	1,250	0,875	$75 < d \le 85$	22 × 14
$5{,}500 < d \le 6{,}500$	1,500	1,000	$85 < d \le 95$	25 × 14

Chaveta Woodruff

As chavetas Woodruff (meia-lua) são usadas em eixos menores. Elas são autoalinhantes, portanto são preferidas para eixos afunilados. A penetração de uma chaveta Woodruff no cubo é a mesma que aquela de uma chaveta quadrada, isto é, metade da largura da chaveta. A forma semicircular cria um assento mais fundo no eixo que resiste ao rolamento da chaveta, mas enfraquece o eixo comparado com um assento quadrado ou cônico. As larguras das chavetas meia-lua como uma função do diâmetro do eixo são essencialmente as mesmas que aquelas para chavetas quadradas, mostradas na Tabela 10-2. As outras dimensões da chaveta Woodruff são definidas na padronização da ANSI, e os cortadores dos assentos da chaveta estão disponíveis para igualar essas dimensões. A Tabela 10-3 reproduz uma amostra das especificações do tamanho da chaveta para a padronização. Ao tamanho de cada chaveta é dado um número, que codifica suas dimensões. A padronização ANSI diz: "Os últimos dois dígitos dão o diâmetro nominal da chaveta em oitavos de polegada, e os dígitos que precedem os dois últimos dígitos dão a largura em trinta e dois avos de polegada". Por exemplo, a chaveta numerada 808 define uma chaveta de tamanho 8/32 × 8/8 ou 1/4 de largura por 1 in em diâmetro. Ver a referência 6 para mais informações dimensionais a respeito das chavetas.

Tensões em chavetas

Há dois modos de falha em chavetas: por cisalhamento e por esmagamento. Uma falha por cisalhamento ocorre quando a chaveta é cisalhada ao longo de sua largura na interface entre o eixo e o cubo. Uma falha por esmagamento ocorre por esmagamento em qualquer lado em compressão.

Falha por cisalhamento A tensão média devido ao cisalhamento direto foi definida na Equação 4.9, repetida aqui:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A_{cis}} \tag{10.10}$$

Tabela 10-3 Tamanhos padronizados ANSI para chavetas Woodruff
Lista parcial: ver a norma para mais informações e a Figura 10-14*c* para os nomes

Número da chaveta	Tamanho nominal da chaveta W × L	Altura H
202	0,062 × 0,250	0,106
303	0,093 × 0,375	0,170
404	0,125 × 0,500	0,200
605	0,187 × 0,625	0,250
806	0,250 × 0,750	0,312
707	0,218 × 0,875	0,375
608	0,187 × 1,000	0,437
808	0,250 × 1,000	0,437
1208	0,375 × 1,000	0,437
610	0,187 × 1,250	0,545
810	0,250 × 1,250	0,545
1210	0,187 × 1,250	0,545
812	0,250 × 1,500	0,592
1212	0,375 × 1,500	0,592

onde F é a força aplicada e A_{cis} é a área de cisalhamento sendo cortada. Neste caso, A_{cis} é o produto da largura da chaveta pelo comprimento. A força na chaveta pode ser encontrada pelo quociente do torque do eixo pelo raio do eixo. Se o torque do eixo for constante com o tempo, a força também será, e o coeficiente de segurança poderá ser encontrado comparando a tensão de cisalhamento à resistência ao escoamento por cisalhamento do material. Se o torque do eixo for variável com o tempo, então a falha por fadiga do eixo da chaveta em cisalhamento será possível. O enfoque então está em calcular as componentes média e alternante da tensão de cisalhamento e usá-las para calcular as tensões média e alternante de von Mises. Estas podem, então, ser usadas em um diagrama de Goodman modificado para encontrar o coeficiente de segurança como descrito na Seção 6.13.

Falha por esmagamento A tensão média de compressão é definida por

$$\sigma_x = \frac{F}{A_{esm}} \tag{10.11}$$

onde F é a força aplicada e a área de esmagamento é a área de contato entre o lado da chaveta e o eixo ou o cubo. Para uma chaveta quadrada, esta será sua meia-altura vezes seu comprimento. Uma chaveta Woodruff tem uma área de esmagamento diferente no cubo daquela no eixo. A área de esmagamento de uma chaveta Woodruff no cubo é muito menor e falhará primeiro. A tensão de esmagamento deve ser calculada usando a máxima força aplicada, seja constante ou variável com o tempo. Devido ao fato de que as tensões de compressão não causam falha por fadiga, as tensões de esmagamento podem ser consideradas estáticas. O coeficiente de segurança é encontrado comparando a tensão máxima de esmagamento à resistência do material ao escoamento sob compressão.

Materiais para chavetas

Devido ao fato de as chavetas serem carregadas em cisalhamento, são usados materiais dúcteis. Aço brando de baixo carbono é a escolha mais comum, exceto se um ambiente corrosivo exigir uma chaveta de aço inoxidável ou de latão. Chavetas retangulares ou quadradas frequentemente são feitas de barras padronizadas de laminação a frio e meramente cortadas ao tamanho. O tipo especial de chavetas mencionado anteriormente é usado quando se requer um ajuste mais apertado entre a chaveta e o rasgo de chaveta. As chavetas Woodruff e as cônicas, normalmente, também são feitas de aço brando, laminado a frio.

Projeto de chavetas

Há poucas variáveis de projeto disponíveis para o dimensionamento de uma chaveta. O diâmetro do eixo no assento da chaveta determina sua largura. A altura da chaveta (ou sua penetração no cubo) é também determinada por sua largura. Isso deixa apenas o comprimento da chaveta e o número de chavetas usadas por cubo como variáveis de projeto. Uma chaveta reta ou afunilada pode ser tão comprida quanto o cubo permitir. Uma chaveta Woodruff pode ser obtida em um intervalo de diâmetros para uma largura dada, o que efetivamente determina seu comprimento de engate no cubo. Evidentemente, à medida que o diâmetro da chaveta Woodruff é aumentado, mais fraco fica o eixo com seu assento de chaveta mais profundo. Se uma única chaveta não puder transmitir o torque com tensões razoáveis, uma chaveta adicional poderá ser adicionada, girada em 90° com relação à primeira.

É comum dimensionar a chaveta de forma que ela falhe antes que o assento ou outra localidade do eixo, em caso de ocorrer uma sobrecarga. A chaveta, então, atuará como um pino em cisalhamento de um motor externo para impedir que os elementos mais caros sejam danificados. Uma chaveta é barata e rela-

(*a*) Rasgo de chaveta por fresa de topo – extremidade dupla

(*b*) Rasgo de chaveta por fresa de topo – extremidade única

(*c*) Rasgo de chaveta arredondado – extremidade única

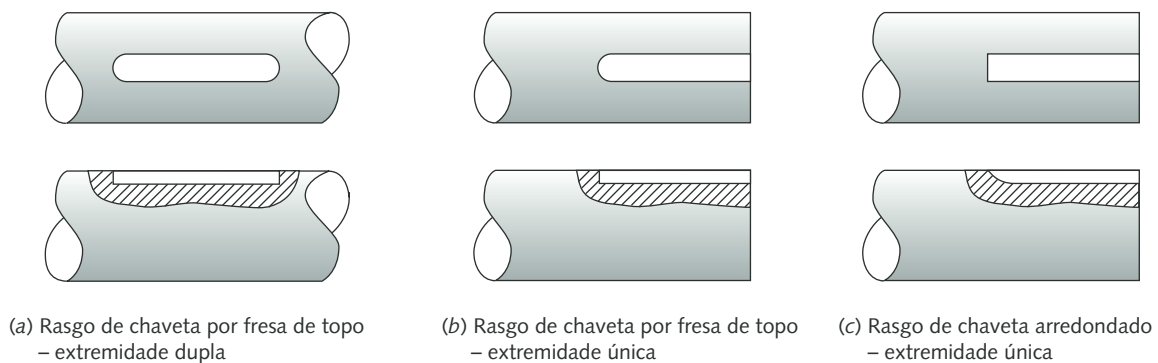



FIGURA 10-15

Vários estilos de rasgos de chaveta em eixos.

tivamente fácil de ser trocada se o assento não estiver danificado. Essa é uma das razões para o uso de materiais dúcteis e brandos para a chaveta, tendo uma resistência menor que aquela do eixo de forma que uma falha por esmagamento seletivamente afetará a chaveta em vez do rasgo da chaveta se o sistema sofrer uma sobrecarga além do seu intervalo de projeto.

Concentração de tensões em rasgos de chaveta

Como as chavetas têm cantos relativamente afiados (< 0,02 in de raio), os assentos de chaveta também devem ter. Isso causa concentrações significativas de tensões. O rasgo é aberto no cubo e corre ao longo de seu comprimento, mas o rasgo deve ser fresado no eixo e ter uma ou duas extremidades.

Se uma fresa de topo for usada, o rasgo se parecerá com aquele da Figura 10-15*a* e terá cantos afiados na vista lateral em uma ou ambas as extremidades, bem como ao longo de cada lado. Se, no entanto, um rasgo arredondado for cortado como mostrado na Figura 10-15*c*, o canto afiado na extremidade será eliminado e a concentração de tensões, reduzida. Um assento de chaveta Woodruff no eixo também tem um raio grande em vista lateral, mas ele (e todo o assento da chaveta) sofre de cantos afiados nos lados.

Peterson[7] mostra as curvas de concentração de tensão obtidas experimentalmente para assentos fresados de chaveta em eixos sob carregamento de flexão ou torção. Elas estão reproduzidas na Figura 10-16. Esses fatores variam de 2 a cerca de 4, dependendo da razão entre o raio do canto e o diâmetro do eixo. Foram feitas aproximações para as curvas da Figura 10-16 e foram criadas funções para essas curvas para que o fator de concentração de tensão possa ser determinado imediatamente durante o cálculo do projeto de um eixo. Ver o arquivo SHFTDES, por exemplo. Esses fatores devem ser aplicado às tensões de flexão e cisalhamento no eixo na posição dos rasgos de chaveta como foi feito nos Exemplos 10-1 e 10-2.

EXEMPLO 10-4

Projeto de chaveta para eixo

Problema **Projete uma chaveta para o eixo nos Exemplos 10-2 e 10-3 e refine a estimativa dos fatores de segurança dos eixos com base em dimensões preliminares de projeto tomadas daquele exemplo anterior em conjunção com fatores refinados de concentração de tensão.**

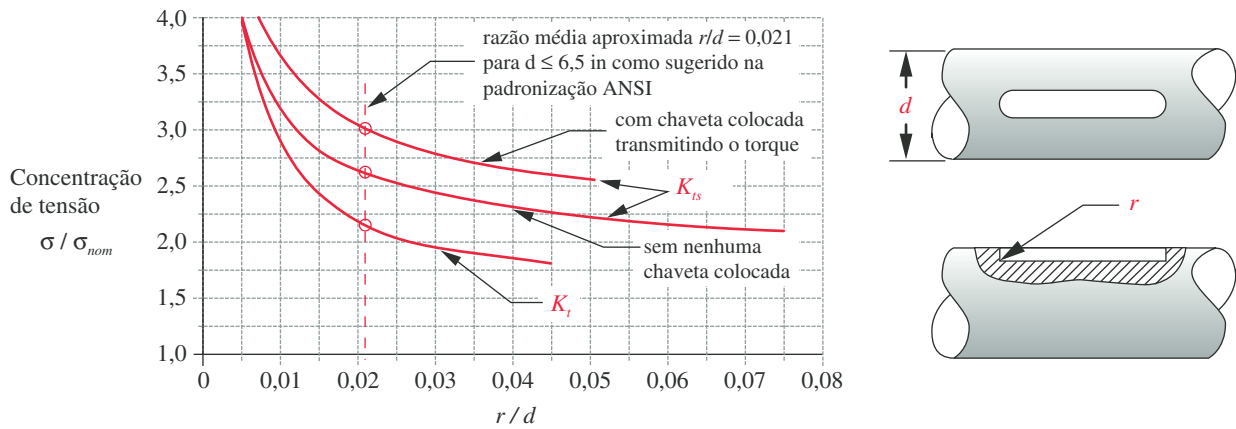



FIGURA 10-16

Fatores de concentração de tensão para um assento de chaveta produzido por fresa de topo em flexão (K_t) e torção (K_{ts}) (Fonte: R. C. Peterson, *Stress Concentration Factors*, 1974, Figuras 182 e 183, pp. 266-267, reimpresso com autorização da John Willey & Sons, Inc.)

Dados **O carregamento é o mesmo que no Exemplo 10-2. O torque máximo é 146 lb-in. A Figura 10-9 mostra a distribuição do momento máximo sobre o comprimento do eixo. Esses valores são 65,6 lb-in no ponto *B* e 18,3 lb-in no ponto *D*. Os diâmetros preliminares do eixo nas chavetas são d_1 = 0,750 in em *B* e d_3 = 0,531 in em *D*. Ver a Figura 10-3 para legendas.**

Hipóteses **Use chavetas quadradas, paralelas com rasgos produzidos por fresa de topo. O material do eixo é o mesmo que no Exemplo 10-3. Um aço de baixo carbono, SAE 1010, será usado para as chavetas. Seu S_{ut} = 53 kpsi e seu S_y = 44 kpsi. S_e é calculado para ser 22900 psi. Ver a Figura 10-16 para fatores de concentração de tensão.**

Solução **Ver a Figura 10-5.**

1 Há duas posições com chavetas neste eixo, nos pontos *B* e *D*. Os diâmetros de projeto escolhidos para essas seções no Exemplo 10-3 foram d_1 = 0,750 em *B* e d_3 = 0,531 in em *D*. A Tabela 10-2 mostra que a largura de chaveta-padrão para d_1 é 0,187 in e para d_3 é 0,125 in. O comprimento da chaveta pode ser ajustado para cada caso.

2 No ponto *B*, as componentes média e alternante de força na chaveta são encontradas pela componente de torque dividida pelo raio do eixo naquele ponto.

$$F_a = \frac{T_a}{r} = \frac{73,1}{0,375} = 194,67 \text{ lb}$$

$$F_m = \frac{T_m}{r} = \frac{73,1}{0,375} = 194,67 \text{ lb} \qquad (a)$$

3 Pressuponha um comprimento de chaveta de 0,5 in e calcule as componentes de tensão de cisalhamento média e alternante a partir de

$$\tau_a = \frac{F_a}{A_{cis}} = \frac{194,67}{0,187(0,500)} = 2082 \text{ psi}$$

$$\tau_m = \frac{F_m}{A_{cis}} = \frac{194,67}{0,187(0,500)} = 2082 \text{ psi} \qquad (b)$$

4 Para encontrar um coeficiente de segurança para fadiga por cisalhamento para a chaveta, calcule as tensões equivalentes de von Mises para cada uma dessas componentes pela Equação 5.7*d*,

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(2082)^2} = 3606 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(2082)^2} = 3606 \text{ psi} \qquad (c)$$

e use-as na Equação 6.18*e* para determinar o coeficiente de segurança à fadiga:

$$N_f = \frac{1}{\dfrac{\sigma'_a}{S_e} + \dfrac{\sigma'_m}{S_{ut}}} = \frac{1}{\dfrac{3606}{22990} + \dfrac{3606}{53000}} = 4,4 \qquad (d)$$

5 A tensão de esmagamento na chaveta é compressão e, assim, pode ser considerada uma carga estática. Ela é calculada usando a força máxima na chaveta:

$$\sigma_{max} = \frac{F_m + F_a}{A_{esm}} = \frac{194,67 + 194,67}{0,0935(0,500)} = 8328 \text{ psi} \qquad (e)$$

6 Calcule o coeficiente de segurança para falha por esmagamento a partir de:

$$N_s = \frac{S_y}{\sigma_{max}} = \frac{44000}{4164} = 5,3 \qquad (f)$$

7 No ponto *D*, a força na chaveta é

$$F_a = \frac{T_a}{r} = \frac{73,1}{0,266} = 275 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{T_m}{r} = \frac{73,1}{0,266} = 275 \text{ lb} \qquad (g)$$

8 Pressuponha um comprimento de chaveta de 0,50 in e calcule as componentes de tensão de cisalhamento média e alternante a partir de

$$\tau_a = \frac{F_a}{A_{cis}} = \frac{275}{0,125(0,50)} = 4400 \text{ psi}$$
$$\tau_m = \frac{F_m}{A_{cis}} = \frac{275}{0,125(0,50)} = 4400 \text{ psi} \qquad (h)$$

9 Calcule as tensões equivalente de von Mises para cada uma dessas componentes pela Equação 5.7*d*,

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(4399)^2} = 7620 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(4399)^2} = 7620 \text{ psi} \qquad (i)$$

e use-as na Equação 6.18*e*:

$$N_f = \frac{1}{\dfrac{\sigma'_a}{S_e} + \dfrac{\sigma'_m}{S_{ut}}} = \frac{1}{\dfrac{7620}{22990} + \dfrac{7620}{53000}} = 2,1 \qquad (j)$$

10 A tensão de esmagamento na chaveta é calculada usando a força máxima na chaveta:

$$\sigma_{max} = \frac{F_m + F_a}{A_{esm}} = \frac{275 + 275}{0,0625(0,50)} = 17600 \text{ psi} \qquad (k)$$

11 Calcule o coeficiente de segurança para falha por esmagamento a partir de

$$N_s = \frac{S_y}{\sigma_{max}} = \frac{44000}{17600} = 2,5 \qquad (l)$$

12 Os coeficientes de segurança para o eixo nessas posições podem agora ser recalculados usando um fator de concentração de tensão nos rasgos de chaveta que leve em conta o diâmetro verdadeiro do eixo e os raios de arredondamento verdadeiro. Nossos cálculos de projeto prévios no Exemplo 10-2 usaram uma suposição do pior caso para esses valores. A Figura 10-16 mostra as funções de concentração de tensão para rasgos de chaveta produzidos por fresa de topo para flexão e torção. Para usar esses gráficos, devemos calcular a razão r / d do raio da fresa de topo contra o diâmetro do eixo. Suponha um eixo na fresa de topo de 0,010 in. As razões r / d para esses pontos são, portanto,

$$\text{para o ponto } B: \quad \frac{r}{d} = \frac{0,010}{0,750} = 0,0133$$

$$\text{para o ponto } D: \quad \frac{r}{d} = \frac{0,010}{0,531} = 0,0188 \qquad (m)$$

Os fatores de concentração de tensão correspondentes são lidos na Figura 10-16 como

$$\text{para o ponto } B: \quad K_t = 2,5 \qquad K_{ts} = 2,9$$

$$\text{para o ponto } D: \quad K_t = 2,2 \qquad K_{ts} = 2,7 \qquad (n)$$

13 Estes são usados nas Equações (*m*), (*n*) e (*o*) do Exemplo 10-1 para obter os fatores de concentração de tensão por fadiga, que para um material de sensitividade de rasgo $q = 0,5$ são

$$\text{para o ponto } B: \quad K_f = 1,75 \qquad K_{fs} = 2,09$$

$$\text{para o ponto } D: \quad K_f = 1,60 \qquad K_{fs} = 1,97 \qquad (o)$$

$$\text{para ambos o pontos:} \quad K_{fm} = K_f \qquad K_{fsm} = K_{fs}$$

14 Os novos coeficientes de segurança são, então, calculados usando a Equação 10.8 com os valores das Equações (*b*) e (*c*) do Exemplo 10-2 com os valores de projeto para o diâmetro do eixo e com os valores acima de concentração de tensão inseridos:

$$0,75 = \left\{ \frac{32(N_f)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left[1,75(32,8)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[2,09(73,1)\right]^2}}{27300} + \frac{\sqrt{\left[1,75(32,8)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[2,09(73,1)\right]^2}}{65000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$N_f = 5,5 \qquad (p)$$

para o ponto D:

$$0,531 = \left\{ \frac{32(N_f)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left[1,60(9,1)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[1,97(73,1)\right]^2}}{27100} + \frac{\sqrt{\left[1,60(9,1)\right]^2 + \frac{3}{4}\left[1,97(73,1)\right]^2}}{65000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$N_f = 2,2 \qquad (q)$$

No ponto *B*, o coeficiente de segurança é maior que o valor especificado de 2,5. No ponto *D*, é menor. Aumentando o diâmetro em *D* para 0,562 in, temos um coeficiente de segurança de 2,7. Então, os coeficientes de segurança para falha da chaveta (4,4 em *B* e 2,1 em *D*) são menores que aqueles para a falha do eixo, o que é desejável, já que as chavetas falharão antes que os eixos em caso de uma situação de sobrecarga. Agora, este projeto é viável e aceitável.*

10.11 ESTRIAS

Quando é preciso transmitir mais torque do que aquele que pode ser passado pelas chavetas, as estrias podem ser usadas como alternativa. Estrias são essencialmente "chavetas construídas no eixos", formadas pelo contorno externo do eixo e pelo contorno interno do cubo com formas semelhantes a dentes. Cada estria tem dentes de seção transversal quadrada, mas estes têm sido suplantados por dentes de involuta para estrias, como mostrado na Figura 10-17. A forma do dente de involuta é universalmente usada em engrenagens, e as mesmas técnicas de corte são usadas na manufatura de estrias. Além dessa vantagem de manufatura, o dente de involuta tem menos concentração de tensões que um dente quadrado e é mais forte. A SAE define padrões tanto para estrias de dente de forma quadrada quanto de involuta, e a ANSI publica padrões de estrias de involuta.[†] As estrias padronizadas de involuta tem um ângulo de pressão de 30° e metade da profundidade de um dente de engrenagem padrão. O tamanho do dente é definido por uma fração cujo numerador é o passo diametral (que define a largura do dente – ver o Capítulo 12 para mais informações sobre esses termos) e cujo denominador controla a profundidade do dente (e é sempre o dobro do numerador). Os valores padronizados do passo diametral são 2,5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 32, 40 e 48. As estrias padronizadas podem ter de 6 a 50 dentes. As estrias podem ter uma raiz plana ou filetada, sendo ambas mostradas na Figura 10-17. Ver a referência 8 para mais informações sobre as dimensões das estrias padronizadas.

Algumas das vantagens das estrias são resistência máxima na raiz do dente, precisão de forma do dente devido ao uso de cortadores padronizados e bom acabamento superficial das superfícies usinadas pelo processo padronizado de corte de engrenagens, o qual elimina a necessidade de retífica. Uma das maiores vantagens das estrias sobre as chavetas é a capacidade de acomodar (com folga

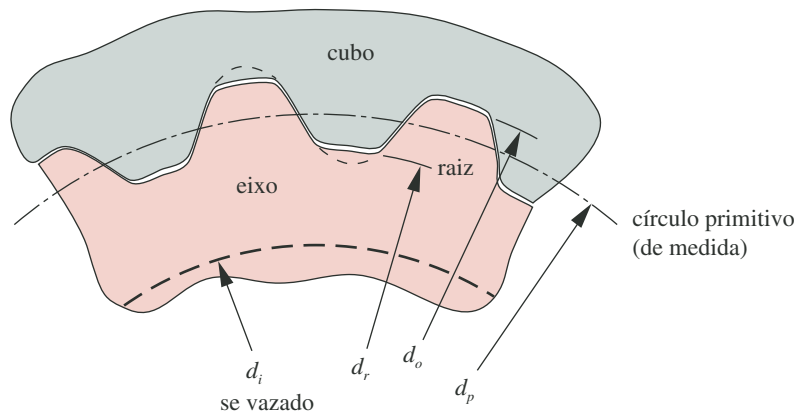



FIGURA 10-17

Geometria involuta de uma estria.

* Os arquivos EX10-04A, EX10-04B, EX10-04C e EX10-04D estão no CD-ROM.

† Padrões da ANSI B92.1 e B92.2M, American National Standards Institute, 11 West 42nd St., New York, N. Y., 10036.

apropriada) grandes movimentos axiais entre o eixo e o cubo ao mesmo tempo em que transmite o torque. Elas são usadas para conectar o eixo de saída da transmissão ao eixo motor em automóveis e caminhões em que o movimento da suspensão causa movimento axial entre os membros. Elas também são usadas dentro de transmissões não automáticas e não sincronizadas de caminhões para acoplar as engrenagens axialmente móveis aos seus eixos. Além disso, o torque motor é usualmente passado à transmissão através de estrias que conectam a embreagem do motor ao eixo de entrada da transmissão e permite o movimento axial necessário para desacoplar a embreagem do volante.

O carregamento em uma estria é tipicamente torção pura, tanto variada quanto constante. Embora seja possível ter cargas de flexão sobrepostas, uma boa prática de projeto minimizará os momentos fletores pela colocação apropriada de mancais e pela manutenção de estrias em balanço o menor possível. Da mesma forma que com as chavetas, dois modos de falha são possíveis, esmagamento e cisalhamento. A falha por cisalhamento é normalmente o modo limitante. Diferentemente das chavetas, muitos dentes estão disponíveis para partilhar a carga de alguma maneira. Idealmente, a estria de comprimento l necessita ser apenas longa o suficiente para desenvolver uma resistência combinada ao cisalhamento do dente igual à resistência ao cisalhamento torcional do eixo em si. Se a estria fosse feita perfeitamente sem nenhuma variação na espessura do dente ou do espaçamento, todos os dentes partilhariam a carga igualmente. Contudo, as realidades das tolerâncias de manufatura impedem essa condição ideal. A SAE afirma que "a prática real da manufatura tem mostrado que, devido às imprecisões no espaçamento e na forma do dente, o equivalente a 25% dos dentes está em contato e, portanto, uma fórmula aproximada para o comprimento de um eixo estriado é"

$$l \cong \frac{d_r^3\left(1 - d_i^4 / d_r^4\right)}{d_p^2} \tag{10.12}$$

onde d_r é o diâmetro da raiz da estria externa, d_i é o diâmetro interno (se houver) de um eixo vazado e d_p é o diâmetro primitivo (ou de referência) da estria, que fica aproximadamente no meio do dente. A variável l representa o comprimento realmente engajado entre os dentes da estria e deve ser considerado como o valor mínimo necessário para desenvolver a resistência nos dentes de um eixo de diâmetro equivalente.

A tensão de cisalhamento é calculada no diâmetro primitivo das estrias, onde a área de cisalhamento A_{cis} é

$$A_{cis} = \frac{\pi d_p l}{2} \tag{10.13a}$$

A tensão de cisalhamento pode ser calculada usando a suposição da SAE de que somente 25% dos dentes estão realmente partilhando a carga em qualquer instante ao considerar somente 1/4 da área de cisalhamento como em tensão:

$$\tau \cong \frac{4F}{A_{cis}} = \frac{4T}{r_p A_{cis}} = \frac{8T}{d_p A_{cis}} = \frac{16T}{\pi d_p^2 l} \tag{10.13b}$$

onde T é o torque no eixo. Quaisquer tensões de flexão na estria devem ser também calculadas e combinadas de forma apropriada com essa tensão de cisalhamento. Se o carregamento for torção pura e estática, então a tensão de cisalhamento da Equação 10.13*b* será comparada com a resistência de escoamento do material sob cisalhamento para obter o coeficiente de segurança. Se as cargas forem variadas ou se houver flexão, então as tensões aplicadas devem ser convertidas em tensões de tração equivalentes de von Mises e comparadas ao critério de resistência adequado usando o diagrama modificado de Goodman.

10.12 AJUSTES POR INTERFERÊNCIA

Um outro meio comum de acoplamento de um cubo a um eixo é usar um **ajuste por pressão** ou **por encolhimento**, também chamado de **ajuste por interferência**. Um ajuste por pressão é obtido fazendo um buraco no cubo para um diâmetro ligeiramente menor que aquele do eixo, como mostrado na Figura 10-18. As duas partes são, então, forçadas juntas lentamente em uma prensa, de preferência com óleo lubrificante aplicado à junta. A deflexão elástica do eixo e do cubo atua no sentido de criar grandes forças normais e de atrito entre as partes. A força de atrito transmite o torque do eixo ao cubo e resiste igualmente a movimentos axiais. A American Gear Manufacturers Association (AGMA) publica uma padronização ABMA 9003-A91, *Acoplamentos Flexíveis – Ajustes sem Chavetas* (*Flexible Couplings – Keyless Fits*) que define fórmulas para o cálculo de ajustes por interferência.

Somente peças relativamente pequenas podem ser ajustadas por pressão sem exceder a capacidade de força de uma prensa típica de oficina mecânica. Para peças grandes, um **ajuste por encolhimento** pode ser feito aquecendo-se o cubo para expandir seu diâmetro interno e/ou um **ajuste por expansão** pode ser feito resfriando-se o eixo para reduzir seu diâmetro. As peças quentes e frias podem ser escorregadas juntas com uma pequena força axial, e quando elas entrarem em equilíbrio com a temperatura ambiente, suas variações dimensionais vão criar a interferência desejada para contato por atrito. Um outro método é expandir hidraulicamente o cubo com óleo pressurizado por condutos no eixo ou cubo. Essa técnica também pode ser usada para remover um cubo.

A quantidade de interferência necessária para criar uma junta apertada varia com o diâmetro do eixo. O típico é aproximadamente 0,001 a 0,002 unidades de interferência diametral por unidade de diâmetro do eixo (a regra dos milésimos), as quantidades menores sendo usadas com diâmetros de eixo maiores. Por exemplo, a interferência para um diâmetro de 2 in seria cerca de 0,004 in, mas um diâmetro de 8 in receberia somente cerca de 0,009 a 0,010 in de interferência. Uma outra regra de memória de usinagem (e mais simples) é usar 0,001 in de interferência para diâmetros até 1 in e 0,002 in para diâmetros de 1 até 4 in.

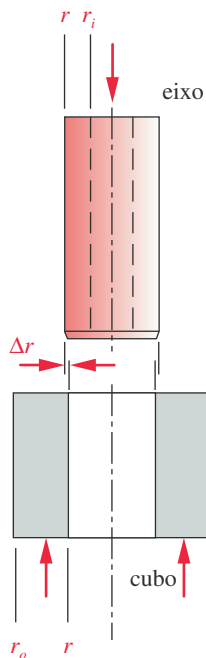



FIGURA 10-18

Um ajuste por interferência.

Tensões nos ajustes por interferência

Um ajuste por interferência cria o mesmo estado de tensão no eixo que uma pressão uniforme externa criaria na sua superfície. O cubo experimenta as mesmas tensões que um cilindro de parede grossa sujeito à pressão interna. As equações para tensões em um cilindro de paredes grossas foram apresentadas na Seção 4.17 e dependem das pressões aplicadas e dos raios dos elementos. A pressão p criada pelo ajuste à pressão pode ser encontrada pela deformação dos materiais causada pela interferência.

$$p = \frac{0{,}5\delta}{\dfrac{r}{E_o}\left(\dfrac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \dfrac{r}{E_i}\left(\dfrac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)} \qquad (10.14a)$$

onde $\delta = 2\Delta r$ é a interferência diametral total entre as duas peças, r é o raio nominal da interface entre as peças, r_i é o raio interno (se houver) de um eixo vazado e r_o é o raio externo do cubo, como mostrado na Figura 10-18. E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson das duas partes, respectivamente.

O torque que pode ser transmitido por ajuste por interferência pode ser definido em termos da pressão p na interface, o que cria uma força de atrito no raio do eixo.

$$T = 2\pi r^2 \mu p l \tag{10.14b}$$

onde l é o comprimento do cubo engajado, r é o raio do eixo e μ é o coeficiente de atrito entre o eixo e o cubo. A padronização da AGMA sugere um valor de $0{,}12 \le \mu \le 0{,}15$ para cubos expandidos hidraulicamente e $0{,}15 < \mu < 0{,}20$ para cubos de ajuste por encolhimento ou pressão. A AGMA supõe (e recomenda) uma acabamento superficial de 32 μin rms (1,6 μm R_a), o que requer um acabamento polido em ambos diâmetros. As Equações 10.14*a* e 10.14*b* podem ser combinadas para dar uma expressão que defina o torque que se pode obter para uma deformação, coeficiente de atrito e geometria particulares.

$$T = \frac{\pi l r \mu \delta}{\frac{1}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \frac{1}{E_i}\left(\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)} \tag{10.14c}$$

A pressão p é usada nas Equações 4.47 para encontrar as tensões radial e tangencial em cada peça. Para o eixo:

$$\sigma_{t_{eixo}} = -p\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} \tag{10.15a}$$

$$\sigma_{r_{eixo}} = -p \tag{10.15b}$$

onde r_i é o raio interno de um eixo vazado. Se o eixo for sólido, r_i será zero.

Para o cubo:

$$\sigma_{t_{cubo}} = p\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} \tag{10.16a}$$

$$\sigma_{r_{cubo}} = -p \tag{10.16b}$$

Essas tensões precisam ser mantidas abaixo das resistências de escoamento dos materiais para manter o ajuste. Se os materiais escoarem, o cubo se soltará do eixo.

Concentração de tensão nos ajustes por interferência

Embora não exista nenhuma alteração na suavidade da superfície do eixo ajustado à pressão por causa de ressaltos ou rasgos de chaveta, mesmo assim um ajuste por interferência cria concentração de tensões no eixo e no cubo nas extremidades do cubo, devido à transição abrupta do material de incomprimido a comprimido. A Figura 10-19*a* mostra um estudo fotoelástico de um cubo de ajuste à pressão em um eixo. As franjas mostram concentração de tensão nos cantos. A Figura 10-19*b* mostra como a concentração de tensão pode ser reduzida pela introdução de rasgos circunferenciais de alívio nas faces do cubo próximas ao diâmetro do eixo. Esses rasgos fazem o material na extremidade do cubo mais complacente, possibilitando-lhe defletir-se para longe do eixo e reduzir as tensões localmente. Esse método é similar às técnicas de redução de concentração de tensão mostradas na Figura 4-38.

A Figura 10-20 mostra as curvas dos fatores de concentração de tensão para ajustes por interferência entre cubos e eixos desenvolvido pelo estudo fotoelástico da Figura 10-19*a*. Os valores na abscissa são as razões entre o comprimento

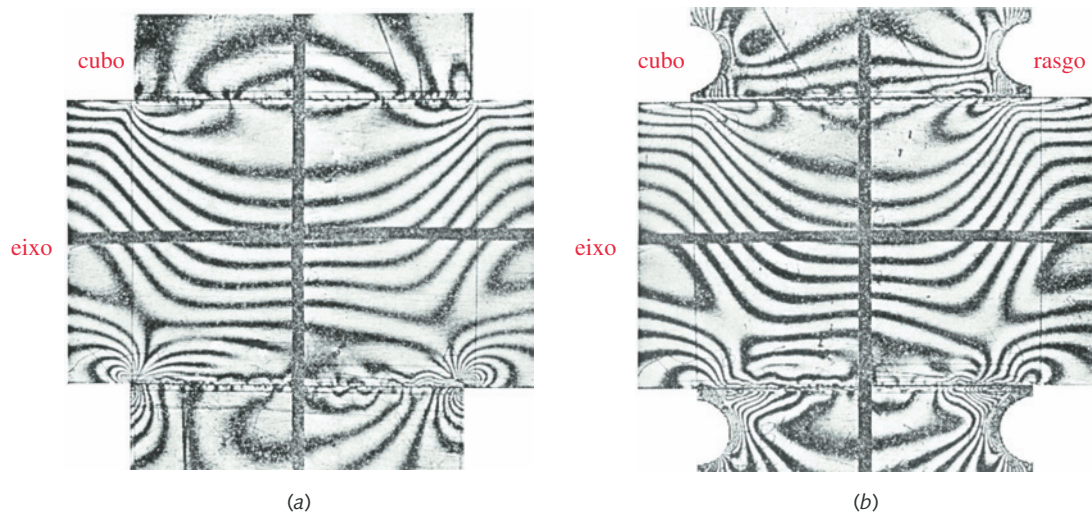



FIGURA 10-19

Análise fotoelástica de tensões de (*a*) montagem comum de ajuste por pressão e (*b*) montagem com rasgo no cubo para ajuste por pressão. (Fonte: R. E. Peterson e A. M. Wahl "Fatigue of Shafts at Fitted Members, with a Related Photoelastic Analysis" *ASME J. App Mech*, vol. 57, p. A1, 1935.)

do cubo e o diâmetro do eixo. Esses fatores de concentração de tensão geométricos são aplicados da mesma maneira que antes. Para carregamento estático, eles necessitam ser usados para determinar se o escoamento local comprometerá o ajuste por interferência. Para carregamento dinâmico, eles são modificados pela sensitividade do material ao rasgo de modo a obter um fator de concentração de tensão por fadiga para se usar na Equação 10.8 de projeto de eixo.

Corrosão por microabrasão

Este problema foi discutido no Capítulo 7. Ajustes por interferência são as vítimas primárias desta classe de problemas. Embora o mecanismo de desgaste não esteja completamente entendido, sabe-se que certas precauções ajudam a reduzir sua severidade. Ver a Seção 7.6 para mais detalhes.

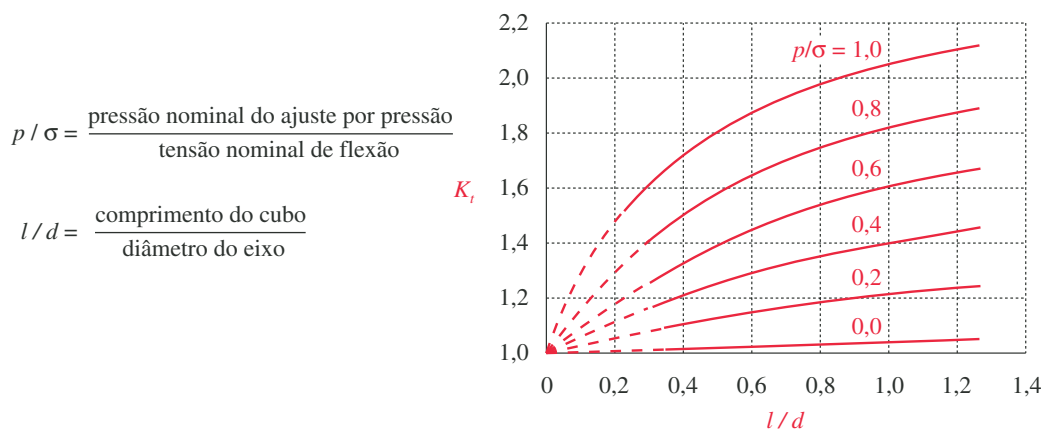



FIGURA 10-20

Concentração de tensão em um ajuste por pressão ou ajuste por encolhimento do cubo em um eixo. (Fonte: R. E. Peterson and A. M. Wahl "Fatigue of Shafts at Fitted Members with a Related Photoelastic Analysis" *ASME J. App Mech*, vol. 57, p. A73, 1935.)

EXEMPLO 10-5

Projeto de um ajuste por interferência

Problema **Reprojete a fixação da engrenagem ao eixo da Figura 10-5 para torná-la um ajuste por interferência em vez de uma conexão por chaveta. Defina o eixo e as dimensões do furo da engrenagem e suas tolerâncias para um ajuste por pressão.**

Dados **O carregamento é o mesmo que no Exemplo 10-2. O torque de pico na engrenagem (ponto *B*) é 146 lb-in. Use os diâmetros nominais do eixo d_0 = 0,875 in, d_1 = 0,750 in. Ver a Figura 10-5 para legendas. O diâmetro do cubo da engrenagem é 3 in e seu comprimento é 1,5 in.**

Hipóteses **O material do eixo é o mesmo que no Exemplo 10-2. É usado o ferro fundido cinza classe 40 para a engrenagem com S_{ut} = 42 kpsi e E = 14 Mpsi. Ver a Figura 10-20 para os fatores de concentração de tensão. O diâmetro do eixo 0,750 será aumentado ligeiramente a 0,780 nominal, onde ele se ajusta por pressão ao cubo da engrenagem para permitir à engrenagem escorregar sobre o resto do eixo na montagem.**

Solução **Ver a Figura 10-5 e a Tabela 10-4.**

1 O diâmetro nominal do eixo no cubo da engrenagem é 0,780 in. Baseado na regra dos milésimos, uma interferência diametral razoável seria 0,0015 in. A partir dessa suposição, a pressão após ajuste forçado pode ser encontrada através da Equação 10.14.

$$p = \frac{0{,}5\delta}{\dfrac{r}{E_o}\left(\dfrac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \dfrac{r}{E_i}\left(\dfrac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)}$$

$$= \frac{0{,}5(0{,}0015)}{\dfrac{0{,}390}{1{,}4E7}\left(\dfrac{1{,}5^2 + 0{,}390^2}{1{,}5^2 - 0{,}390^2} + 0{,}28\right) + \dfrac{0{,}390}{3{,}0E7}\left(\dfrac{0{,}390^2 + 0}{0{,}390^2 - 0} - 0{,}28\right)} \qquad (a)$$

p = 15288 psi

2 As tensões no eixo após a montagem sob pressão são encontradas pelas Equações 10.15

$$\sigma_{t_{eixo}} = -p\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} = -15288\frac{0{,}390^2 + 0}{0{,}390^2 - 0} = -15288 \text{ psi} \qquad (b)$$

$$\sigma_{r_{eixo}} = -p = -15288 \text{ psi} \qquad (c)$$

3 As tensões no cubo após a montagem sob pressão são encontradas pelas Equações 10.16

$$\sigma_{t_{cubo}} = p\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} = 15288\frac{1{,}5^2 + 0{,}390^2}{1{,}5^2 - 0{,}390^2} = 17505 \text{ psi} \qquad (d)$$

$$\sigma_{r_{cubo}} = -p = -15288 \text{ psi} \qquad (e)$$

4 Para encontrar o fator de concentração de tensão, precisamos da razão do comprimento do cubo para o diâmetro do eixo, l/d:

$$\frac{l}{d} = \frac{1{,}500}{0{,}780} = 1{,}923 \qquad (f)$$

e a razão entre o ajuste por pressão forçado e a tensão nominal de flexão:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{65,6(0,390)64}{\pi(0,780^4)} = 1408 \text{ psi} \tag{g}$$

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{15288}{1408} = 10,9 \tag{h}$$

5 Tomando esses valores na Figura 10-20, descobrimos que eles estão fora do gráfico. Vamos pressupor um valor aproximado para o fator de concentração de tensão de:

$$K_t \cong 2,4 \tag{i}$$

6 Os coeficientes de segurança contra falha durante o ajuste por pressão agora podem ser encontrados:

$$N_{s_{eixo}} = \frac{S_y}{K_t \sigma_{t_{eixo}}} = \frac{-38000}{2,4(-15288)} = 1,0 \tag{j}$$

$$N_{s_{cubo}} = \frac{S_{ut}}{K_t \sigma_{t_{cubo}}} = \frac{42000}{2,4(17505)} = 1,0 \tag{k}$$

7 Ambas as peças estão em falha com tanta interferência. Os cálculos foram repetido para um intervalo de interferência de 0,0008 a 0,0015 in, e os resultados são mostrados na Tabela 10-4. Os coeficientes de segurança variam de 2,0 a 1,0.

8 Gostaríamos de ter um intervalo de tolerância de pelo menos 0,0002 in em cada peça ou uma variação total na interferência de pelo menos 0,0004 in para um conjunto de peças produzidas em quantidade. Assim, escolhemos definir o intervalo de interferência de 0,0008 a 0,0013 in, uma variação total de 0,0005 in.

9 As dimensões das peças são, portanto,

$$\begin{aligned} \textit{diâmetro do cubo} &= 0,7799 + 0,0003/-0,0000 = \frac{0,7802}{0,7799} \text{ in} \\ \textit{diâmetro do eixo} &= 0,7812 + 0,0000/-0,0002 = \frac{0,7812}{0,7810} \text{ in} \end{aligned} \tag{l}$$

dando um nível de interferência de

$$\begin{aligned} \text{interferência mínima} &= 0,7810 - 0,7802 = 0,0008 \text{ in} \\ \text{interferência máxima} &= 0,7812 - 0,7799 = 0,0013 \text{ in} \end{aligned} \tag{m}$$

10 Que torque essa junção por pressão transmitirá com sua interferência mínima, supondo $\mu = 0,15$? Pela Equação 10.14c:

$$T = \frac{\pi l r \mu \delta}{\frac{1}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \frac{1}{E_i}\left(\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)}$$

$$T = \frac{\pi(1,5)(0,375)(0,15)(0,000\,8)}{\frac{0,375}{1,4E7}\left(\frac{1,5^2 + 0,390^2}{1,5^2 - 0,390^2} + 0,28\right) + \frac{0,375}{3,0E7}\left(\frac{0,390^2 + 0}{0,390^2 - 0} - 0,28\right)} \tag{n}$$

$$T = 1753 \text{ in.lb}$$

Este torque é bem maior que o torque máximo de operação de 146 in-lb, portanto a junção funcionará.*

* Os arquivos EX10-05 estão no CD-ROM.

Tabela 10-4 Coeficientes de segurança para várias interferências no Exemplo 10-5

Interferência (in)	p (psi)	p/σ	K_t	$N_{S_{eixo}}$	$N_{S_{cubo}}$
0,0008	8154	5,8	2,3	2,0	1,9
0,0009	9173	6,5	2,4	1,8	1,7
0,0010	10192	7,2	2,4	1,6	1,5
0,0011	11212	8,0	2,4	1,4	1,4
0,0012	12231	8,7	2,4	1,3	1,3
0,0013	13250	9,4	2,4	1,2	1,2
0,0014	14269	10,1	2,4	1,1	1,1
0,0015	15288	10,9	2,4	1,0	1,0

10.13 PROJETO DE VOLANTE*

Um volante é usado para suavizar as variações na velocidade de um eixo causadas pelas variações de torque. Muitas máquinas têm padrões de carga que causam a variação da função torque-tempo no ciclo. Pistões de compressores, prensas, esmagadores de pedras, etc., todos têm cargas variando com o tempo. A parte móvel primária também pode introduzir oscilações de torque ao eixo de transmissão. Motores de combustão interna com um ou dois cilindros são um exemplo. Outros sistemas podem ter tanto fonte de torque quanto carga suaves, como ocorre em geradores elétricos comandados por turbinas a vapor. Esses dispositivos de ação suave não têm necessidade de um volante. Se a fonte de comando do torque ou a carga de torque tiverem uma natureza variável, então um volante é normalmente requerido.

Um volante é um dispositivo de armazenamento de energia. Ele absorve e armazena energia cinética quando acelerado e retorna energia ao sistema quando necessário, diminuindo sua velocidade de rotação. A energia cinética E_k em um sistema em rotação é

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \omega^2 \tag{10.17a}$$

onde I_m é o momento de inércia de toda a massa rodando no eixo ao redor do eixo de rotação e ω é a velocidade de rotação. Esta inclui a I_m do rotor do motor e qualquer outra coisa rodando com o eixo além da massa do volante.

Volantes podem ser tão simples como um disco cilíndrico de material sólido, ou podem ser de construção nervurada com um cubo e um aro. O último arranjo é mais eficiente em termos de material, especialmente para grandes volantes, porque ele concentra o grosso de sua massa no aro, o qual tem o raio maior. Devido ao fato de que o momento de inércia da massa I_m de um volante é proporcional a mr^2, a massa em raios maiores contribui mais. Se supusermos a geometria de um disco sólido com um raio interno r_i e um raio externo r_o, o momento de inércia da massa é

$$I_m = \frac{m}{2}\left(r_o^2 + r_i^2\right) \tag{10.17b}$$

A massa de um disco circular sólido de espessura constante t com um furo no centro é

$$m = \frac{W}{g} = \pi \frac{\gamma}{g}\left(r_o^2 - r_i^2\right)t \tag{10.17c}$$

* Partes desta seção foram adaptadas de R. L. Norton, *Design of Machinery*, 4th ed, McGraw-Hill, 2008, pp. 596-602, com a autorização do editor.

Substituindo m na Equação 10.17b temos uma expressão para I_m em termos da geometria do disco:

$$I_m = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{g}\left(r_o^4 - r_i^4\right)t \tag{10.17d}$$

onde γ é a densidade em peso do material e g é a constante gravitacional.

Existem dois estágios para o projeto de um volante. Primeiro, deve-se encontrar a quantidade de energia requerida para o grau desejado de suavidade e determinar o momento de inércia necessário para absorver essa energia. A seguir, a geometria do volante deve ser definida de forma a prover o momento de inércia de massa em um pacote de tamanho razoável e também ser segura contra falhas nas velocidades de projeto.

Variação de energia em um sistema em rotação

A Figura 10-21 mostra um volante, projetado como um disco circular plano, preso a um eixo motor. O motor supre um torque de magnitude T_m, que gostaríamos que fosse tão constante quanto possível, isto é, ser igual ao torque médio $T_{média}$. Suponha que a carga no outro lado do volante demande um torque T_l, que varia com o tempo, como mostrado na Figura 10-22. Essa variação de torque pode causar uma variação na velocidade do eixo dependendo das características torque-velocidade do eixo motor. Precisamos determinar quanto I_m devemos adicionar na forma de um volante para reduzir a variação de velocidade do eixo a um nível aceitável. Escreva a lei de Newton para o diagrama de corpo livre da Figura 10-21:

$$\sum T = I_m \alpha \tag{10.18a}$$
$$T_l - T_m = I_m \alpha$$

mas queremos $\quad T_m = T_{média}$

portanto $\quad T_l - T_{média} = I_m \alpha \quad (10.18b)$

Substituindo $\quad \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{d\theta}\right) = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$

temos $\quad T_l - T_{média} = I_m \omega \dfrac{d\omega}{d\theta}$

$$\left(T_l - T_{média}\right)d\theta = I_m \omega\, d\omega \tag{10.18c}$$

Integrando

$$\int_{\theta @ \omega_{min}}^{\theta @ \omega_{max}} \left(T_l - T_{média}\right)d\theta = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} I_m \omega\, d\omega$$
$$\int_{\theta @ \omega_{min}}^{\theta @ \omega_{max}} \left(T_l - T_{média}\right)d\theta = \frac{1}{2} I_m \left(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2\right) \tag{10.18d}$$

O lado esquerdo dessa expressão representa a mudança na energia cinética E_k entre a velocidade de rotação ω máxima e mínima do eixo e é igual à área sob o diagrama torque-tempo da Figura 10-22 entre aqueles valores extremos de ω. O lado direito da Equação 10.18c é a mudança na energia cinética armazenada no volante. A única maneira de extrair energia cinética do volante é desacelerando-o, como mostrado na Equação 10.17a. O acréscimo de energia cinética acelera

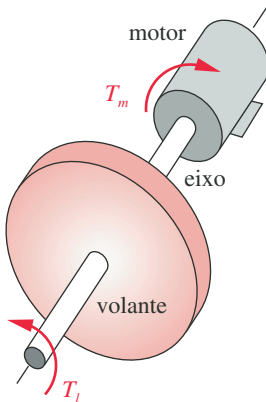



FIGURA 10-21

Um volante em um eixo de transmissão.

o volante. É impossível obter velocidade exatamente constante no eixo em face das mudanças de energia requeridas pelas cargas. O melhor que podemos fazer é minimizar a variação de velocidade ($\omega_{max} - \omega_{min}$) usando um volante com I_m suficientemente grande.

EXEMPLO 10-6

Determinação da variação da energia em uma função torque-tempo

Problema **Encontre a variação da energia por ciclo em uma função torque-tempo que necessita ser absorvida por um volante para operar suavemente.**

Dados **Uma função torque-tempo que varia sobre seu ciclo como mostrado na Figura 10-22. O torque varia durante o ciclo de 360° em torno de seu valor médio.**

Hipóteses **O ciclo de variação de torque mostrado é representativo das condições de regime. A energia enviada desde a fonte até a carga será considerada positiva, e a energia retornada desde a carga até a fonte, negativa.**

Solução

1 Calcule o valor médio da função torque-tempo sobre um ciclo usando integração numérica. Nesse caso, é 7020 in-lb. (Observe que, em alguns casos, o valor médio pode ser zero.)

2 Observe que a integração no lado esquerdo da Equação 10.18*c* é feita com respeito à linha média da função de torque, não com respeito ao eixo θ. (Pela definição de média, a soma da área positiva sobre uma linha média

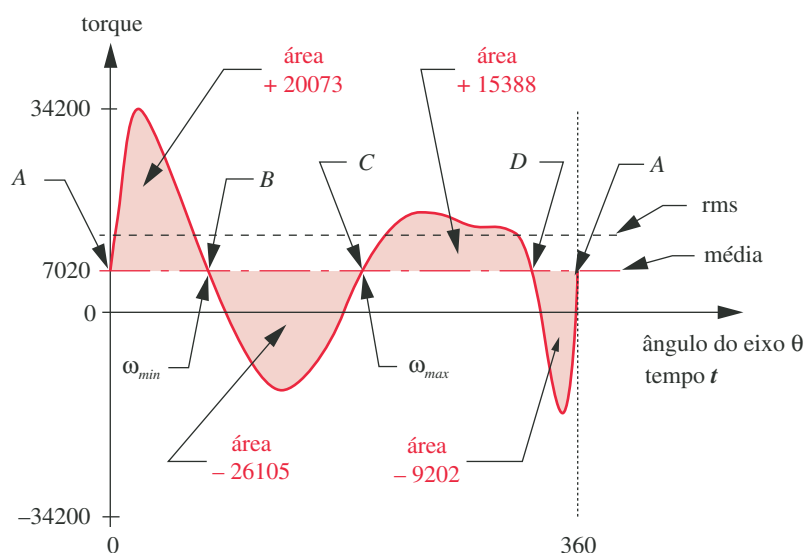



FIGURA 10-22

Integração dos pulsos acima e abaixo do valor médio na função torque-tempo.

Tabela 10-5 Acumulação de pulsos de energia em uma curva torque-tempo

De	ΔÁrea = ΔE	Soma acumulada = E	Mín e Máx
A até *B*	+20073	+20073	ω_{min} @ *B*
B até *C*	–26105	–6032	ω_{max} @ *C*
C até *D*	+15388	+9356	
D até *A*	–9202	+154	

ΔEnergia total $= E @ \omega_{max} - E @ \omega_{min}$

$= (-6032) - (+20073) = -26105$ in-lb

é igual à soma da área negativa abaixo daquela linha.) Os limites de integração na Equação 10.18 são do ângulo θ do eixo, no qual ω do eixo é um mínimo, até o ângulo θ do eixo, no qual ω é um máximo.

3 O mínimo ω ocorrerá depois que o máximo de energia positiva tenha sido liberado pelo motor até a carga, isto é, na posição angular θ onde a soma da energia positiva (área) nos pulsos de torque estiver em seu valor positivo máximo.

4 O máximo ω ocorrerá depois que o máximo de energia negativa tiver sido retornado à carga, isto é, em um ponto θ onde a soma da energia (área) nos pulsos de torque estiver em seu valor negativo máximo.

5 Para encontrar essas posições em θ correspondentes aos máximos e mínimos de ω e assim encontrar a quantidade de energia necessária para ser armazenada no volante, precisamos integrar numericamente cada pulso dessa função de uma intersecção a outra dessa função com a linha média. Os pontos de intersecção foram rotulados *A*, *B*, *C* e *D*, e as áreas entre eles são mostradas na Figura 10-22.

6 A tarefa remanescente é calcular essas áreas de pulso começando em uma intersecção arbitrária (neste caso, o ponto *A*) e procedendo pulso a pulso pelo ciclo. A Tabela 10-5 mostra esse processo e o resultado.

7 Observe, na Tabela 10-5, que a velocidade mínima do eixo ocorre depois que o maior pulso de energia acumulada positiva (+ 20073 in-lb) tiver sido liberado do eixo motor até o sistema. Essa liberação de energia desacelera o motor. A máxima velocidade do eixo ocorre depois que o maior pulso de energia acumulada negativa (–6032 in-lb) tiver sido recebido de volta pelo eixo. Esse retorno de energia armazenada tenderá a acelerar o motor. A variação total de energia é a diferença algébrica entre esses dois valores extremos, que neste exemplo é –26105 in-lb. Essa energia retornando desde a carga necessita ser absorvida pelo volante e, mais tarde, retornada ao sistema dentro de cada ciclo para suavizar as variações de velocidade do eixo. Veja os arquivos EX09-07*a* e EX09-07*b*, que também contêm os cálculos do Exemplo 10-6.

Determinação da inércia do volante

Devemos determinar agora o tamanho do volante necessário para absorver a energia com uma mudança aceitável na velocidade. A mudança na velocidade do eixo durante um ciclo é chamada de sua flutuação *Fl* e é igual a

$$Fl = \omega_{max} - \omega_{min} \tag{10.19a}$$

Podemos normalizar essa variação dividindo uma razão adimensional pela velocidade média do eixo. Essa razão é chamada de coeficiente de flutuação C_f.

$$C_f = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})}{\omega_{média}} \tag{10.19b}$$

Esse coeficiente de variação é um parâmetro de projeto a ser escolhido pelo projetista. É normalmente escolhido um valor entre 0,01 e 0,05 para maquinaria de precisão, e até 0,20 para maquinarias de esmagamento ou martelamento, o que corresponde de 1 a 5% de flutuação na velocidade do eixo. Quanto menor for o valor escolhido, maior o volante terá que ser. Isso representa uma negociação de projeto. Um volante maior adicionará maiores custos e peso ao sistema, que são fatores que devem ser considerados comparados com a suavidade de operação desejada.

Encontramos a mudança requerida na energia cinética E_k integrando a curva de torque,

$$\int_{\theta @ \omega_{min}}^{\theta @ \omega_{max}} (T_l - T_{média})\, d\theta = E_k \tag{10.20a}$$

e podemos, agora, igualá-la ao lado direito da Equação 10.18*c*:

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \left(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2\right) \tag{10.20b}$$

Fatorando essa expressão:

$$E_k = \frac{1}{2} I_m (\omega_{max} + \omega_{min})(\omega_{max} - \omega_{min}) \tag{10.20c}$$

Se a função torque-tempo for uma função harmônica pura, então seu valor médio pode ser expresso exatamente como

$$\omega_{média} = \frac{(\omega_{max} + \omega_{min})}{2} \tag{10.21}$$

Nossas funções de torque raramente serão funções harmônicas puras, mas o erro introduzido pelo uso dessa expressão como uma aproximação para a média é aceitável. Podemos substituir agora as Equações 10.19*b* e 10.21 na Equação 10.20*c* para obter uma expressão para o momento de inércia da massa, I_s, necessário ao sistema rotativo completo a fim de obter o coeficiente de variação selecionado.

$$E_k = \frac{1}{2} I_s (2\omega_{média})(C_f \omega_{média})$$

$$I_s = \frac{E_k}{C_f \omega_{média}^2} \tag{10.22}$$

A Equação 10.22 pode ser usada para projetar o volante físico selecionando um coeficiente de flutuação desejado, C_f, e usando o valor de E_k obtido pela integração numérica da curva de torque (ver a Tabela 10-5 para um exemplo) e a velocidade ω média do eixo para calcular o I_s necessário do sistema. O momento de inércia de massa, I_m, do volante é, então, igualado ao requerido pelo sistema I_s. Mas, se os momentos de inércia de outros elementos em rotação no mesmo eixo (por exemplo, o motor) forem conhecidos, o I_m requerido pelo volante físico pode ser reduzido por tais quantidades.

O projeto de volante mais eficiente em termos de maximização do I_m para uso mínimo de material é aquele no qual a massa está concentrada no seu aro e seu cubo é suportado em nervuras, como em uma roda de carruagem. Isso põe a maior parte da massa no maior raio possível e minimiza o peso para um dado I_m. Mesmo que o projeto de um volante de um disco circular plano fosse escolhido, quer por simplicidade de construção ou para obter uma superfície plana para outras funções (como em uma embreagem de automóvel), o projeto deveria ser feito de forma a reduzir peso e custo. Sendo, em geral, $I_m = mr^2$, um disco fino de diâmetro grande necessitará menos libras de material para obter um dado I_m que um disco grosso de diâmetro menor. Materiais densos como ferro fundido e aço, são as escolhas óbvias para um volante. O alumínio é raramente usado. Embora muitos metais (chumbo, ouro, prata, platina) sejam mais densos que o ferro e o aço, raramente se consegue obter a aprovação do departamento de contabilidade para usá-los em volantes.

A Figura 10-23 mostra a mudança no torque da Figura 10-22 depois da adição de um volante dimensionado para prover um coeficiente de variação de 0,05. A oscilação no torque ao redor do valor médio inalterado é agora 5%, muito menor que o que era sem o volante. Observe que o valor pico é agora 87 em vez de 372 lb-in. Uma potência de motor muito menor pode agora ser usada, porque o volante é capaz de absorver a energia retornada da carga durante o ciclo.

Tensões nos volantes

À medida que um volante gira, a força centrífuga age sobre sua massa distribuída no sentido de apartá-la. Essas forças centrífugas são similares àquelas causadas pela pressão interna em um cilindro. Assim, o estado de tensão em um volante rodando é análogo a um cilindro de parede grossa sob pressão interna (ver a Seção 4.17). A tensão tangencial de um disco volante sólido como uma função de seu raio r é

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \tag{10.23a}$$

e a tensão radial é

$$\sigma_r = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 - \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - r^2\right) \tag{10.23b}$$

onde γ = densidade em peso (peso específico) do material, ω = velocidade angular em rad/s, ν = coeficiente de Poisson, r é o raio de um ponto de interesse e r_i, r_o são os raios interno e externo de um volante de disco sólido.

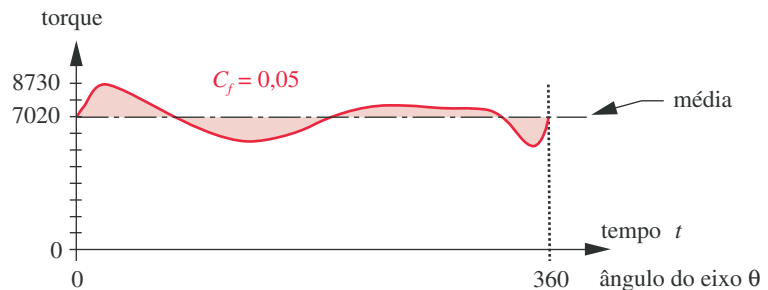



FIGURA 10-23

Função torque-tempo da Figura 10-22 após a adição de um volante com $C_f = 0,05$.

A Figura 10-24 mostra como essas tensões variam sobre o raio de um volante. A tensão tangencial é máxima no raio interno. A tensão radial é zero nos raios interno e externo e é máxima em um ponto interior, mas em qualquer outro lugar é menor que a tensão tangencial. O ponto de maior interesse está, portanto, no raio interno. A tensão de tração tangencial naquele ponto é o que provoca a falha de um volante, e quando este se fratura naquele ponto, tipicamente ele se fragmenta e explode com resultados extremamente perigosos. Devido ao fato de que as forças causadoras das tensões são uma função da velocidade de rotação, haverá sempre uma velocidade na qual o volante falhará. Deve-se calcular a velocidade máxima de operação segura para um volante e devem-se tomar algumas precauções para prevenir sua operação a velocidades superiores, como o uso de um controlador de velocidade. Um coeficiente de segurança contra o excesso de velocidade pode ser determinado como o quociente da velocidade que causará o escoamento sobre a velocidade de operação $N_{os} = \omega/\omega_{escoam}$.

FIGURA 10-24

Distribuição de tensão ao longo do raio de um volante em rotação.

Critério de falha

Se o volante passar a maior parte de sua vida operando essencialmente à velocidade constante, então pode-se considerar que esteja sendo carregado estaticamente e que a resistência de escoamento esteja sendo usada como um critério de falha. O número de ciclos de arranque-parada em seu regime de operação determinará se a situação de carregamento de fadiga necessita ser considerada. Cada período de aceleração até a velocidade operacional e desaceleração a zero constitui um ciclo de flutuação de tensão. Se o número desses ciclos de arranque-parada for o suficientemente grande na vida projetada do sistema, então um critério de falha por fadiga deve ser aplicado. Um regime de fadiga de poucos ciclos pode requerer uma análise de falha por fadiga baseado em deformações em vez de tensões, especialmente se existir a possibilidade de quaisquer sobrecargas transientes que possam fazer as tensões locais excederem a tensão de escoamento com concentrações de tensão.

EXEMPLO 10-7

Projeto de um volante de disco sólido

Problema **Projete um volante adequado para o sistema do Exemplo 10-6. O coeficiente de segurança contra excesso de velocidade de pelo menos 2 é desejado.**

Dados **Uma função torque-tempo de entrada que varia ao longo de seu ciclo, como mostrado na *F*igura 10-20. O torque é variável durante o ciclo de 360° ao redor de seu valor médio, e a variação da energia por ciclo é 26105 in-lb, como mostrado na Tabela 10-5. A velocidade angular do eixo $\omega = 800$ rad/s.**

Hipóteses **A variação do torque no ciclo mostrado é representativa da condição de regime. O coeficiente de variação desejável é 0,05. O sistema está em operação contínua com um número mínimo de ciclos arranque-parada. Um aço de resistência ao escoamento de 62 kpsi será usado. Nenhuma chaveta será usada a fim de reduzir a concentração de tensões. Em vez disso, um cubo cônico travante o acoplará por atrito ao eixo e o cubo será parafusado axialmente ao volante.**

Solução **Ver a Figura 10-25 e a Tabela 10-6.**

1 Sabemos a quantidade de energia necessária a partir do diagrama torque--tempo do Exemplo 10-6 e temos definida a velocidade angular ω e um coeficiente de variação desejado. A partir desses dados podemos determinar o momento de inércia de massa requerido para o sistema I_s usando a Equação 10.22.

$$I_s = \frac{E}{C_f \omega^2_{média}} = \frac{26105}{0,05(800)^2} = 0,816 \text{ lb-in s}^2 \tag{a}$$

O volante necessita apenas suprir uma porção dessa quantidade, se outras massas em rotação, como a armadura do motor, estiverem presentes. Contudo, suporemos neste exemplo que o volante proverá toda a inércia requerida, fazendo $I_m = I_s$.

2 As dimensões do volante para este momento de inércia podem ser definidas pela Equação 10.17*d*. Vamos pressupor que o material seja aço com $\gamma =$ 0,28 lb/in^3 e raio interno $r_i = 1$ in.

$$I_m = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{g}\left(r_o^4 - r_i^4\right)t = 0,816$$

$$0,816 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{0,28}{386}\right)\left(r_o^4 - 1^4\right)t$$

$$716,14 = \left(r_o^4 - 1\right)t \tag{b}$$

Assim, o I_m requerido pode ser obtido com uma infinidade de combinações de raio r_o do volante e espessura t para os dados pressupostos.

3 A melhor solução da Equação (*b*) será aquela que equilibra os fatores conflitantes do tamanho do volante, peso, tensões e coeficiente de segurança. Considere dois projetos possíveis, um com uma espessura t pequena e outro com uma espessura t grande. O volante fino será maior no diâmetro mas consideravelmente mais leve que o volante grosso devido às não linearidades dos termos envolvendo r_o. Mas, à medida que r_o aumenta, também as tensões aumentarão, porque a massa em raios maiores exerce maior força centrífuga no material.

4 Para obter um valor de r_o que seja consistente com qualquer coeficiente de segurança desejado, a equação da tensão tangencial 10.23*a* pode ser resolvida de forma inversa com valores assumidos de $\sigma_t = S_y / N_y$, r_i e os parâmetros do material ν e γ,

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) = \frac{S_y}{N_y}$$

$$\frac{62000}{N_y} = \frac{0,28}{386}(800)^2\left(\frac{3+0,28}{8}\right)\left(1 + r_o^2 + \frac{r_o^2}{1} - \frac{1+3(0,28)}{3+0,28}(1)\right) \tag{c}$$

$$r_o^2 = \frac{162,9}{N_y} - 0,535$$

Aquele valor de r_o pode, então, ser usado na Equação (*b*) para encontrar a espessura do volante. Para um coeficiente de segurança de projeto contra escoamento de 2,5 e os valores assumidos na Equação (*c*), obtemos $r_o =$ 8,06 in e $t = 0,172$ in.

5. Com a geometria do volante agora definida, a velocidade de rotação para a qual o escoamento começará pode ser calculada pela Equação 10.17*d* usando a resistência de escoamento para o valor de tensão.

Tabela 10-6 Dados para o Exemplo 10-7 com I_m = 0,816 lb-in-s²

Espessura (in)	Diâmetro (in)	*r/t* Razão	Peso (lb)	Tensão (psi)	Coeficiente de segurança no escoamento	Coeficiente de segurança de excesso de velocidade
0,125	17,40	69,6	8,20	28896	2,1	1,5
0,250	14,63	29,3	11,60	20459	3,0	1,7
0,375	13,22	17,6	14,10	16722	3,7	1,9
0,500	12,31	12,3	16,20	14494	4,3	2,1
0,625	11,64	9,3	18,10	12974	4,8	2,2
0,750	11,12	7,4	19,70	11852	5,2	2,3
0,875	10,70	6,1	21,30	10980	5,6	2,4
1,000	10,35	5,2	22,70	10277	6,0	2,5
1,125	10,05	4,5	24,00	9,695	6,4	2,5
1,250	9,79	3,9	25,20	9,202	6,7	2,6

$$\sigma_t = S_y = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

$$62000 = \frac{0,28}{g}\omega_{escoam}^2\left(\frac{3+0,28}{8}\right)\left(1+8,06^2+\frac{8,06^2}{1}-\frac{1+3(0,28)}{3+0,28}(1)\right) \quad (d)$$

$$\omega_{escoam} = 1265 \text{ rad/s}$$

Dado que essa velocidade operacional causa falha, um coeficiente de segurança contra excesso de velocidade pode ser calculado a partir de

$$N_{os} = \frac{\omega_{escoam}}{\omega} = \frac{1265 \text{ rad/s}}{800 \text{ rad/s}} = 1,6 \quad (e)$$

6 Para mostrar a variação dos parâmetros com a geometria do volante, este conjunto de equações foi resolvido para uma lista de possíveis espessuras *t* escolhidas em um intervalo de valores razoáveis para projeto de 0,125 a 1,25 in. A Tabela 10-6 mostra os dados resultantes e a Figura 10-25 mostra as tendências. Observe que o peso *aumenta* à medida que o diâmetro externo *diminui* e a espessura aumenta. A tensão tangencial máxima no raio interno *diminui* com a *diminuição* de r_o, o coeficiente de segurança contra escoamento aumenta de 2,1 a 6,7 e o coeficiente de segurança para excesso de velocidade varia de 1,5 a 2,6 nesse intervalo de espessuras.

7 A escolha final de projeto é $t = 0,428$ in e $r_o = 6,36$ in, porque esse valor tem uma mistura razoável de valores de parâmetros (tamanho, peso) e provê um coeficiente de segurança 2 contra excesso de velocidade. Em outras palavras, o volante poderia alcançar uma velocidade de até 2 vezes sua velocidade de projeto antes que houvesse o escoamento. O coeficiente de segurança contra escoamento a baixas velocidades de projeto será então sempre mais alto e agora é 4. A escolha de coeficientes de segurança maiores exigirá uma penalidade de peso, como pode ser visto na Figura 10-25. Veja os arquivos EX10-07*a* e EX10-07*b* que também possuem os cálculos para o Exemplo 10-6.

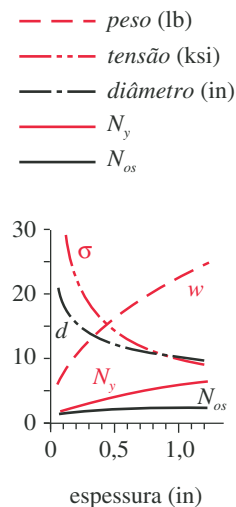



FIGURA 10-25

Variação do peso, tensão, fatores de segurança e diâmetro com a espessura do volante no Exemplo 10-7.

10.14 VELOCIDADES CRÍTICAS DE EIXOS

Todos os sistemas que contêm elementos de armazenamento de energia possuirão um conjunto de frequências naturais nas quais o sistema vibrará com ampli-

tudes potencialmente grandes. Qualquer massa móvel armazena energia cinética e qualquer mola armazena energia potencial. Todos os elementos têm massa, e se eles também tiverem uma velocidade, eles armazenarão energia cinética. Quando um sistema dinâmico vibra, uma transferência de energia de potencial a cinética a potencial, etc., repetidamente ocorrerá dentro do sistema. Os eixos satisfazem esses critérios, rodando com alguma velocidade e defletindo tanto em torção quanto em flexão.

Se um eixo, ou qualquer elemento no caso, estiver sujeito a uma carga que varia ao longo do tempo, ele vibrará. Mesmo se ele receber apenas uma carga transiente, como um golpe de martelo, ele vibrará nas suas frequências naturais, da mesma maneira que um sino soa quando golpeado. Isso é chamado de **vibração livre**. Tais vibrações transientes ou livres se dissiparão em algum momento devido ao amortecimento presente no sistema. Se o carregamento variável no tempo for mantido, como, por exemplo, em um modo senoidal, o eixo ou outro elemento continuará a vibrar na **frequência forçante** da função excitante. Se a frequência forçante por acaso coincidir com uma das frequências naturais do elemento, então a amplitude da resposta de vibração será muito maior que aquela da função excitante. Diz-se então que o elemento está em **ressonância**.

A Figura 10-26*a* mostra a resposta em amplitude de uma vibração forçada e a Figura 10-26*b*, uma vibração autoexcitada, em função da razão da frequência forçante e da frequência natural do sistema ω_f / ω_n. Quando essa razão é 1, o sistema está em ressonância e a amplitude da resposta aproxima o infinito na ausência de amortecimento. As amplitudes de resposta na Figura 10-26 são mostradas como uma razão adimensional entre as amplitudes de saída e entrada. Qualquer amortecimento, mostrado como uma razão de amortecimento ζ, reduz a relação de amplitudes na ressonância. Uma frequência natural é também chamada de **frequência crítica** ou **velocidade crítica**. *Deve-se evitar excitar um sistema ao ponto de sua frequência crítica ou próximo a ela, já que as deflexões resultantes frequentemente causarão tensões grandes o suficiente para rapidamente romper a peça.*

Um sistema que consista em massas discretas aglomeradas conectadas com elementos de mola discretos pode ser considerado como tendo um número finito

(*a*) Resposta à vibração forçada externamente

(b) Resposta à vibração autoexcitada

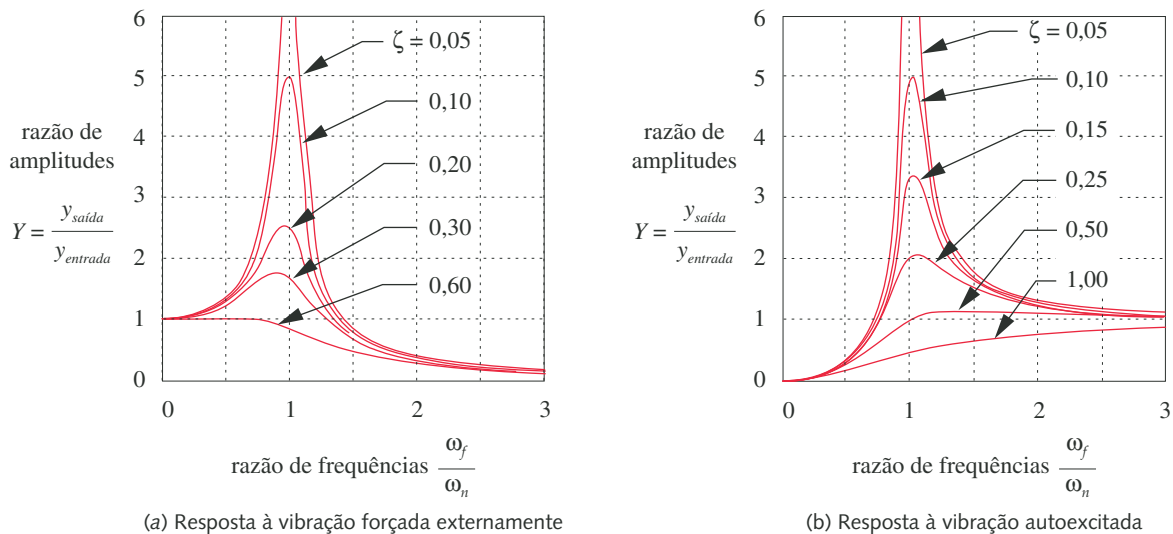



FIGURA 10-26

Resposta de um sistema de um grau de liberdade a frequências variáveis ou autoexcitação.

de frequências naturais equivalentes a seu número de graus cinemáticos de liberdade. Mas um sistema contínuo, como uma viga ou eixo, tem um número infinito de partículas, e cada uma delas é capaz de movimentos elásticos contra suas partículas vizinhas. Assim, um sistema contínuo tem uma infinidade de frequências naturais. Em qualquer um dos casos, a frequência natural menor ou fundamental é normalmente a de maior interesse.

As frequências naturais de vibração de um sistema podem ser expressas tanto como frequências circulares ω_n, com unidades de rad/s ou rpm, quanto como frequências lineares f_n, com unidades de hertz (Hz). Elas são as mesmas frequências expressas em diferentes unidades. A expressão geral para a frequência natural fundamental é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/s} \tag{10.24a}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Hz} \tag{10.24b}$$

onde k é a constante de mola do sistema e m, sua massa. As frequências naturais são uma propriedade física do sistema; uma vez construído, ele as mantém essencialmente imutáveis a menos que ele perca ou ganhe massa ou rigidez durante sua vida útil. As Equações 10.24 definem as frequências naturais não amortecidas. O amortecimento reduz ligeiramente a frequência natural. Eixos, vigas e a maioria das peças de máquinas tendem a ser ligeiramente amortecidas e, por isso, o valor sem amortecimento pode ser usado com pequena margem de erro.

A estratégia usual de projeto é manter todas as frequências forçantes ou autoexcitantes abaixo da primeira frequência crítica por alguma margem de segurança. Quanto maior for essa margem, melhor, mas um coeficiente de pelo menos 3 a 4 é desejável. Isso mantém a razão da amplitude de resposta próxima a um ou zero, como mostrado nas Figuras 10-26*a* e 10-26*b*. Em alguns casos, a frequência natural de um sistema de eixos não pode ser maior que a frequência requerida de rotação. Se o sistema pode ser acelerado suficientemente rápido pela ressonância, antes que as vibrações tenham oportunidade de aumentar de amplitude, então o sistema pode ser empregado a velocidades maiores que aquela da ressonância. Os geradores de potência estão nessa categoria. A macicez das turbinas e dos geradores produz uma frequência fundamental baixa (ver a Equação 10.24), mas eles devem funcionar a velocidades elevadas para gerar as frequências apropriadas para linhas de corrente alternada. Dessa forma, elas operam à direita do pico na Figura 10-14*b* onde a razão das amplitudes se aproxima de um a razões elevadas de ω_f / ω_n. Seus processos de ligar e desligar podem ser infrequentes, mas devem ser sempre feitos rapidamente para passar pelo pico de ressonância antes que qualquer dano seja causado por deflexões excessivas. Além disso, deve-se ter potência suficiente disponível para prover a energia absorvida na ressonância pelas oscilações além da energia para aceleração das massas em rotação. Se o motor não dispuser de potência suficiente, então o sistema pode cair na ressonância, incapaz de aumentar sua velocidade em face das vibrações potencialmente destrutivas. Isso é chamado de efeito de Sommerfeld.[9]

Existem três tipos de vibrações de eixo preocupantes:

1 Vibração lateral
2 Rodopio do eixo
3 Vibração torcional

Os dois primeiros envolvem deflexões de flexão e o último envolve deflexão torcional do eixo.

Vibração lateral dos eixos e vigas – método de Rayleigh

Uma análise completa das frequências naturais de um eixo ou viga é um problema complicado, especialmente se a geometria for complexa, e é mais facilmente resolvido com a ajuda de programas de *Análise de Elementos Finitos*. A chamada **análise modal** pode ser feita em um modelo de elementos finitos de geometria complexa e produzirá um número elevado de frequências naturais (em três dimensões), começando com a frequência fundamental. Esse é o método preferido e frequentemente usado quando analisamos em detalhes um projeto completo ou maduro. Contudo, nos estágios iniciais de projeto, quando a geometria das peças não está totalmente definida, um método rápido e de fácil aplicação para encontrar pelo menos uma frequência fundamental aproximada para o projeto proposto é muito útil. O **método de Rayleigh** serve esse propósito. É um método de energia que dá resultados dentro de poucos porcentos do valor verdadeiro de ω_n. Ele pode ser aplicado a sistemas contínuos ou a um modelo de sistema de massa agrupada. A última abordagem é geralmente preferida pela simplicidade.

O método de Rayleigh iguala as energias potencial e cinética no sistema. A energia potencial está na forma de energia de deformação no eixo defletido e é máxima na deflexão máxima. A energia cinética é um máximo quando o eixo vibrando passa pela posição não defletida com velocidade máxima. Esse método supõe que o movimento de vibração lateral do eixo é senoidal e que alguma excitação externa esteja presente para forçar a vibração lateral (Figura 10-26*a*).

Para ilustrar a aplicação desse método, considere um eixo com três discos (engrenagens, polias, etc.), como mostrado na Figura 10-27. Modelaremos esse eixo como três massas discretas conhecidas e agrupadas em um eixo sem massa. A geometria do eixo definirá a constante de mola em flexão, agrupando assim todas as “molas” no eixo. A energia potencial total armazenada na deflexão máxima é a soma das energias potenciais de cada massa agrupada:

$$E_p = \frac{g}{2}\left(m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3\right) \tag{10.25a}$$

onde as deflexões são todas admitidas como positivas sem levar em conta a forma local da curva de deflexão, porque a energia de deformação não é afetada pelo sistema de coordenadas externo. A energia do eixo defletido é ignorada por ser pequena se comparada à energia do disco.

A energia cinética total é a soma das energias cinéticas individuais:

$$E_k = \frac{\omega_n^2}{2}\left(m_1\delta_1^2 + m_2\delta_2^2 + m_3\delta_3^2\right) \tag{10.25b}$$

onde as velocidades são admitidas como positivas.

Equacionando esses dados, temos

$$\omega_n = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(W_i/g\right)\delta_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(W_i/g\right)\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i^2}} \tag{10.25c}$$

a segunda versão resultante da substituição de $m = W / g$, onde as W_i são as forças gravitacionais (peso) das massas discretas em que dividimos o sistema e δ_i são as deflexões dinâmicas nas posições dos pesos devido às vibrações. As forças gravitacionais e suas deflexões são todas admitidas como positivas para representar as energias máximas armazenadas.

O problema é que, geralmente, não sabemos as deflexões dinâmicas do sistema *a priori*. Rayleigh mostrou que praticamente qualquer estimativa da curva

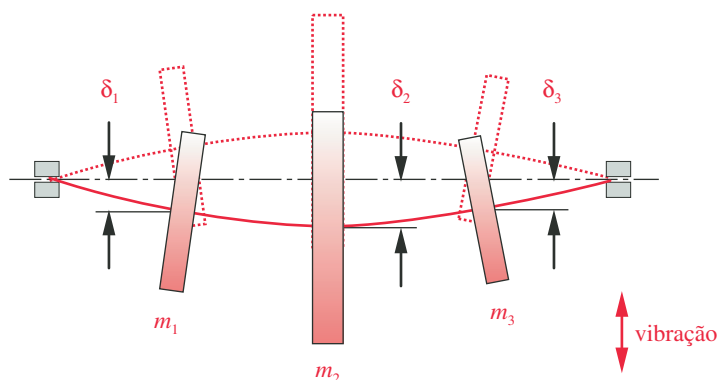



FIGURA 10-27

Um eixo em vibração lateral (amplitude exagerada).

de deflexão, contanto que ela represente razoavelmente a deflexão máxima e as condições de fronteira da verdadeira curva dinâmica, será suficiente. A curva de deflexão estática devido ao peso próprio das massas agrupadas (incluindo o peso do eixo ou não, como desejado) é uma estimativa muito conveniente. Observe que quaisquer cargas externas aplicadas não são incluídas nesse cálculo de deflexão, apenas as forças gravitacionais. A aproximação resultante ω_n será sempre mais alta que a frequência fundamental verdadeira em alguns porcentos independentemente da forma da curva de deflexão suposta. Se mais de uma estimativa da curva de deflexão for tentada, deve ser usada aquela que exibir o menor valor de ω_n, porque ela será a mais próxima.

A Equação 10.25*c* pode ser aplicada a um sistema de qualquer complexidade por meio de sua quebra em um número grande de massas agrupadas. Se engrenagens, polias, etc., estiverem no eixo, elas são escolhas lógicas para as massas agrupadas. Se a massa do eixo for significativa ou dominante, ela pode ser partida em elementos discretos ao longo de seu comprimento com cada parte provendo um termo na somatória.

O método de Rayleigh pode teoricamente ser usado para encontrar frequências mais altas que a frequência fundamental, mas isso é difícil de ser feito sem uma boa estimativa da forma da curva de deflexão de ordem mais alta. Métodos mais precisos para estimar a frequência fundamental e frequências mais altas existem, mas são um pouco mais complicados de implementar. Ritz modificou o método de Rayleigh (Rayleigh-Ritz) para permitir a iteração a frequências mais altas. O método de Holzer é mais preciso e permite encontrar múltiplas frequências. Ver a Referência 10 para mais informações.

Rodopio de eixo

Rodopio de eixo é um fenômeno de vibração autoexcitada ao qual todos os eixos estão potencialmente sujeitos. Embora a prática de balanceamento dinâmico seja comum e recomendada a todos os elementos em rotação em maquinarias (especialmente se operando a altas velocidades), não é possível atingir o balanço dinâmico a não ser por acaso. (Ver a Referência 12 para uma discussão sobre o balanceamento dinâmico.) Qualquer desbalanceamento residual de um elemento de rotação faz com que seu centro de massa verdadeiro fique excêntrico em relação à linha de centro do eixo. Essa excentricidade cria uma força centrífuga que tende a defletir o eixo na direção da excentricidade, aumentando, assim, ainda

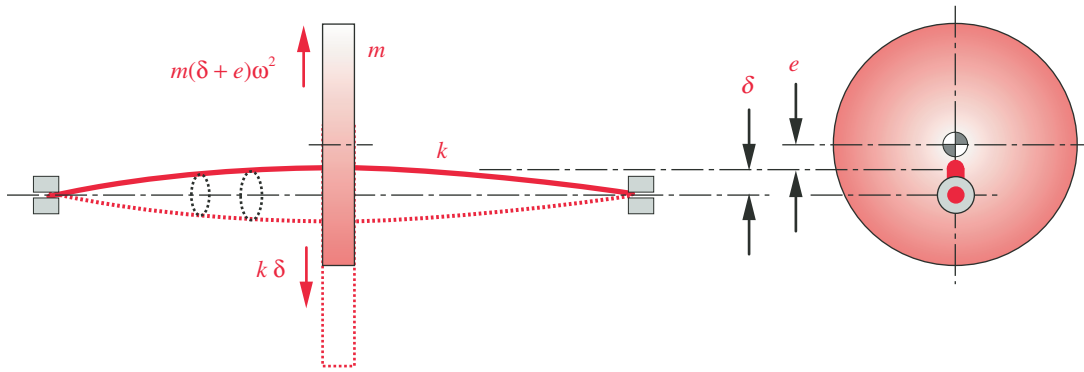



FIGURA 10-28

Rodopio de eixo (amplitude exagerada).

mais a força centrífuga. A única resistência a essa força vem da rigidez elástica do eixo, como mostrado na Figura 10-28. A excentricidade inicial do eixo é marcada como e e a deflexão dinâmica é δ. Um diagrama de corpo livre mostra as forças atuantes como

$$k\delta = m(\delta + e)\omega^2 \tag{10.26a}$$

$$\delta = \frac{e\omega^2}{(k/m) - \omega^2} \tag{10.26b}$$

A deflexão dinâmica do eixo devido a essa força centrífuga faz com que ele gire ao redor de seu eixo de rotação com pontos no centro do eixo defletido descrevendo círculos ao redor do eixo. Observe na Equação 10.26*b* que a deflexão se torna infinita quando $\omega^2 = k / m$. À medida que a velocidade de rotação do eixo se aproxima da velocidade da frequência natural (ou crítica) das vibrações laterais, um fenômeno de ressonância similar àquele da vibração lateral ocorre. Observe na Equação 10.26*b* que quando $\omega = k/m$, $\delta = \infty$. A Equação 10.26*b* pode ser normalizada a uma forma não dimensional, que mostra claramente a relação:

$$\frac{\delta}{e} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{10.26c}$$

A Equação 10.26*c* e a Figura 10-29 mostram a amplitude da deflexão do eixo normalizada com relação à excentricidade original (δ / e) como uma função da relação entre a frequência de rotação e a frequência crítica ω / ω_n. Observe que quando $\omega / \omega_n = 0$ não há resposta, o que constitui um caso diferente da vibração forçada da seção anterior. Isso ocorre porque não existe força centrífuga a menos que o eixo esteja rodando. À medida que a velocidade do eixo aumenta, a deflexão aumenta rapidamente. Se não existir nenhum amortecimento ($\zeta = 0$), em $\omega / \omega_n = 0{,}707$, a deflexão do eixo se iguala à excentricidade e ela se torna teoricamente infinita na ressonância ($\omega / \omega_n = 1$). É claro que sempre existirá algum amortecimento presente, mas se ζ for pequeno, as deflexões serão muito grandes na ressonância e podem causar tensões suficientemente grandes para provocar a falha do eixo.

Note o que acontece quando a velocidade do eixo passa por ω_n. A fase muda 180°, o que significa que a deflexão muda de lado abruptamente na ressonância. Em razões elevadas de ω / ω_n, a deflexão se aproxima de $-e$, o que significa que o sistema está rodando ao redor do centro de massa das massas excêntricas e que a linha de centro do eixo é excêntrica. A conservação da energia faz com que o sis-

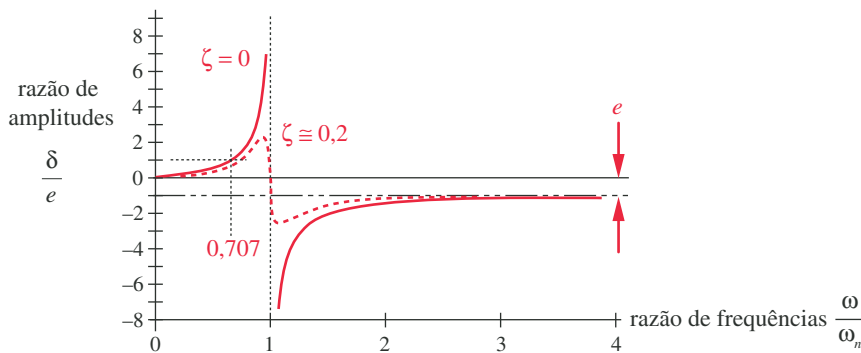



FIGURA 10-29

Amplitude da resposta, em função da razão de frequências, de um sistema autoexcitado formado por eixo girando em redemoinho.

tema deseje rodar em torno de seu centro de massa. Em qualquer sistema no qual os elementos de rotação forem excêntricos e grandes se comparados ao eixo, isso ocorrerá. Talvez você já tenha observado um ventilador pivotado no teto rodando com o centro de seu motor orbitando ao redor do eixo de rotação. As pás do ventilador não estão, em geral, em balance perfeito, e o conjunto roda ao redor do centro de massa do conjunto de pás em vez de sobre a linha de centro do motor/eixo.

Deve ficar claro que a rotação de um sistema na frequência crítica ou próximo a ela deve ser estritamente evitada. A frequência crítica para o eixo rodopiar é a mesma para a vibração lateral e pode ser encontrada usando o método de Rayleigh ou qualquer outra técnica conveniente. Porque a relação de amplitudes de vibração desse eixo rodopiando começa em zero em vez de um (como ocorre em vibrações forçadas), a frequência forçante pode ser mais próxima da frequência crítica que para o caso de vibração lateral. Manter a velocidade de operação abaixo de metade da frequência crítica de rodopio do eixo leva, em geral, a bons resultados, a não ser que a excentricidade inicial seja excessiva (o que não seria permitido de forma alguma).

Observe a diferença entre a *vibração lateral* do eixo e o *rodopio do eixo*. A **vibração lateral** é uma *vibração forçada*, requerendo alguma fonte externa de energia como a vibração de outras peças da máquina para provocá-la, e o eixo, então, vibra em um ou mais planos laterais, esteja rodando ou não. O **rodopio de eixo** é uma *vibração autoexcitada* causada pela rotação do eixo agindo em uma massa excêntrica. Ela *sempre* ocorrerá quando ambos, a rotação e a excentricidade, estiverem presentes. O eixo assume a forma defletida, que então roda ou rodopia ao redor da linha de centro de força semelhante a uma corda de saltar sendo balançada por uma criança.

Vibração torcional

Da mesma maneira que um eixo pode vibrar lateralmente, ele também pode vibrar torcionalmente e terá uma ou mais frequências torcionais naturais. As mesmas equações que descrevem as vibrações laterais podem ser usadas para vibrações torcionais. Os sistemas são análogos. Força se torna torque, massa se torna momento de inércia de massa e a constante linear de mola se torna constante torcional de mola. A Equação 10.24 para a frequência circular natural se torna, para um sistema de um único grau de liberdade de rotação:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_m}} \quad \text{rad/s} \tag{10.27a}$$

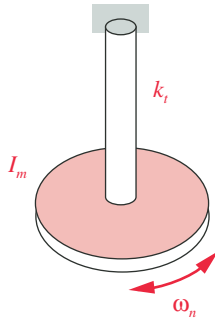



FIGURA 10-30

Um disco em um eixo em vibração torcional.

A constante torcional de mola k_t para um eixo sólido circular é

$$k_t = \frac{GJ}{l} \quad \text{lb-in/ rad ou N-m/ rad} \tag{10.27b}$$

onde G é o módulo de rigidez do material e l é o comprimento do eixo. O segundo momento polar de área J de um eixo sólido circular é

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{in}^4 \text{ ou } \text{m}^4 \tag{10.27c}$$

Se o eixo for escalonado, então um segundo momento polar de área equivalente J_{ef} é encontrado a partir de

$$J_{ef} = \frac{l}{\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{J_i}} \tag{10.27d}$$

onde l é o comprimento total do eixo, J_i e l_i são os momentos polares e os comprimentos das subseções do eixo de diferentes diâmetros, respectivamente.

O momento de inércia da massa de um disco circular sólido ao redor de seu eixo de rotação é:

$$I_m = \frac{mr^2}{2} \quad \text{in-lb-s}^2 \text{ ou kg-m}^2 \tag{10.27e}$$

onde r é o raio do disco e m é sua massa.

Essas equações são suficientes para encontrar a frequência crítica de um único disco montado em um eixo fixo, como mostrado na Figura 10-30.

Dois discos em um mesmo eixo

Um problema mais interessante é aquele de dois (ou mais) discos colocados em um mesmo eixo, como mostrado na Figura 10-31. Os dois discos mostrados oscilarão torcionalmente na mesma frequência natural, com defasagem de 180°. Haverá um ponto, chamado de nó, em algum lugar do eixo, no qual não haverá deflexão angular. Em ambos os lados do nó, pontos no eixo rodarão em direções

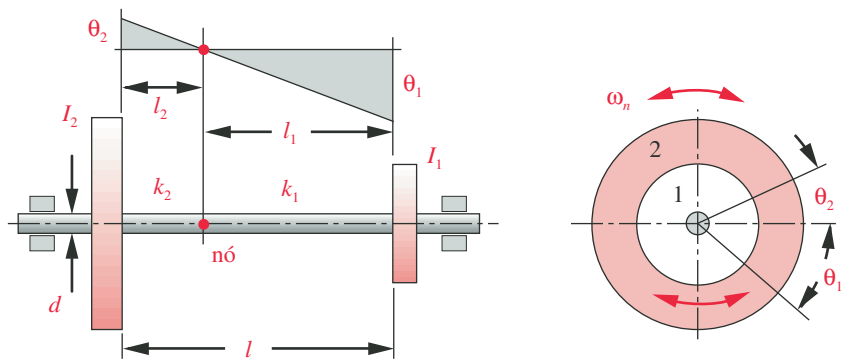



FIGURA 10-31

Vibração torcional de dois discos em um eixo comum.

angulares opostas durante a vibração. O sistema pode ser modelado como dois sistemas separados de uma única massa acoplados nesse ponto estacionário. Um tem momento de massa e constante de mola I_1, k_1 e o outro, I_2, k_2. A frequência natural comum é, então,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{I_2}} \tag{10.28a}$$

As constantes de mola dos segmentos de eixo são calculadas a partir de $k_t = JG\,/\,l$, supondo que o J seja constante ao longo do nó.

$$\sqrt{\frac{JG}{l_1 I_1}} = \sqrt{\frac{JG}{l_2 I_2}}$$

e

$$l_1 I_1 = l_2 I_2 = I_2\left(l - l_1\right)$$

assim

$$l_1 = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2} \tag{10.28b}$$

A Equação 10.28*b* permite a localização do nó. Substituindo essa expressão na Equação 10.28*a*, obtém-se

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{JG}{l_1 I_1}} = \sqrt{\frac{JG}{l}\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}$$

$$\omega_n = \sqrt{k_t \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} \qquad \text{ou} \qquad \omega_n^2 = k_t \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \tag{10.28c}$$

o que define a velocidade crítica para vibração torcional em termos das propriedades de inércia conhecidas dos dois discos e a constante global de mola do eixo.

A frequência crítica precisa ser evitada para quaisquer funções aplicadas ao eixo a fim de evitar ressonância torcional que irá sobrecarregá-lo. Dispositivos conectados ao eixo, como pistões de motores ou pistões de bombas, terão frequências em suas funções torque-tempo que correspondem aos pulsos de suas operações multiplicados pela frequência de rotação destes pulsos. Por exemplo, um motor de quatro cilindros terá uma forte componente de força em uma frequência quatro vezes maior que a sua. Se esse quarto harmônico coincidir com a frequência crítica do eixo, poderá haver problemas. Ao projetar um eixo, as características de frequência dos dispositivos de comando e dos comandados anexos ao eixo devem ser levadas em conta juntamente com suas frequências rotacionais primárias.

Discos múltiplos em um eixo comum

Dois discos em um mesmo eixo têm um nó e uma frequência torcional natural. Três discos terão dois nós e duas frequências naturais. Esse padrão se manterá para qualquer número de discos, supondo em todos os casos que as massas dos discos dominem a massa do eixo, permitindo ignorá-la. N discos terão $N - 1$ nós e frequências naturais. O grau da equação para as frequências naturais também será $N - 1$ se considerarmos que a variável seja ω^2 em vez de ω. Observe que a Equação 10.28*c* para duas massas é linear com essa hipótese. A equação para três massas é quadrática em ω_n^2, e para quatro massas é cúbica em ω_n^2.

Para o caso de três massas, os quadrados das frequências naturais são as duas raízes de

$$I_1 I_2 I_3 \left(\omega_n^2\right)^2 - \left[k_2\left(I_1 I_2 + I_1 I_3\right) + k_1\left(I_2 I_3 + I_1 I_3\right)\right]\omega_n^2 + k_1 k_2\left(I_1 + I_2 + I_3\right) = 0 \quad (10.29)$$

Polinômios de ordem mais elevada podem ser derivados para massas adicionais e pode-se usar um método iterativo de encontro das raízes para resolvê-los.

Métodos aproximados estão também disponíveis para resolver as frequências naturais torcionais com qualquer número de massas. Estes permitem que a massa do eixo seja facilmente calculada, se desejado, por meio da separação em massas discretas. O método de Holzer é o método comumente usado para vibrações torcionais, bem como para vibrações laterais de eixos. Veja a referência 10 ou qualquer texto sobre vibrações para a derivação e discussão desses métodos. O espaço disponível aqui não permite um tratamento completo do tema.

Controle das vibrações torcionais

Quando os eixos são longos e/ou têm um número de massas distribuídas ao longo de seu comprimento, as vibrações torcionais podem ser um problema sério de projeto. Eixos manivela em motores de combustão interna são um exemplo. A geometria das manivelas reduz severamente a rigidez torcional, o que diminui suas frequências naturais. Isso, em combinação com a presença, no torque, de harmônicos de ordem elevada provenientes das explosões nos cilindros, pode levar a falhas prematuras por fadiga torcional. O motor de oito cilindros em linha famoso de 1930 até os anos 1940 teve menos sucesso que o primo de seis cilindros em linha devido em parte ao problema das vibrações torcionais na manivela mais longa do motor de oito cilindros. O motor em V de oito cilindros com sua manivela menor e mais rígida suplantou completamente o motor de oito cilindros em linha. Mesmo nesses motores menores, as vibrações torcionais podem ser um problema.

Vários métodos podem ser usados para contrabalançar os efeitos da correspondência indesejada entre as frequências forçantes e as frequências naturais do sistema. A primeira linha de defesa é reprojetar as propriedades de inércia e rigidez do sistema para obter as frequências críticas o mais acima das frequências forçantes quanto possível. Isso, em geral, envolve o aumento da rigidez conjuntamente com a remoção de massa, algo que nem é sempre fácil de ser conseguido. Requer-se o uso efetivo da geometria para obter a rigidez máxima com um mínimo de material. O termo **rigidez específica** se refere à *razão entre a rigidez e a massa* de um objeto. Queremos maximizar a rigidez específica para aumentar as frequências naturais. A análise com elementos finitos pode ser muito útil no refino da geometria de projeto para alterar as frequências naturais por causa das informações detalhadas que podem ser obtidas a partir dela.

Uma outra abordagem é a adição de um **absorvedor de frequência** ao sistema. Um absorvedor de frequência é uma combinação de massa-mola adicionada ao sistema cuja presença altera o conjunto de frequências naturais para longe de qualquer frequência forçada dominante. O sistema é efetivamente sintonizado longe das frequências indesejáveis. Essa abordagem pode ser muito efetiva em alguns casos e é usada no movimento linear, bem como em sistemas torcionais.

Um **amortecedor torcional** é normalmente adicionado à extremidade de uma manivela de motor para reduzir as oscilações deste. Esse dispositivo, também chamado de amortecedor de Lanchester em homenagem a seu inventor, é um disco acoplado a um eixo através de um meio absorvedor de energia como óleo ou borracha. O acoplamento a óleo provê o amortecimento viscoso e a borracha tem bastante histerese interna de amortecimento. Seu efeito é reduzir a amplitude do pico em ressonância, como pode ser visto na Figura 10-26 para grandes valores de ζ. O leitor deve dirigir-se à referência 11 para mais informações acerca de todos esses métodos.

EXEMPLO 10-8

Determinação das frequências críticas de um eixo

Problema **Encontre as frequências torcionais crítica e de rodopio de eixo para o eixo do Exemplo 10-2 e compare-as com a frequência atuante.**

Dados **As dimensões do eixo de aço são 0,875 in de diâmetro por 1,5 in; 0,750 in de diâmetro por 3,5 in; 0,669 in de diâmetro por 1,5 in e 0,531 in de diâmetro por 1,5 in. Sua velocidade de rotação é 1725 rpm. Os apoios do eixo estão em 0 e 5 in de um eixo de 8 in de comprimento. A engrenagem de aço pesa 10 lb e atua em $z = 2$ in. A massa tem um momento de inércia de 0,23 lb-in-s^2. A polia de alumínio pesa 3 lb e atua em $z = 6{,}75$ in. Ela tem um momento de inércia de massa de 0,07 lb-in-s^2.**

Hipóteses **A deflexão estática do eixo devido ao peso da engrenagem e polia será usada como uma estimativa para o método de Rayleigh, mas o peso da engrenagem e da polia será aplicado na direção que der a maior deflexão estática. O peso do eixo será ignorado.**

Solução **Ver as Figuras 10-5 e 10-32.**

1 A deflexão do eixo escalonado é encontrada pela mesma técnica usada no Exemplo 10-3. Neste exemplo, pressupomos que as cargas sejam os pesos dos dois discos. Mas vamos considerar a força peso da engrenagem como atuante para baixo e a força peso da polia como atuante para cima, porque esse arranjo representa melhor a situação dinâmica em que as forças de inércia atuam para fora do eixo em qualquer direção que aumente a deflexão. Se dirigíssimos ambas as forças peso para baixo neste caso, obteríamos uma deflexão máxima menor e uma forma de curva diferente daquela correspondente à deflexão dinâmica. A Figura 10-32 mostra as forças peso aplicadas e a curva de deflexão para este eixo. A magnitude da deflexão na engrenagem é $6{,}0E-5$ in e na polia é $1{,}25E-4$ in. Esses valores são necessários na Equação 10.25c.

2 Calcule a frequência crítica para o rodopio do eixo a partir da Equação 10.25c:

$$\omega_n = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i^2}} = \sqrt{386\frac{10(6{,}0E-5)+3(1{,}25E-4)}{10(6{,}0E-5)^2+3(1{,}25E-4)^2}} = 2131 \text{ rad/s} \quad (a)$$

Observe que supomos que as amplitudes das forças peso e de suas deflexões correspondentes sejam positivas independentemente das direções dos vetores do caso de deflexão estática.

3 Compare a frequência de rodopio crítica com a frequência forçante.

$$\frac{\omega_n}{\omega_f} = \frac{30/\pi(2131 \text{ rad/s})}{1725 \text{ rpm}} = \frac{20350 \text{ rpm}}{1725 \text{ rpm}} = 11{,}8 \quad (b)$$

Essa margem é bastante segura. Se, neste exemplo, o peso do eixo fosse incluído tanto no cálculo da deflexão quanto no cálculo da frequência crítica, a frequência crítica seria 20849 rpm, que é 12,1 vezes a frequência forçante. Mesmo com discos relativamente leves neste eixo, ignorar o peso do eixo não introduz um grande erro. Ambos os valores dados pelo método de

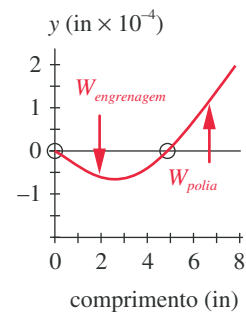



FIGURA 10-32

A deflexão estática devido às forças peso dos discos no eixo orientado para dar deflexão máxima em uma forma similar à deflexão dinâmica.

Rayleigh são mais altos que a frequência natural verdadeira. O leitor pode examinar as diferenças nos modelos apresentados simplesmente mudando a densidade do material do eixo de 0,28 lb/in^3 (para o aço) para zero a fim de eliminar o efeito do eixo no cálculo. Os modelos incluem o peso do eixo no cálculo, dividido em 50 incrementos ao longo de seu comprimento.

4 Encontrar as frequências torcionais críticas de um eixo escalonado requer que uma constante de mola efetiva seja encontrada para as seções escalonadas combinadas. A porção do eixo de interesse é entre a polia e a engrenagem. A constante de mola k_t de qualquer seção é

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{G\pi d^4}{32 l} \text{ lb-in/rad}$$

$$k_{t_1} = \pi \frac{11{,}5E6(0{,}75)^4}{32(3{,}5)} = 102065 \text{ lb-in/rad} \qquad (c)$$

$$k_{t_2} = \pi \frac{11{,}5E6(0{,}669)^4}{32(1{,}5)} = 150769 \text{ lb-in/rad}$$

Como as seções do eixo todas têm o mesmo torque, mas deflexões diferentes (o que soma a deflexão total como mostrado na Equação 10.9*b*), elas atuam como molas em série. A constante efetiva de mola k_{tef} da parte do eixo escalonado entre as duas cargas de torque é encontrado a partir da Equação 10.9*d*:

$$\frac{1}{k_{t_{ef}}} = \frac{1}{k_{t_1}} + \frac{1}{k_{t_2}} = \frac{1}{102065} + \frac{1}{150769}$$

$$k_{t_{ef}} = 60863 \text{ lb-in/rad} \qquad (d)$$

5 A frequência torcional crítica é encontrada a partir da Equação 10.28*c*.

$$\omega_n = \sqrt{k_{t_{ef}} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} = \sqrt{60863 \frac{0{,}23 + 0{,}07}{(0{,}23)(0{,}07)}} = 1065 \text{ rad/s} \qquad (e)$$

6 Compare a frequência torcional crítica com a frequência forçante

$$\frac{\omega_n}{\omega_f} = \frac{30/\pi(1065 \text{ rad/s})}{1725 \text{ rpm}} = \frac{10170 \text{ rpm}}{1725 \text{ rpm}} = 5{,}9 \qquad (f)$$

Essa margem é aceitável.

7 Os arquivos EX10-08 estão no CD-ROM.

10.15 ACOPLAMENTOS

Uma ampla variedade de acoplamentos de eixo está disponível comercialmente, variando desde acoplamentos rígidos com chavetas até projetos elaborados que usam engrenagens, elastômeros ou fluidos para transmitir o torque de um eixo a outro eixo ou a outro dispositivo na presença de vários tipos de desalinhamento. Os acoplamentos podem ser divididos em termos gerais em duas categorias: **rígidos** ou **complacentes**. Complacente, neste contexto, significa que o acoplamento pode absorver algum desalinhamento entre os dois eixos, e rígido implica que nenhum desalinhamento é permitido entre os eixos a serem conectados.

FIGURA 10-33

Vários tipos e tamanhos de acoplamentos rígidos para eixos. (Cortesia da Ruland Manufacturing Inc., Watertown, Mass.)

Acoplamentos rígidos

Os acoplamentos rígidos travam os dois eixos conjuntamente, não permitindo movimento relativo entre eles, embora algum ajuste axial seja possível na montagem. Eles são usados quando a precisão e fidelidade da transmissão do torque são da mais absoluta importância, como, por exemplo, quando a relação de fase entre o dispositivo motor e o dispositivo movido deve ser mantida com precisão. Máquinas de produção automatizadas comandadas por eixos longos frequentemente usam acoplamentos rígidos entre as seções de eixo por essa razão. Os servomecanismos também precisam de conexões precisas no trem de comando. O preço é que o alinhamento da linha de centro dos eixos acoplados deve ser ajustado com precisão para evitar a introdução de grandes forças laterais e momentos quando o acoplamento é montado.

A Figura 10-33 mostra alguns exemplos de acoplamentos rígidos comerciais. Existem três tipos em geral: acoplamentos parafusados, acoplamentos chaveteados e acoplamentos engastados.

Os acoplamentos parafusados usam parafusos que penetram no eixo para transmitir tanto o torque quanto as forças axiais. Não são recomendados para quaisquer aplicações exceto aquelas de cargas leves, pois os parafusos podem se soltar com as vibrações.

Os acoplamentos com chavetas usam chavetas padronizadas, como discutido em uma seção anterior, e podem transmitir torques elevados. Os parafusos são frequentemente usados em combinação com uma chaveta, sendo colocados a 90° da chaveta. Para melhor fixação contra vibração, um parafuso arredondado é usado para cavar o eixo. Para maior segurança, o eixo deve ser cavado com um buraco raso sob o parafuso para proporcionar uma interferência mecânica contra escorregamento, em vez de depender do atrito.

Os acoplamentos engastados são feitos em diversas formas, a mais comum sendo os acoplamentos divididos de uma ou duas peças que se engatam ao redor de ambos os eixos e transmitem o torque por atrito, como mostrado na Figura 10-33. Um acoplamento de travamento cônico usa um colar cônico partido que é empurrado entre o eixo e o alojamento cônico do acoplamento para travar o eixo, como mostrado na Figura 10-34.

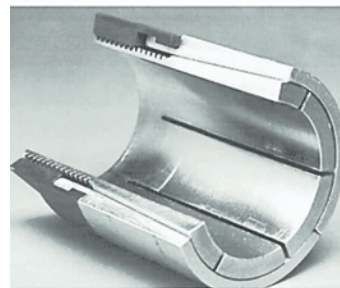
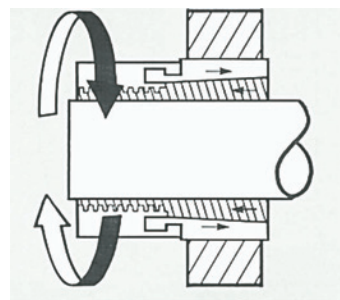



FIGURA 10-34

Um acoplamento trantorque de trava cônica. (Cortesia da Fenner Manheim, Manheim, Pa, 17545.)

desalinhamento axial

desalinhamento angular

desalinhamento paralelo

desalinhamento torcional

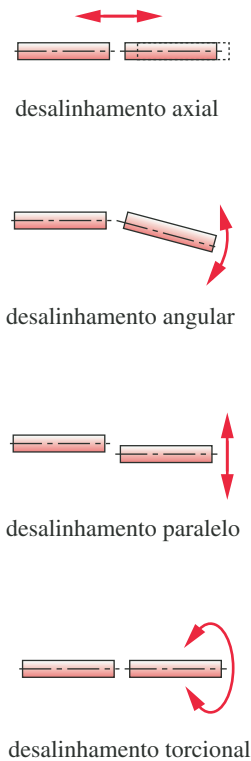



FIGURA 10-35

Tipos de desalinhamentos de eixos.

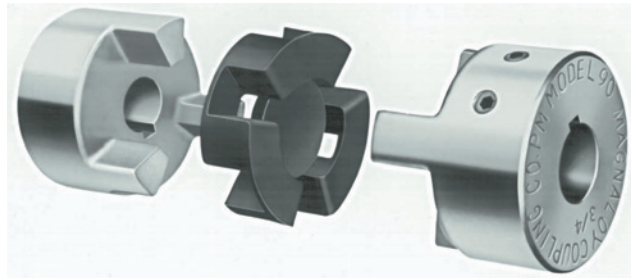



FIGURA 10-36

Vista explodida de um acoplamento de mandíbula mostrando as mandíbulas e o separador elastomérico. (Cortesia de Magnaloy Coupling Company, Alpena, Mich, 49707.)

Acoplamentos complacentes

Um eixo como um corpo rígido tem potencialmente seis graus de liberdade (DOF – *degree of freedom*) com respeito a um segundo eixo. Contudo, devido à simetria, somente quatro desses DOF são de interesse. Eles são o desalinhamento **axial**, **ângular**, **paralelo** e **torcional**, como mostrado na Figura 10-35. Podem ocorrer isolados ou em combinação e podem estar presentes na montagem devido a tolerâncias na manufatura, ou podem ocorrer durante uma operação devido aos movimentos relativos dos dois eixos. A linha de transmissão final de um automóvel tem movimento relativo entre as extremidades de dois eixos. A extremidade motora do eixo é fixada à estrutura ou armação e a extremidade movida está na estrada. A estrutura e a estrada são separadas pela suspensão do carro, assim os acoplamentos do eixo motor devem absorver ambos os desalinhamentos axial e angular à medida que o carro passa por lombadas.

A menos que se tenha cuidado em alinhar dois eixos adjacentes, pode existir desalinhamento axial, angular e paralelo em qualquer máquina. O desalinhamento torcional ocorre dinamicamente quando uma carga movida tenta adiantar ou retrasar a carga motora. Se o acoplamento permitir qualquer folga torcional, haverá golpe quando o torque mudar de sentido. Isso é indesejável se for necessário sincronismo de fase, como em servomecanismos. A complacência torcional em um acoplamento pode ser desejável se grandes cargas de impacto ou vibrações torcionais precisarem ser isoladas do motorista.

Numerosos projetos de acoplamentos complacentes foram manufaturados e cada um oferece uma combinação diferente de características. Normalmente, o projetista pode encontrar disponível no mercado um acomplamento apropriado para qualquer aplicação. Acomplamentos complacentes podem ser, em termos gerais, divididos em várias subcategorias, que estão listadas na Tabela 10-7 com algumas de suas características. As classificações quanto a torque não estão mostradas porque variam imensamente com o tamanho e o material. Acoplamentos de vários tamanhos podem lidar com níveis de potência desde frações de cavalos de potência até milhares de cavalos.

Os acoplamentos de mandíbula têm dois cubos (frequentemente idênticos) com mandíbulas salientes, como mostrado na Figura 10-36. Estas mandíbulas se sobrepõem axialmente e se entrelaçam torcionalmente através de um separador complacente de borracha ou material metálico brando. As folgas permitem desalinhamento axial, angular e paralelo, mas podem também permitir golpes indesejáveis.

Os acomplamentos de disco flexível são similares aos acoplamentos de mandíbula porque seus dois cubos são conectados por um membro complacente (disco) de material elastomérico ou metálico-mola, como mostrado na Figura 10-37.

FIGURA 10-37

Um acoplamento de disco flexível. (Cortesia de Zero-Max, Minneapolis, Minn, 55441.)

Permitem desalinhamento axial, angular e paralelo com alguma complacência torcional, mas pouco ou nenhum golpe.

Os acoplamentos de engrenagem ou estrias usam dentes externos curvos ou retos de engrenagens em malha com dentes internos, como mostrado na Figura 10-38. Eles podem permitir movimento axial entre eixos e, dependendo das formas do dente e das folgas, podem absorver desalinhamentos angulares pequenos ou paralelos também. Eles têm capacidade para torques elevados devido ao número de dentes na malha.

Os acoplamentos de espiral e sanfonados são componentes em uma peça que usam suas deflexões elásticas para permitir desalinhamento axial, angular ou paralelo com pouco ou nenhum golpe. Acoplamentos de espiral (hélice) (Figura 10-39 e a fotografia da página capitular deste capítulo) são feitos de um metal cilíndrico sólido cortado com uma fenda helicoidal para aumentar sua complacência. Acoplamentos metálicos sanfonados (Figura 10-40) são feitos de lâminas finas de metais soldados em uma série de arruelas aglomeradas, produzindo hidraulicamente a forma de um tubo, ou por eletrorrecobrimento de camada espessa em um mandril. Esses acoplamentos têm capacidade de torque limitada se comparado a outros, mas oferecem zero golpe e alta rigidez torcional em combinação com desalinhamento axial, angular e paralelo.

Os acoplamentos de elo ou de Schmidt (Figura 10-41) conectam dois eixos através de um rede de elos que permitem desalinhamentos paralelos significativos sem cargas laterais ou perdas de torque e sem golpes. Algumas versões permitem quantidades pequenas de desalinhamento angular e axial também. Esses acoplamentos são frequentemente usados onde ajustes paralelos grandes ou movimentos dinâmicos são necessários entre os eixos.

As juntas universais são de dois tipos comuns, o acoplamento de Hooke (Figura 10-42), que não tem velocidade constante (CV), e o acoplamento de Rzeppa, que tem. Os acoplamentos de Hooke são geralmente usados aos pares para cancelar seu erro de velocidade. Ambos os tipos podem lidar com desalinhamen-

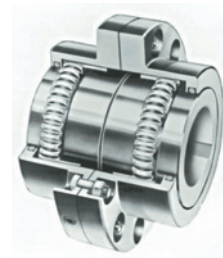



FIGURA 10-38

Um acoplamento de engrenagem flexível. (Cortesia da Amerigear/Zurn Industries, Inc., Erie, Pa, 16514.)

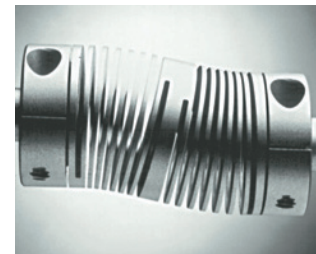



FIGURA 10-39

Um acoplamento de espiral. (Cortesia da Helical Products Co., Inc., Santa Maria, Calif, 93456.)

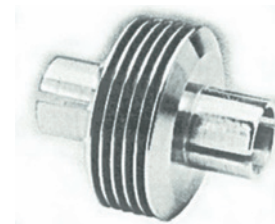



FIGURA 10-40

Acoplamento de metal. (Cortesia da Senior Flexonics Inc., Metal Bellows Division, Sharon, Mass, 02067.)

FIGURA 10-41

Acoplamento Schmidt. (Cortesia da Zero-Max/Helland Co., Minneapolis, Minn, 55441.)

Tabela 10-7 Características dos vários tipos de acoplamento

Classe	Desalinhamento tolerado				Comentários
	Axial	Angular	Paralelo	Torcional	
Rígido	grande	nenhum	nenhum	nenhum	requer alinhamento preciso
Mandíbula	insignificante	insignificante (< 2°)	insignificante (< 3% *d*)	moderado	absorção de choque – golpe apreciável
Engrenagem	grande	insignificante (< 5°)	insignificante (< 1/2% *d*)	nenhum	golpes insignificantes – grande capacidade de torque
Estrias	grande	nenhum	nenhum	nenhum	golpes insignificantes – grande capacidade de torque
Espiral	insignificante	grande (20°)	insignificante (< 1% *d*)	nenhum	uma peça compacta – nenhum golpe
Sanfonados	insignificante	grande (17°)	moderado (20% *d*)	nenhum	sujeito à falha por fadiga
Disco flexível	insignificante	insignificante (3°)	insignificante (2% *d*)	insignificante a nenhum	absorção de choque – nenhum golpe
Elo (Schmidt)	nenhum	insignificante (5°)	grande (200% *d*)	nenhum	nenhum golpe – nenhuma carga lateral no eixo
Hooke	nenhum	grande	grande (em pares)	nenhum	golpe insignificante – variação de velocidade, exceto se usada em pares
Rzeppa	nenhum	grande	nenhum	nenhum	velocidade constante

FIGURA 10-42

Acoplamento de Hooke. (Cortesia da Lovejoy Inc., Downwers Grove, Ill, 60515.)

tos angulares bastante grandes e, em pares, permitem desalinhamentos paralelos grandes também. Eles são usados em eixos motores em automóveis, um par de acoplamentos de Hooke no eixo motor da tração traseira e Rzeppas (chamado de juntas CV) em automóveis de tração dianteira.

A variedade de acoplamentos disponíveis requer do projetista a busca de informações mais detalhadas a respeito da capacidade deles com os fabricantes, os quais estão sempre disponíveis para ajudar na seleção do tipo apropriado de acoplamento para qualquer aplicação. Os fabricantes podem suprir, em geral, dados de testes sobre as capacidades de carga e alinhamento de acoplamentos específicos.

10.16 ESTUDO DE CASO

Consideraremos agora o projeto de eixos em um dos Estudos de Caso que foram definidos no Capítulo 9.

Projeto de eixos motores para um compressor de ar

O projeto preliminar deste equipamento está mostrado na Figura 9-1. Existem dois eixos, um de entrada e outro de saída. O eixo de saída terá um torque elevado neste caso, porque está à velocidade baixa de 1500 rpm. O torque naquele eixo foi definido no Estudo de Caso 8A, no Capítulo 9, e está mostrado na Figura 9-3. Como este é um torque variável no tempo, o eixo deve ser projetado para carregamento de fadiga. Além do torque nos eixos, haverá cargas laterais das engrenagens que aplicam momentos fletores, criando a situação de carregamento combinado. Observe na Figura 9-1 que os eixos estão mostrados como curtos, sendo apenas longos o suficiente para acomodar a engrenagem e os mancais. Isso é feito para minimizar os momentos fletores das forças da engrenagem.

Sabendo que as engrenagens não foram ainda projetadas, faremos algumas hipóteses acerca dos diâmetros e espessuras delas para fazer um projeto preliminar dos eixos. A seleção posterior dos mancais poderá ditar algumas mudanças no nosso projeto de eixo. Isso é típico dos problemas de projeto, porque todos os elementos de projeto interagem. A iteração é necessária para redefinir o projeto dos elementos.

ESTUDO DE CASO 8B

Projeto preliminar de eixos para um trem de comando de um compressor

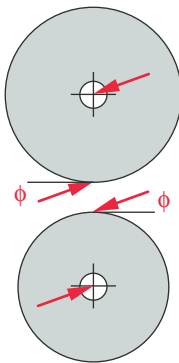



FIGURA 10-43

Forças no redutor de engrenagens.

Problema **Determine tamanhos razoáveis para os eixos de saída e entrada da caixa de transmissão na Figura 9-1 (repetida na próxima página) com base nos carregamentos definidos no Estudo de Caso 8A e especifique um tipo de acoplamento adequado.**

Dados **A função torque-tempo no eixo de saída é como mostrada na Figura 9-3. A razão de redução requerida das engrenagens é 2,5:1 na velocidade do eixo de entrada ao eixo de saída.**

Hipóteses **Tente um diâmetro da engrenagem de entrada (pinhão) de 4 in e um diâmetro da engrenagem de saída de 10 in, ambos de 2 in de espessura e ângulo de pressão de 20°. Mancais de rolamento de diâmetros padronizados serão usados em todos os eixos.**

Solução **Ver as Figuras 9-1, 9-3 e 10-43.**

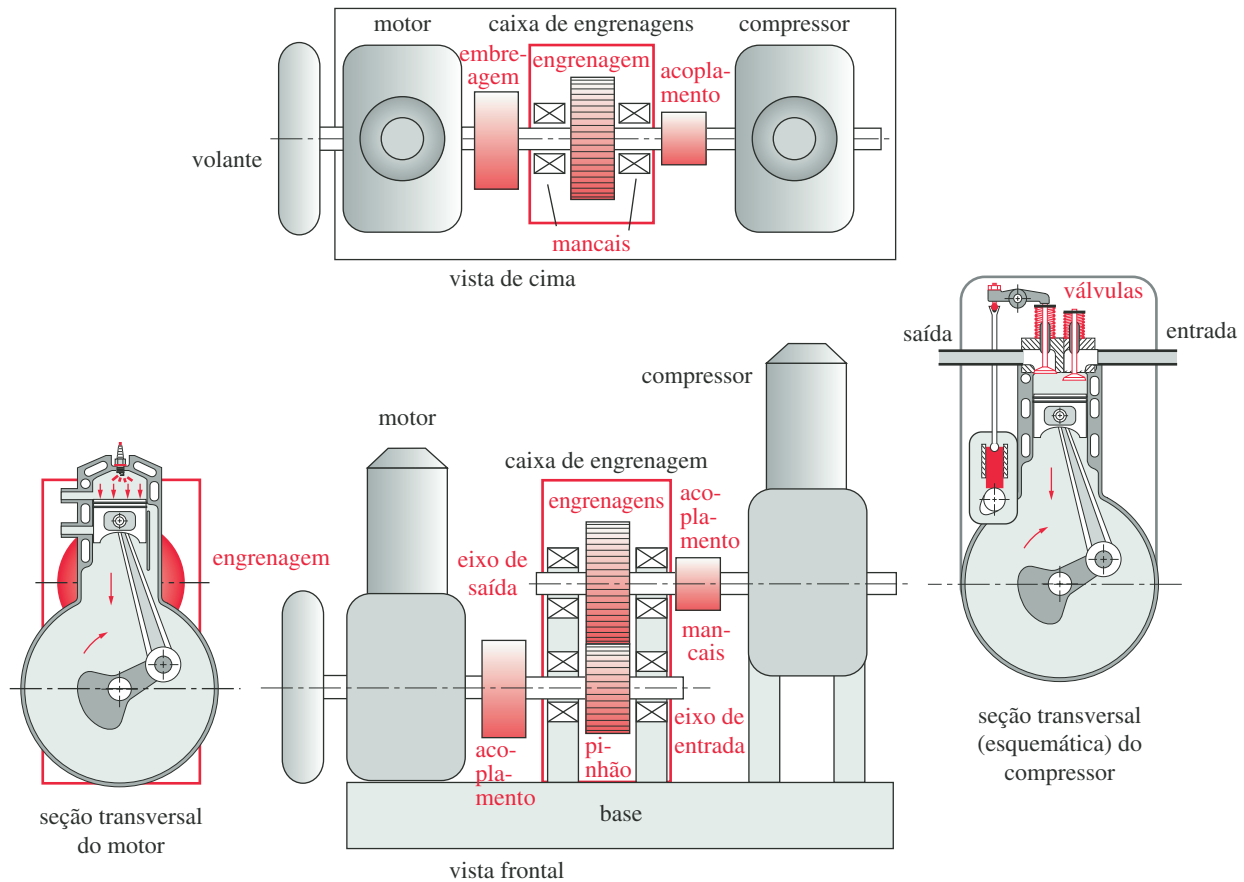



FIGURA 9-1 Repetida

Desenho esquemático preliminar de compressor de ar portátil movido por motor à gasolina, caixa de engrenagens, acoplamentos, eixos e mancais.

1 O torque variável com o tempo no eixo de saída está definido na Figura 9-3 variando de –175 a +585 lb-in. A partir desses valores e dos diâmetros supostos para as engrenagens, podemos determinar as forças nas engrenagens que são sentidas pelo eixo. A Figura 10-43 mostra o diagrama de corpo livre do redutor de engrenagens. Por causa do ângulo de pressão ϕ entre as engrenagens, haverá tanto as componentes radial e tangencial de força nas engrenagens. A componente tangencial F_t é encontrada a partir do torque e do raio suposto da engrenagem:

$$F_{t_{max}} = \frac{T_{max}}{r_g} = \frac{585 \text{ lb-in}}{5 \text{ in}} = 117 \text{ lb}$$

$$F_{t_{min}} = \frac{T_{min}}{r_g} = \frac{-175 \text{ lb-in}}{5 \text{ in}} = -35 \text{ lb} \qquad (a)$$

2 Os valores máximo e mínimo das forças resultantes são encontrados a partir de:

$$F_{max} = \frac{F_{t_{max}}}{\cos\phi} = \frac{117 \text{ lb}}{\cos 20°} = 124{,}5 \text{ lb}$$

$$F_{min} = \frac{F_{t_{min}}}{\cos\phi} = \frac{-35 \text{ lb}}{\cos 20°} = -37{,}25 \text{ lb} \qquad (b)$$

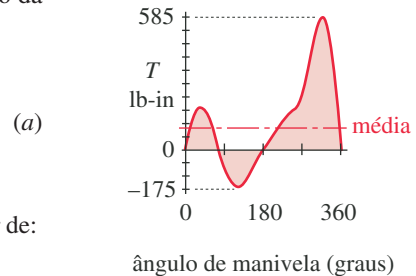



FIGURA 9-3 Repetida

Função total torque-tempo no eixo manivela com ω constante.

Observe que essas forças serão as mesmas no eixo de entrada, cujo torque é 0,4 vezes aquele do eixo de saída por causa da razão de redução das engrenagens 1:2,5.

3 Os momentos máximo e mínimo no eixo agora podem ser encontrados. Suporemos que as engrenagens estejam centradas entre mancais biapoiados que estão colocados com separação de 4 in. As forças de reação nos mancais de rolamento são, portanto, metade das forças das engrenagens, e os momentos fletores atingem o máximo no centro com uma magnitude de:

$$\begin{aligned} M_{max} &= F_{max}\frac{l}{4} = 124{,}5\frac{4}{4} = 124{,}5 \text{ lb-in} \\ M_{min} &= F_{min}\frac{l}{4} = -37{,}25\frac{4}{4} = -37{,}25 \text{ lb-in} \end{aligned} \qquad (c)$$

4 Por último, os eixos necessitarão ser escalonados para acomodar os mancais em cada extremidade e ser providos de escalonamento ou anéis para fixação das engrenagens. Neste estágio do projeto, assumiremos um diâmetro de eixo constante a fim de obter um valor aproximado para o carregamento de torque e momento.

Dado que um rasgo de chaveta provavelmente será necessário na engrenagem, suponha um fator de concentração de tensão de 3 para flexão e torção na posição crítica onde ambas as componentes de momento e torque são máximas. (Ver a Figura 10-16.) Depois que as engrenagens forem projetadas e os mancais de rolamento, selecionados, podemos refinar o projeto, incluindo os ressaltos escalonados e usando fatores de concentração de tensão mais precisos.

5 O carregamento é uma combinação de momento variado e torque variado que estão sincronizados. As componentes média e alternada de momento e torque são necessárias para o cálculo das tensões.

$$\begin{aligned} M_m &= \frac{M_{max} + M_{min}}{2} = \frac{124{,}5 - 37{,}25}{2} = 43{,}6 \text{ lb-in} \\ M_a &= \frac{M_{max} - M_{min}}{2} = \frac{124{,}5 + 37{,}25}{2} = 80{,}9 \text{ lb-in} \end{aligned} \qquad (d)$$

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{T_{max} + T_{min}}{2} = \frac{585 - 175}{2} = 205 \text{ lb-in} \\ T_a &= \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = \frac{585 + 175}{2} = 380 \text{ lb-in} \end{aligned} \qquad (e)$$

6 Necessitamos selecionar um material de teste para os cálculos. Tentaremos primeiramente um aço barato de baixo carbono laminado a frio como o SAE 1018 com S_{ut} = 64 kpsi e S_y = 54 kpsi. Embora esse aço não seja excepcionalmente forte, o material tem baixa sensitividade ao entalhe, o que será uma vantagem dadas as concentrações de tensão. Calculemos o limite de resistência à fadiga não corrigido usando a Equação 6.5:

$$S_{e'} = 0{,}5 S_{ut} = 0{,}5(64000) = 32000 \text{ psi} \qquad (f)$$

Esse valor deve ser reduzido por diversos fatores para levar em conta as diferenças entre a peça e o corpo de ensaio.

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carreg}\, C_{tamanho}\, C_{superf}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ S_e &= (1)(1)(0{,}84)(1)(1)(32000) \cong 27000 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (g)$$

O carregamento é flexão e torção, tal que C_{carreg} é 1. Dado que não sabemos ainda o tamanho da peça, provavelmente devemos supor $C_{tamanho}$ = 1 e ajustá-lo depois. C_{superf} é escolhido para um acabamento usinado pela Figura 6-26 ou pela

Equação 6.7*e*. A temperatura não é elevada, assim $C_{temp} = 1$, e supomos 50% de confiabilidade com $C_{conf} = 1$.

7 A sensitividade ao entalhe do material é encontrada a partir da Equação 6.13 ou da Figura 6-36: para flexão é $q = 0{,}50$ e para torção é $q = 0{,}57$, ambos para um suposto raio do entalhe de 0,01 in.

8 O fator de concentração de tensão por fadiga em flexão é encontrado a partir da Equação 6.11*b* usando o suposto fator geométrico de concentração de tensão.

Para a tensão de flexão no rasgo de chaveta:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}50(3{,}0 - 1) = 2{,}00 \qquad (h)$$

Para a tensão de torção no rasgo de chaveta:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}57(3{,}0 - 1) = 2{,}15 \qquad (i)$$

9 Pela Equação 6.17, encontramos que, neste caso, o mesmo fator deve ser usado nas componentes médias de tensão:

$$\begin{aligned} K_{fm} &= K_f = 2{,}00 \\ K_{fsm} &= K_{fs} = 2{,}15 \end{aligned} \qquad (j)$$

10 Agora o diâmetro do eixo pode ser encontrado pela Equação 10.8 usando o coeficiente de segurança hipotético de 3 para levar em conta as incertezas neste projeto preliminar. Observe que a equação da ASME (10.6) não pode ser usada seguramente neste caso, porque ela assume torque constante. Contudo, uma abordagem mais geral de linhas modificadas de Goodman da Equação 10.8 pode ser usada.

$$d_{saída} = \left\{ \frac{32N_{sf}}{\pi} \left[\frac{\sqrt{(K_f M_a)^2 + \frac{3}{4}(K_{fs} T_a)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{(K_{fm} M_m)^2 + \frac{3}{4}(K_{fsm} T_m)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(3)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2{,}00(80{,}9)]^2 + \frac{3}{4}[2{,}15(380)]^2}}{27000} + \frac{\sqrt{[2{,}00(43{,}6)]^2 + \frac{3}{4}[2{,}15(205)]^2}}{64000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_{saída} = 1{,}00 \text{ in} \qquad (k)$$

Assim, um eixo de diâmetro nominal de 1 in parece ser aceitável para o eixo de saída.

11 O eixo de entrada tem as mesmas componentes média e alternada de momentos fletores que o eixo de saída, mas seu torque é apenas 40% daquele do eixo de saída. Os torques médio e alternante nele são 82 e 152 lb-in. Quando eles são colocados na Equação 10.8 com todos os outros fatores mantidos, um diâmetro menor de eixo é encontrado.

$$d_{entrada} = \left\{ \frac{32(3)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2{,}00(80{,}9)]^2 + \frac{3}{4}[2{,}15(152)]^2}}{27000} + \frac{\sqrt{[2{,}00(43{,}6)]^2 + \frac{3}{4}[2{,}15(82)]^2}}{64000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_{entrada} = 0{,}768 \text{ in} \qquad (l)$$

O eixo de entrada pode então ser de diâmetro nominal 0,781 in, que é um tamanho padronizado.

12 Os acoplamentos entre o motor e o eixo de entrada e entre o eixo de saída e o compressor devem ser capazes de acomodar algum desalinhamento angular e de paralelismo devido a tolerâncias de montagem das três subpartes do motor, redutor e compressor. A complacência torcional nos acoplamentos também serviria para absorver parte dos impactos associados com o torque invertido visto na Figura 9-3.

Com essas restrições, um acoplamento do tipo mandíbula com um elastômero inserido pode ser uma boa escolha para ambos os acoplamentos. Os golpes inerentes nesses acoplamentos não seriam um problema, mesmo porque o desalinhamento de fase das três subpartes não é crítico para essa aplicação. Um acoplamento de disco flexível também poderia ser usado. Um acoplamento rígido requereria precisão maior na montagem das subpartes, o que não poderia ser garantido. Ver a Tabela 10-7 para informações sobre as características dos acoplamentos.

13 Os arquivos CASE8B-1 e CASE8B-2 estão no CD-ROM.

10.17 RESUMO

Os eixos são usados em todas as máquinas de movimento rotativo. O aço é a escolha usual de material para obter a rigidez suficiente para pequenas deflexões. Eixos podem ser de aços brandos, de baixo carbono, ou de aços de médio e alto conteúdo de carbono para resistência elevada ou, ainda, se um acabamento superficial duro for necessário para resistência ao desgaste. Os eixos de máquinas normalmente têm ressaltos para a localização axial de elementos anexos como mancais de rolamento, engrenagens ou polias. Esses ressaltos criam concentrações de tensão que devem ser consideradas na análise de tensões. Rasgos de chavetas ou ajustes por interferência também podem criar concentração de tensões.

O carregamento nos eixos é normalmente uma combinação de torção e flexão, e cada um deles, ou ambos, pode ser variável no tempo. O caso de carregamento geral de torque variado, combinado com flexão variada, requer uma abordagem com o diagrama de Goodman modificado para a análise de falha. Para o caso mais comum de torque e momento fletor relacionados através de forças comuns, a abordagem do diagrama de Goodman modificado é sintetizada na Equação 10.8, que nos dá uma ferramenta de projeto para determinar o diâmetro de um eixo de cargas variadas conhecidas, concentrações de tensão, resistência do material e coeficiente de segurança escolhidos. O projeto de eixo segundo a ASME (Equação 10.6) é aplicado apenas em casos de torque constante com momento fletor constante alternado devido à rotação do eixo. A equação da ASME é aplicada apenas em situações que satisfaçam essa limitação de carregamento. É sempre mais indicado usar a equação geral de projeto 10.8, que engloba momentos flutuantes e de torque se estiverem presentes.

Várias técnicas ou dispositivos como chavetas, estrias e acoplamentos de interferência são comumente usados para unir elementos aos eixos. As chavetas são padronizadas ao diâmetro do eixo. Consulte a norma da ANSI ou a referência 3 para valores do intervalo de tamanhos não reproduzidos neste capítulo. As estrias proveem maior capacidade de torque que as chavetas. Os acoplamentos de interferência podem ser acoplamentos de pressão direta ou expansão ou encolhimento térmico de um ou de ambos os membros. Essas técnicas podem criar tensões muito altas, possivelmente levando à falha da peça durante a montagem.

Os volantes são usados quando alguma suavização de torque ou de velocidade for necessária. O volante deve ser dimensionado para dar o coeficiente desejado de flutuação de velocidade e, então, verificado com relação à tensão na velocidade de operação. As tensões máximas em um volante ocorrem no diâmetro interno. A velocidade máxima de segurança deve ser determinada, já que as tensões aumentam com o quadrado da velocidade de rotação. Quando um volante falha enquanto gira, ele geralmente voa em pedaços e pode causar ferimentos sérios.

Todos os eixos em rotação terão frequências críticas nas quais eles entrarão em ressonância com grandes deflexões, causando falha. As frequências lateral e torcional serão diferentes e ambas devem ser evitadas em operação, mantendo a velocidade rotacional bem abaixo da frequência crítica mais baixa do eixo.

Uma grande variedade de acoplamentos de eixos está disponível comercialmente. Alguns tipos e suas características foram brevemente discutidos neste capítulo. Os fabricantes devem ser consultados para que informações mais completas e definitivas sejam obtidas.

Equações importantes usadas neste capítulo

Ver as seções referidas para informações sobre o uso correto destas equações.

Relações potência-torque (Seção 10.4):

$$P = T\omega \tag{10.1a}$$

Equação de projeto de eixo da ASME (Seção 10.8):

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(K_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{10.6b}$$

Equação geral de projeto de eixo (Seção 10.8):

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{(K_f M_a)^2 + \frac{3}{4}(K_{fs} T_a)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{(K_{fm} M_m)^2 + \frac{3}{4}(K_{fsm} T_m)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{10.8}$$

Deflexão torcional do eixo (Seção 10.9):

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \tag{10.9a}$$

Pressão gerada por um ajuste por interferência (Seção 10.11):

$$p = \frac{0{,}5\delta}{\frac{r}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o \right) + \frac{r}{E_i}\left(\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i \right)} \tag{10.14a}$$

Tensões tangenciais no eixo e cubo de um ajuste por interferência (Seção 10.11):

$$\sigma_{t_{eixo}} = -p \frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} \tag{10.15a}$$

$$\sigma_{t_{cubo}} = p\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} \tag{10.16a}$$

Energia armazenada em um volante em rotação (Seção 10.13):

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \omega^2 \tag{10.17a}$$

Momento inercial da massa de um volante de disco sólido (Seção 10.13):

$$I_m = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{g}\left(r_o^4 - r_i^4\right)t \tag{10.17d}$$

Inércia de um volante necessária para um coeficiente de variação selecionado (Seção 10.13):

$$E_k = \frac{1}{2} I_s \left(2\omega_{média}\right)\left(C_f \omega_{média}\right)$$
$$I_s = \frac{E_k}{C_f \omega_{média}^2} \tag{10.22}$$

Tensão tangencial em um volante girando (Seção 10.13):

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \tag{10.23a}$$

Frequência natural de um sistema de único grau de liberdade (Seção 10.14):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{rad/s} \tag{10.24a}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Hz} \tag{10.24b}$$

Primeira frequência lateral crítica (aproximada) (Seção 10.14):

$$\omega_n = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} (W_i/g)\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} (W_i/g)\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i^2}} \tag{10.25c}$$

Primeira frequência torcional crítica para duas massas em um eixo sem peso (Seção 10.14):

$$\omega_n = \sqrt{k_t\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} \quad \text{ou} \quad \omega_n^2 = k_t\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \tag{10.28c}$$

10.18 REFERÊNCIAS

1 **R. C. Juvinall and K. M. Marshek**, *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley & Sons: New York, p. 656, 1991.

2 **D. B. Kececioglu and V. R. Lalli**, "Reliability Approach to Rotating Component Design," *Technical Note TN D-7846*, NASA, 1975.

3 **V. C. Davies, H. J. Gough, and H. V. Pollard**, "Discussion to The Strength of Metals Under Combined Alternating Stresses," *Proc. of the Inst. Mech Eng.*, **131**(3): pp. 66-69, 1935.

4 **S. H. Loewenthal**, Proposed Design Procedure for Transmission Shafting Under Fatigue Loading, *Technical Note TM-78927*, NASA, 1978.

5 **H. J. Gough and H. V. Pollard**, The Strength of Metals Under Combined Alternating Stresses. *Proc. of the Inst. Mech Eng*., **131**(3): pp. 3-103, 1935.

6 **E. Oberg and F. D. Jones**, eds. *Machinery's Handbook*, 17th ed., Industrial Press Inc.: New York. pp. 867-883, 1966.

7 **R. C. Peterson**, *Stress-concentration factors*. John Wiley & Sons: New York, pp. 266-267, 1974.

8 **E. Oberg et al**, *Machinery's Handbook*, 25th ed., Industrial Press Inc.: New York. pp. 2042-2070, 1996.

9 **M. Dimentberg et al.**, "Passage Through Critical Speed with Limited Power by Switching System Stiffness," AMD-Vol. 192 / DE-Vol. 78, *Nonlinear and Stochastic Dynamics*, ASME 1994.

10 **C. R. Mischke**, *Elements of Mechanical Analysis*. Addison Wesley: Reading Mass. pp. 317-320, 1963.

11 **R. M. Phelan**, *Dynamics of Machinery*. McGraw-Hill: New York. pp. 178-196, 1967.

12 **R. L. Norton**, *Design of Machinery*. 3ed, McGraw-Hill: New York, p. 680, 1999.

Tabela P10-0[†]
Matriz de problemas/tópicos

10.4 Potência do eixo
10-15, 10-16, 10-41, 10-42

10.8 Projeto de eixo
10-1, ***10-2***, ***10-3***, ***10-8***, *10-31*, *9-32*, *10-33*, *10-34*. *10-35*

10.9 Deflexão do eixo
10-4, 10-5, 10-17b, 10-18, 10-21

10.10 Chavetas e rasgos de chaveta
10-6, 10-7, *10-9*, *10-10*, 10-17a, *10-19*, *10-20*, 10-28, 10-29, 9-30, *10-36*

10.12 Ajustes por interferência
10-11, *10-37*, *10-40*, 10-43, 10-44

10.13 Projeto do volante
10-12, *10-38*, *10-39*, 10-45, *10-46*

10.14 Velocidades críticas de eixos
10-13, 10-14, 10-17c, 10-22, 9-23, 10-24, 10-25, 10-26, 10-27

10.19 PROBLEMAS

*[†]***10-1** Um eixo biapoiado é mostrado na Figura P10-1. Uma carga transversal de magnitude constante P é aplicada à medida que o eixo roda sujeito a torque variável com o tempo que varia de T_{min} a T_{max}. Para o valor na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1, encontre o diâmetro requerido do eixo para obter um coeficiente de segurança de 2 relativo à carga de fadiga se o eixo é de aço de $S_{ut} = 108$ kpsi e $S_y = 62$ kpsi. As dimensões são em polegadas, a força em libras e o torque em lb-in. Pressuponha que não existam concentrações de tensão.

****10-2*** Um eixo biapoiado é mostrado na Figura P10-2. Uma carga distribuída de magnitude constante unitária p é aplicada enquanto o eixo roda sujeito a um torque variável com o tempo que varia de T_{min} a T_{max}. Para os valores na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1, encontre o diâmetro do eixo requerido para obter um coeficiente de segurança 2 no carregamento de fadiga se o eixo é de aço de $S_{ut} = 745$ Mpa e $S_y = 427$ Mpa. As dimensões são em cm, a força

Os mancais são de autoalinhamento, portanto atuam como apoios simples.

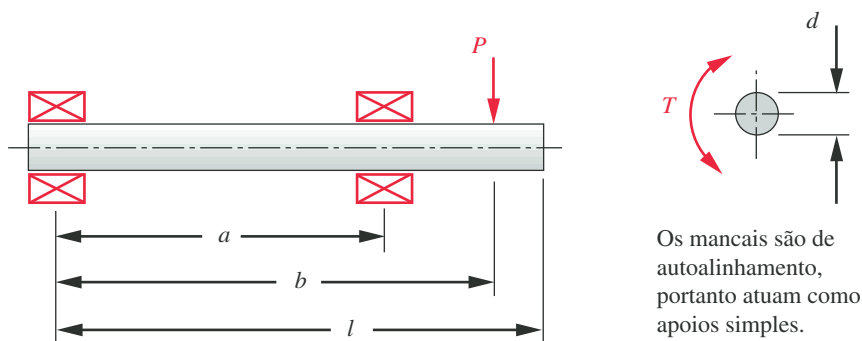



FIGURA P10-1

Projeto de eixo para os Problemas 10-1, 10-4 e 10-15.

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D.

† Problemas numerados em **negrito** são extensão de problemas similares apresentados em capítulos anteriores, tendo o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

Tabela P10-1 Dados para problemas

Linha	l	a	b	P ou p	T_{min}	T_{max}
a	20	16	18	1000	0	2000
b	12	2	7	500	–100	600
c	14	4	12	750	–200	400
d	8	4	8	1000	0	2000
e	17	6	12	1500	–200	500
f	24	16	22	750	1000	2000

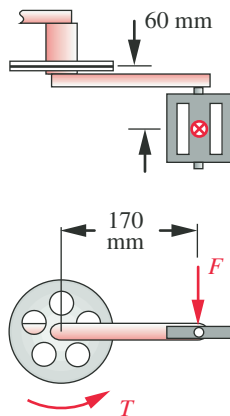



FIGURA P6-1 Repetida

Problema 10-3.

distribuída em N/cm e o torque em N-m. Pressuponha a ausência de concentrações de tensão.

10-3 Para o braço de montagem do pedal da bicicleta na Figura P6-1, pressuponha que a força aplicada pelo condutor abranja de 0 a 1500 N em pedal por cada ciclo. Projete um eixo apropriado para conectar os braços dos dois pedais e carregar a catraca contra um degrau. Use um coeficiente de segurança contra fadiga de 2 e um material com S_{ut} = 500 MPa. O eixo tem um entalhe quadrado em cada extremidade no qual é encaixado nos braços do pedal.

*10-4 Determine as deflexões máximas em torção e em flexão do eixo mostrado na Figura P10-1 para os valores na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1 se o diâmetro do eixo de aço for 1,75 in.

*10-5 Determine as deflexões máximas em torção e em flexão do eixo mostrado na Figura P10-2 para os valores na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1 se o diâmetro do eixo de aço for 4 cm.

*10-6 Determine o tamanho da chaveta necessário para dar um coeficiente de segurança de pelo menos 2 contra cisalhamento e falha de rolamento para o projeto mostrado na Figura P10-3 usando os valores da(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1. Pressuponha o diâmetro do eixo de 1,75 in. O eixo é de aço de S_{ut} = 108 kpsi e S_y = 62 kpsi. A chaveta é de aço de S_{ut} = 88 kpsi e S_y = 52 kpsi.

10-7 Determine o tamanho da chaveta necessário para dar um coeficiente de segurança de pelo menos 2 contra cisalhamento e falha de rolamento para o projeto mostrado na Figura P10-4 usando os valores da(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1. Pressuponha o diâmetro do eixo de 4 cm. O eixo é de aço de S_{ut} = 745 MPa e S_y = 427 MPa. A chaveta é de aço de S_{ut} = 600 MPa e S_y = 360 MPa.

****10-8*** Uma máquina de papel processa rolos de papel tendo uma densidade de 984 kg/m^3. O rolo de papel tem 1,50 m de diâmetro externo × 22 cm de diâmetro inter-

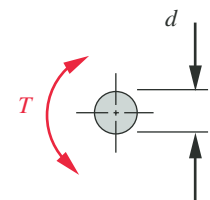
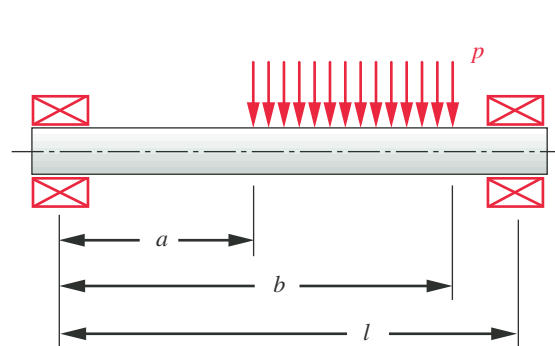



FIGURA P10-2

Projeto de eixo para os Problemas 10-2, 10-5 e 10-16. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em **negrito** são extensão de problemas similares apresentados em capítulos anteriores, tendo o mesmo número após o hífen. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

FIGURA P10-3

Projeto de eixo para os Problemas 10-6, 10-9, 10-11 e 10-12. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

no × 3,23 m de comprimento e está em um eixo de aço vazado biapoiado com S_{ut} = 400 MPa. Encontre o diâmetro interno do eixo necessário para obter um coeficiente de segurança dinâmica de 2 para uma vida de 10 anos se o diâmetro externo do eixo for 22 cm e o rolo girar a 50 rpm com 1,2 hp absorvidos.

**10-9* Repita o Problema 10-1 levando em conta a concentração de tensão no rasgo da chaveta mostrado na Figura P10-3.

10-10 Repita o Problema 10-2 levando em conta as concentrações de tensões nos rasgos de chaveta mostrados na Figura P10-4.

**10-11* Determine a quantidade de interferência diametral necessária para conseguir um ajuste por interferência apropriado para a engrenagem da Figura P10-3 de 6 in de diâmetro por 1 in de espessura usando um eixo de diâmetro de 1,75 in, tal que as tensões no cubo e eixo sejam seguras e o torque da(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1 possa ser transmitido pelo ajuste por interferência. Suponha que S_{ut} = 108 kpsi e S_y = 62 kpsi.

10-12 Pressuponha que o dispositivo fixado por chaveta ao eixo mostrado na Figura P10-3 seja um volante de ferro fundido, Classe 50 de diâmetro externo 20 in e espessura de 1 in. O cubo tem diâmetro de 4 in e espessura de 3 in. Determine a velocidade máxima na qual ele pode ser rodado com segurança usando um coeficiente de segurança de 2. Use as dimensões e outros dados apropriados do Problema 10-6. Considere que a força transversal *P* seja zero neste caso.

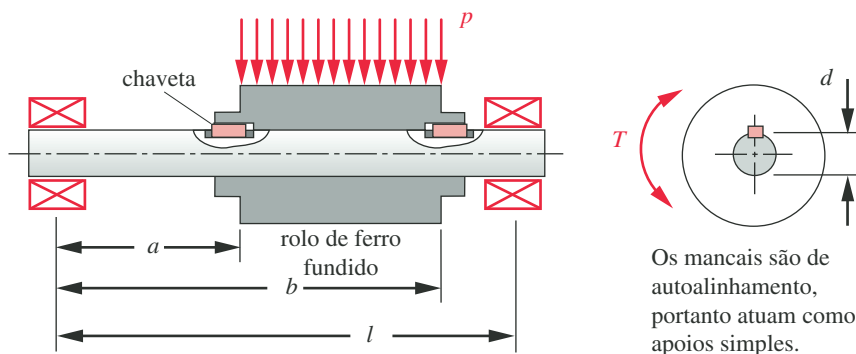



FIGURA P10-4

Projeto de eixo para os Problemas 10-7, 10-10 e 10-14. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

*10-13 Determine a frequência crítica do turbilhão do eixo para o conjunto mostrado na Figura P9-3 usando as dimensões das funções atribuídas na Tabela P10-1 e um eixo de aço com diâmetro de 2 polegadas Use as dimensões do volante do Problema 10-12.

10-14 Determine a frequência crítica de rotação do eixo para a montagem mostrada na Figura P9-4 usando as dimensões da(s) linha(s) mostrada(s) na Tabela P10-1 e um eixo de aço de diâmetro de 4 cm. O diâmetro do rolo de ferro fundido é 3 vezes o diâmetro do eixo.

*10-15 Quais são os valores de potência máxima, mínima e média para o eixo mostrado na Figura P10-1 para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1 se a velocidade do eixo é 750 rpm?

*10-16 Quais são os valores de potência máxima, mínima e média para o eixo mostrado na Figura P10-2 para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P10-1 se a velocidade do eixo é 50 rpm?

*10-17 A Figura P10-5 mostra a montagem de um rolo movido por uma engrenagem. O rolo ocupa 80% do comprimento *a* e está centrado nessa dimensão. O rolo ocupa 95% do comprimento exposto do eixo entre as faces dos mancais. O eixo é de aço com $S_y = 427$ MPa e $S_{ut} = 745$ MPa. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1, encontre:

(a) O coeficiente de segurança contra fadiga para um eixo de diâmetro de 40 mm.
(b) A deflexão torcional máxima entre a engrenagem e o rolo.
(c) A frequência natural torcional do eixo.

*10-18 A Figura P10-5 mostra a montagem de um rolo movido por uma engrenagem. O rolo ocupa 80% do comprimento *a* e está centrado nessa dimensão. O rolo ocupa 95% do comprimento exposto do eixo entre as faces dos mancais. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1, encontre a deflexão máxima de flexão para um eixo de diâmetro de 40 mm.

**10-19* A Figura P10-6 mostra duas engrenagens em um eixo comum. Pressuponha que a força radial constante P_1 seja 40% de P_2. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1, encontre o diâmetro do eixo requerido para obter um coeficiente de segurança de 2 no carregamento de fadiga se o eixo for de aço de $S_{ut} = 108$ kpsi e $S_y = 62$ kpsi. As dimensões são polegadas, a força lb e o torque lb-in.

10-20 Um eixo sólido reto de 12 in de comprimento é suportado por mancais autoalinhantes em cada extremidade. Uma engrenagem é fixada no meio do eixo com

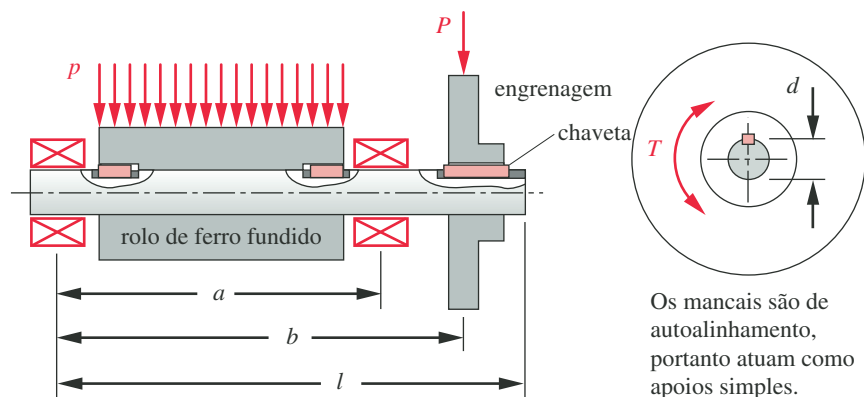



FIGURA P10-5

Projeto de eixo para os Problemas 10-17 e 10-18. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

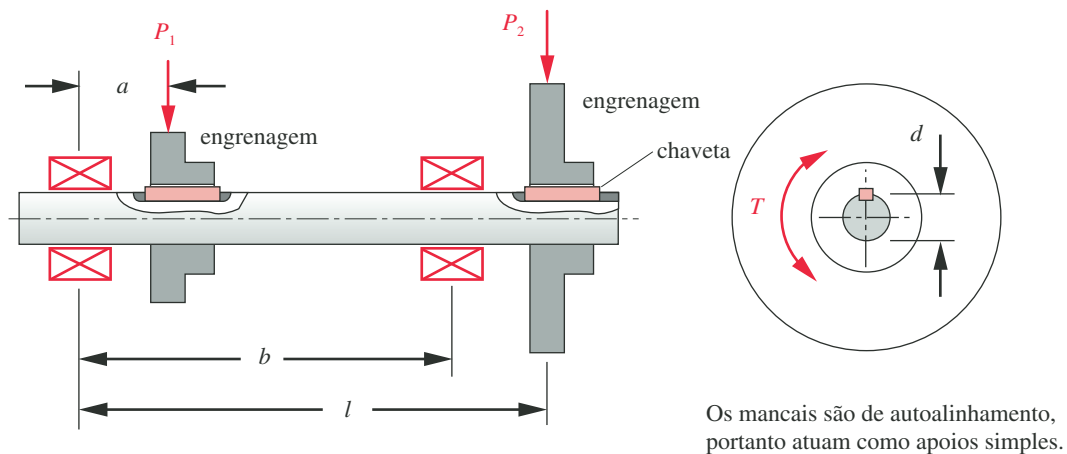



FIGURA P10-6

Projeto de eixo para o Problema 10-19. (Um modelo *Solidworks* encontra-se no CD.)

uma chaveta quadrada de aço de 3/8 in posta em um rasgo. O fator geométrico de concentração de tensão no rasgo de chaveta é 2,5 e o seu raio de canto é 0,02 in. A engrenagem move uma carga variada que cria um momento fletor que varia de + 100 lb-in a + 900 lb-in e um torque que varia de –300 lb-in a + 1500 lb-in em cada ciclo. O material escolhido é aço 4140 repuxado a frio, endurecido e revenido para obter a dureza Rockwell C45 (S_{ut} = 180 kpsi). Projete o eixo para vida infinita e determine o diâmetro necessário para um coeficiente de segurança de 1,5.

10-21 A Figura P10-7 mostra a montagem de um carrossel. O disco sólido de aço tem 500 mm de diâmetro por 16 mm de espessura e está parafusado à flange de topo do eixo. O eixo tem ressalto de 70 mm de diâmetro com comprimento L_1 e 40 mm de diâmetro com comprimento L_2 e é suportado por mancais de rolos cônicos. Os raios de todos os filetes são 0,5 mm. Um motor de 5 kw move o eixo por meio de um caixa de engrenagens com redução de 20:1 e um acoplamento comercial sanfonado. O máximo torque nominal do motor é 17,7 N-m e o torque de parada é 3x seu torque nominal. Encontre a tensão máxima e a deflexão angular no eixo em condições de disco travado e motor parado.

10-22 Para a montagem do carrossel do Problema 10-21 e da Figura P10-7, encontre a frequência torcional natural do conjunto eixo-disco sentida no eixo do motor. A caixa de engrenagens tem uma rigidez torcional de 1,56*E*5 N-m/rad e o acoplamento tem uma rigidez torcional de 5,1*E*5 N-m/rad. Pressuponha que o disco esteja sem ferramentas e que todo o suporte ao piso seja infinitamente rígido.

10-23 Repita o Problema 10-22 quando o disco estiver equipado com 20 conjuntos de ferramentas parafusadas a sua superfície superior, igualmente espaçados em uma circunferência de parafusos de 416 mm. Cada montagem do conjunto de ferramentas pesa 75,62 N. Pressuponha que o suporte no chão seja infinitamente rígido.

10-24 Repita o Problema 10-22 quando o carrossel tiver um motor montado com uma rigidez torcional de 2,44*E*5 N-m/rad.

10-25 O ferramental no carrossel do Problema 10-21 e da Figura P10-7 comunica ao disco um torque variável com o tempo que abrange desde um pico de 30% do torque nominal do motor (no motor) a zero, 20 vezes por revolução do disco. Se a velocidade do motor for 600 rpm, encontre o pior caso das funções tensão-tempo e deflexão-tempo para o eixo. Escolha um material de eixo para produzir

FIGURA P10-7

Projeto do eixo para os Problemas 10-21 a 10-28.

um coeficiente de segurança de pelo menos 3 contra falha. Não leve em conta a resposta do sistema quanto à vibração forçada.

10-26 Combinando os dados dos Problemas 10-23 e 10-25, (a) encontre a razão entre as frequências de excitação torcional forçada e a primeira frequência natural torcional do carrossel; (b) usando a razão das frequêncas calculadas na parte (a), repita o Problema 10-25 levando em conta a resposta da vibração forçada do sistema se a taxa de amortecimento for $\zeta = 0{,}20$.

10-27 Repita o Problema 10-25 para um carregamento de impacto impulsivo de 500 N aplicado tangencialmente à borda do disco 20 vezes por revolução, igualmente espaçados no tempo.

10-28 Para o carrossel do Problema 10-21 e da Figura P10-7, dimensione uma chaveta quadrada para acoplar o eixo do disco de 40 mm de diâmetro ao acoplamento.

10-29 Repita o Problema 10-28 para o carregamento do Problema 10-25.

10-30 Repita o Problema 10-28 para o carregamento do Problema 10-27.

† *10-31* Um eixo biapoiado com carregamento em balanço é mostrado na Figura P10-1. Uma força transversal de magnitude constante P é aplicada à medida que o eixo roda. O eixo está também sujeito a um torque constante T_{max}. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1 (ignorando T_{min}), encontre o diâmetro do eixo requerido para obter um coeficiente de segurança de 2,5 em carregamento de fadiga se o eixo for de aço de S_{ut} = 118 kpsi e S_y = 102 kpsi. As dimensões são em polegadas (in), a força em libras (lb) e o torque em lb-in. Pressuponha que não existam concentrações de tensão, que o eixo seja usinado, que a confiabilidade seja de 90% e que o eixo opere à temperatura ambiente.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

10-32 Repita o Problema 10-31 levando em conta a concentração de tensão no rasgo de chaveta mostrado na Figura P10-3.

10-33 Um eixo biapoiado é mostrado na Figura P10-2. Uma carga unitária distribuída de magnitude constante p é aplicada enquanto o eixo roda. O eixo também está sujeito a um torque contínuo de T_{max}. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P10-1 (ignorando T_{min}), encontre o diâmetro do eixo requerido para obter um coeficiente de segurança de 2,5 em carregamento de fadiga se o eixo for de aço de S_{ut} = 814 MPa e S_y = 703 MPa. As dimensões são em cm, a força distribuida em N/cm e o torque em N-m. Pressuponha que não existam concentrações de tensão, que o eixo seja usinado, que a confiabilidade seja de 90% e que o eixo opere a temperatura ambiente.

10-34 Repita o Problema 10-33 levando em conta a concentração de tensão nos rasgos de chaveta mostrados na Figura P10-4.

10-35 A Figura P10-8 mostra a última fase de uma caixa de engrenagens com duas saídas. A engrenagem é fabricada integrada ao eixo. O eixo é apoiado por mancais esféricos alinhados. Braços de manivela estão ligados a cada extremidade do eixo. A carga sobre as manivelas produz forças transversais variáveis equivalentes sobre a extremidade do eixo, bem como torques variáveis equivalentes. O torque é transmitido através de rasgos de chaveta fresada na manivela e no eixo e uma chave paralela que se encaixa perfeitamente em cada rasgo. A manivela está localizada axialmente por um ressalto que está a L = 50 mm do plano no qual a carga transversal atua. O raio de concordância de diâmetro do eixo é r/d = 0,05 e do ressalto em relação ao diâmetro do eixo é D/d = 1,2. O material do eixo/engrenagem é aço SAE 4130. A força transversal varia de 8 kN a 16,5 kN, e o torque varia de 1,1 kN-m a 2,2 kN-m. Para um fator de segurança de 2,5 contra uma falha por fadiga da vida infinita, determine um diâmetro do eixo adequado, d.

10-36 Determine o tamanho de chave necessário para dar um fator de segurança de pelo menos 2 contra o cisalhamento e falha do rolamento para a ligação de manivela/eixo do Problema 10-35. Suponha um diâmetro do eixo de 58 mm e uma chave de aço SAE 1040 CR.

**10-37* Como alternativa para a ligação por chaveta no Problema 10-35, determine a quantidade de interferência diametral necessária para proporcionar um ajuste por interferência adequado para a manivela da Figura P10-8 utilizando um eixo com diâmetro de 58 mm, de tal modo que as tensões no cubo e no eixo sejam seguras e que o torque máximo possa ser transmitido por ajuste por interferência. O material da manivela é o mesmo que o do eixo, e o comprimento ao longo do eixo é de 64 mm. O diâmetro externo efetivo da manivela é de 150 mm.

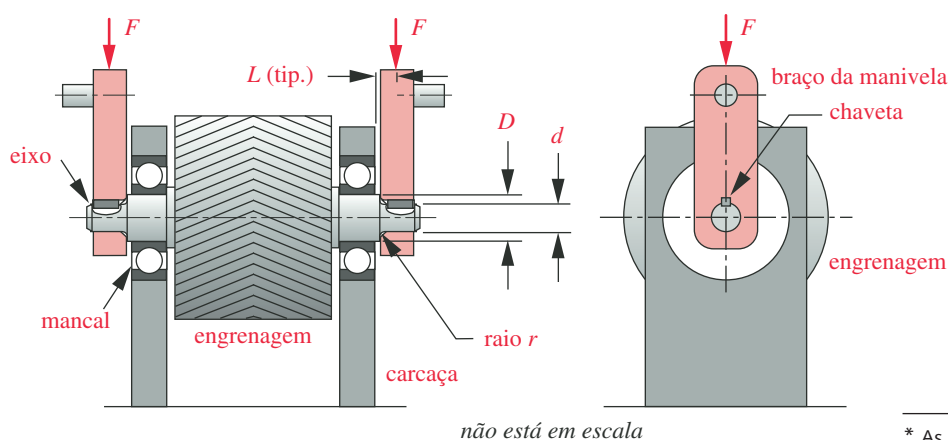



FIGURA P10-8

Problemas 10-35 a 10-37.

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

*10-38 Um eixo de acionamento de motor elétrico que tem um torque de carga variável gira a uma velocidade média de 1600 rpm. O torque de carga varia senoidalmente uma vez por revolução do eixo com um torque máximo de 29.500 in-lb. O diâmetro do eixo é de 2,0 polegadas. Desenhe um volante adequado para esse sistema capaz de fornecer um coeficiente de flutuação de 0,05 e um fator de segurança contra excesso de velocidade de pelo menos 4. O volante deve ser um disco sólido circular de espessura constante feito de aço SAE 1020 CR.

10-39 Repita o Problema 10-38 para um torque de pico de carga de 40.500 in-lb e uma função de posição de torque *versus* eixo de $Tl = Tpeak(\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta)$.

10-40 Como alternativa para a ligação por chaveta no Problema 10-6, determine a quantidade de interferência diametral necessária para proporcionar o ajuste por interferência adequado para a engrenagem da Figura P10-3 utilizando os dados do Problema 10-6 e a(s) linha(s) designada(s) na Tabela P10-1. O diâmetro do cubo da engrenagem é 3,50 polegadas, seu comprimento ao longo do eixo é de 2,00 polegadas e tem as mesmas propriedades que o material do eixo.

10-41 A Figura P10-6 mostra um eixo rodando a 400 rpm, com duas engrenagens anexas. A engrenagem da direita (2) fornece o torque da carga, e a engrenagem da esquerda (1) fornece um torque de entrada igual, mas no sentido oposto. O torque varia entre 2,2 kN-m e 6,2 kN-m. Determine os valores mínimo, máximo e de potência média transmitida pelo eixo.

10-42 A Figura P10-6 mostra um eixo rodando a 750 rpm, com duas engrenagens anexas. A engrenagem da direita (2) fornece o torque da carga, e a engrenagem da esquerda (1) fornece um torque de entrada igual, mas no sentido oposto. As forças exercidas sobre uma engrenagem atuam no diâmetro do passo e possuem um radial (P na figura) e um componente tangencial (não mostrado). Supondo que o passo diametral da engrenagem 1 é de 250 mm e a força tangencial varia entre 15 kN e 60 kN, determine as potências mínima, máxima e média transmitidas pelo eixo.

10-43 Determine a quantidade de interferência diametral necessária para proporcionar um ajuste por interferência adequado (em vez da ligação por chaveta mostrada) para uma engrenagem com 5 polegadas de diâmetro por 1,5 polegada de espessura (1) da Figura P10-6 usando um eixo com diâmetro de 1,5 polegada, de tal modo que as tensões no cubo e no eixo estejam seguras e o torque de entrada de 1500 lbf-in possa ser transmitido por ajuste por interferência. Ambas as peças são de aço SAE 4130 normalizado @ 1650F.

10-44 Determine a quantidade de interferência diametral necessária para proporcionar um ajuste por interferência adequado (em vez da ligação por chaveta mostrada) para uma engrenagem com 125 mm de diâmetro por 75 mm de espessura (1) da Figura P10-6 usando um eixo com diâmetro de 80 polegadas, de tal modo que as tensões no cubo e no eixo estejam seguras e o torque de entrada de 170 N-m possa ser transmitido por ajuste por interferência. Ambas as peças são de aço SAE 4140 normalizado @ 1650F.

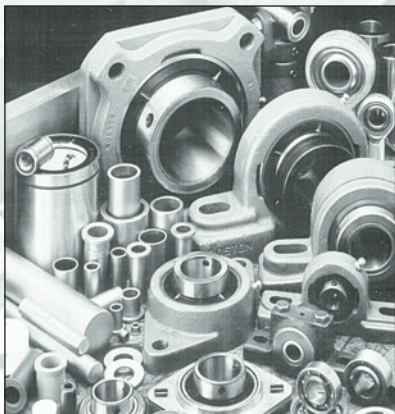
10-45 Tabela P10-2 mostra os pulsos de energia entregues para (positivo) e a partir de (negativo) um sistema rotativo juntamente com os ângulos de eixo no qual a função do torque cruza a linha de torque médio em uma função torque-tempo. Usando estes dados, determine os ângulos de eixo no qual ocorrem as velocidades mínimas e máximas da rotação do eixo e a alteração total na energia a partir da posição do eixo na qual a velocidade máxima ocorre para a posição na qual a velocidade mínima ocorre.

10-46 Um eixo de acionamento de motor elétrico que tem um torque de carga variável gira a uma velocidade média de 1950 rpm. Os pulsos de energia para (positivo) e a partir do (negativo) sistema orientado são dadas na Tabela P10-2. O diâmetro do eixo é de 50 mm. Projete um volante adequado para este sistema capaz de proporcionar um coeficiente de flutuação de 0,05 e um fator de segurança contra excesso de velocidade de pelo menos 5. O volante deve ser um disco circular oco de espessura constante feito de aço SAE 1040 CR.

Tabela P-10-2
Dados para o Problema 10-45

Ângulos do eixo	Energia delta
0° a 75°	–1040 N-m
75° a 195°	+2260 N-m
195° a 330°	–2950 N-m
330° a 360°	+1740 N-m

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

11

MANCAIS DE ROLAMENTO E LUBRIFICAÇÃO

O conhecimento do homem é semelhante às águas, algumas caem do alto e algumas brotam do chão.
Francis Bacon

11.0 INTRODUÇÃO

Usamos o termo **mancal** aqui no sentido mais geral. Sempre que duas partes têm movimento relativo, elas constituem um mancal por definição, sem levar em conta sua forma ou configuração. Normalmente, precisa-se de lubrificação em qualquer mancal para reduzir o atrito e remover o calor. Os mancais podem rolar, escorregar ou fazer ambos simultaneamente.

Um *mancal plano* é formado por dois materiais quaisquer que se esfregam entre si, como uma camisa ao redor de um eixo ou uma superfície plana sob uma parte que escorrega. No caso de um mancal plano, uma das partes móveis geralmente será de aço, ferro fundido ou algum outro material estrutural a fim de atingir a resistência e a dureza requeridas. Por exemplo, eixos de transmissão, elos e pinos estão nessa categoria. As partes contras as quais eles se movem normalmente são feitas de um material "de apoio" como bronze, *babbitt* ou um polímero não metálico. Um mancal plano radial pode ser bipartido para montá-lo no eixo, ou pode ser um círculo completo chamado de **bucha**. Um **mancal axial** suporta carga axial.

Alternativamente, um mancal de elementos rolantes, que tem esferas de aço endurecidas ou rolos mantidos entre pistas de aço endurecido, pode ser usado para permitir atrito muito baixo. Mancais planos são tipicamente projetados sob especificação para aplicação, enquanto os mancais de elementos rolantes são tipicamente selecionados de catálogos de fabricantes para acomodar as cargas, velocidades e a vida especificada para a aplicação em particular. Mancais de elementos rolantes podem resistir a cargas radiais, axiais ou a uma combinação de ambas, dependendo do projeto.

Neste capítulo, discutiremos mancais em geral, tanto do tipo de deslizamento (ou plano) quanto o de elementos rolantes. A teoria da lubrificação também será discutida na medida em que se aplica a esses tipos de mancais. A Tabela 11-0 mostra as variáveis usadas neste capítulo e menciona as equações e seções em que elas aparecem.

Tabela 11-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área	in^2	m^2	Seção 11.5
a, b	meia-largura, comprimento de contato	in	m	Equação 11.18
C	taxa de carga dinâmica básica	lb	N	Seção 11.10
C_0	taxa de carga estática básica	lb	N	Seção 11.10
c_d, c_r	folga radial e diametral	in	m	Seção 11.5
d	diâmetro	in	m	várias
E'	módulo de elasticidade efetivo	psi	Pa	Equação 11.16
F	força (com vários subscritos)	lb	N	Equação 11.22
f	força de atrito	lb	N	Equação 11.11
h	espessura do filme de lubrificante	in	m	Seção 11.5
K_ε	parâmetro adimensional	nenhuma	nenhuma	Seção 11.5
l	comprimento	in	m	Seção 11.5
L	vida sob fadiga de mancal de rolamentos	10^6 revs	10^6 revs	Equação 11.19
n'	velocidade angular	rps	rps	Seção 11.5
O_N	número de Ocvirk	nenhuma	nenhuma	Equação 11.12
P	força ou carga	lb	N	Seção 11.5
p	pressão	psi	N/m^2	Seção 11.5
r	raio	in	m	Seção 11.5
R'	raio efetivo	in	m	Equação 11.16
S	número de Sommerfeld	nenhuma	nenhuma	Seção 11.5
T	torque	lb-in	N-m	Seção 11.5
U	velocidade linear	in/s	m/s	Seção 11.5
X, Y	fatores de força axial e radial	nenhuma	nenhuma	Equação 11.22
α	expoente pressão-viscosidade	in^2/lb	m^2/N	Equação 11.15
ε	razão de excentricidade	nenhuma	nenhuma	Equação 11.3
ε_x	razão empírica de excentricidade	nenhuma	nenhuma	Equação 11.13
ϕ	ângulo da força resultante	rad	rad	Seção 11.5
Φ	potência	hp	watts	Equação 11.10
η	viscosidade absoluta	reyn	cP	Equação 11.1
Λ	espessura específica de filme	nenhuma	nenhuma	Equação 11.14
μ	coeficiente de atrito	nenhuma	nenhuma	Equação 11.11
ν	coeficiente de Poisson	nenhuma	nenhuma	Equação 11.17
θ_{max}	ângulo de pressão máxima	rad	rad	Seção 11.5
ρ	densidade de massa	*blob*/in^3	kg/mm^3	Equação 11.1
τ	tensão de cisalhamento (com vários subscritos)	psi	Pa	Seção 11.5
υ	viscosidade cinemática	in^2/s	cS	Equação 11.1
ω	velocidade angular	rad/s	rad/s	Equação 11.10

A.G.M. Michell, um pioneiro na teoria de mancais e projeto, e um dos inventores do mancal de acolchoado inclinado, uma vez definiu o que se deseja de um rolamento da seguinte maneira:

> Para o projetista de uma máquina, todos os mancais são claramente apenas males necessários, não contribuindo em nada para o produto ou a função da máquina; e quaisquer virtudes que possam ter são apenas de valor negativo. O mérito deles

A fotografia da página capitular é cortesia da Boston Gear, Division of IMO Industries, Quincy, Mass.

consiste em absorver a menor potência possível, desgastando-se o mais devagar possível, ocupando o menor espaço possível e custando o menos possível.[1]

Atenção, leitor

A teoria de lubrificação para superfícies em movimento relativo é extremamente complexa matematicamente. As soluções das equações diferenciais parciais que governam o comportamento estão baseadas em hipóteses simplificadoras que produzem apenas soluções aproximadas. Este capítulo não tenta apresentar uma discussão completa ou a explicação de todos os fenômenos complicados da dinâmica de lubrificação, mesmo porque eles estão muito além dos objetivos deste livro. Pelo contrário, apresentamos apenas uma discussão introdutória de uns poucos casos comuns encontrados em projetos de máquinas. São introduzidos e descritos os casos de lubrificação de contorno, hidrostática, hidrodinâmica e elasto-hidrodinâmica, e a teoria para as condições dos dois últimos é discutida sem a apresentação das derivações completas das equações que governam os casos devido às limitações de espaço.

Tópicos como a teoria de filme comprimido e o redemoinho de óleo não são estudados, nem os problemas de fornecimento de lubrificante para o mancal e a transferência de calor do mancal. Livros inteiros foram escritos sobre esses tópicos e o leitor deve dirigir-se a essas fontes para informações mais completas. A derivação das equações que governam o comportamento do mancal está disponível na maior parte dos livros especializados sobre o assunto. A referência 2 apresenta uma introdução excelente à teoria da lubrificação com um mínimo de matemática, e a referência 3 é bem completa, atual e com um tratamento matemático rigoroso do assunto.

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem simples e razoavelmente precisa para o projeto de mancais radiais curtos que permitirá que eles sejam projetados para cargas e velocidades requeridas para a maior parte das máquinas. Também consideraremos a lubrificação de contatos não conformantes como dentes de engrenagens e juntas de camos e seguidor. Finalmente, oferecemos uma discussão sobre a seleção de mancais de elementos rolantes a partir da informação dos fabricantes. Os mancais de elementos rolantes constituem um tópico tão complicado quanto aquele dos mancais radiais, e diversos livros foram escritos sobre este assunto também. Aconselha-se ao leitor que consulte as referências 3 e 4 para tratamentos completos e atualizados da teoria de mancais de contato rotativo e de lubrificação. As referências a este capítulo identificam leituras adicionais no assunto complexo de lubrificação e projeto de mancais. Mal tocamos a superfície deste assunto complicado neste livro. Esperamos que isto "abra o seu apetite" para aprender mais sobre o assunto.

11.1 LUBRIFICANTES

A introdução de um lubrificante em uma interface deslizante tem diversos efeitos benéficos no coeficiente de atrito. Os lubrificantes podem ser gasosos, líquidos ou sólidos. Os lubrificantes líquidos ou sólidos têm em comum as propriedades de baixa resistência a cisalhamento e alta resistência à compressão. Um lubrificante líquido, como o óleo de petróleo, é essencialmente incompressível aos níveis de tensão de compressão encontrados em mancais, mas ele cisalha de imediato. Assim, ele se torna o material mais fraco na interface, e sua baixa resistência ao cisalhamento reduz o coeficiente de atrito (ver a Equação 7.3). Os lubrificantes podem também atuar como contaminantes para as superfícies metálicas e podem revesti-las com monocamadas de moléculas que inibem a adesão até mesmo entre metais compatíveis.

Os lubrificantes líquidos são os mais comumente usados e os óleos minerais são os líquidos mais comuns. Graxas são óleos misturados com sabões para formar um lubrificante espesso e pegajoso usado onde os líquidos não podem entrar ou se aderir às superfícies. Os lubrificantes sólidos são usados em situações em que os lubrificantes líquidos não podem ser mantidos nas superfícies ou carecem de alguma propriedade requerida, como resistência a altas temperaturas. Os lubrificantes gasosos são usados em situações especiais, como bolsas de ar, para obter atrito excepcionalmente baixo e também para remover calor da interface. A temperatura baixa dos mancais reduz as interações superficiais e o desgaste.

Os lubrificantes líquidos são principalmente baseados no petróleo ou óleos sintéticos, embora a água seja às vezes usada como lubrificante em ambientes aquosos. Muitos óleos lubrificantes comerciais são misturados com vários aditivos que reagem com o metal para formar contaminantes de monocamada. Os assim chamados lubrificantes EP (*Extreme Pressure*) adicionam ácidos graxos ou outros compostos ao óleo para atacar o metal quimicamente e formar uma camada contaminante que protege e reduz o atrito mesmo quando o filme de óleo é espremido da superfície pelas altas cargas de contato. Os óleos são classificados por sua viscosidade bem como pela presença de aditivos para aplicações EP. A Tabela 11-1 mostra alguns líquidos lubrificantes comuns, suas propriedades e usos típicos. Os fabricantes de lubrificantes devem ser consultados para aplicações específicas.

Os lubrificantes de filme sólido são de dois tipos: materiais que exibem tensões de cisalhamento baixas, como o grafite e o dissulfeto de molibdênio, que são adicionados à interface, e camadas como fosfatos, óxidos ou sulfetos que são produzidas nas superfícies dos materiais. Os materiais de grafite e MoS_2 são tipicamente fornecidos em forma de pó e podem ser levados à interface em um aglutinador de graxa de petróleo ou outro material. Esses lubrificantes secos têm a vantagem de atrito baixo e resistência a altas temperaturas, embora esta última possa estar limitada à escolha do aglutinador. Camadas como fosfatos ou óxidos podem ser depositadas química ou eletroquimicamente. Essas camadas são

Tabela 11-1 Tipos de lubrificantes líquidos

Tipo	Propriedades	Usos típicos
Óleos derivados do petróleo (óleos minerais)	Habilidade de lubrificação básica razoável, mas com aditivos se consegue grandes melhorias. Pobre ação lubrificante a altas temperaturas.	Bastante amplo e geral
Poliglicólicos	Lubrificantes muito bons, não formam escória em oxidação.	Fluido de freios
Silicones	Habilidade de lubrificação pobre, especialmente contra o aço. Boa estabilidade térmica.	Selos de borracha, amortecedores mecânicos
Clorofluorcarbonatos	Lubrificante bom, boa estabilidade térmica.	Compressores de oxigênio, equipamento de processamento químico
Éteres polifenílicos	Gama de líquidos muito ampla. Excelente estabilidade térmica. Razoável habilidade lubrificante	Sistema de deslizamento de altas temperaturas
Ésteres de fósforo	Lubrificante bom – ação EP.	Fluido hidráulico + lubrificante
Ésteres dibásicos	Podem suportar temperaturas mais altas que os óleos minerais.	Motores a jato

Fonte: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1985, reproduzido com autorização da John Wiley & Sons, Inc.

finas e tendem a desgastar-se em pouco tempo. Os aditivos EP em alguns óleos proveem uma renovação contínua de sulfite ou outras camadas induzidas quimicamente. A Tabela 11-2 mostra alguns lubrificantes comuns de filme sólido, suas propriedades e usos típicos.

11.2 VISCOSIDADE

A viscosidade é uma medida da resistência de um fluido ao cisalhamento. Ela varia inversamente com a temperatura e diretamente com a pressão, ambos de maneira não linear. Ela pode ser expressa tanto como uma **viscosidade absoluta** η quanto como uma **viscosidade cinemática** υ. Elas são relacionadas por

$$\eta = \upsilon\rho \qquad (11.1)$$

onde ρ é a densidade de massa do fluido. As unidades de viscosidade absoluta η são lb-s/in^2 (reyn) no sistema inglês ou Pa-s em unidades *SI*. Essas unidades são frequentemente expressas em μreyn ou mPa-s para melhor adaptar-se a suas magnitudes típicas. Um centopoise (cP) é 1 mPa-s. Os valores típicos da viscosidade absoluta a 20°C (68°F) são 0,0179 cP (0,0026 μreyn) para o ar, 1,0 cP (0,145 μreyn) para água e 393 cP (57 μreyn) para óleo de motor SAE 30. Os óleos operando em mancais quentes geralmente têm viscosidades no intervalo de 1 a 5 μreyn. O termo viscosidade usado sem modificadores implica viscosidade absoluta.

A VISCOSIDADE CINEMÁTICA é medida em um *viscosímetro* que pode ser rotacional ou de capilaridade. Um viscosímetro de capilaridade mede a taxa de fluxo do fluido através de um tubo capilar em uma temperatura particular, tipicamente 40 ou 100°C. Um viscosímetro rotacional mede o torque e a velocidade de rotação de um eixo vertical ou cone movendo-se dentro de um mancal com seu êmbulo concêntrico preenchido com o fluido de teste à temperatura de teste. As unidades *SI* de viscosidade cinemática são cm^2/s (stoke) e as unidades inglesas são in^2/s. Os stokes são muito grandes, portanto centistokes (cS) são frequentemente usados.

A VISCOSIDADE ABSOLUTA é necessária para cálculos de pressão de lubrificante e fluxos dentro de mancais. É determinada pela medida da viscosidade cinemática e pela densidade do fluido à temperatura de teste. A Figura 11-1 mostra um

Tabela 11-2 Tipos de lubrificantes de filme sólido

Tipo	Propriedades	Usos típicos
Grafite e/ou MoS_2 + aglutinante	É o melhor entre os lubrificantes de uso geral. Baixo atrito (0,12 – 0,06) e vida razoavelmente longa ($\cong 10^4 - 10^6$ ciclos).	Cadeados e outros mecanismos intermitentes
Teflon + aglutinante	Vida não tão longa quanto o tipo anterior, mas tem melhor resistência a alguns líquidos.	Como acima
Grafite emborrachado, ou filme de MoS_2	Atrito muito baixo (0,10 – 0,04), mas a vida útil é muito baixa ($10^2 - 10^4$ ciclos).	Repuxe profundo e outro trabalho em metal
Metal brando (chumbo, índio, cádmio)	Atrito mais elevado (0,30 – 0,15) e vida não tão longa quanto os tipos com resina aglutinada.	Proteção de colisão (temporária)
Fosfato, filme anodizado. Outras camadas químicas	Atrito elevado ($\cong$ 0,20). Adições preventivas deixam uma camada esponjosa na superfície.	Subcamada para filme de resina aglutinada

Fonte: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reproduzido com autorização da John Wiley & Sons, Inc.

gráfico da variação da viscosidade absoluta com a temperatura para vários óleos comuns de petróleo, designados pelos seus números ISO e pelos números SAE em escalas de óleos para motor e óleos para engrenagens.

11.3 TIPOS DE LUBRIFICAÇÃO

Três tipos gerais de lubrificação podem ocorrer em um mancal: **filme completo**, **filme misturado** e **lubrificação de contorno**. A lubrificação de filme completo descreve uma situação na qual as superfícies do mancal estão completamente separadas por um filme de lubrificante, eliminando qualquer contato. A lubrificação de filme completo pode ser **hidrostática**, **hidrodinâmica ou elasto-hidrodinâmica**, cada uma das quais discutidas abaixo. A lubrificação de contorno descreve uma situação na qual, por razões de geometria, aspereza da superfície, carga excessiva ou falta de lubrificante suficiente, as superfícies do mancal se contatam fisicamente, podendo ocorrer desgaste por abrasão ou adesivo. A lubrificação de filme misto descreve uma combinação de filme lubrificante parcial com algumas asperezas de contato entre as superfícies.

A Figura 11-2 mostra uma curva representando a relação entre o atrito e a velocidade de deslocamento relativo em um mancal. A baixas velocidades, a lubrificação de contorno ocorre com atrito elevado. À medida que a velocidade de escorregamento é aumentada além do ponto *A*, um filme de fluido hidrodinâmico começa a se formar, reduzindo a aspereza de contato e o atrito no regime de filme misto. A altas velocidades, o filme completo é formado no ponto *B*, separando as superfícies completamente com atrito reduzido. (Esse é o mesmo fenômeno que faz os pneus de automóveis *planarem* em estradas molhadas. Se a velocidade relativa do pneu contra a estrada molhada exceder um certo valor, o movimento

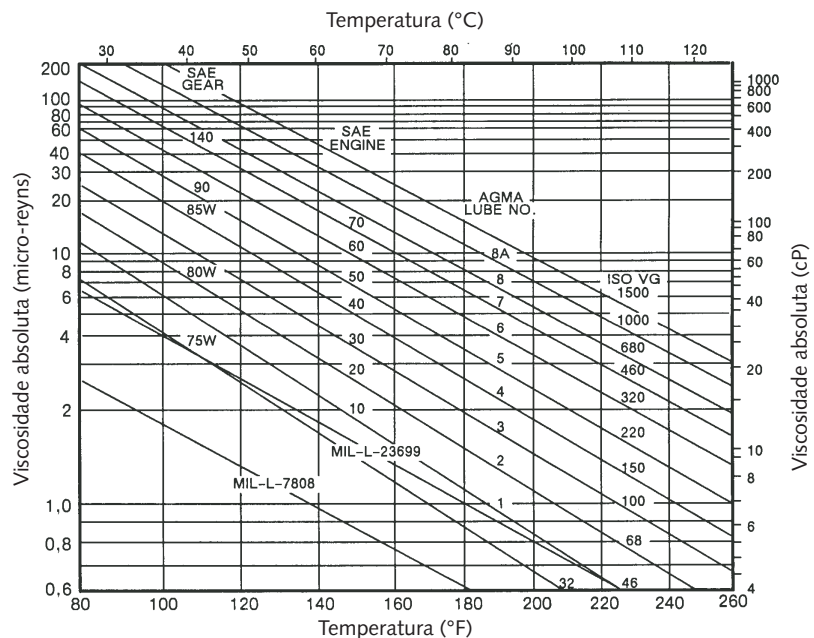



FIGURA 11-1

Viscosidade absoluta contra a temperatura de óleos lubrificantes do petróleo em escalas de viscosidade ISO. (Fonte: Extraído da Norma AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, com a autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.)

do pneu bombeia um filme de água na interface, levantando o pneu para fora da estrada. O coeficiente de atrito do pneu é drasticamente reduzido, e a repentina perda de tração pode causar uma derrapagem perigosa.) A velocidades ainda mais altas, a perda de viscosidade no lubrificante cisalhado aumenta o atrito.

Nos mancais radiais em rotação, todos os três regimes serão experimentados durante a partida e parada. À medida que o eixo começa a girar, ele estará em lubrificação de contorno. Se sua velocidade máxima for suficiente, ele passará pelo regime misto e alcançará o regime de filme completo desejado onde o desgaste é reduzido praticamente a zero se o lubrificante for mantido limpo e não for sobreaquecido. Discutiremos brevemente as condições que determinam esses estados de lubrificação, e então exploraremos alguns deles de maneira um pouco mais detalhada.

FIGURA 11-2

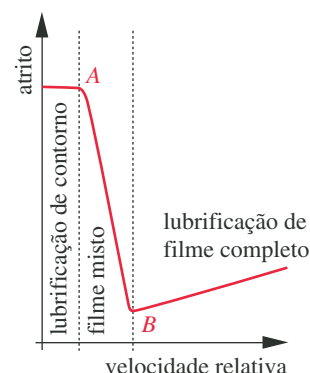
Mudança no atrito com a velocidade relativa em um mancal de deslizamento.

Lubrificação de filme completo

Três mecanismos podem criar a lubrificação de filme completo: **lubrificação hidrostática**, **hidrodinâmica** e **elasto-hidrodinâmica**.

Lubrificação hidrostática refere-se ao suprimento contínuo de um fluxo de lubrificante (tipicamente um óleo) para a interface de deslizamento a uma pressão hidrostática elevada ($\approx 10^2 - 10^4$ psi). Isso requer um reservatório para guardar o lubrificante, uma bomba para pressurizá-lo e uma tubulação para distribuí-lo. Quando feita corretamente, com folgas de mancal apropriadas, essa abordagem pode eliminar todo contato metal com metal na interface durante o deslizamento. As superfícies são separadas por um filme de lubrificante que, se for mantido limpo e livre de contaminantes, reduz as taxas de desgaste a praticamente zero. Com velocidade relativa zero, o atrito é essencialmente zero. Com velocidade relativa, o coeficiente de atrito em uma interface lubrificada hidrostaticamente é cerca de 0,002 a 0,010. Este é também o princípio de um mancal de ar, usado em paletas aéreas para levantar a carga para uma superfície, permitindo-lhe ser movida lateralmente com muito pouco esforço. O Hovercraft opera em um princípio similar. Algumas vezes, utiliza-se água em mancais hidrostáticos. O estádio Mile High, em Denver, tem uma tribuna principal para 21000 assentos que desliza para trás em filmes hidrostáticos de água para converter o estádio de beisebol em um de futebol.[5] Os mancais hidrostáticos axiais são mais comuns que os radiais.

Lubrificação hidrodinâmica refere-se ao suprimento suficiente de lubrificante (geralmente um óleo) à interface deslizante para permitir que a velocidade relativa das superfícies bombeie o lubrificante para dentro do espaço entre elas e separe as superfícies por um filme dinâmico de líquido. Essa técnica é mais efetiva em mancais radiais, onde o eixo e o mancal criam um ânulo fino dentro de sua folga que pode atrapalhar o lubrificante e permitir ao eixo bombeá-lo ao redor do ânulo. Existe um passo para vazamento nas extremidades, portanto deve-se prever um suprimento contínuo de óleo para repor as perdas. Esse suprimento pode ser alimentado gravitacionalmente ou por pressão. Esse sistema é usado para lubrificar os mancais do eixo manivela e o comando de válvulas em um motor de combustão interna. Bombeia-se óleo filtrado aos mancais sob pressão relativamente baixa para completar o óleo perdido através das extremidades do mancal, mas a condição dentro do mancal é hidrodinâmica, criando pressões muito mais altas para sustentar as cargas do mancal.

Em um mancal de deslizamento em repouso, o eixo ou a extremidade do eixo senta em contato com a parte baixa do mancal, como mostrado na Figura 11-3*a*, e com a lubrificação no entorno. À medida que começa a rodar, a linha de centro do eixo muda excentricamente dentro do mancal e o eixo atua como uma bomba, puxando o filme de óleo, aderido à sua superfície ao redor junto com ele, como mostrado na Figura 11-3*b*, colocando-o na lubrificação de filme completo da Fi-

(*a*) Eixo estacionário
- contato metálico
- forças e centros alinhados

(*b*) Eixo rodando vagarosamente
- lubrificação de contorno
- o ponto de contato avança a linha de centro

(*c*) Eixo rodando rapidamente
- lubrificação hidrodinâmica
- ausência de contato metálico
- fluido é bombeado pelo eixo
- o eixo atrasa a linha de centro do mancal

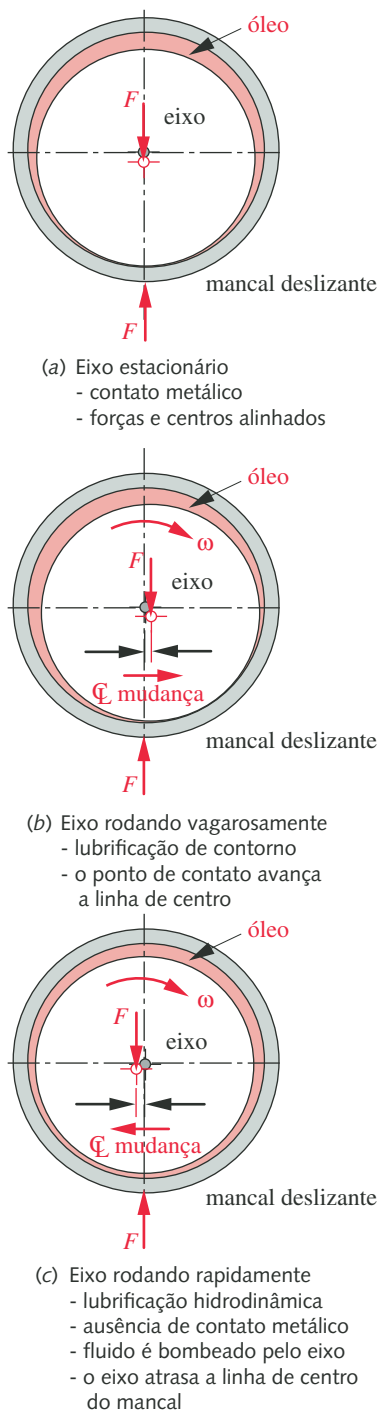



FIGURA 11-3

Condições de lubrificação de contorno e hidrodinâmica em um mancal deslizante – movimentos e folga foram exagerados.

gura 11-2. (O "lado externo" do filme de óleo fica preso ao mancal estacionário.) Prepara-se um fluxo dentro de uma espessura pequena de filme de óleo. Com velocidade relativa suficiente, o eixo "sobe" em uma cunha de óleo bombeado e cessa o contato de metal contra metal no mancal, como mostrado na Figura 11-3*c*. Esse é o sistema hidrodinâmico da Figura 11-2.

Assim, um mancal lubrificado hidrodinamicamente toca suas superfícies apenas quando parado ou quando está rodando abaixo de sua "velocidade de aquaplanagem". Isso significa que o desgaste por adesão pode ocorrer somente durante os transientes de partida e parada. Contanto que exista lubrificante suficiente e velocidade para permitir o deslocamento hidrodinâmico do eixo fora do mancal na sua velocidade operacional, essencialmente não haverá desgaste por adesão. Isso aumenta imensamente a vida em comparação com a situação de contato contínuo. Similar à lubrificação hidrostática, o óleo deve ser mantido livre de contaminantes para evitar outras formas de desgaste como abrasão. O coeficiente de atrito em uma superfície lubrificada hidrodinamicamente é de cerca de 0,002 a 0,010.

Lubrificação elasto-hidrodinâmica Quando as superfícies de contato são não conformantes, como ocorre entre os dentes de engrenagem ou no camo e seguidor mostrados na Figura 11-4, então é mais difícil a formação de um filme completo de lubrificante, mesmo porque as superfícies não conformantes tendem a expulsar o fluido, em vez de prendê-lo. A baixas velocidades, essas juntas estarão em lubrificação de contorno e podem resultar altas taxas de desgaste com possíveis riscos e marcas. A carga cria uma área de contato de deflexões elásticas das superfícies, como discutido no Capítulo 7. Essa pequena área de contato pode prover tamanho suficiente de superfície plana para permitir a formação de um filme hidrodinâmico completo se a velocidade relativa de escorregamento for suficientemente alta (ver a Figura 11-2). Essa condição é denominada **lubrificação elasto-hidrodinâmica** (EHD) porque ela depende das deflexões elásticas das superfícies e pelo fato de que pressões elevadas (100 a 500 kpsi) dentro da zona de contato aumentam muito a viscosidade do fluido. (Em contraste, a pressão de filme em mancais conformantes é somente algumas centenas de psi, e a mudança da viscosidade devido a essa pressão é suficientemente pequena para ser ignorada.)

Os dentes de engrenagem podem operar em qualquer uma das três condições mostradas na Figura 11-2. A lubrificação de contorno ocorre nas operações de partida e parada e, se prolongada, causará desgaste severo. O conjunto camo-seguidor também pode experimentar qualquer um dos regimes na Figura 11-2, mas é mais provável a ocorrência do modo de lubrificação de contorno em posições no camo onde o raio de curvatura for pequeno. Em mancais de elementos rolantes também podemos ver qualquer um dos três regimes.

O parâmetro mais importante que determina que situação ocorrerá em contatos não conformantes é a razão da espessura do filme de óleo para a rugosidade superficial. Para obter uma lubrificação de filme completo e evitar o contato áspero, a rms média da rugosidade superficial (R_q) necessita ser inferior a 1/2 ou 1/3 da espessura do filme de óleo. A espessura do EHD de um filme completo é normalmente da ordem de 1 μm. Em cargas elevadas, ou a baixas velocidades, a espessura EHD do filme pode ser muito pequena para separar as asperezas da superfície, e podem ocorrer condições de filme misto ou de contorno. Os fatores que mais afetam a criação das condições de EHD são o aumento da velocidade relativa, o aumento da viscosidade do lubrificante e o aumento do raio de curvatura no ponto de contato. A redução da carga e da rigidez do material tem um efeito menor.[6]

Lubrificação de contorno

A lubrificação de contorno refere-se a situações nas quais alguma combinação da geometria da interface, nível de cargas elevadas, baixa velocidade ou quantidade

insuficiente de lubrificante excluem a iniciação de uma condição hidrodinâmica. As propriedades das superfícies contatantes e as propriedades do lubrificante distintas de sua viscosidade volumétrica determinam o desgaste e o atrito nessa situação. A viscosidade do lubrificante não é um fator. Observe na Figura 11-2 que o atrito é independente da velocidade na lubrificação de contorno. Isso é consistente com a definição de atrito de Coulomb na Seção 7.3. (Ver a Tabela 7-1.)

A lubrificação de contorno implica que sempre existe algum contato de metal com metal na interface. Se o filme lubrificante não for espesso o suficiente para "enterrar" as asperezas nas superfícies, essa condição ocorrerá. Superfícies rugosas podem causar essa condição. Se a velocidade relativa ou o suprimento de lubrificante para a interface hidrodinâmica forem reduzidos, a lubrificação voltará à condição de lubrificação de contorno. Superfícies como dentes de engrenagem e interfaces camo/seguidor (ver a Figura 11-4) que não sejam autoenvolventes podem estar no modo de lubrificação de contorno se as condições de EHD não prevalecerem. Mancais de rolos e esferas podem operar no modo de lubrificação de contorno se a combinação de velocidades e cargas não permitir que a condição de EHD ocorra.

A lubrificação de contorno é uma condição menos desejável que as outras descritas, porque ela permite que as asperezas superficiais entrem em contato e as superfícies se desgastem rapidamente. Algumas vezes, é inevitável, como nos exemplos de camos, engrenagens e mancais de elementos rolantes citados. Os lubrificantes EP mencionados anteriormente foram criados para essas aplicações de lubrificação de contorno, especialmente para engrenagens hipoides, que experimentam altas velocidades de escorregamento e cargas elevadas. O coeficiente de atrito na interface deslizante com lubrificação de contorno depende do material usado, bem como do lubrificante, mas varia de cerca de 0,05 a 0,15, sendo geralmente cerca de 0,10.

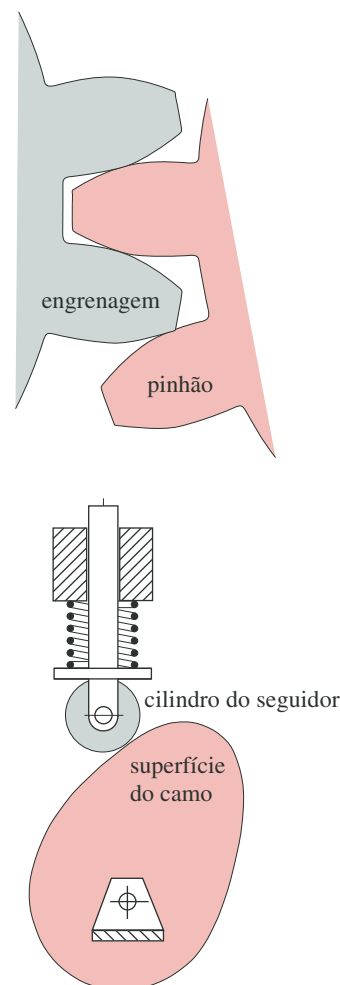
FIGURA 11-4

Conjuntos abertos que podem ter lubrificação EHD, mista ou de contorno.

11.4 COMBINAÇÕES DE MATERIAIS EM MANCAIS DE DESLIZAMENTO

A Figura 7-6 mostra combinações de materiais e a habilidade prevista de escorregamento baseado em sua insolubilidade mútua e outros fatores. Esta seção discutirá algumas combinações de materiais que já se mostraram exitosas ou que fracassaram em aplicações de engenharia de mancais e deslizadores.

Algumas das propriedades buscadas em um material de mancal são a suavidade relativa (para absorver partículas estranhas), resistência razoável, usinabilidade (para manter as tolerâncias), lubricidade, resistência à temperatura e corrosão e, em alguns casos, porosidade (para absorver lubrificantes). Um material de mancal deve ter pelo menos um terço da dureza do material que está se movendo em relação a ele a fim de prover encravabilidade de partículas abrasivas.[7] Além disso, é preciso considerar os problemas de compatibilidade enfocados na Seção 7.4 sobre o desgaste por abrasão e estes também dependem do material acoplado. Diversas classes de materiais podem ser utilizadas para mancais, principalmente aqueles baseados em chumbo, estanho ou cobre. O alumínio em si não é um bom material para mancais, embora seja usado como um elemento de liga em alguns materiais de mancal.

Babbitts Uma família completa de ligas baseadas no chumbo e estanho em combinação com outros elementos é muito efetiva, especialmente quando depositados eletroliticamente em filmes finos sobre um substrato mais forte, como o aço. O *babbitt* é provavelmente o exemplo mais comum dessa família e é usado para mancais de eixos manivela e de comando de válvulas em motores de combustão interna. Sua suavidade permite o encravamento de pequenas partículas e pode ser acabado para baixa rugosidade. Uma camada depositada eletroliticamente de *babbitt* tem melhor resistência à fadiga que uma bucha grossa do

mesmo material, mas não pode encravar partículas tão bem. Requer-se boa lubrificação hidrodinâmica ou hidrostática, porque o *babbitt* tem uma temperatura de fusão baixa e falhará rapidamente sob condições de lubrificação de contorno. Eixos para mancais de *babbitt* devem ter uma dureza mínima de 150-200 HB e um acabamento superficial* de $R_a = 0{,}25$ a $0{,}30\ \mu\text{m}$ (10 a 12 μin).[8]

Bronzes A família de ligas de cobre, principalmente bronzes, é uma escolha excelente para mancais que correm contra aço e ferro fundido. O bronze é mais brando que os materiais ferrosos, mas tem boa resistência, usinabilidade e resistência à corrosão, correndo bem contra as ligas ferrosas quando lubrificado. Há cinco ligas comuns de cobre usadas em mancais: cobre-chumbo, chumbo-bronze, estanho-bronze, alumínio-bronze e cobre-berílio. Elas têm um intervalo de dureza desde aquela dos *babbitts* até próximo às do aço.[8] As buchas de bronze podem suportar a lubrificação de contorno e podem suportar cargas elevadas e altas temperaturas. Buchas de bronze e formas planas estão disponíveis comercialmente em uma variedade de tamanhos, ambas sólidas ou sinterizadas (ver mais adiante).

Ferro fundido cinzento e aço são materiais razoáveis para mancais quando correm um contra o outro a baixas velocidades. O grafite livre no ferro fundido adiciona lubricidade, mas um lubrificante líquido também é necessário. O aço também pode correr contra o aço se ambas as partes forem endurecidas e lubrificadas. Esta é a escolha comum em contato de rolamento e em mancais de elementos rolantes. De fato, o aço endurecido correrá contra quase todos os materiais com lubrificação apropriada. A dureza parece proteger o aço contra a adesão em geral.

Materiais sinterizados são encontrados na forma de pó e permanecem microscopicamente porosos depois de tratamento térmico. A porosidade permite-lhes absorver uma quantidade significativa de lubrificante e mantê-lo pelo efeito de capilaridade, desprendendo-o no mancal quando aquecido. O bronze sinterizado é amplamente usado em superfícies que se movem contra aço ou ferro fundido.

Materiais não metálicos de alguns tipos oferecem a possibilidade de correr a seco se eles tiverem lubricidade suficiente. O grafite é um exemplo. Alguns termoplásticos, como náilon, acetal e Teflon, oferecem um coeficiente de atrito μ pequeno contra qualquer metal, mas têm resistência e temperatura de fusão baixas, as quais, combinadas com a condução de calor bem pobre, limitam as cargas e velocidades de operação que eles podem suster. O Teflon tem um μ muito baixo (aproximando-se aos valores de rolamento), mas requer aditivos para aumentar sua resistência para níveis usáveis. Aditivos inorgânicos como o talco ou a fibra de vidro adicionam resistência significativa e rigidez para qualquer um dos termoplásticos, mas às custas de valores mais elevados de μ e de abrasividade aumentada. O grafite e o pó de MoS_2 são também usados como aditivos e adicionam lubricidade bem como resistência mecânica e térmica. Algumas misturas de polímeros, como acetal-Teflon, são também oferecidas. Os mancais de termoplásticos normalmente são práticos apenas onde as cargas e as temperaturas são baixas. As combinações práticas de material de eixo e mancal são realmente bastante limitadas. A Tabela 11-3 mostra algumas combinações usáveis de materiais metálicos para mancal e indica suas razões de dureza contra os valores típicos de eixo de aço.[9]

11.5 TEORIA DA LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA

Considere o mancal de deslizamento mostrado na Figura 11-3. A Figura 11-5*a* mostra um eixo e mancal similares, mas concêntricos e com um eixo vertical. A folga diametral c_d entre a extremidade do eixo e o mancal é muito pequena, geralmente cerca de um milésimo do diâmetro. Podemos modelar esse mancal como

* Ver a Seção 7.1 e a Figura 7-2 para uma discussão do acabamento superficial e uma definição de R_a.

Tabela 11-3 Materiais recomendados para mancais para deslizamento contra aço ou ferro fundido

Material do mancal	Dureza kg/mm²	Dureza mínima do eixo kg/mm²	Razão de dureza
Liga *babbitt* baseada em chumbo	15-20	150	8
Liga *babbitt* baseada em estanho	20-30	150	6
Chumbo álcali endurecido	22-26	200-250	9
Chumbo-cobre	20-36	300	14
Prata	25-50	300	8
Base cádmio	30-40	200-250	6
Liga de alumínio	45-50	300	6
Liga de bronze	40-80	300	5
Bronze-estanho	60-80	300-400	5

Fonte: Wilcock and Booser, *Bearing Design and Application*, McGraw-Hill, 1957.

duas placas planas, porque o intervalo h é bem pequeno se comparado com o raio de curvatura. A Figura 11-5*b* mostra duas de tais placas separadas por um filme de óleo com um espaço de dimensão h. Se as placas forem paralelas, o filme de óleo não suportará a carga transversal. Isso também é verdadeiro para o caso da extremidade de eixo e mancal concêntricos. Uma extremidade de eixo horizontal concêntrica se tornará excêntrica pelo peso do eixo, como na Figura 11-3. Se o eixo for vertical, como na Figura 11-5*a*, a extremidade do eixo poderá rodar concentricamente com o mancal, porque não há força transversal de gravidade.

Equação de Petroff para torque sem carga

Se mantivermos a placa inferior da Figura 11-5*b* estacionária e movermos a placa superior para a direita com a velocidade U, o fluido entre as placas será cisalhado da mesma maneira que no intervalo concêntrico da Figura 11-5*a*. O fluido molha e se adere a ambas placas, fazendo sua velocidade zero na placa estacionária e U junto à placa móvel. A Figura 11-5*c* mostra o elemento diferencial de fluido no intervalo. O gradiente de velocidade causa a distorção angular β. No limite, $\beta = dx/dy$. A tensão de cisalhamento, τ_x, agindo no elemento diferencial de fluido no intervalo é proporcional à taxa de cisalhamento:

$$\tau_x = \eta \frac{d\beta}{dt} = \eta \frac{d}{dt}\frac{dx}{dy} = \eta \frac{d}{dy}\frac{dx}{dt} = \eta \frac{du}{dy} \tag{11.2a}$$

(*a*) Extremidade de eixo (munhão) concêntrico em um mancal
(*b*) Placas paralelas cisalhando um filme de óleo
(*c*) Elemento diferencial em cisalhamento

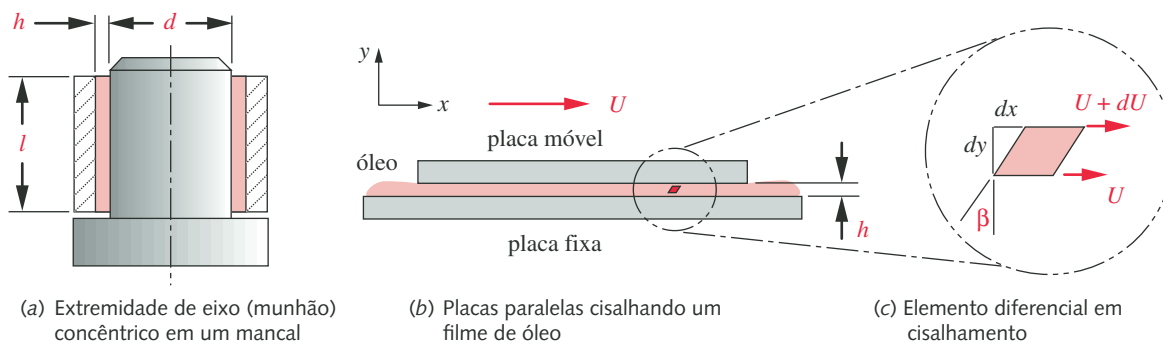



FIGURA 11-5

Um filme de óleo cisalhado entre duas superfícies paralelas não suporta uma carga transversal (folgas exageradas).

e a constante de proporcionalidade é a viscosidade η. Em um filme de espessura constante h, o gradiente de velocidade $du / dy = U / h$ e é constante. A força para cisalhar o filme inteiro é

$$F = A\tau_x = \eta A \frac{U}{h} \tag{11.2b}$$

onde A é a área da placa.

Para a extremidade de eixo concêntrica e o mancal da Figura 11-5*a*, suponha o intervalo $h = c_d /2$, onde c_d é a folga diametral. A velocidade é $U = \pi dn'$, onde n' é em revoluções por segundo, e a área de cisalhamento é $A = \pi dl$. O torque T_0 requerido para cisalhar o filme é, então,

$$T_0 = \frac{d}{2} F = \frac{d}{2} \eta A \frac{U}{h} = \frac{d}{2} \eta \pi d l \frac{\pi d n'}{c_d / 2}$$

$$T_0 = \eta \frac{\pi^2 d^3 l n'}{c_d} \tag{11.2c}$$

Esta é a *equação de Petroff* para o torque sem carga em um filme de fluido.

Equação de Reynolds para mancais radiais

Para suportar a carga transversal, as placas da Figura 11-5*b* devem ser não paralelas. Se rodarmos a placa inferior de Figura 11-5*b* ligeiramente no sentido anti-horário e movermos a placa superior para a direita com uma velocidade U, o fluido entre as placas será carregado para dentro do espaço decrescente como mostrado na Figura 11-6*a*, desenvolvendo uma pressão que suportará uma carga transversal P. O ângulo entre as placas é análogo à variação da folga devido à excentricidade e da extremidade do eixo e do mancal na Figura 11-6*b*.* Quando uma carga transversal for aplicada à extremidade do eixo, ele deve assumir uma excentricidade com respeito ao mancal a fim de formar um espaçamento variável para suportar a carga desenvolvendo pressão no filme.†

A Figura 11-6*b* mostra com grande exagero a excentricidade e e o intervalo h para um mancal radial. A excentricidade e é medida do centro do mancal O_b ao

* A quantidade de ângulo necessária para criar uma força de sustentação é surpreendentemente pequena. Por exemplo, em um mancal de cerca de 32 mm de diâmetro, a circunferência tem 100 mm. Um intervalo típico de entrada h_{max} pode ser de 25 μm (0,0010 in), e o intervalo de saída h_{min}, 12,5 μm (0,0005 in). A inclinação é, então, 0,0125/100 ou cerca de 7/1000 de um grau (26 segundos de arco). Isso é equivalente a cerca de 1 cm de elevação sobre um campo de futebol de 100 jardas de comprimento.

† Na Inglaterra, nos anos 1880, Beauchamp Tower estava investigando experimentalmente o atrito em mancais lubrificados hidrodinamicamente para a indústria de ferrovias (embora o termo hidrodinâmica e sua teoria ainda não tivessem sido descobertos). Os resultados dele mostravam coeficientes de atrito muito menores que os esperados. Ele fez um furo radial através do mancal a fim de adicionar óleo durante o movimento, mas ficou surpreso ao descobrir que o óleo saía do furo quando o eixo era girado. Ele pôs cortiça no furo, mas a cortiça foi expulsa. Ele fechou o furo com madeira, mas ela também foi empurrada para fora. Quando ele pôs um medidor de pressão no furo, ele mediu pressões bem acima das pressões médias esperadas pelo cálculo da carga / área. Então, ele mapeou a distribuição de pressão no intervalo de 180° do mancal e descobriu a agora familiar distribuição de pressão (ver a Figura 11-8), cujo valor médio é carga / área. No aprendizado dessa descoberta, Osborne Reynolds buscou desenvolver a teoria matemática para explicá-la, publicando os resultados em 1886.[12]

(*a*) Placas não paralelas cisalhando um filme de óleo

(*b*) Um eixo excêntrico é equivalente a placas não paralelas

FIGURA 11-6

Um filme de óleo entre superfícies não paralelas pode suportar uma carga transversal.

centro do eixo O_j. O eixo de zero a π para a variável independente θ é estabelecido ao longo da linha O_bO_j, como mostrado na Figura 11-6*b*. O valor máximo possível de e é $c_r = c_d / 2$, onde c_r é a folga radial. A excentricidade pode ser convertida para a excentricidade adimensional ε:

$$\varepsilon = \frac{e}{c_r} \tag{11.3}$$

que varia de 0 sem carga a 1 na carga máxima quando o eixo contata o mancal. Uma expressão aproximada para a espessura do filme h como uma função de θ é

$$h = c_r\left(1 + \varepsilon\cos\theta\right) \tag{11.4a}$$

A espessura do filme h é máxima em $\theta = 0$ e mínima em $\theta = \pi$, encontrada por

$$h_{min} = c_r\left(1 - \varepsilon\right) \qquad h_{\max} = c_r\left(1 + \varepsilon\right) \tag{11.4b}$$

Analise o mancal radial mostrado na Figura 11-7. Na análise que se segue, a folga ou espaçamento é dada pela Equação 11-4*a*. Podemos escolher a origem de um sistema de coordenadas xy em qualquer ponto na circunferência do mancal, como em O. O eixo de coordenadas x é, então, tangente ao mancal, o eixo de coordenadas y atravessa o centro do mancal O_b e o eixo de coordenadas z (não mostrado) é paralelo ao eixo geométrico do mancal. Geralmente, o mancal é estacionário e apenas o eixo roda, mas em alguns casos o contrário pode ocorrer, ou ambos podem rodar como no eixo-planeta de um trem de engrenagens epicíclico. Assim, mostramos uma velocidade tangencial U_1 para o mancal, bem como uma velocidade tangencial T_2 para o eixo. Observe que suas direções (ângulos) não são as mesmas devido à excentricidade. A velocidade tangencial T_2 do eixo pode ser decomposta em componentes nas direções x e y como U_2 e V_2, respectivamente. O ângulo entre T_2 e U_2 é tão pequeno que seu cosseno é essencialmente 1, e podemos colocar $U_2 \cong T_2$. A componente V_2 na direção y se deve ao fechamento (ou abertura) do intervalo h à medida que ele roda e é $V_2 = U_2\, \partial h / \partial x$.

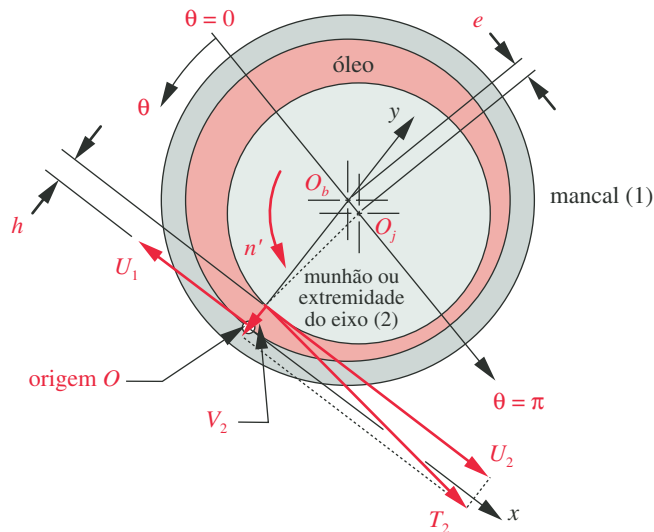



FIGURA 11-7

Componentes de velocidade em um mancal e eixo excêntrico.

Usando as hipóteses descritas, podemos escrever a equação de Reynolds* relacionando a mudança do intervalo de espessura h, as velocidades relativas entre o eixo e o mancal V_2 e $U_1 - U_2$ e a pressão no fluido p como uma função das duas dimensões x e z, supondo que o eixo e o mancal sejam paralelos na direção z e que a viscosidade η seja constante,

$$\frac{1}{6\eta}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right]=\left(U_1-U_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2V_2$$

$$=\left(U_1-U_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2U_2\frac{\partial h}{\partial x}=\left(U_1+U_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}=U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{11.5a}$$

onde $U = U_1 + U_2$

Solução para mancal longo A Equação 11.5*a* não tem uma solução em forma analítica, mas pode ser resolvida numericamente. Raimondi e Boyd fizeram isso em 1958 e forneceram um grande número de gráficos de projeto para sua aplicação em mancais de comprimento finito.[11] Reynolds resolveu uma versão simplificada na forma de séries (em 1886)[12] supondo que o mancal fosse infinitamente longo na direção z, o que faz o fluxo zero e a distribuição de pressão sobre aquela direção, constante, e assim faz o termo $\partial p / \partial z = 0$. Com essa simplificação, a equação de Reynolds se torna

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=6\eta U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{11.5b}$$

Em 1904, A. Sommerfeld encontrou uma solução analítica para a Equação 11.5*b* do mancal infinitamente longo como

$$p=\frac{\eta U r}{c_r^2}\left[\frac{6\varepsilon(\operatorname{sen}\theta)(2+\varepsilon\cos\theta)}{\left(2+\varepsilon^2\right)(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right]+p_0 \tag{11.6a}$$

que dá a pressão p no filme de lubrificante como uma função da posição angular θ ao redor do mancal para dimensões particulares do raio r do eixo, folga radial c_r, razão de excentricidade ε, velocidade da superfície U e viscosidade η. O termo p_0 leva em conta qualquer pressão, ordinariamente zero, introduzida na posição $\theta = 0$. A Equação 11.6*a* é conhecida como *solução de Sommerfeld* ou *solução para o mancal longo*.

Se p for calculado para essa equação de $\theta = 0$ a 2π, a equação preverá pressões negativas de $\theta = \pi$ *até* 2π com magnitudes absolutas iguais às pressões positivas de 0 a π. Dado que o fluido não pode suportar grandes pressões negativas sem cavitação, a equação é tipicamente avaliada somente de 0 a π e pressupõe-se que a pressão seja p_0 na outra metade da circunferência. Isso é chamado de meia solução de Sommerfeld.

Sommerfeld também derivou uma equação para a carga total P em um mancal longo como

$$P=\frac{\eta U l r^2}{c_r^2}\frac{12\pi\varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{11.6b}$$

Essa equação pode ser rearranjada na forma adimensional para dar um número característico do mancal chamado de **número *S* de Sommerfeld**. Primeiro rearranje os termos:

$$\frac{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon^2\right)^{1/2}}{12\pi\varepsilon}=\eta\frac{Ul}{P}\left(\frac{r}{c_r}\right)^2 \tag{11.6c}$$

* Para uma derivação da equação de Reynolds, veja as Referências 2, 3, 4 ou 10.

A pressão média $p_{média}$ no mancal é

$$p_{média} = \frac{P}{A} = \frac{P}{ld} \tag{11.6d}$$

A velocidade $U = \pi dn'$, onde n' é em revoluções por segundo e $c_r = c_d/2$. Substituindo, temos

$$\frac{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon^2\right)^{1/2}}{12\pi\varepsilon} = \eta\frac{(\pi dn')l}{dl\,p_{média}}\left(\frac{d}{c_d}\right)^2 = \eta\left(\frac{\pi n'}{p_{média}}\right)\left(\frac{d}{c_d}\right)^2 = S \tag{11.6e}$$

Observe que S é uma função apenas da razão de excentricidade ε, mas pode também ser expressa em termos da geometria, pressão, velocidade e viscosidade.

Solução para mancal curto Os mancais longos não são frequentemente usados nas máquinas modernas por diversas razões. Pequenas deflexões do eixo ou desalinhamento podem reduzir a folga radial a zero em um mancal longo, e considerações de empacotamento frequentemente requerem mancais pequenos. As razões típicas l / d dos mancais modernos são no intervalo de 1/4 a 2. A solução para mancal longo (Sommerfeld) supõe a inexistência de perdas de óleo na extremidade do mancal, mas nestas razões l / d pequenas as perdas de extremidade podem ser um fator importante. Ocvirk e DuBois[13 – 16] resolveram uma forma da equação de Reynolds que inclui o termo de perdas nas extremidades.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\eta U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{11.7a}$$

Essa forma desconsidera o termo que leva em conta o fluxo circunferencial de óleo ao redor do mancal com a premissa de que ele será pequeno em comparação com o fluxo na direção z (perda) em um mancal curto. A Equação 11.7a pode ser integrada para dar uma expressão da pressão no filme de óleo como uma função de ambos θ e z:

$$p = \frac{\eta U}{rc_r^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon\,\text{sen}\,\theta}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3} \tag{11.7b}$$

A Equação 11.7b é conhecida como *solução de Ocvirk* ou *solução para mancal curto*. Ela é geralmente avaliada para $\theta = 0$ a π e pressupõe-se que a pressão seja zero sobre a outra metade da circunferência.

A Figura 11-8 mostra distribuições típicas de pressão em θ e z. A posição $\theta = 0$ é escolhida em $h = h_{max}$ e o eixo θ passa por O_b e O_j. A distribuição de pressão p com respeito a z é parabólica e máxima no centro do comprimento do mancal l e é zero em $z = \pm\, l/2$. A pressão p varia não linearmente em θ e é máxima no seu segundo quadrante. O valor de θ_{max} em p_{max} pode ser encontrado a partir de

$$\theta_{max} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{11.7c}$$

e o valor de p_{max} pode ser encontrado pela substituição de $z = 0$ e $\theta = \theta_{max}$ na Equação 11.7b.

A Figura 11-9 compara a variação da pressão p no filme no intervalo de θ = 0 a π para a solução de mancal longo de Sommerfeld (tomando como referência o valor em 100%) e a solução de mancal curto de Ocvirk para várias razões l / d desde 1/4 a 1. Repare no grande erro que ocorreria se a solução para mancal longo fosse usada para razões < 1. Para $l / d = 1$, as duas soluções dão resultados similares com a solução de Ocvirk prevendo valores máximos de pressão ligei-

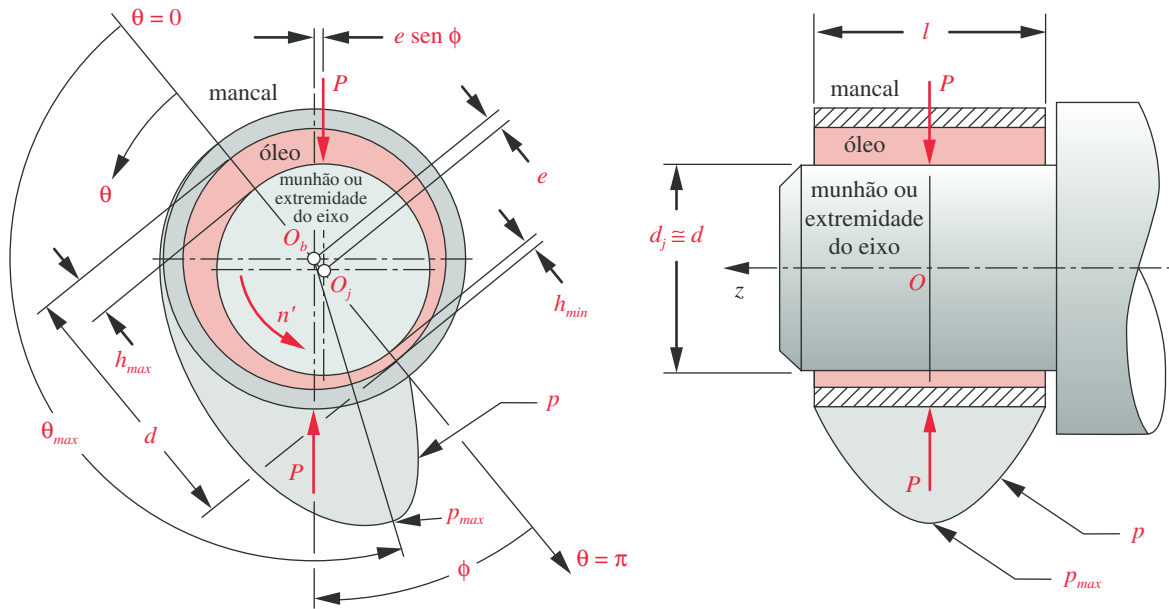



FIGURA 11-8

Distribuição de pressão em um mancal curto (a espessura do filme foi exagerada).

ramente maiores que a solução de Sommerfeld. DuBois e Ocvirk encontraram em testes[13,14] que a solução para mancais curtos dava resultados que mais se aproximavam das medidas experimentais para razões de l / d de 1/4 a 1 e também igualava os dados experimentais até razões $l / d = 2$ se a razão fosse mantida em 1 para o cálculo dos mancais com razões verdadeiras entre 1 e 2. Devido ao fato de que a maior parte dos mancais modernos tende a ter razões l / d entre 1/4 e 2, a solução de Ocvirk proporciona um método conveniente e razoavelmente preciso. A solução de Sommerfeld dá resultados precisos para as razões l / d acima de cerca de 4. O método de Boyd e Raimondi dá resultados mais precisos para razões intermediárias de l / d, mas é mais difícil de ser usado.

Observe na Figura 11-8 que o pico de pressão ocorre em um ângulo θ_{max}, como definido na Equação 11.7*c*. Este ângulo é medido do zero do eixo θ, que está localizado na linha passando pelos centros do mancal e do eixo. Mas o que determina o ângulo dessa linha de excentricidade entre os centros O_b e O_j? Tipicamente, a linha de ação da força P aplicada ao eixo é determinada por fatores externos. Essa força P é mostrada vertical na figura e o ângulo entre essa força e o eixo $\theta = \pi$ é mostrado como ϕ. (O ângulo ϕ é usado em vez do ângulo θ_P medido de $\theta = 0$, porque ϕ será sempre um ângulo agudo.) O ângulo ϕ pode ser encontrado a partir de

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{11.8a}$$

e a magnitude da força resultante P se relaciona com os parâmetros do mancal como

$$P = K_\varepsilon \frac{\eta U l^3}{c_r^2} \tag{11.8b}$$

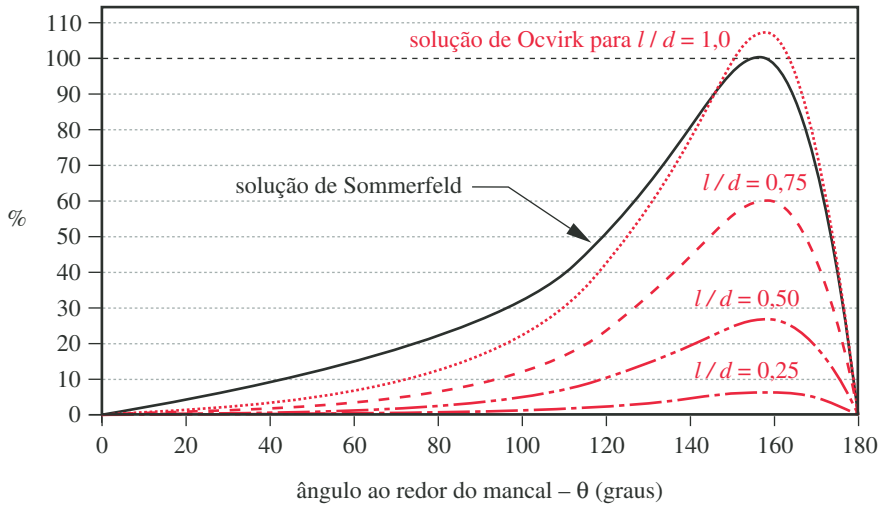



FIGURA 11-9

Comparação da aproximação de Ocvirk para mancais curtos para várias razões *l* / *d* com a aproximação de Sommerfeld para mancais longos da distribuição de pressão no filme de óleo de 0 a 180°.

onde K_ε é um parâmetro adimensional que é uma função da razão de excentricidade ε:

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{1/2}}{4\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{11.8c}$$

A velocidade linear U pode ser expressa como

$$U = \pi d n' \tag{11.8d}$$

e substituída na Equação 11.8*b* junto com $c_r = c_d / 2$ para obter

$$P = K_\varepsilon \frac{\eta U l^3}{c_r^2} = K_\varepsilon \frac{4\pi\eta d n' l^3}{c_d^2} \tag{11.8e}$$

Perdas de torque e potência em mancais de deslizamento

A Figura 11-8 mostra o filme de fluido sendo cisalhado entre a extremidade do eixo e o mancal. A ação da força de cisalhamento em cada membro cria torque em direções opostas, T_r no membro rodando e T_s no membro estacionário. Contudo, esses torques T_r e T_s não são iguais por causa da excentricidade. O par de força P, na Figura 11-8, tendo um membro que atua no centro da extremidade do eixo O_j e outro no centro do mancal O_b, forma um momento de magnitude $P\ e$ *sen* ϕ, *que se adiciona ao torque estacionário para formar o torque de rotação.*

$$T_r = T_s + P\, e \operatorname{sen} \phi \tag{11.9a}$$

O torque estacionário T_S pode ser encontrado com

$$T_s = \eta \frac{d^2 l\left(U_2 - U_1\right)}{c_d} \frac{\pi}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{11.9b}$$

Substitua a Equação 11.8*d* na Equação 11.9*b* para colocá-la em termos de velocidades rotacionais da extremidade do eixo e do mancal:

$$T_s = \eta \frac{d^3 l (n_2' - n_1')}{c_d} \frac{\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{11.9c}$$

Observe a similaridade das Equações 11.9*c* e 11.2*c* de Petroff para a extremidade do eixo concêntrica e de torque em vazio (sem carga) T_0. Podemos formar a razão do torque estacionário em um mancal excêntrico para o torque sem carga como

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{11.9d}$$

que, não surpreendentemente, é uma função somente da razão de excentricidade, ε. Uma razão similar entre o torque rotacional, T_r, e o torque sem carga de Petroff também pode ser encontrada.

A potência Φ perdida no mancal pode ser encontrada pelo torque rotacional, T_r, e pela velocidade rotacional, n'.

$$\Phi = T_r \omega = 2\pi T_r (n_2' - n_1') \qquad \text{N-m/s ou in-lb/s} \tag{11.10}$$

Isso pode ser convertido em watts ou cavalos, conforme for mais apropriado para as unidade do sistema usado.

COEFICIENTE DE ATRITO O coeficiente de atrito no mancal pode ser determinado pela razão entre a força de cisalhamento tangencial e a força normal aplicada *P*.

$$\mu = \frac{f}{P} = \frac{T_r / r}{P} = \frac{2T_r}{Pd} \tag{11.11}$$

11.6 PROJETO DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS

Normalmente, a força aplicada, *P*, que se espera que o mancal suporte e a velocidade de rotação, n', são conhecidas. O diâmetro do mancal pode ser conhecido ou não, mas frequentemente terá sido definido pela tensão, deflexão ou outras considerações. O projeto do mancal requer encontrar uma combinação conveniente do diâmetro do mancal e/ou do comprimento com o qual operará com uma viscosidade conveniente do fluido, terá folgas razoáveis e manufaturáveis e terá uma razão de excentricidade que não permitirá o contato de metal contra metal sob carga ou qualquer condição de sobrecarga esperada.

Projeto do fator de carga – o número de Ocvirk

Uma forma conveniente de abordar este problema é definir um fator de carga adimensional contra o qual diversos parâmetros de mancal podem ser calculados, representados graficamente e comparados. A Equação 11.8*e* pode ser rearranjada para permitir tal fator. Resolva a Equação 11.8*e* para K_ε:

$$K_\varepsilon = \frac{P c_d^2}{4\eta\pi d n' l^3} \tag{11.12a}$$

Substitua a Equação 11.6*d* para a carga *P* para introduzir a pressão média do filme, $p_{média}$,

$$K_\varepsilon = \frac{p_{média} l d c_d^2}{4\eta\pi d n' l^3}\frac{d}{d} = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{p_{média}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2\right] = \frac{1}{4\pi}O_N \qquad (11.12b)$$

O termo entre colchetes é o **fator de carga** adimensional desejado ou o **número de Ocvirk**, O_N.

$$O_N = \left(\frac{p_{média}}{\eta n}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2 = 4\pi K_\varepsilon \qquad (11.12c)$$

Essa expressão contém os parâmetros sobre os quais o projetista tem controle e mostra que qualquer combinação daqueles parâmetros que produz o mesmo número de Ocvirk terá a mesma razão de excentricidade, ε. A razão de excentricidade dá uma indicação de quão próximo à falha o filme de óleo está, já que $h_{min} = c_r(1 - \varepsilon)$. Compare o número de Ocvirk ao número de Sommerfeld da Equação 11.6*e*. O conceito é o mesmo.

A Figura 11-10 mostra um gráfico da razão de excentricidade, ε, como uma função do número de Ocvirk, O_N, e também mostra os dados experimentais da referência 13 para os mesmos parâmetros. A curva teórica é definida pela combinação das Equações 11.12*c* e 11.8*c*

$$O_N = \frac{\pi\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \qquad (11.13a)$$

Uma curva empírica é colocada junto aos dados, o que mostra que a teoria subestima a magnitude da razão de excentricidades. A curva empírica pode ser aproximada por

$$\varepsilon_x \cong 0{,}21394 + 0{,}38517\log O_N - 0{,}0008\left(O_N - 60\right) \qquad (11.13b)$$

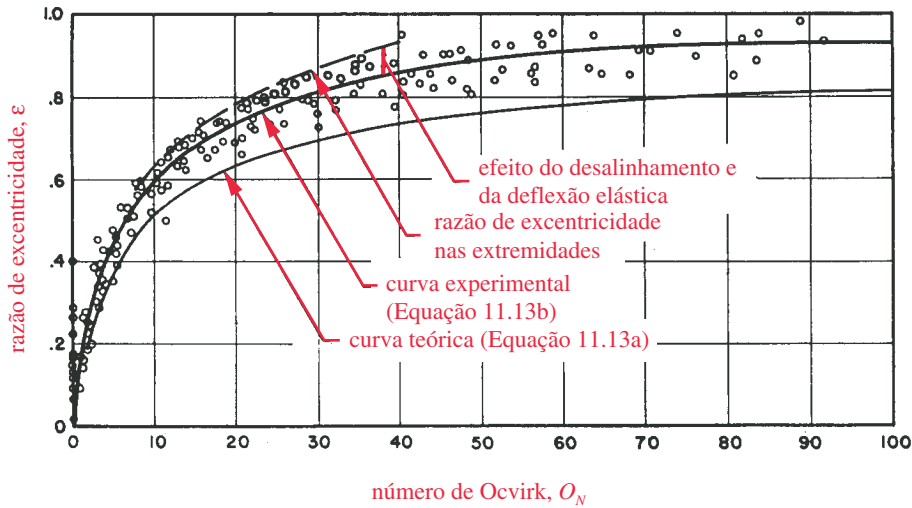



FIGURA 11-10

Relações analíticas e experimentais entre a razão de excentricidade, ε, e o número de Ocvirk O_N. (Fonte: G. B. DuBois e F. W. Ocvirk "The Short Bearing Approximation for Plain Journal Bearings," *Trans. ASME*, vol 77, pp 1173-1178, 1995.)

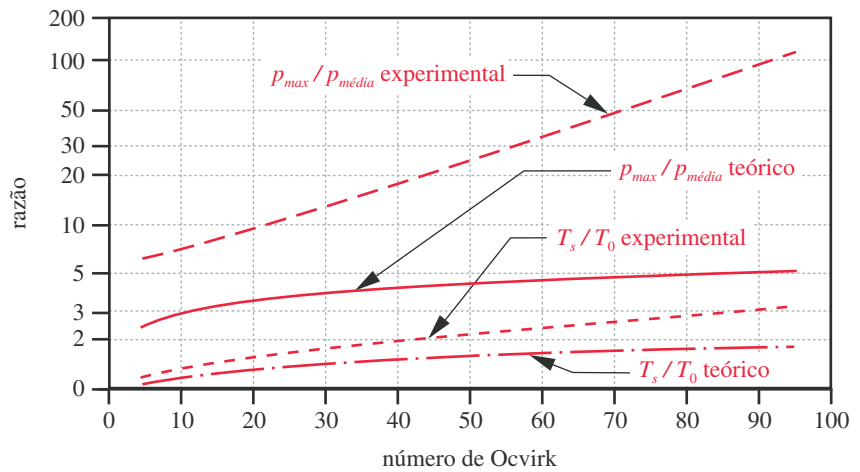



FIGURA 11-11

Razões de pressão e torque para mancais curtos como função do número de Ocvirk.

Os cálculos da carga, torque, pressões máxima e média no filme de óleo e outros parâmetros do mancal podem ser feitos usando esse valor empírico de ε nas Equações 11.7 a 11.11 e a espessura mínima do filme calculada da Equação 11.4*b*.

Outras razões adimensionais podem ser formadas a partir das Equações 11.7 a 11.11 para uso no auxílio de projeto. A Figura 11-11 mostra as razões *de* $p_{max} / p_{média}$ *e* T_S / T_O como uma função do número de Ocvirk para valores teóricos e experimentais de ε. A Figura 11-12 mostra a variação teórica e experimental nos ângulos θ_{max} e ϕ com o número de Ocvirk.

Procedimentos de projeto

A carga e a velocidade geralmente são conhecidas. Se o eixo foi projetado para tensão ou deflexão, seu diâmetro será conhecido. Um comprimento de mancal ou razão l / d deve ser escolhido com base em considerações de empacotamento. As razões maiores l / d darão pressões menores de filme, mantido o resto igual. A razão

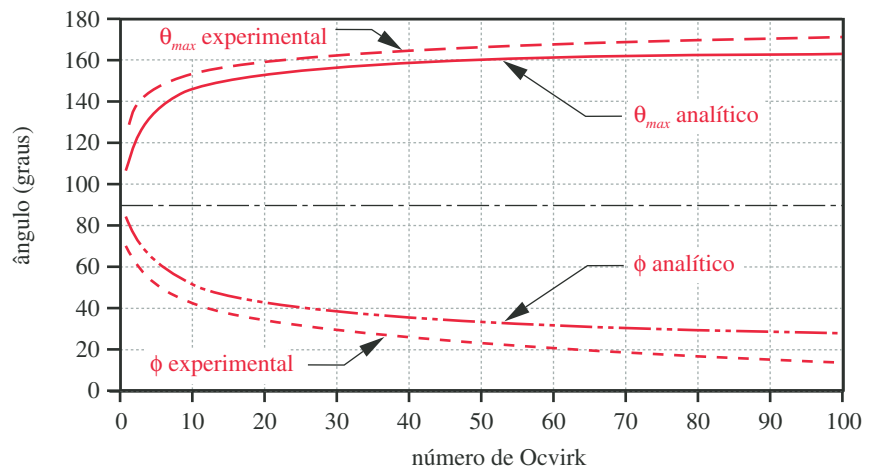



FIGURA 11-12

Ângulos θ_{max} e ϕ como uma função do número de Ocvirk.

de folga é definida como c_d / d. As razões de folga ocorrem geralmente no intervalo de 0,001 a 0,002, e às vezes são tão altas quanto 0,003. Razões de folga maiores aumentarão rapidamente o número de carga, O_N, porque a razão c_d / d é elevada ao quadrado na Equação 11.12*c*. Números de Ocvirk mais elevados darão maiores excentricidade, pressão e torque, como pode ser visto nas Figuras 11-10 e 11-11, mas esses fatores aumentam mais vagarosamente para O_N mais elevados. A vantagem de razões de folga maiores está no fluxo mais alto de fluido, produzindo temperaturas de operação menores. Razões elevadas l / d podem requerer razões de folga maiores para acomodar deflexões do eixo.* Um número de Ocvirk pode ser escolhido e a viscosidade requerida do lubrificante, encontrada pelas Equações 11.7 a 11.11. Alguma iteração será normalmente requerida para obter um projeto balanceado.

Se as dimensões do eixo não estiverem ainda determinadas, o diâmetro e o comprimento do mancal podem ser encontrados pela iteração das equações de mancal com um número pressuposto de Ocvirk. Um lubrificante deve ser escolhido e sua viscosidade, encontrada para as supostas temperaturas de operação a partir de gráficos como o da Figura 11-1. Depois que o mancal for projetado, uma análise do fluxo do fluido e da transferência de calor pode ser feita para determinar as taxas de fluxo de óleo requeridas e as temperaturas previstas de operação. Esses aspectos não são enfocados aqui devido à falta de espaço, mas podem ser encontrados em muitas referências, como 3 e 10.

A escolha do número de Ocvirk tem um efeito significativo no projeto. G. B. DuBois ofereceu um valor de guia ao sugerir que um número de carga de $O_N = 30$ ($\varepsilon = 0{,}82$) seria considerado um limite superior para um carregamento "moderado", $O_N = 60$ ($\varepsilon = 0{,}90$) um limite superior para carregamento "pesado" e $O_N = 90$ ($\varepsilon = 0{,}93$) um limite para carregamento "severo". Para números de carregamento acima de 30, devemos tomar cuidado para controlar cuidadosamente as tolerâncias de fabricação, os acabamentos de superfícies e as deflexões. Para aplicações gerais de mancais, provavelmente é melhor ficar abaixo de um O_N de 30. O procedimento de projeto é melhor explicado com um exemplo.

EXEMPLO 11-1

Projeto de mancal de deslizamento para um diâmetro definido de eixo

Problema **Projete um mancal de deslizamento para substituir os mancais de elementos rolantes no eixo mostrado na Figura 10-5 (repetida na próxima página). O eixo foi projetado no Exemplo 10-1.**

Dados **As cargas transversais máximas no eixo na posição do mancal são 16 lb em R_1 e 54 lb em R_2. Visto que a carga em R_2 é 4x aquela em R_1, um projeto pode ser feito para R_2 e usado também para R_1. Os diâmetros em R_1 e R_2 são 0,591 in. A velocidade do eixo é 1725 rpm. O mancal é estacionário.**

Hipóteses **Use uma razão de folga de 0,0017 e uma razão l / d de 0,75. Mantenha o número de Ocvirk em 30 ou menor, preferivelmente ao redor de 20.**

Encontre **A razão de excentricidade do mancal, a pressão máxima e sua localização, a espessura mínima do filme, o coeficiente de atrito, torque e potência perdida no mancal. Escolha um lubrificante adequado para operar a 190° F.**

Solução **Veja a Figura 10-5 na próxima página.**

* Observe que se o mancal for curto o suficiente para evitar qualquer contato metálico em suas extremidades devido à inclinação do eixo ou à deflexão, então pode-se considerar que o mancal dá suporte simples ao eixo.

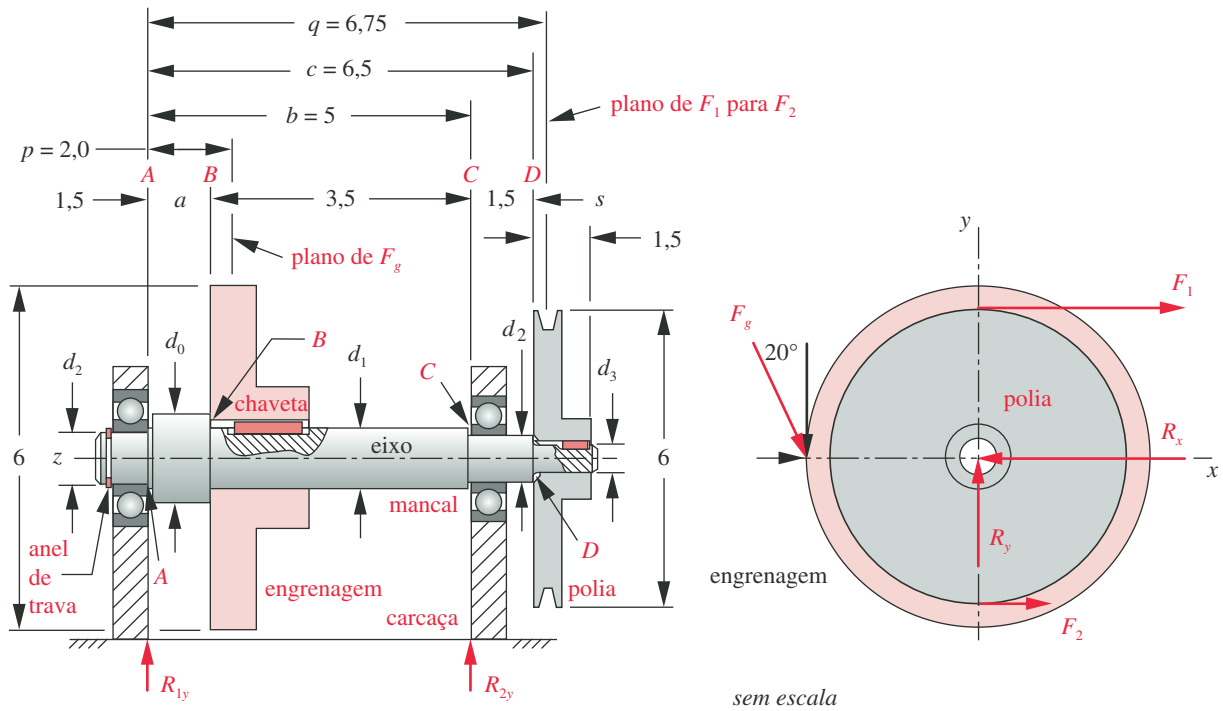



FIGURA 10-5 Repetida

Geometria de um projeto preliminar para Exemplos de 10-1 até 10-3.

1 Converta a velocidade dada em rotações por minuto (rpm) a rotações por segundo (rps) e encontre a velocidade tangencial U.

$$n' = 1\,725 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 28{,}75 \text{ rps}$$

$$U = \pi d n' = \pi(0{,}591)(28{,}75) = 53{,}38 \text{ in/s} \tag{a}$$

2 As folgas diametral e radial são encontradas a partir dos diâmetros dados e das razões de folga supostas:

$$c_d = 0{,}0017(0{,}591) = 0{,}0010 \text{ in}$$

$$c_r = c_d/2 = 0{,}0005 \text{ in} \tag{b}$$

3 O comprimento do mancal é encontrado a partir da razão suposta l / d de 0,75.

$$l = 0{,}75(0{,}591) = 0{,}443 \text{ in} \tag{c}$$

4 Encontre a razão de excentricidade experimental pela Equação 11.13*b* e pela Figura 11-10 usando o valor sugerido de $O_N = 20$.

$$\varepsilon_x \cong 0{,}21394 + 0{,}38517 \log O_N - 0{,}0008(O_N - 60)$$

$$\cong 0{,}21394 + 0{,}38517 \log 20 - 0{,}0008(20 - 60) = 0{,}747 \tag{d}$$

5 Encontre o parâmetro adimensional K_ε pela Equação 11.12*c*.

$$K_\varepsilon = \frac{O_N}{4\pi} = \frac{20}{4\pi} = 1{,}592 \qquad (e)$$

6 A viscosidade η do lubrificante requerido para suportar a carga de projeto P pode ser encontrada rearranjando a Equação 11.8*b*:

$$\eta = \frac{Pc_r^2}{K_\varepsilon U l^3} = \frac{54(0{,}0005)^2}{1{,}592(53{,}38)(0{,}443)^3} = 1{,}825E-6 \text{ reyn} = 1{,}825 \ \mu\text{reyn} \qquad (f)$$

Observe a Figura 11-1 para encontrar que um óleo de ISO VG 100 daria aproximadamente esse valor a 190° F. Esse óleo é equivalente a um óleo de motor SAE 30W.

7 A pressão média do filme de óleo é encontrada pela Equação 11.6*d*.

$$p_{média} = \frac{P}{ld} = \frac{54}{0{,}443(0{,}591)} = 206 \text{ psi} \qquad (g)$$

8 O ângulo θ_{max} no qual a pressão é máxima pode ser encontrado usando a Equação 11.7*c* e o valor experimental de $\varepsilon = 0{,}747$,

$$\theta_{max} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24(0{,}747)^2}}{4(0{,}747)}\right) = 159{,}2° \qquad (h)$$

ou ele pode ser lido por meio das curvas experimentais na Figura 11-12 para $O_N = 20$ como 159°.

9 A pressão máxima pode ser encontrada substituindo θ_{max} na Equação 11.7*b* com $z = 0$, visto que ela é máxima no centro do comprimento l do mancal.

$$p = \frac{\eta U}{rc_r^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon \operatorname{sen}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}$$

$$= \frac{(1{,}825E-6)(53{,}38)}{0{,}296(0{,}0005)^2}\left(\frac{(0{,}443)^2}{4} - 0^2\right)\frac{3(0{,}747)\operatorname{sen}(159{,}2°)}{(1+0{,}747\cos(159{,}2°))^3} = 1878 \text{ psi} \qquad (i)$$

ou a razão $p_{max}/p_{média}$ pode ser lida pela curva experimental na Figura 11-11 para $O_N = 20$ como 9.1 e multiplicada por $p_{média}$ no passo *(g)* acima para obter o mesmo resultado.

10 Encontre o ângulo ϕ, que localiza o eixo $\theta = 0$ a π com respeito à carga aplicada P pela Equação 11.8*a*.

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-(0{,}747)^2}}{4(0{,}747)}\right) = 34{,}95° \qquad (j)$$

11 Os torques estacionário e rotacional podem ser encontrados agora pelas Equações 11.9*a* e 11.9*b* usando o ângulo ϕ.

$$T_s = \eta\frac{d^3 l(n_2' - n_1')}{c_d}\frac{\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}$$

$$= (1{,}825E-6)\frac{(0{,}591)^3(0{,}443)(28{,}75-0)}{0{,}001}\frac{\pi^2}{(1-(0{,}747)^2)^{1/2}} = 0{,}0713 \text{ lb-in} \qquad (k)$$

$$T_r = T_s + Pe\,\text{sen}\,\phi = 0{,}0713 + 54(0{,}00037)\,\text{sen}\,34{,}95° = 0{,}0828 \text{ lb-in} \qquad (l)$$

12 A potência perdida no mancal é encontrada pela Equação 11.10.

$$\Phi = 2\pi T_r\left(n_2' - n_1'\right) = 2\pi(0{,}0828)(28{,}75 - 0) = 14{,}96\ \frac{\text{in-lb}}{\text{s}} = 0{,}002 \text{ hp} \qquad (m)$$

13 O coeficiente de atrito no mancal pode ser encontrado pela razão entre força de cisalhamento e a força normal usando a Equação 11.11.

$$\mu = \frac{2T_r}{Pd} = \frac{2(0{,}0828)}{54(0{,}591)} = 0{,}005 \qquad (n)$$

14 A espessura mínima do filme é encontrada pela Equação 11.4*b*.

$$h_{min} = c_r(1 - \varepsilon) = 0{,}0005(1 - 0{,}747) = 0{,}000126 \text{ in } (126\ \mu\text{in}) \qquad (o)$$

Este é um valor razoável, visto que a rugosidade superficial composta rms (ver a Equação 11.14*a*) não precisa ser mais que cerca de um terço a um quarto da espessura mínima do filme para evitar contato áspero (ver a Figura 11-13), e um acabamento R_q de 30-40 μin ou melhor é fácil de obter por laminação de precisão, retífica ou polimento.

15 O coeficiente de segurança contra o contato áspero pode ser estimado pela solução inversa do modelo usando uma espessura mínima do filme igual ao acabamento superficial médio suposto de, digamos, 40 μin, e determinando que o número de Ocvirk e carga P seriam requeridos para reduzir a espessura mínima do filme de óleo àquele valor. Isso foi facilmente feito no modelo mudando h_{min} e η para a posição de dados, P e O_N para a posição de resultados, começando com um valor tentativo para O_N e iterando até convergir para uma resposta. O resultado é:

quando $h_{min} = 40\ \mu\text{in}, \quad O_N = 72{,}2, \quad \varepsilon = 0{,}92, \quad P = 195 \text{ lb}$

e
$$N = \frac{195 \text{ lb}}{54 \text{ lb}} = 3{,}6 \qquad (p)$$

que é uma reserva aceitável contra sobrecargas.

16 Se esse cálculo do coeficiente de segurança tivesse indicado que uma pequena sobrecarga poderia ameaçar o mancal, reprojetar o mancal para um valor menor do número de Ocvirk daria uma margem maior contra a falha sob sobrecargas. A Equação 11.12*c*, repetida abaixo como (*q*), mostra o que poderia ser mudado para reduzir O_N:

$$O_N = \left(\frac{p_{média}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2 \qquad (q)$$

Requereria algumas combinações de diminuição da razão de folga, diminuição da razão d / l, ou uso de um óleo de maior viscosidade. Supondo que a velocidade rotacional, a carga e o diâmetro do eixo permaneçam imutáveis, o comprimento do mancal poderia ser aumentado ou a folga diametral, reduzida, bem como η aumentado para melhorar o projeto.

17 Os modelos EX11-01A (exemplo de solução) e EX11-01B (cálculo dos coeficientes de segurança contra sobrecarga) encontram-se no CD-ROM.

11.7 CONTATOS NÃO CONFORMANTES

Contatos não conformantes, como dentes de engrenagens, conjunto camo-seguidor e mancais de elementos rolantes (esferas e rolos), podem operar nos modelos

de lubrificação limite, misto ou elasto-hidrodinâmicos (EHD). O fator principal que determina quais dessas situações ocorrerão é a espessura específica do filme Λ, que é definida como a espessura mínima de filme no centro da área dividida pela rugosidade superficial rms composta das duas superfícies.

$$\Lambda = h_c \Big/ \sqrt{R_{q_1}^2 + R_{q_2}^2} \qquad (11.14a)$$

onde h_c é a espessura do filme de lubrificante no centro da área de contacto e R_{q1} e R_{q2} são as rugosidades médias rms das duas superfícies contatantes. O denominador da Equação 11.14*a* é denominado a **rugosidade superficial composta**. (Ver a Seção 7.1 para uma discussão sobre rugosidade superficial.) A espessura do filme no centro da área de contato pode ser relacionada à espessura mínima do filme h_{min} na extremidade da pista de contato por

$$h_c \cong \frac{4}{3} h_{min} \qquad (11.14b)$$

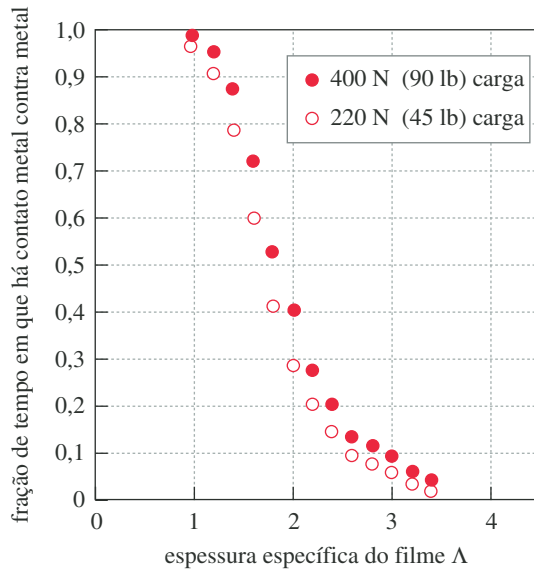
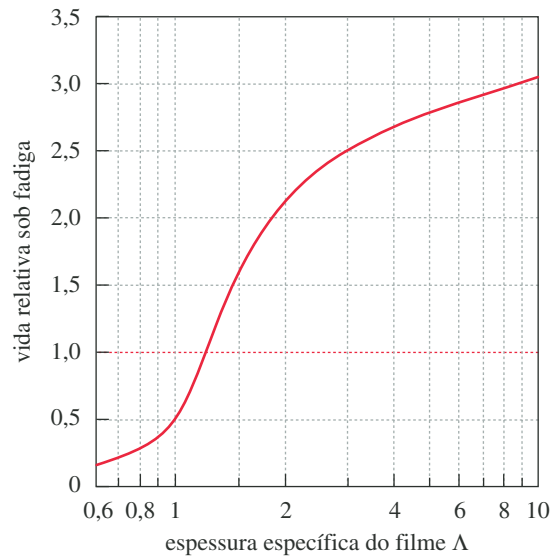
A Figura 11-13*a* mostra a frequência medida experimentalmente da aspereza de contato dentro do intervalo EHD como uma função da espessura específica do filme.[28] Quando Λ < 1, as superfícies estão em contínuo contato de metal contra metal, isto é, lubrificação de contorno (ou limite). Quando Λ > 3 a 4, não há essencialmente aspereza de contato. Entre esses valores há uma combinação das condições de lubrificação parcial EHD com lubrificação de contorno. A maioria dos contatos Hertzianos em engrenagens, camos e mancais de elementos rolantes opera na região de EHD parcial (lubrificação mista) da Figura 11-2.[17] A partir da Figura 11-13*a*, podemos concluir que Λ necessita ser > 1 para a lubrificação parcial EHD começar[17] e > 3 para a lubrificação EHD de filme completo ocorrer.[6,17] As condições efetivas para EHD parcial começam em Λ = 2 aproximadamente, e se Λ < 1,5, isso indicaria uma condição efetiva de lubrificação de contorno na qual o contato ocorreria com aspereza significativa.[17]

(*a*) Penetração do filme EHL pelas asperezas da superfície (ref. 28)

(*b*) Efeito da espessura do filme na vida sob fadiga (ref. 29)

FIGURA 11-13

Efeito da espessura específica do filme Λ nos contatos ásperos e vida sob fadiga.

A Figura 11-13*b* mostra os efeitos da espessura específica do filme na vida sob fadiga de um mancal de rolamento.[29] A ordenada define a razão entre vida esperada e vida prevista em catálogo para o mancal. Esse gráfico também mostra a conveniência de manter $\Lambda > 1{,}5$ a fim de obter a vida de catálogo. Um pequeno aumento em Λ de 1,5 para cerca de 2 pode dobrar a vida sob fadiga. Aumentos adicionais em Λ têm efeitos menos dramáticos na vida e podem causar atrito mais elevado devido às perdas por arrasto viscoso se um óleo mais pesado for usado para obter um valor maior de Λ.

A rugosidade da superfície é fácil de ser medida e controlada. A espessura do filme lubrificante é mais difícil de prever. O Capítulo 7 discute os cálculos da pressão Hertziana na superfície de contato e mostra que as pressões na zona de contato entre materiais rígidos em contato não conformante (ponto ou linha teóricos) são extremamente elevadas, geralmente tão altas quanto 80 a 500 kpsi (0,5 a 3 GPa) se ambos os materiais usados forem aço. Já se acreditou que os lubrificantes não poderiam suportar essas pressões e que, portanto, não poderiam separar as superfícies dos metais. Agora sabemos que a viscosidade é uma função exponencial da pressão e, em pressões típicas de contato, o óleo pode se tornar essencialmente rígido como os metais que ele separa. A Figura 11-14 mostra a relação entre a viscosidade e a pressão para diversos lubrificantes comuns em um gráfico semilog. A curva para óleos minerais pode ser aproximada por

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p} \tag{11.15a}$$

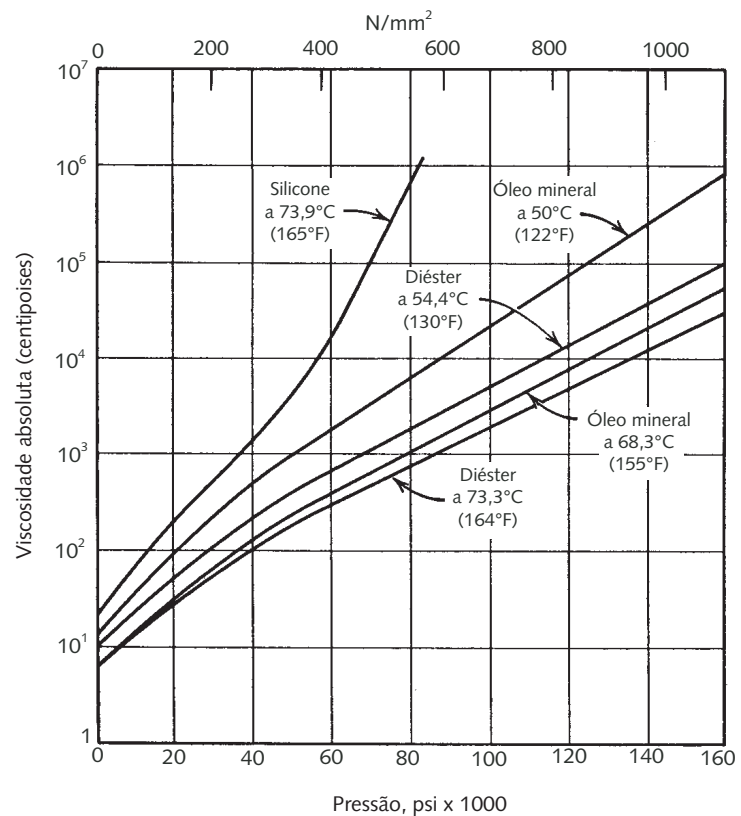



FIGURA 11-14

Viscosidade absoluta contra a pressão de vários óleos lubrificantes. (Fonte: ASME Research Committee on Lubrication, "Pressure Viscosity Report – Vol. 11", 1953.)

onde η_0 é a viscosidade absoluta (reyn [Pa-s]) na pressão atmosférica e p é a pressão (psi [Pa]). Uma expressão aproximada para o expoente α da pressão--viscosidade para óleos minerais é (com unidades de $V_0 = in^2/s\ [m^2/s]$, η_0 = reyn [Pa-s], e $\rho = lb\text{-}s^2 / in^4\ [N\text{-}s^2/m^4]$):[27]

$$\alpha \cong 7{,}74E-4\left(\frac{\upsilon_0}{10^4}\right)^{0{,}163} \cong 7{,}74E-4\left(\frac{\eta_0}{\rho\left(10^4\right)}\right)^{0{,}163} \tag{11.15b}$$

Contato cilíndrico Downson e Higginson[18, 19] determinaram uma fórmula para a espessura mínima do filme em um contato EHD entre rolos cilíndricos como

$$h_{min} = 2{,}65R'\left(\alpha E'\right)^{0{,}54}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0{,}7}\left(\frac{P}{lE'R'}\right)^{-0{,}13} \tag{11.16}$$

onde P é a carga transversal (lb [N]), l é o comprimento do contacto axial (in [m]), U = velocidade média $(U_1 + U_2) / 2$ (in/s [m-s]), η_0 é a viscosidade absoluta do lubrificante (reyn [Pa/s]) à pressão atmosférica e temperatura operacional e α é o expoente da função pressão-viscosidade para o lubrificante particular da Equação 11-15*b*. As expressões entre parênteses na Equação 11.16 são proporções adimensionais, uma vez que as unidades de seus constituintes são consistentes em unidades ips ou SI, como indicado. A espessura da película resultante está em unidades de polegadas ou metros.

O raio efetivo R' é definido como

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1_x}} + \frac{1}{R_{2_x}} \tag{11.17a}$$

onde R_{1x} e R_{2x} são os raios das superfícies de contato na direção de rolamento. O módulo efetivo é definido como

$$E' = \frac{2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}} \tag{11.17b}$$

onde E_1, E_2 são os módulos de elasticidade, e ν_1 e ν_2 são os coeficientes de Poisson de cada material.

Contato geral No ponto de contato geral, a área de contato é uma elipse, como discutido no Capítulo 7. A elipse de contato é definida pelas dimensões dos semieixos menor e maior, a e b, respectivamente. O contato entre duas esferas, ou entre uma esfera e uma placa plana, terá uma área de contato circular, que é essencialmente o caso de contato elíptico com $a = b$. Hamrock e Dowson[21] desenvolveram uma equação para a espessura mínima do filme para o caso geral de ponto de contato como

$$h_{min} = 3{,}63R'\left(\alpha E'\right)^{0{,}49}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0{,}68}\left(1-e^{-0{,}68\psi}\right)\left[\frac{P}{E'\left(R'\right)^2}\right]^{-0{,}073} \tag{11.18}$$

onde ψ é a razão de elipsidade para a área de contacto a / b (ver a Seção 7.10).

Em todas essas equações, a espessura do filme depende em grande medida da velocidade e viscosidade do lubrificante, mas é relativamente insensível à carga. A Figura 11-15 mostra a distribuição de pressão e gráficos de espessura de filme para condições de carga pesada e leve em um contato EHD entre os rolos de aço lubrificados com óleo mineral.[22] Observe que a pressão do fluido é a mesma que a pressão de contato Hertziana exceto para o pico de pressão que

(*a*) Condições de cargas leves

(*b*) Condições de cargas pesadas

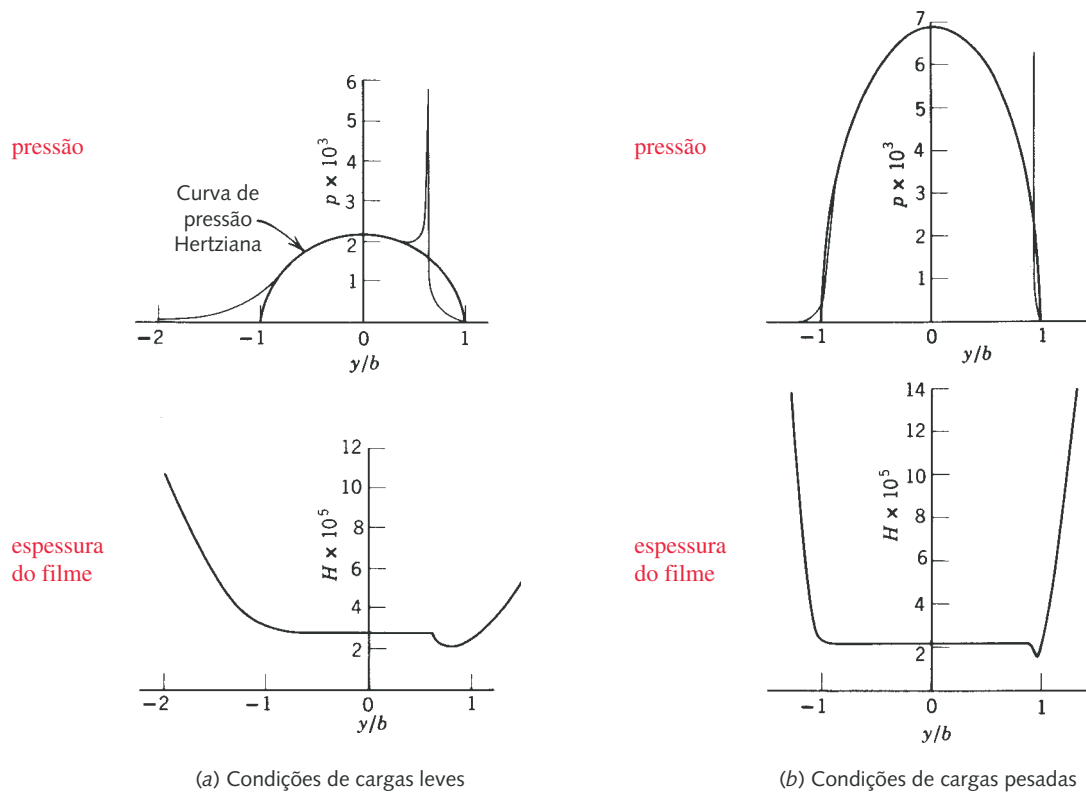



FIGURA 11-15

Distribuição de pressão e espessura de filme no caso EHD. (Fonte: D. Dowson e G. Higginson, "The Effect of Material Properties on the Lubrication of Elastic Rollers", *J. Mech Eng. Sci*, vol 2, no. 3, 1960, com autorização.)

ocorre à medida que a espessura do filme se contrai próximo à saída. Exceto por essa contração local, a espessura do filme é essencialmente constante em toda a área de contato.

As Equações 11.16, 11.17 e 11.18 permitem que a espessura mínima do filme seja calculada para um conjunto de contato não conformante como um par de dentes de engrenagem, um camo-seguidor, ou mancais de elementos rolantes. A espessura específica do filme pela Equação 11.14 indicará se as lubrificações EHD ou de contorno poderão ser esperadas no contato. Um óleo com aditivos EP é necessário se a condição EHD não estiver presente.

EXEMPLO 11-2

Lubrificação em uma interface camo-seguidor

Problema **Um sistema camo-seguidor foi analisado para a geometria da área de contato e as tensões de contato no Exemplo 7-3. Determine o parâmetro de espessura do filme e a condição de lubrificação para um rolo bruto de fundição se movendo contra um camo bruto e um usinado.**

Dados **O raio do rolo seguidor é 1 in com um raio de coroa de 20 in a 90° para o raio do rolo com uma rugosidade superficial**

rms de $R_q = 7$ μin. O raio de curvatura mínimo do camo é 1,72 in, na direção de rolamento. Ele é axialmente plano. Ele forma um contato elíptico com o camo. As dimensões dos semieixos da elipse são $a = 0{,}0889$ in e $b = 0{,}0110$ in. A velocidade angular do camo é 18,85 rad/s e o raio para sua curvatura no ponto de raio mínimo de curvatura é 3,92 in. A temperatura volumétrica do óleo é 180° F. O camo bruto tem uma rugosidade de superfície rms de R_q =7 μin e o camo usinado tem $R_q = 30$ μin.

Hipóteses **Tente um óleo ISO VG 460 com uma gravidade específica de 0,9. O rolo tem 1% de escorregamento em relação ao camo.**

Encontre **A espessura específica do filme de óleo, as condições de lubrificação para o lubrificante dado e a viscosidade requerida do lubrificante para obter as condições efetivas de EHD parcial ou completo para cada camo, se possível.**

Solução **Ver Figura 11-16.**

1 A Figura 11-1 dá a viscosidade de um óleo ISO VG 460 como sendo cerca de 6,5 μreyn a 180° F.

2 Encontre a densidade de massa ρ do óleo para a gravidade específica dada (SG) do óleo e a densidade em peso da água.

$$\rho = SG\frac{\gamma}{g} = 0{,}9\left(0{,}03611\frac{\text{lb}}{\text{in}^3}\Big/386\frac{\text{in}}{\text{s}^2}\right) = 84{,}2E-6\frac{\text{lb}-\text{s}^2}{\text{in}^4} \text{ ou } \frac{blob}{\text{in}^3} \qquad (a)$$

3 Encontre o expoente aproximado para a pressão-viscosidade da Equação 11.15*b*.

$$\alpha \cong 7{,}74E-4\left(\frac{\eta_0}{\rho\left(10^4\right)}\right)^{0{,}163} \cong 7{,}74E-4\left(\frac{6{,}5E-6}{84{,}2E-6\left(10^4\right)}\right)^{0{,}163} = 1{,}136E-4 \quad (b)$$

4 Encontre o raio efetivo da Equação 11.17*a*.

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1_x}} + \frac{1}{R_{2_x}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1{,}720} \qquad R' = 0{,}632 \text{ in} \qquad (c)$$

5 Encontre o módulo efetivo de elasticidade pela Equação 11.17*b*.

$$E' = \frac{2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} = \frac{2}{\frac{1-0{,}28^2}{3E7} + \frac{1-0{,}28^2}{3E7}} = 3{,}255E7 \qquad (d)$$

6 Encontre a velocidade média U. O rolo tem 99% da velocidade do camo.

$$U_2 = r\omega = 3{,}92 \text{ in } (18{,}85 \text{ rad/s}) = 73{,}892 \text{ in/s}$$
$$U_1 = 0{,}99U_2 = 0{,}99(73{,}892) = 73{,}153 \text{ in/s}$$
$$U = (U_1 + U_2)/2 = (73{,}892 + 73{,}153)/2 = 73{,}523 \text{ in/s} \qquad (e)$$

7 Encontre a razão de elipsidade = eixo maior / eixo menor. O eixo menor é na direção do rolamento neste caso.

$$\psi = a/b = 0{,}0889/0{,}0110 = 8{,}082 \qquad (f)$$

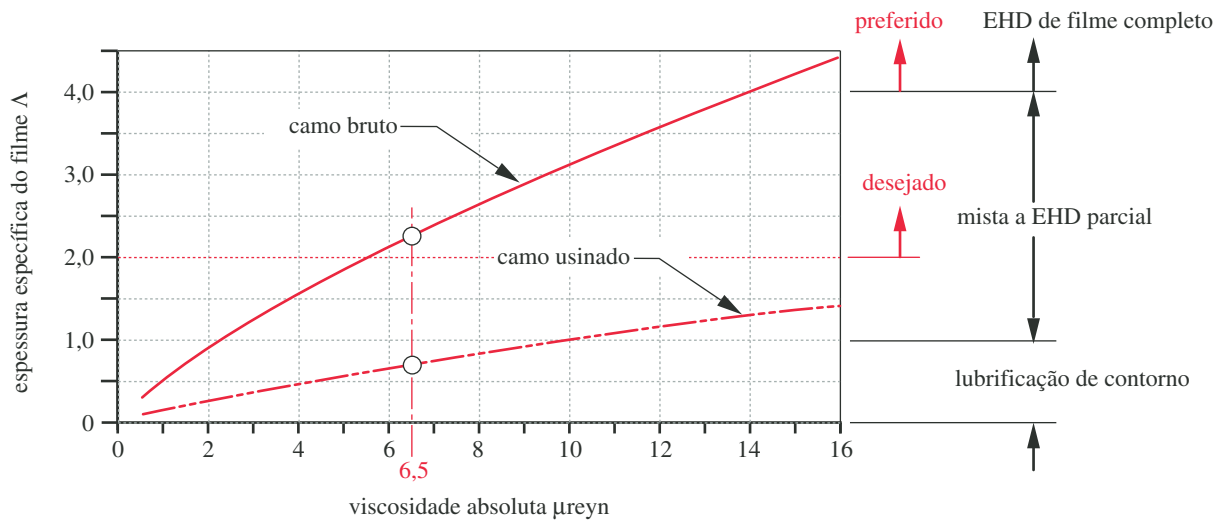



FIGURA 11-16

Variação da espessura específica do filme Λ *versus* viscosidade do lubrificante η_0 no Exemplo 11-2.

8 Encontre a espessura mínima do filme pela Equação 11.18.

$$h_{min} = 3{,}63R'(\alpha E')^{0{,}49}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0{,}68}\left(1-e^{-0{,}68\psi}\right)\left[\frac{P}{E'(R')^2}\right]^{-0{,}073}$$

$$= 3{,}63(0{,}632)\left[1{,}136E-4(3{,}255E7)\right]^{0{,}49}\left[\frac{(6{,}5E-6)(73{,}523)}{(3{,}255E7)(0{,}632)}\right]^{0{,}68}$$

$$\cdot\left[1-e^{-0{,}68(8{,}082)}\right]\left[\frac{250}{3{,}255E7(0{,}632)^2}\right]^{-0{,}073} = 16{,}6\ \mu\text{in} \qquad (g)$$

9 Converta esse valor mínimo na saída para uma espessura aproximada no centro da área de contato com a Equação 11.14*b*

$$h_c \cong \frac{4}{3}h_{min} = \frac{4}{3}(16{,}6) = 22{,}2\ \ \mu\text{in} \qquad (h)$$

10 Os valores da espessura específica do filme para cada camo podem agora ser encontrados pela Equação 11.14*a*.

$$\text{camo bruto:}\quad \Lambda = h_c\Big/\sqrt{R_{q1}^2 + R_{q2}^2} = 22{,}2\Big/\sqrt{7^2+7^2} = 2{,}24$$

$$\text{camo usinado:}\quad \Lambda = h_c\Big/\sqrt{R_{q1}^2 + R_{q2}^2} = 22{,}2\Big/\sqrt{7^2+30^2} = 0{,}72 \qquad (i)$$

o que indica que o camo usinado está em lubrificação de contorno (limite) e o camo bruto está em lubrificação de EHD parcial com o óleo especificado. Essas são condições comuns para camos brutos ou usinados, respectivamente, movendo-se contra um seguidor de rolo não usinado.

11 Para determinar que viscosidade de óleo seria necessária para pôr cada sistema na condição de EHD parcial ou completo, o modelo tem que ser resolvido para um intervalo possível de valores de η_0 desde 0,5 até 16 μreyn, como mostrado na Figura 11-1 para 180° F. Um gráfico dos resultados na Figura 11.16 mostra que um óleo com $\eta_0 \geq 14$ μreyn é necessário para pôr este camo não usinado na condição de lubrificação de EHD completa, e que um óleo com $\eta_0 \geq 10$ μreyn levaria esse camo usinado a $\Lambda > 1$ e dentro do limite inferior do regime de lubrificação de mista a EHD parcial. Entre-

tanto, nenhum dos óleos mostrados na Figura 11-1 pode prover $\Lambda > 4$ para lubrificação EHD de filme completo com o camo usinado.

12 Os modelos EX11-02 encontram-se no CD-ROM.

11.8 MANCAL DE ELEMENTOS ROLANTES

Os rolos são conhecidos desde tempos ancestrais como meio de mover objetos pesados, e há evidências do uso de mancais de esferas no século I a.C.; mas foi somente no século 20 que materiais melhores e tecnologia de manufatura permitiram que fossem feitos mancais precisos de elementos rolantes. A necessidade de mancais para velocidades mais altas, com resistência a temperaturas mais elevadas e baixo atrito foi engendrada pelo desenvolvimento de turbinas a gás para aviões. Esforços consideráveis de pesquisa desde a Segunda Guerra Mundial resultaram em mancais de elementos rolantes (MER) de alta qualidade e alta precisão disponíveis a preços bastante razoáveis.

É interessante observar que, desde os primeiros projetos de mancais ao redor de 1900, mancais de esferas e rolos foram padronizados mundialmente em tamanhos métricos. É possível remover um mancal de elementos rolantes de uma montagem de roda de um automóvel antigo feito em qualquer país nos anos 1920, por exemplo, e encontrar um substituto que caiba buscando nos catálogos atuais dos fabricantes de mancais. O novo mancal será muito melhor que o original em termos de projeto, qualidade e confiabilidade, mas ele terá as mesmas dimensões externas.

Materiais A maioria dos mancais de esferas modernos é feita de aço AISI 5210 e endurecida a um alto grau, inteiramente ou somente na superfície. Essa liga de cromo-aço é endurecível completamente a HRC 61-65. Mancais de rolos são frequentemente feitos de ligas de aços endurecíveis AISI 3310, 4620 e 8620. Melhorias recentes nos processos de manufatura de aço resultaram em aços para mancais com níveis reduzidos de impurezas. Mancais feitos com esses aços “limpos” mostram vida útil mais extensa e confiabilidade. Embora se considere que os mancais de rolamento tenham vida finita quanto à fadiga, e isso ainda se aplica aos mancais “comuns”, os mancais de elementos rolantes (MER) feitos de aços “limpos” têm dado evidências, recentemente, de limite de resistência de vida infinita quanto à fadiga superficial.

Manufatura Mancais de elementos rolantes são feitos por todos os maiores fabricantes mundiais de mancais em dimensões padronizadas definidas pela Associação dos Fabricantes de Mancais Antiatrito (AFBMA) e/ou a Organização Internacional de Padrões (ISO), e eles admitem o intercâmbio. Podemos estar razoavelmente seguros de que a seleção de um mancal de qualquer fabricante feito segundo essas padronizações não resultará em uma montagem irreparável no futuro. Os padrões da AFBMA para o projeto de mancais foram adotados pela American National Standards Institute (ANSI). Algumas das informações nesta seção foram tomadas da ANSI/AFBMA, Norma 9-1990 para mancais de esferas[24] e Norma 11-1990 para mancais de rolos. As padronizações também definem classes de tolerâncias para os mancais. Mancais radiais são classificados pela ANSI nas classes de tolerância ABEC-1 até -9, com a precisão aumentando com o número da classe. A ISO define Classe 6 até Classe 2, com a precisão variando inversamente com o número da classe. O custo aumenta com o aumento da precisão.

Comparação de mancais de rolamento e deslizamento

Os mancais de elementos rolantes têm várias vantagens sobre os mancais de contato deslizante e vice-versa. Hamrock[26] lista as seguintes vantagens dos mancais de rolos sobre os mancais de deslizamento:

Tabela 11-4
Coeficientes típicos de atrito para mancais de rolamentos*

Tipo	μ
Esfera, autocompensador	0,0010
Rolo, cilíndrico	0,0011
Esfera, axial	0,0013
Esfera, pista profunda	0,0015
Rolo, esférico	0,0018
Rolo, cônico	0,0018
Rolo, agulhado	0,0045

* Fonte: Palmgren, A., Ball and Roller Bearing Engineering, 2ed., S. H. Burbank Co., Phila., 1946

1 atrito baixo na partida e durante a operação, $\mu_{\text{estático}} \cong \mu_{\text{dinâmico}}$ no intervalo de 0,001 a 0,005;
2 pode suportar cargas combinadas axial e radial;
3 menos sensível às interrupções de lubrificação;
4 sem instabilidades autoexcitadas;
5 partida boa em baixas temperaturas;
6 pode selar lubrificante dentro do mancal e ser "lubrificado por vida útil";
7 geralmente requer menos espaço na direção axial.

As seguintes são desvantagens dos mancais de rolamento comparados aos mancais conformantes de deslizamento hidrodinâmicos:[26]

1 mancais de rolamento podem vir a falhar por fadiga;
2 requerem mais espaço na direção radial;
3 pobre capacidade de amortecimento;
4 nível mais elevado de ruído;
5 alguns têm requisitos de alinhamento mais severos;
6 custo mais elevado;

Tipos de mancais de elementos rolantes

Os mancais de elementos rolantes podem ser agrupados em duas categorias gerais, mancais de esferas e mancais de rolos, ambos com muitas variações dentro dessas divisões. Mancais de esferas são mais adequados para aplicações pequenas e de alta velocidade. Para sistemas grandes e de carga pesada, mancais de rolos têm a preferência. Se há risco de desalinhamento entre eixo e alojamento, rolamentos autocompensadores são necessários. Rolamentos de rolos cônicos podem lidar com cargas pesadas nas direções radiais e axiais em velocidades moderadas. Para situações com cargas axiais e radiais pesadas em alta velocidade, rolamentos de esferas de pista profunda são os melhores. Os coeficientes de atrito de vários tipos de mancais são mostrados na Tabela 11-4.

Os mancais de esferas contêm várias esferas de aço endurecido presas entre duas pistas, uma interior e exterior para mancais radiais, ou pistas superior e inferior para mancais axiais. Um retentor (também chamado de gaiola ou separador) é usado para manter as esferas adequadamente espaçadas ao redor das pistas, como mostrado na Figura 11-17. Os mancais de esferas podem suportar cargas axial e radial combinadas em diversos graus dependendo do projeto e da construção dos mancais. A Figura 11-17*a* mostra um mancal de esferas do tipo Conrad ou de ranhura profunda que suportará cargas radiais e axiais moderadas. A Figura 11-17*b* mostra um mancal de esferas de contato angular projetado para lidar com cargas axiais maiores em uma direção, bem como com cargas radiais. Alguns mancais de esferas estão disponíveis com vedação para protegê-los de materiais estranhos e são selados para manter o lubrificante aplicado na fabricação. Os mancais de esferas são mais adequados para cargas mais leves, tamanhos menores e maior velocidade.

Os mancais de rolos usam rolos retos, cônicos ou abaulados que correm entre pistas, como mostrado na Figura 11-18. Em geral, os mancais de rolos podem suportar cargas estáticas e dinâmicas (choque) maiores que os mancais de esferas por causa da linha de contato deles e são mais baratos para tamanhos maiores e cargas maiores. A menos que os rolos sejam afunilados ou abaulados, eles podem suportar uma carga somente em uma direção, seja radial ou axial, conforme o projeto do mancal.

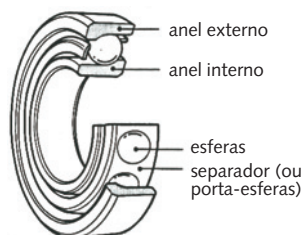
(*a*) Mancal de ranhura profunda (ou tipo conrad)

(*b*) Mancal de esferas de contato angular

FIGURA 11-17
Mancais de esferas. (Cortesia da NTN Corporation.)

A Figura 11-18*a* mostra um mancal de rolos cilíndricos retos projetado para suportar somente cargas radiais. Ele tem atrito muito baixo e flutua axialmente, o que pode ser uma vantagem em eixos longos nos quais a expansão térmica pode carregar completamente um par de esferas do mancal na direção axial se não for montado adequadamente. A Figura 11-18*b* mostra um mancal de agulhas que usa rolos de pequeno diâmetro e pode ou não ter uma pista interna ou gaiola. Suas vantagens são a capacidade de carga maior devido ao uso completo de todos os rolos simultaneamente e a dimensão radial compacta, especialmente se usado sem a pista interna. Em tais casos, o eixo contra o qual os rolos correm deve ser endurecido e retificado. Apesar de o uso completo do mancal de agulhas ter maior capacidade de carga, tem também maior taxa de desgaste do que outros tipos com menos valor separados por gaiolas que evitam a fricção entre eles.

A Figura 11-18*c* mostra um mancal de rolos cônicos projetado para suportar carga axial grande e carga radial. Eles são frequentemente usados como mancais de rodas em automóveis e caminhões. Os mancais de rolos cônicos (e outros) podem ser separados axialmente, o que torna sua montagem mais fácil que aos mancais de esferas, que não podem ser desmontados. A Figura 11-18*d* mostra um mancal de rolos esféricos que é autoalinhante ou autocompensador, não permitindo que momento algum seja suportado pelo mancal.

Mancais axiais Mancais de esferas e rolos são também feitos para cargas puramente axiais, como mostrado na Figura 11.19. Os mancais de rolos cilíndricos têm atrito maior que os mancais axiais de esferas devido ao escorregamento que ocorre entre os rolos e as pistas (porque somente um ponto no rolo pode igualar a velocidade linear variável sobre os raios das pistas) e não devem ser usados em aplicações de alta velocidade.

Classificação dos mancais A Figura 11-20 mostra uma classificação dos tipos de MER. Cada uma das categorias principais de esferas e rolos se divide nas subcategorias radial e axial. Dentro dessas divisões, muita variedade é possível. São oferecidas configurações de carreira simples ou dupla, com a última permitindo maior capacidade de carga. Contato unidirecional ou angular é outra escolha, a primeira aceitando cargas "puramente" radiais ou carregamento axial e a última aceitando uma combinação de ambos. Os mancais de esferas de pista profunda são capazes de lidar com cargas em ambas as direções, sendo as radiais elevadas e as axiais limitadas, e são os mais comumente encontrados.

Os mancais de esferas de contato angular podem aguentar cargas axiais mais elevadas que os mancais de esferas de pista profunda, mas em somente uma direção. Eles são frequentemente usados aos pares para absorver cargas axiais em ambas as direções. Os mancais de esfera de capacidade máxima têm uma fenda

(*a*) Mancal axial de esferas

(*b*) Mancal axial de rolos

FIGURA 11-19

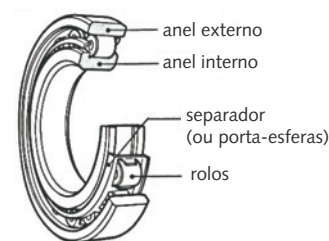
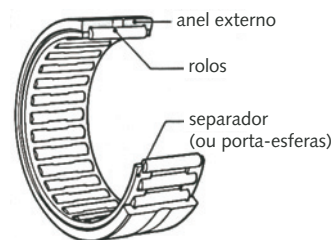
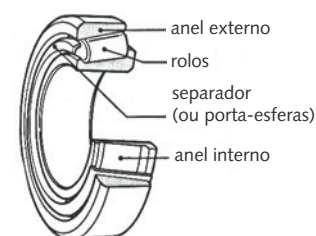
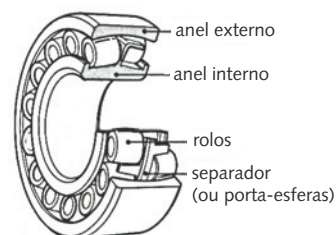
Mancais axiais. (Cortesia da NTN Corporation.)

(*a*) Mancal de rolos cilíndricos

(*b*) Mancal de rolos agulhados (ou de agulhas)

(*c*) Mancal de rolos cônicos

(*d*) Mancal de rolos esféricos (abaulados)

FIGURA 11-18

Mancais de rolos. (Cortesia da NTN Corporation.)

de enchimento para permitir que sejam inseridas mais esferas do que podem ser acomodadas pelos deslocamentos excêntricos das pistas na montagem, como é feito com os mancais de esferas de rasgo fundo (tipo Conrad), mas a fenda de enchimento limita sua capacidade axial de carga.

Mancais projetados para serem autoalinhantes têm a vantagem de acomodação de algum desalinhamento do eixo e também criam apoio simples para o eixo. Eles também têm atrito muito baixo. Se mancais não autoalinhantes forem usados em um eixo, a montagem dos mancais deve ser alinhada cuidadosamente para colinearidade e angularidade a fim de evitar a criação de cargas residuais nos mancais na montagem, o que reduziria severamente sua vida.

A Figura 11-21 mostra o intervalo de tamanhos e a classificação dos mancais e recomendações de um fabricante relativas ao uso dos vários tipos de mancais

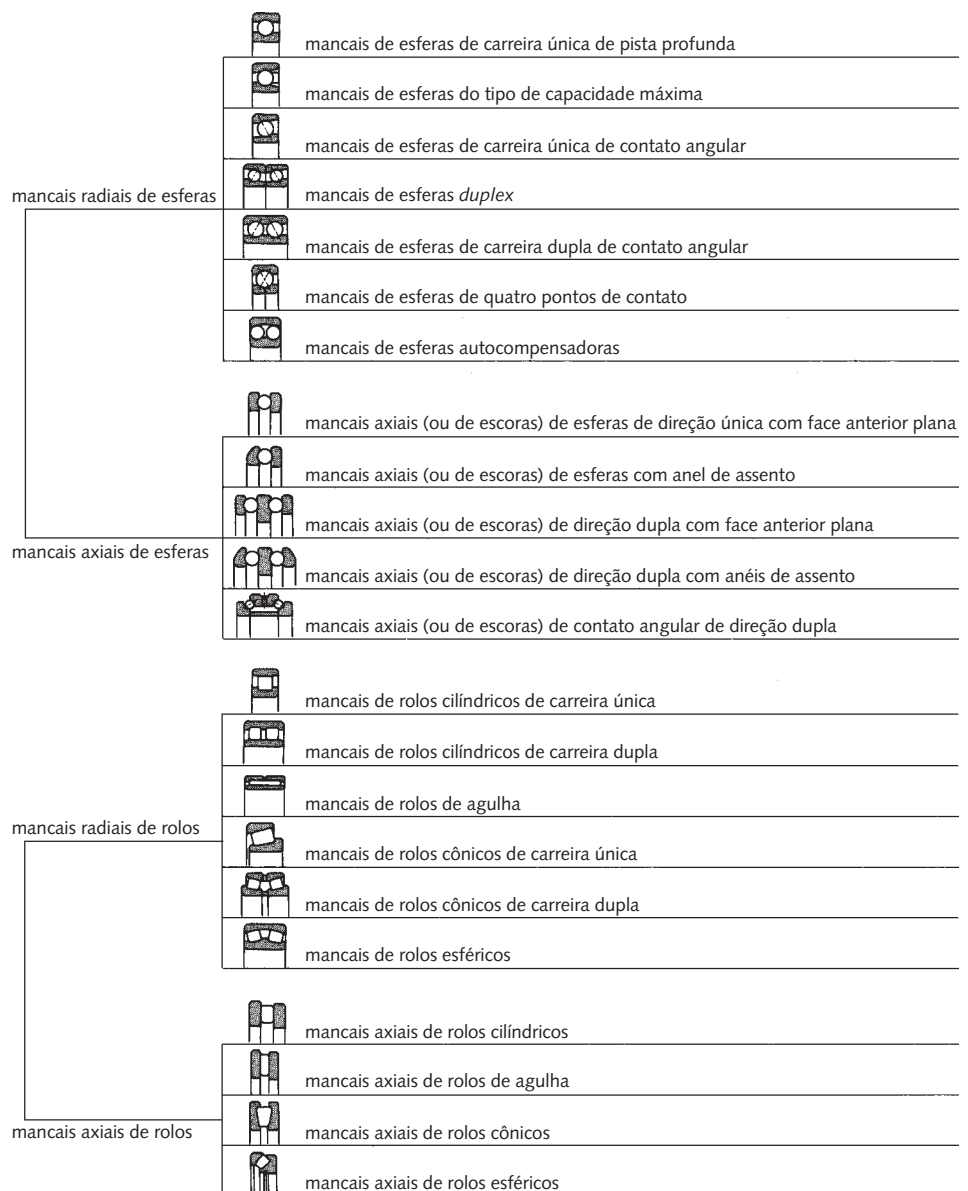



FIGURA 11-20

Classificação de mancais de elementos rolantes. (Cortesia da NTN Corporation.)

	TIPO	INTERVALO DE TAMANHO EM POLEGADAS		CLASSIFICAÇÃO RELATIVA MÉDIA				DISPONÍVEL COM			DIMENSÕES	
				Capacidade		Velocidade limite	Desalinhamento permissível	Blindado	Selado	Anel retentor	Métricas	Polegadas
		Furo	Diâmetro externo	Radial	Axial							
Esferas MANCAIS DE ESFERAS	TIPO CONRAD	0,1181 a 41,7323	0,3750 a 55,1181	Boa	Aceitável ↔	Conrad é a base de comparação 1,00	± 0° 8′ Folga radial padrão ± 0° 12′ C3 Livre	X	X	X	X	X
	TIPO MÁXIMO	0,6693 a 4,3307	1,5748 a 8,4646	Excelente	Boa ↔	1,00	± 0° 3′	X		X	X	
	CONTATO ANGULAR 15° / 40° 15° 40°	0,3937 a 7,4803	1,0236 a 15,7480	Boa	Boa (15°) Excelente (40°) ←	1,00 ― 0,70	± 0° 2′				X	
	CONTATO ANGULAR 35°	0,3937 a 4,3307	1,1811 a 9,4488	Excelente	Boa ←	0,70	0°				X	
	AUTOALINHAMENTO	0,1969 a 4,7244	0,7480 a 9,4488	Aceitável	Aceitável ↔	1,00	± 4°				X	
MANCAIS DE ROLOS CILÍNDRICOS	ANEL INTERIOR SEPARÁVEL SEM FIXAÇÃO	0,4724 a 19,6850	1,2598 a 28,3465	Excelente	0	1,00	± 0° 4′				X	
	ANEL INTERIOR SEPARÁVEL UMA DIREÇÃO FIXAÇÃO	0,4724 a 12,5984	1,2598 a 22,8346	Excelente	Pobre ←	1,00	± 0° 4′				X	
	COMPLETO COM DUAS DIREÇÕES DE FIXAÇÃO	0,4724 a 3,9370	1,4567 a 8,4646	Excelente	Pobre ↔	1,00	± 0° 4′				X	
MANCAIS DE ROLOS CÔNICOS	SEPARÁVEL	0,6205 a 6,0000	1,5700 a 10,0000	Boa	Boa →	0,60	± 0° 2′				X	X
MANCAIS DE ROLOS ESFÉRICOS	AUTOALINHAMENTO	0,9843 a 12,5984	2,0472 a 22,8346	Boa	Aceitável ↔	0,50	± 4°				X	
	AUTOALINHAMENTO	0,9843 a 35,4331	2,0472 a 46,4567	Excelente	Boa ↔	0,75	± 1°				X	
Rolos MANCAIS DE AGULHAS	MANCAL COMPLETO com ou sem anel de fixação e ranhura de lubrificação	0,2362 a 14,1732	0,6299 a 17,3228	Boa	0	0,60	± 0° 2′		X		X	X
	COPO REPUXADO	0,1575 a 2,3622	0,3150 a 2,6772	Boa	0	0,30	± 0° 2′				X	X
MANCAIS AXIAIS	DIREÇÃO ÚNICA PISTA DE RANHURA PARA ESFERAS	0,2540 a 46,4567	0,8130 a 57,0866	Pobre	Excelente →	0,30	0°				X	X
	DIREÇÃO ÚNICA ROLOS CILÍNDRICOS	1,1811 a 23,6220	1,8504 a 31,4960	0	Excelente →	0,20	0°				X	
	AUTO ALINHAMENTO ROLOS ESFÉRICOS	3,3622 a 14,1732	4,3307 a 22,0472	Pobre	Excelente →	0,50	±3°				X	

FIGURA 11-21

Informação de desempenho relativo, tamanho e disponibilidade para mancais de elementos rolantes. (Cortesia da FAG Bearings Corp., Stamford, Conn.)

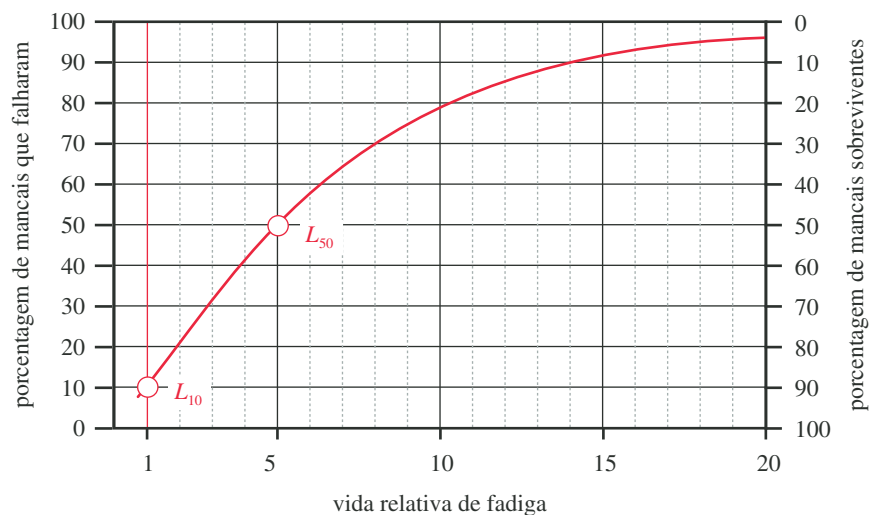
como um exemplo. Observe que poucos tipos estão disponíveis com tamanho em polegadas, mas a maioria está disponível somente em dimensões métricas. A coluna intitulada *Capacidade* indica a habilidade relativa para acomodar cargas radiais e axiais para cada tipo. A coluna *Velocidade limite* usa o mancal do tipo Conrad como o padrão para comparações, visto que ele tem uma das melhores capacidades em alta velocidade. Consulte os catálogos dos fabricantes de mancais para informações adicionais acerca de outros tipos e séries de mancais. Muitos outros estão disponíveis além dos mostrados nestas poucas figuras.

11.9 FALHA DOS MANCAIS DE ELEMENTOS ROLANTES

Se houver lubrificante limpo em quantidade suficiente, a falha dos mancais de elementos rolantes será por fadiga superficial, como descrito no Capítulo 7. A falha é considerada prestes a ocorrer quando a pista ou as esferas (rolos) exibirem a primeira vala. Normalmente, a pista falhará primeiro. O mancal dará um aviso audível de que a cavitação começou emitindo ruído e vibração. Ele pode continuar funcionando além desse ponto, mas a superfície continuará a se deteriorar, o barulho e vibração aumentarão, resultando, mais cedo ou mais tarde, em fragmentação ou fratura do elemento rolante e possível entupimento ou dano de outros elementos conectados. Se você já teve alguma vez um mancal de roda falhando em seu automóvel, você conhece o som desagradável de um mancal de elementos rolantes cavitado ou fragmentado ao extremo.

Qualquer amostra grande de mancais exibirá variações amplas de vida entre seus membros. As falhas não se distribuem estatisticamente em uma maneira simétrica Gaussiana, mas, pelo contrário, de acordo com a distribuição de Weibull, que é desviada. Os mancais são geralmente classificados com base na vida, expressa em revoluções (ou em horas de operação na velocidade de projeto), que espera-se que 90% de uma amostra aleatória de mancais daquele tamanho alcancem ou excedam em suas cargas de projeto. Em outras palavras, podemos esperar que 10% do lote falhe com aquela carga antes que a vida de projeto seja alcançada. Isso é chamado de vida L_{10}.* Para aplicações críticas, uma porcentagem menor de falha pode ser usada, mas a maior parte dos fabricantes tem padronizado a vida L_{10} como o meio de definição da vida característica, sob carga, de

FIGURA 11-22

Distribuição típica da vida de mancais de elementos rolantes. (Adaptado da SKF USA Inc.)

* Alguns fabricantes de mancais referem-se a isso como a vida B_{90} ou C_{90}, referindo-se à sobrevivência de 90% dos mancais em vez de à falha de 10%.

um mancal. O processo de seleção de mancais de rolamento envolve em grande parte o uso deste parâmetro para obter qualquer vida desejada sob o carregamento antecipado e as condições de sobrecarga esperadas em serviço.

A Figura 11-22 mostra uma curva de falha de mancal e a porcentagem de sobrevivência como uma função da vida relativa de fadiga. A vida L_{10} é adotada como referência. A curva é relativamente linear até 50% de falhas, que ocorre em uma vida 5 vezes maior que aquela de referência. Em outras palavras, deve demorar 5 vezes mais tempo para 50% dos mancais falharem do que é requerido para 10% falharem. Após esse ponto, a curva se torna bastante não linear, mostrando que demorará cerca de 10 vezes mais para falharem 80% dos mancais que para falhar 10%, e em 20 vezes a vida L_{10}, haverá ainda uns poucos porcento de mancais originais trabalhando.

A vida L para outros percentuais de falha além do padrão de 10% pode ser calculada pela multiplicação da vida L_{10} por um fator de confiabilidade K_R tomado da curva de distribuição de Weibull que este obedece.

$$Lp = K_R L_{10} \tag{11.19}$$

onde L é a vida em fadiga expressa em milhões de revoluções. Os fatores K_R de Weibull para vários percentuais são mostrados na Tabela 11-5.

Tabela 11-5

Fatores de confiabilidade R para uma distribuição de Weibull correspondente a uma probabilidade de falha P

P%	R%	K_R
50	50	5,0
10	90	1,0
5	95	0,62
4	96	0,53
3	97	0,44
2	98	0,33
1	99	0,21

11.10 SELEÇÃO DE MANCAIS DE ELEMENTOS ROLANTES

Uma vez que o tipo de mancal apropriado para a aplicação tenha sido escolhido com base nas considerações discutidas anteriormente e delineadas na Figura 11-21, a seleção de um mancal de tamanho apropriado depende das magnitudes de carga estática e dinâmica aplicadas e da vida desejada até a fadiga.

Carga dinâmica básica de classificação *C*

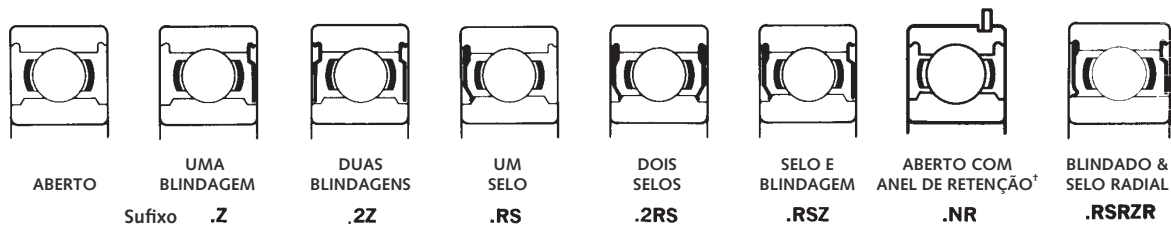
Extensivos testes feitos pelos fabricantes, baseados em teorias bem-estabelecidas, têm mostrado que a vida em fadiga L_{10} dos mancais de rolamento é inversamente proporcional à magnitude da carga elevada ao cubo para mancais de esferas, e a uma potência de 10/3 para mancais de rolos. Essas relações podem ser expressas como

mancais de esferas: $$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 \tag{11.20a}$$

mancais de rolos: $$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^{10/3} \tag{11.20b}$$

onde L_{10} é a vida em fadiga expressa em milhões de revoluções, P é a carga constante aplicada* e C é a *carga dinâmica básica de classificação* para o mancal específico que é definida pelo fabricante e publicada para cada mancal nos catálogos de mancais. A ***carga dinâmica básica de classificação C*** é definida como *a carga que dará uma vida de 1 milhão de revoluções à pista interna.* Essa carga C é normalmente maior que qualquer carga prática à qual submeteríamos o mancal específico, porque a vida desejada é normalmente muito mais alta que 1 milhão de revoluções. De fato, alguns mancais falharão estatisticamente se submetidos verdadeiramente a uma carga igual a C. Ele é simplesmente um valor de referência que permite que a vida do mancal seja prevista em qualquer nível das cargas reais aplicadas. A Figura 11-23 mostra uma página do catálogo de mancais de um fabricante que especifica o valor de C para cada mancal. A velocidade máxima limite para cada mancal também é definida.

Combine as Equações 11.20*a* e 11.20*b* com a Equação 11.19 para obter expressões para a vida de um mancal a qualquer taxa de falha selecionada.

* Observe que uma carga constante externa aplicada a um mancal em rotação cria cargas dinâmicas nos elementos do mancal da mesma maneira que um momento constante em um eixo em rotação causa tensões dinâmicas, porque qualquer ponto em uma esfera, rolo ou pista vê a carga vir e ir à medida que o mancal roda.

NÚMERO DO MANCAL*	DIMENSÕES DO CONTORNO – FURO mm	FURO polegadas	DIÂMETRO EXTERNO mm	DIÂMETRO EXTERNO polegadas	LARGURA mm	LARGURA polegadas	DIMENSÕES DO ANEL DE RETENÇÃO polegadas – H	S	t	RAIO MÁXIMO DO FILETE DO EIXO polegadas	PESO APROXIMADO lb	S_L VELOCIDADE LIMITE ‡ rpm	C CARGA NOMINAL DINÂMICA lb	C_o CARGA NOMINAL ESTÁTICA lb
6300	10	0,3937	35	1,3780	11	0,4331	0,125	1,562	0,044	0,025	0,13	22000	1400	850
6301	12	0,4724	37	1,4567	12	0,4724	0,125	1,625	0,044	0,040	0,15	20000	1700	1040
6302	15	0,5906	42	1,6535	13	0,5118	0,125	1,821	0,044	0,040	0,20	18000	1930	1200
6303	17	0,6693	47	1,8504	14	0,5512	0,141	2,074	0,044	0,040	0,25	16000	2320	1460
6304	20	0,7874	52	2,0472	15	0,6906	0,141	2,276	0,044	0,040	0,34	14000	3000	1930
6305	25	0,9843	62	2,4409	17	0,6693	0,195	2,665	0,067	0,040	0,58	11000	3800	2550
6306	30	1,1811	72	2,8346	19	0,7480	0,195	3,091	0,067	0,040	0,83	9500	5000	3400
6307	35	1,3780	80	3,1496	21	0,8268	0,195	3,406	0,067	0,060	1,07	8500	5700	4000
6308	40	1,5748	90	3,5433	23	0,9055	0,226	3,799	0,097	0,060	1,41	7500	7350	5300
6309	45	1,7717	100	3,9370	25	0,9843	0,226	4,193	0,097	0,060	1,95	6700	9150	6700
6310	50	1,9685	110	4,3307	27	1,0630	0,226	4,587	0,097	0,080	2,50	6000	10600	8150
6311	55	2,1654	120	4,7244	29	1,1417	0,271	5,104	0,111	0,080	3,30	5300	12900	10000
6312	60	2,3622	130	5,1181	31	1,2205	0,271	5,498	0,111	0,080	3,81	5000	14000	10800
6313	65	2,5591	140	5,5118	33	1,2992	0,304	5,892	0,111	0,080	4,64	4500	16000	12500
6314	70	2,7559	150	5,9055	35	1,3780	0,304	6,286	0,111	0,080	5,68	4300	18000	14000
6315	75	2,9528	160	6,2992	37	1,4567	0,304	6,679	0,111	0,100	6,60	4000	19300	16300
6316	80	3,1496	170	6,6929	39	1,5354	0,346	7,198	0,122	0,100	9,53	3800	21200	18000
6317	85	3,3465	180	7,0866	41	1,6142	0,346	7,593	0,122	0,100	11,00	3400	21600	18600
6318	90	3,5433	190	7,4803	43	1,6929	0,346	7,986	0,122	0,100	11,60	3400	23200	20000
6319	95	3,7402	200	7,8740	45	1,7717	0,346	8,380	0,122	0,100	13,38	3200	24500	22400
6320	100	3,9370	215	8,4646	47	1,8504	—	—	—	0,100	16,34	3000	28500	27000
6321	105	4,1338	225	8,8582	49	1,9291	—	—	—	0,100	17,8	2800	30500	30000
6322	110	4,3307	240	9,4488	50	1,9685	—	—	—	0,100	21,0	2600	32500	32500
6324	120	4,7244	260	10,2362	55	2,1654	—	—	—	0,100	32,3	2400	36000	38000
6326	130	5,1181	280	11,0236	58	2,2835	—	—	—	0,12	40,1	2200	39000	43000
6328	140	5,5118	300	11,8110	62	2,4409	—	—	—	0,12	48,1	2000	44000	50000
6330	150	5,9055	320	12,5984	65	2,5590	—	—	—	0,12	57,8	1900	49000	60000

* Os números listados para mancais são apenas para mancais abertos. Para mancais fechados, retentores, anéis de retenção, adicione o sufixo ou prefixo indicado abaixo do diagrama do mancal. Exemplo: 6300.Z , 6300.RS, 6300.NR, etc. Verifique a disponibilidade de encapsulamento para tamanhos maiores.

† Mancais com anéis de retenção disponíveis com vedação ou selo. Adicionar ambos os sufixos. Exemplo: 6300.ZNR, etc.

‡ Para mancais lubrificados à graxa sem vedação. Para outras condições, ver a página 114.

Para informações sobre montagem, ajuste de eixo e alojamento e diâmetro de ressalto, ver páginas 124-132.

FIGURA 11-23

Dimensões e cargas nominais para Séries 6300, rolamento de bolas, médio, métrico, ranhura profunda. (Cortesia da FAG Bearings Corporation, Stamford Conn.)

mancais de esferas:
$$L_P = K_R \left(\frac{C}{P} \right)^3 \tag{11.20c}$$

mancais de rolos:
$$L_P = K_R \left(\frac{C}{P} \right)^{10/3} \tag{11.20d}$$

Classificação da vida modificada do mancal

A ASME e ISO adotaram recentemente um novo padrão (ISO 281/2) para o cálculo da vida de mancais de rolamento. A Equação 11.20 baseia-se apenas em tensões de contato herzianas. O novo padrão também inclui os efeitos de uma série de fatores tais como fricção, tensão circular de ajustes de pressão, condição de lubrificação e limpeza, carga centrífuga, entre outros. Essa abordagem utiliza um critério de tensão de von Mises a fim de incluir tensões por esses fatores. Faz uso também dos últimos dados empíricos sobre a resistência à fadiga superficial de mancais de aço. Todos esses efeitos são combinados em fator de tensão-vida A_{sl} que é então aplicado ao valor tradicional L_{10} da Equação 11.20.

$$L_{ASME} = A_{sl} L_{10} \tag{11.21}$$

Dados de testes mostraram que a Equação 11.21 oferece um cálculo mais preciso da vida do mancal que as Equações 11.20. O cálculo do fator A_{sl} é explicado na referência[30] é um tanto complicado. Tal referência vem com um programa de computador chamado *ASMELife*, que calculará a vida projetada L_{ASME} de um mancal de qualquer projeto para qualquer conjunto de parâmetros de carga e ambientais. O algoritmo para este cálculo é totalmente explicado na obra referenciada e não temos espaço para fazê-lo aqui. Além do mais, o software de fácil utilização e barato fornecido para o seu cálculo torna desnecessárias maiores explicações. O leitor pode procurar a publicação da ASME para outras informações. Nos exemplos deste capítulos vamos supor que $A_{sl} = 1{,}0$.

Carga estática básica de classificação C_0

Deformações permanentes nos rolos e nas esferas podem ocorrer mesmo com cargas leves por causa das tensões bem altas dentro de uma área de contato pequena. O limite do carregamento estático em um mancal é definido como a carga que irá produzir uma deformação total permanente na pista e no elemento rolante em qualquer ponto de contato de 0,0001 vezes o diâmetro d do elemento rolante. Deformações maiores causarão aumento nas vibrações e barulho, e podem levar a uma falha prematura por fadiga. As tensões requeridas para causar essa deformação estática 0,0001 d em mancais de aço são muito elevadas, variando de cerca de 4 GPa (580 kpsi) em mancais de rolos a 4,6 GPa (667 kpsi) em mancais de esferas. Os fabricantes de mancais publicam a carga básica estática de classificação C_0 para cada mancal, calculada de acordo com as padronizações da AFBMA. Esse carregamento pode às vezes ser excedido sem falha, especialmente se as velocidades de rotação forem baixas, o que evita o problema da vibração. Em geral, requer-se uma carga de $8C_0$ ou mais para fraturar um mancal. A Figura 11-23 mostra uma página do catálogo de um fabricante de mancal que especifica o valor de C_0 para cada mancal.

EXEMPLO 11-3

Seleção de mancais de esferas para um eixo projetado

Problema **Selecione mancais radiais de esferas para o eixo mostrado na Figura 11-5. O eixo foi projetado no Exemplo 10-1.**

Dados **As cargas transversais máximas no eixo na posição dos mancais são 16 lb em R_1 e 54 lb em R_2. Como a carga em R_2 é 4× aquela em R_1, um projeto pode ser criado para R_2 e usado também para R_1. O diâmetro do eixo em R_1 e R_2 é 0,591 in, baseado na escolha de tentativa de um mancal de 15 mm de diâmetro interno no Exemplo 10-1. A velocidade do eixo é 1725 rpm.**

Hipóteses **As cargas axiais são desprezíveis. Uma taxa de falha de 5% é desejável.**

Encontre **As vidas de fadiga dos mancais para ambas as posições no eixo.**

Solução

1 A partir da Figura 11-23, escolha um mancal #6302 com 15 mm de diâmetro interno. Seu fator de classificação de carga dinâmica é $C = 1930$ lb. A classificação de carga estática é $C_0 = 1200$ lb. A carga estática aplicada é de 54 lb sendo obviamente muito abaixo da capacidade estática do mancal.

2 A partir da Tabela 11-5, escolha o fator para uma taxa de falha de 5%: $K_R = 0.62$.

3 Calcule a vida projetada com as Equações 11.19 e 11.20*a* ou a combinação delas, Equação 11.20*c*. Observe que a carga equivalente neste caso é simplesmente a carga radial aplicada devido à ausência de qualquer força axial. Para a carga de reação maior de 54 lb em R_2:

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = \left(\frac{1930}{54}\right)^3 = 45E3 \text{ milhões de revs } = 45E9 \text{ revs}$$

$$L_P = K_R L_{10} = 0{,}62(45E9) = 27{,}9E9 \text{ revs} \tag{a}$$

4 Para a carga de reação menor de 16 lb em R_1:

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = \left(\frac{1930}{16}\right)^3 = 1{,}75E6 \text{ milhões de revs } = 1{,}75E12 \text{ revs}$$

$$L_P = K_R L_{10} = 0{,}62(1{,}75E12) = 1{,}09E12 \text{ revs} \tag{b}$$

Isso mostra a relação não linear entre a carga e a vida. Uma redução de 3,5× na vida resulta em um aumento de 38× na vida em fadiga. Esses mancais estão obviamente carregados muito levemente, mas seu tamanho foi ditado pelas considerações de tensões no eixo.

5 Da Figura 11-23, essa velocidade limite do mancal é 18000 rpm, bem acima da velocidade de operação de 1725 rpm.

Cargas radial e axial combinadas

Se as cargas axial e radial forem aplicadas ao mancal, uma carga equivalente deve ser calculada para uso na Equação 11.20. A AFBMA recomenda a seguinte equação:

$$P = XVF_r + YF_a \tag{11.22a}$$

onde P = carga equivalente
F_r = carga radial constante aplicada
F_a = carga axial constante aplicada
V = um fator de rotação (ver a Figura 11-24)
X = um fator radial (ver a Figura 11-24)
Y = um fator axial (ver a Figura 11-24)

O fator de rotação V é 1 para um mancal com um anel interno rodando. Se o anel externo rodar, V é aumentado para 1,2 para certos tipos de mancais. Os fatores X e Y variam com o tipo de mancal e se relacionam à habilidade do tipo de mancal em acomodar cargas axiais bem como radiais. Os valores de V, X e Y são definidos pelos fabricantes de mancais em tabelas como a reproduzida na Figura 11-24. Os tipos de mancais, como de rolos cilíndricos, que não suportam cargas axiais não estão incluídos nessa tabela. Um fator e também é especificado para

os tipos de mancais na Figura 11-24 e define a razão mínima entre as forças axial e radial abaixo da qual a força axial pode ser ignorada (colocada igual a zero) na Equação 11.22*b*.

$$\text{se} \quad \frac{F_a}{VF_r} \le e \qquad \text{então} \;\; X = 1 \text{ e } Y = 0 \tag{11.22b}$$

Fatores V, X e Y para mancais radiais

Tipo de mancal			Em relação à carga o anel interno está: Rodando	Estacionário	Mancais de fila única 1) $\frac{F_a}{VF_r} > e$		Mancais de fila dupla 2) $\frac{F_a}{VF_r} \leqq e$		$\frac{F_a}{VF_r} > e$		e
			V	V	X	Y	X	Y	X	Y	
Mancais de esferas de ranhura de contato radial	(3) (4) $\frac{F_a}{C_0}$	(5) $\frac{F_a}{iZD_w^2}$									
	0,014	25	↑	↑	↑	2,30	↑	↑	↑	2,30	0,19
	0,028	50				1,99				1,99	0,22
	0,056	100				1,71				1,71	0,26
	0,084	150				1,55				1,55	0,28
	0,11	200	1	1,2	0,56	1,45	1	0	0,56	1,45	0,30
	0,17	300				1,31				1,31	0,34
	0,28	500				1,15				1,15	0,38
	0,42	750				1,04				1,04	0,42
	0,56	1000	↓	↓	↓	1,00	↓	↓	↓	1,00	0,44
20°			↑	↑	0,43	1,00	↑	1,09	0,70	1,63	0,57
25°					0,41	0,87		0,92	0,67	1,44	0,68
30°			1	1,2	0,39	0,76	1	0,78	0,63	1,24	0,80
35°					0,37	0,66		0,66	0,60	1,07	0,95
40°			↓	↓	0,35	0,57	↓	0,55	0,57	0,93	1,14
Mancais de esfera de autoalinhamento			1	1	0,40	0,4 cot α	1	0,42 cot α	0,65	0,65 cot α	1,5 tg α
Mancais de rolos cônicos de autoalinhamento			1	1,2	0,40	0,4 cot α	1	0,45 cot α	0,67	0,67 cot α	1,5 tg α

(1) Para mancais de fila única, quando $\frac{F_a}{VF_r} \leqq e$, use $X = 1$ e $Y = 0$.
Para mancais de esfera ou rolo de duas filas simples (isoladas) de contato angular montadas "face com face" ou "costa com costa" use os valores de X e Y que se aplicam a mancais de fila dupla. Para mancais de duas ou mais filas montandos "em tandem" use os valores de X e Y que se aplicam para mancais de fila única.

(2) Mancais de fila dupla são supostamente simétricos.

(3) Valores máximos permissíveis de $\frac{F_a}{C_0}$ dependem do projeto do mancal.

(4) C_0 é a carga estática nominal básica.

(5) As unidades são libras e polegadas.

Valores de X, Y e e para carga ou ângulo de contato diferentes daqueles mostrados na tabela são obtidos por interpolação linear.

FIGURA 11-24

Fatores *V*, *X* e *Y* para mancais radiais. (Cortesia da SKF, USA Inc.)

Procedimentos de cálculo

As Equações 11.20 e 11.22 podem ser resolvidas conjuntamente para qualquer situação na qual a força aplicada ou a vida desejada de fadiga seja conhecida. Normalmente, as cargas radial e axial que atuam na localização de cada mancal serão conhecidas a partir da análise de cargas de projeto. Frequentemente, um tamanho aproximado de eixo será conhecido a partir dos cálculos de tensões e deformações. É preciso, então, consultar um catálogo de mancais, selecionar um mancal de teste e extrair os valores de C, C_0, V, X e Y. A carga efetiva P pode ser encontrada pela Equação 11.22 e usada na Equação 11.20 com C para encontrar a vida prevista de fadiga L.

Alternativamente, sendo que V, X e Y dependem somente do tipo, mas não do tamanho de um mancal, eles podem ser determinados primeiro e as Equações 11.20 e 11.22 resolvidas simultaneamente para o valor do fator de carga dinâmico C requerido para alcançar a vida desejada L. Os catálogos de mancais podem ser consultados para encontrar um mancal de tamanho conveniente com o valor necessário de C. Em ambos os casos, a carga estática deve também ser comparada ao fator de carga estática C_0 para o mancal escolhido para se precaver contra deformações excessivas.

EXEMPLO 11-4

Seleção de mancais de esferas para cargas radial e axial combinadas

Problema **Selecione um mancal de esferas de ranhura funda para o carregamento especificado e a vida desejada.**

Dados **A carga radial F_r = 1686 lb (7500 N) e a carga axial F_a = 1012 lb (4500 N). A velocidade do eixo é 2000 rpm.**

Hipóteses **Um mancal de esferas do tipo Conrad de ranhura profunda será usado. O anel interno gira.**

Encontre **Um mancal de tamanho conveniente para uma vida dada L_{10} de 5*E*8 revoluções.**

Solução

1 Tente um mancal #6316 da Figura 11-23 e extraia seu valor como: C = 21200 lb (94300 N), C_0 = 18000 lb (80000 N) e máxima rpm = 3800.

2 Calcule a razão F_a / C_0:

$$\frac{F_a}{C_0} = \frac{1012}{18000} = 0,056 \qquad (a)$$

e leve esse valor à Figura 11-24 para encontrar o valor correspondente de e = 0,26 para mancais de esferas de contato radial.

3 Forme a razão $F_a / (VF_r)$ e compare-a ao valor de e.

$$\frac{F_a}{VF_r} = \frac{1012}{1(1686)} = 0,6 > e = 0,26 \qquad (b)$$

Observe que V = 1 porque o anel interno está rodando.

4 Como a razão no passo 3 é > e, extraia o valor dos fatores X e Y da Figura 11-24 como X = 0,56 e Y = 1,71 e use-os para calcular a carga equivalente das Equações 11-22.

$$P = XVF_r + YF_a = 0,56(1)(1686) + 1,71(1012) = 2675 \text{ lb} \qquad (c)$$

5 Use a carga equivalente na Equação 11.21 e encontre a vida L_{10} para este mancal.

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = \left(\frac{21200}{2675}\right)^3 = 5{,}0E2 \text{ milhões de revs} = 5{,}0E8 \text{ revs} \qquad (d)$$

Esse resultado na verdade exigiu algumas iterações, tentando vários números de mancais antes de descobrir que este daria a vida desejada.

6 Os modelos EX11-04 encontram-se no CD-ROM. O modelo para *Mathcad* fornece uma abordagem alternativa para a solução deste exemplo.

11.11 DETALHES DA MONTAGEM DOS MANCAIS

Os mancais de rolamento são feitos com tolerâncias apertadas nos diâmetros interno e externo para permitir o encaixamento por pressão no eixo ou no encaixe. As pistas do mancal (anéis) devem ser acopladas bem apertadas ao eixo e ao encaixe para garantir que o movimento somente ocorra dentro do mancal de baixo atrito. O encaixe sob pressão dos anéis pode levar a dificuldades na montagem ou, em alguns casos, na desmontagem. Vários arranjos de engaste são usados comumente para prender o anel interno ou o externo sem um ajuste à pressão, o outro sendo segurado por pressão. O anel interno é usualmente fixado contra um ressalto no eixo. As tabelas nos catálogos de mancais apresentam os diâmetros recomendados para os ressaltos de eixo, que deveriam ser observados para evitar interferência com selos e blindagens. Os raios máximos permitidos dos filetes para manter livres os cantos dos anéis também são definidos pelos fabricantes.

A Figura 11-25*a* mostra o arranjo de uma porca e uma arandela de trava usado para engastar o anel interno ao eixo para evitar um encaixe por pressão. Os fabricantes de mancais fornecem porcas especiais e arandelas padronizadas para encaixar seus mancais. A Figura 11-25*b* mostra um anel de fixação usado para fixar axialmente o anel interno, que seria prensado ao eixo. A Figura 11-25*c* mostra o anel exterior engastado axialmente à estrutura e o anel interno fixado por um espaçador (bucha) entre o anel interno e uma flange externa adicional no mesmo eixo.

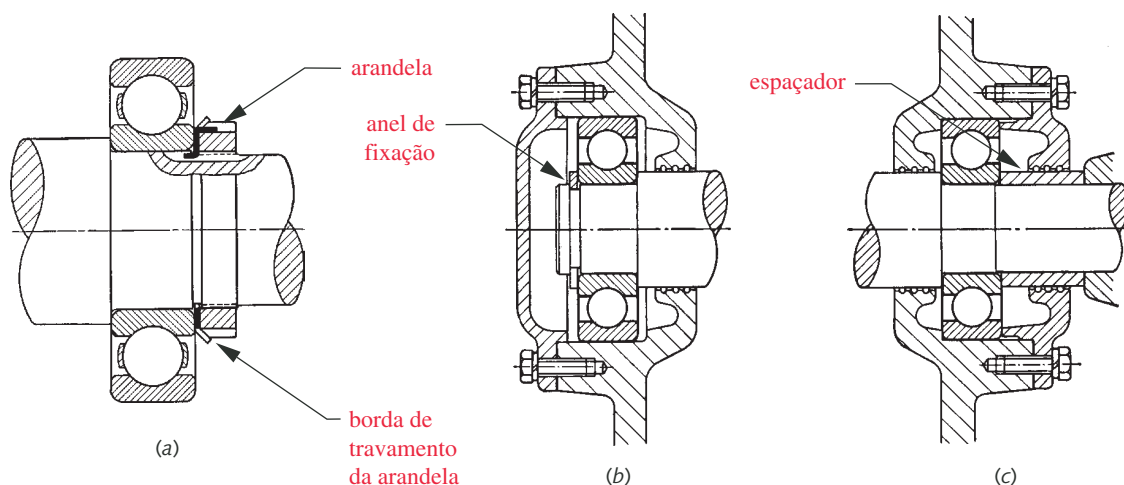



FIGURA 11-25

Métodos de montagem de mancais. (Fonte: *SKF Engineering Data*, SKF, USA Inc., 1968.)

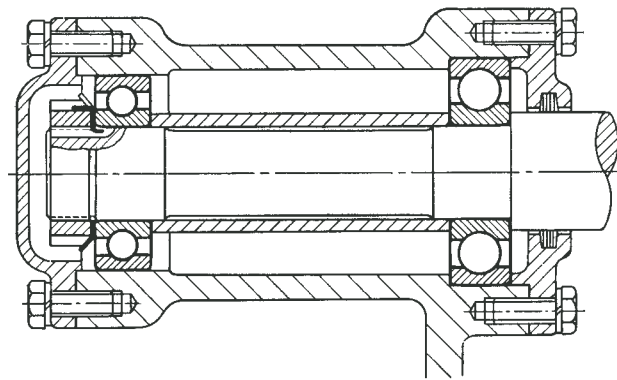



FIGURA 11-26

Mancais em um eixo, um fixo axialmente e um livre (flutuando) axialmente. (Fonte: *SKF Engineering Data, SKF USA Inc.*, 1968.)

Pares de mancais no mesmo eixo são comumente necessários para prover suporte de momento. A Figura 11-26 mostra um arranjo possível para prender axialmente a montagem sem arriscar a introdução de forças axiais aos mancais por expansão térmica das partes. As pistas internas de ambos os mancais são fixadas axialmente com uma porca no lado esquerdo e um espaçador entre eles. A pista externa do mancal no lado direito é presa (engastada) axialmente à estrutura, mas a pista externa do mancal no lado esquerdo está "livre" axialmente no encaixe para permitir a expansão térmica. Pode haver a tentação de prender ambos os mancais, mas isso não seria sábio. É considerada uma boa prática prender axialmente uma montagem longa somente em um ponto para evitar as forças axiais nos mancais induzidas pela expansão térmica. Uma outra forma de conseguir isso é usar somente um mancal que possa suportar uma carga axial (por exemplo, um mancal de esferas) e usar um mancal de rolos cilíndricos ou outro tipo de mancal que não possa suportar cargas axiais ao longo de seus elementos rolantes na outra extremidade do eixo.

11.12 MANCAIS ESPECIAIS

Muitos outros tipos e arranjos de mancais de elementos rolantes estão disponíveis. Unidades de blocos de almofada e de flange empacotam mancais de esferas ou rolos padronizados em estruturas de ferro fundido que facilitam a fixação dos mancais a superfícies horizontais ou verticais. A Figura 11-27 mostra um bloco de almofada e uma unidade de flange.

Seguidores de camo, como mostrado na Figura 11-28, são feitos com mancais de esferas ou rolos e uma pista externa especial que pode correr diretamente contra a superfície do camo. Eles estão disponíveis com rosca de montagem completa (como mostrado) ou com um furo para montar em uma barra ou rosca. As extremidades de barra são tipicamente uma única bola esférica em um soquete projetado para atar a barras e proporcionar uma conexão de baixo atrito entre elos e com autoalinhamento em um mecanismo como mostrado na Figura 11-29.

O movimento linear é facilmente guiado com buchas planas, mas haverá níveis moderados de atrito. Para atrito menor em movimento linear, há buchas de esferas disponíveis, como mostrado na Figura 11-30. Estas requerem eixos especiais endurecidos e acabados feito para tolerâncias fechadas. O alinhamento de eixos paralelos deve ser feito muito precisamente para obter as vantagens de baixo atrito dos mancais de esferas em linha. Contudo, eles não são tão capazes de absorver cargas de impacto quanto uma bucha plana.

(*a*)

(*b*)

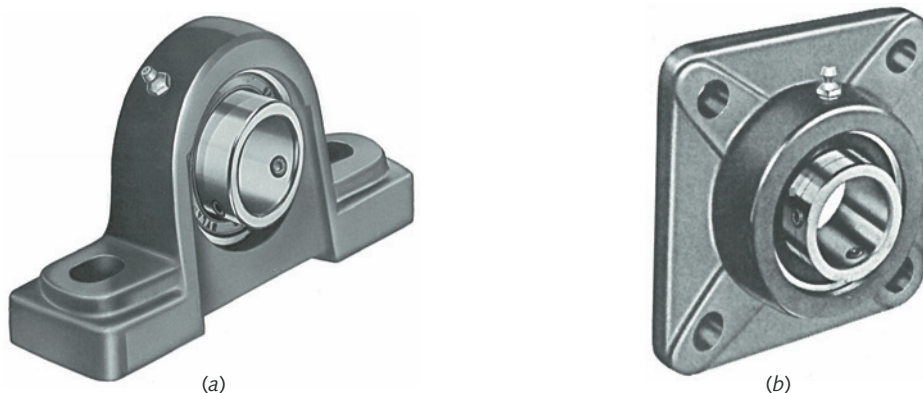



FIGURA 11-27

(*a*) Mancal de unidade de bloco de almofada e (*b*) mancal de unidade de montagem de flange. (Cortesia da McGill Manufacturing Co. Inc., Bearing Division, Valparaiso, Ind.)

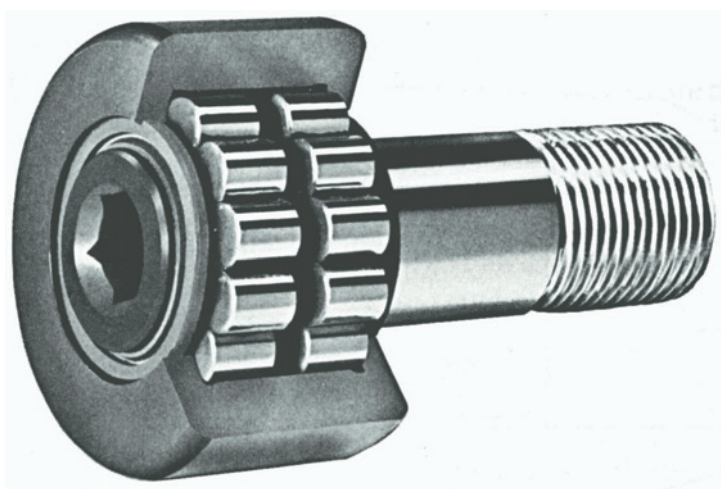



FIGURA 11-28

Seguidor de camo com mancal de rolos. (Cortesia da Roller Bearing Company of America, Newtown Pa.)

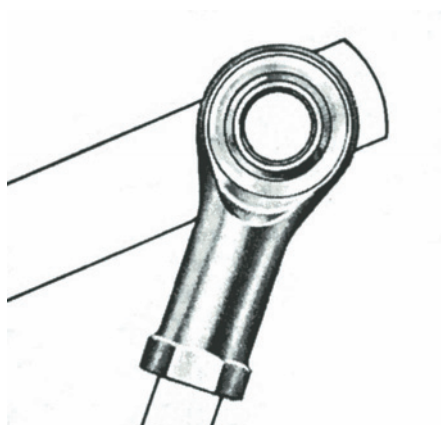



FIGURA 11-29

Extremidade esférica de barra. (Cortesia da Morse Chain, Division of Borg-Warner Corp., Aurora, Ill.)

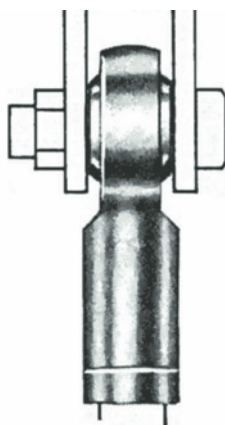



FIGURA 11-30

Bucha de esferas em linha. (Cortesia da Thompson Industries Inc., Manhasset, N.Y.)

11.13 ESTUDO DE CASO

O Estudo de Caso 10A, que foi definido no Capítulo 9, descreve o projeto de um testador para a medida dinâmica das acelerações e forças de um camo-seguidor. A natureza sensível dessas medidas requer que somente mancais de escorregamento (deslizamento) possam ser usados, porque as vibrações e o barulho dos mancais de elementos rolantes contaminariam as medidas. Continuaremos agora aquele estudo de caso com o projeto dos mancais para o seu eixo principal de camo.

ESTUDO DE CASO 10B

Projeto de mancais hidrodinâmicos para dispositivo de teste de camo

Problema **Determine as condições hidrodinâmicas nos mancais para o eixo do camo no CDTF.[§]**

Dados **O camo gera uma força dinâmica máxima de 110 lb a uma velocidade máxima de 180 rpm (3 rps), como definido no Estudo de Caso 10A. O volante pesa 220 lb e está localizado no meio entre os dois mancais. A temperatura do volume de óleo está controlada a 200° F. O eixo do camo tem 2 in de diâmetro e o projeto preliminar dos mancais permitiu até 2 in de comprimento.**

Hipóteses **Mancais planos devem ser usados, mesmo porque mancais de elementos rolantes introduziriam muito barulho. Buchas de bronze poroso são propostas. Use uma razão de folga de 0,001. Tente óleo mineral de SAE 30 W (ISO VG 100). Reservatórios de óleo por gravidade estão previstos para cada mancal.**

Solução **Ver as Figuras 9-8 (repetida na página seguinte) e 11-31.**

1 Encontre as forças de reação atuando em cada mancal a partir das forças aplicadas e dimensões definidas na Figura 11-31. Some os momentos em torno de R_1 e pressuponha que as forças para cima são positivas.

$$\sum M = 0 = -110(-4{,}5) + \left[-220(3{,}125)\right] + 6{,}25R_2$$
$$R_2 = 30{,}8 \text{ lb} \qquad (a)$$

$$\sum F = 0 = -110 - 220 + 30{,}8 + R_1$$
$$R_1 = 299{,}2 \text{ lb} \qquad (b)$$

O mancal em R_1 absorve a maior parte da carga, portanto projetaremos para essa força.

2 Um óleo ISO VG100 foi sugerido. A Figura 11-1 dá a viscosidade para esse óleo a 200°F de cerca de 1,5 μreyn.

3 Encontre a pressão média no mancal para o comprimento suposto de 2 in.

$$p_{média} = \frac{P}{ld} = \frac{299{,}2}{2(2)} = 74{,}8 \text{ psi} \qquad (c)$$

4 Encontre a folga diametral no mancal para a razão de folga suposta.

[§] N. de T.: Cam Dynamic Test Fixture, ou seja, Dispositivo de Ensaio Dinâmico de Camo.

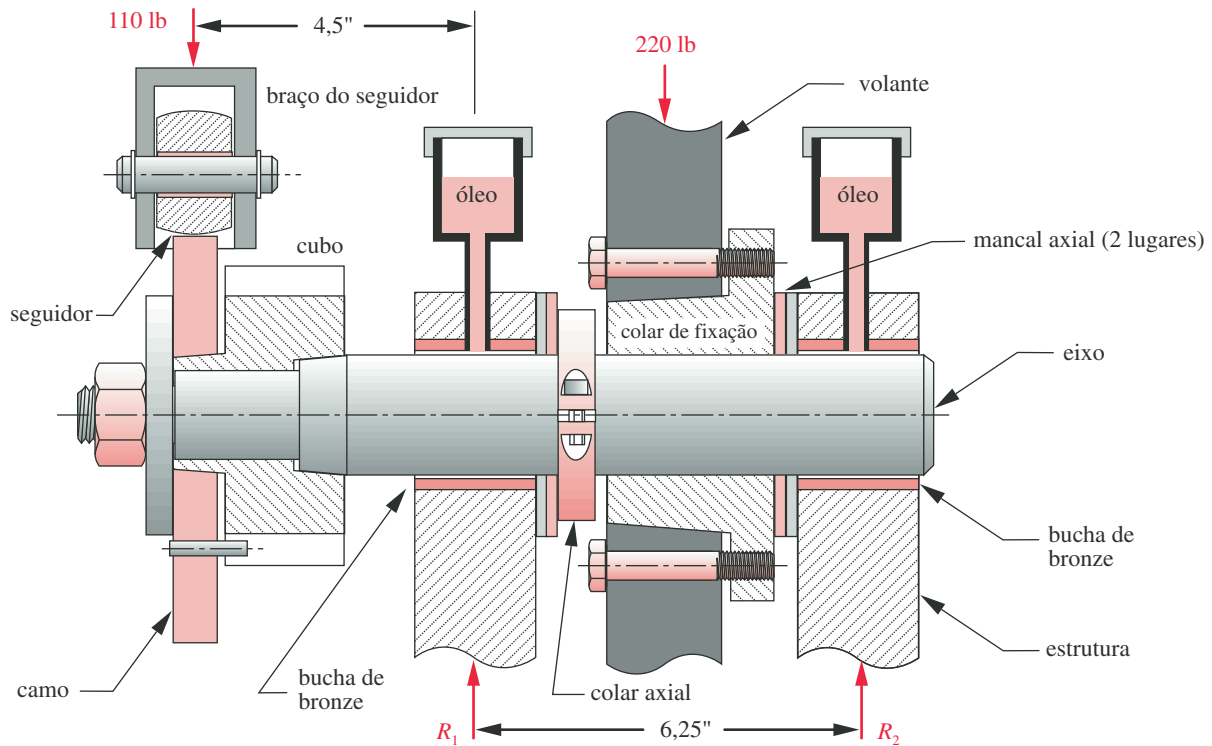



FIGURA 11-31

Seção transversal de um eixo de camo para o dispositivo de teste dinâmico de camo do Estudo de Caso 10.

$$c_d = 0{,}001(2) = 0{,}002 \text{ in}$$
$$c_r = c_d/2 = 0{,}001 \text{ in} \qquad (d)$$

5 Encontre a velocidade de superfície do eixo no mancal.

$$U = \pi d n' = \pi(2)(3) = 18{,}85 \text{ in/s} \qquad (e)$$

6 Como a carga e a velocidade são conhecidas e as dimensões estão pressupostas, bem como a viscosidade, a Equação 11.8*b* pode ser resolvida para o parâmetro adimensional K_e.

$$K_\varepsilon = \frac{Pc_r^2}{\eta U l^3} = \frac{299{,}2(0{,}001)^2}{(1{,}5E-6)(18{,}85)(2)^3} = 1{,}323 \qquad (f)$$

7 O número de Ocvirk pode ser calculado a partir da Equação 11.12*c*.

$$O_N = 4\pi K_\varepsilon = 4\pi(1{,}323) = 16{,}6 \qquad (g)$$

O projeto do mancal é viável com base neste número aceitável de Ocvirk.

8 A razão de excentricidade pode ser encontrada pela Equação 11.13*b*, que se ajusta melhor aos dados experimentais que a equação teórica.

$$\varepsilon \cong 0{,}21394 + 0{,}38517 \log O_N - 0{,}0008(O_N - 60)$$
$$\cong 0{,}21394 + 0{,}38517 \log(16{,}6) - 0{,}0008(16{,}6 - 60) = 0{,}719 \qquad (h)$$

9 A espessura mínima do filme é encontrada pela Equação 11.4*b*.

$$h_{min} = c_r(1-\varepsilon) = 0{,}001(1-0{,}719) = 0{,}000281 \text{ in } \ (281\ \mu\text{in}) \qquad (i)$$

Esta é uma espessura de filme abundante para proteger até um mancal pobremente acabado, o que não é o caso.

10 O modelos CASE10B encontram-se no CD-ROM.

11.14 RESUMO

Pode-se obter baixo atrito em uniões de deslizamento ou rotação com mancais planos lubrificados hidrostaticamente, hidrodinamicamente ou com mancais de elementos rolantes. Cada um tem seu conjunto de vantagens e desvantagens.

Os mancais hidrostáticos usam uma fonte de fluido a alta pressão para separar as superfícies mesmo quando nenhum movimento relativo estiver presente. Ar, água ou óleo podem ser usados como fluido. Os mancais a ar têm essencialmente atrito e desgaste zero. Um Hovercraft, por exemplo, é suportado em "um mancal a ar".

Os mancais hidrodinâmicos usam o movimento relativo das superfícies para bombear o lubrificante entranhado (usualmente óleo) ao redor do anel entre o eixo e o mancal. Um mancal hidrodinâmico projetado adequadamente separa as duas partes com um filme de óleo quando em movimento e não tem contato metal com metal, exceto na partida e na parada. Se o óleo for mantido limpo e em quantidade suficiente, é possível ter desgaste praticamente zero e atrito muito baixo. Duas superfícies que se "conformam ou ajustam" geometricamente, como um eixo em um furo, aprisionam o lubrificante e prontamente formam o filme de óleo de suporte.

Uniões geometricamente não conformantes, como contato camo-seguidor, dentes de engrenagens e mancais de esferas, tendem a expelir o fluido em vez de aprisioná-lo, dificultando atingir-se a separação de filme completo das superfícies. A **lubrificação elasto-hidrodinâmica** (EHD) refere-se à combinação da deflexão elástica de uma área de contato entre duas superfícies não conformantes (análoga à área de contato entre o pneu e a estrada) e o bombeamento do fluido entre as superfícies "aplainadas" para criar pelo menos um filme hidrodinâmico parcial. Essas uniões frequentemente têm alguma combinação de filme de fluido e contato de metal com metal nas asperezas das superfícies. Assim, o desgaste pode ser mais elevado que em uma união hidrodinâmica conformante. As espessuras mínimas de fluido e filme entre as superfícies em comparação com a rugosidade composta das superfícies determina quanto contato de asperezas ocorre. Na ausência de quantidade suficiente de lubrificante, velocidade ou geometria para formar um filme de fluido de separação, um mancal passará à condição de **lubrificação de contorno**, na qual ocorrem contato metálico e desgaste.

Os mancais de rolamento encontram-se disponíveis comercialmente em uma variedade de configurações que usam esferas ou rolos de aço endurecido aprisionados entre pistas de aço endurecido ou anéis. Como o contato é de rolamento, com pouco ou nenhum escorregamento, o atrito é baixo estática ou dinamicamente. O torque de partida é significativamente menor para mancais de rolamento que para mancais hidrodinâmicos* (os quais requerem uma velocidade relativa para estabelecer o filme de fluido de baixo atrito). Existem mancais de rolamento

* Quando os vagões de locomotivas foram convertidos de mancais planos hidrodinâmicos a mancais de elementos rolantes, muitos anos atrás nos EUA, comboios de vagões que antes necessitavam de dois motores para a partida (mas somente um para mantê-los em movimento) puderam começar a se mover com somente um motor.

que podem acomodar cargas radias, axiais ou uma combinação de ambos os tipos. O estado de lubrificação em mancais de rolamento será elasto-hidrodinâmico, de contorno ou alguma combinação dos dois referida como uma lubrificação parcial EHD. O projeto com mancais de rolamento geralmente envolve a seleção apropriada de um mancal entre aqueles disponíveis comercialmente. Os fabricantes definem os parâmetros de carga e vida com base na carga para a qual se espera que 90% de um lote de mancais sobrevivam a 1 milhão de revoluções da pista interna. Esses dados e outros fornecidos pelos fabricantes são usados para calcular a vida esperada de um mancal sob a carga dada e as condições de velocidade da aplicação. As companhias de mancais fornecerão assistência para selecionar o mancal adequado para qualquer aplicação.

Equações importantes usadas neste capítulo

Viscosidade absoluta contra a viscosidade cinemática (Seção 11.2):

$$\eta = \upsilon\rho \tag{11.1}$$

Equação de Petroff para torque sem carga (Seção 11.5):

$$T_0 = \eta\frac{\pi^2 d^3 l\, n'}{c_d} \tag{11.2c}$$

Razão de excentricidade (Seção 11.5):

$$\varepsilon = \frac{e}{c_r} \tag{11.3}$$

Espessura do filme de lubrificante em mancal hidrodinâmico (Seção 11.5):

$$h = c_r(1+\varepsilon\cos\theta) \tag{11.4a}$$

$$h_{min} = c_r(1-\varepsilon) \qquad h_{\max} = c_r(1+\varepsilon) \tag{11.4b}$$

Pressão média em um mancal hidrodinâmico (Seção 11.5):

$$p_{média} = \frac{P}{A} = \frac{P}{l\,d} \tag{11.6d}$$

Equações de Sommerfeld para pressão e carga em um mancal infinito (Seção 11.5):

$$p = \frac{\eta U r}{c_r^2}\left[\frac{6\varepsilon(\operatorname{sen}\theta)(2+\varepsilon\cos\theta)}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right] + p_0 \tag{11.6a}$$

$$P = \frac{\eta U l r^2}{c_r^2}\frac{12\pi\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{11.6b}$$

Equações de Ocvirk para pressão e carga em mancais curtos (Seção 11.5):

$$p = \frac{\eta U}{r c_r^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon\operatorname{sen}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \tag{11.7b}$$

$$P = K_\varepsilon \frac{\eta U l^3}{c_r^2} \tag{11.8b}$$

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{1/2}}{4\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{11.8c}$$

Localização da pressão máxima em um mancal curto (Seção 11.5):

$$\theta_{max} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{11.7c}$$

Localização da carga resultante em um mancal curto (Seção 11.5):

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{11.8a}$$

Torque em um mancal hidrodinâmico (Seção 11.5):

$$T_s = \eta \frac{d^3 l\left(n_2' - n_1'\right)}{c_d} \frac{\pi^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{11.9c}$$

$$T_r = T_s + P\,e\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{11.9a}$$

Perda de potência em um mancal hidrodinâmico (Seção 11.5):

$$\Phi = T_r \omega = 2\pi T_r\left(n_2' - n_1'\right) \qquad \text{N-m/s ou in-lb/s} \tag{11.10}$$

Coeficiente de atrito em um mancal hidrodinâmico (Seção 11.5):

$$\mu = \frac{f}{P} = \frac{T_r/r}{P} = \frac{2T_r}{Pd} \tag{11.11}$$

Número de Ocvirk para um mancal hidrodinâmico curto (Seção 11.6):

$$O_N = \left(\frac{p_{média}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2 = 4\pi K_\varepsilon \tag{11.12c}$$

Relação teórica entre o número de Ocvirk e a razão de excentricidade (Seção 11.6):

$$O_N = \frac{\pi\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{11.13a}$$

Relação empírica entre o número de Ocvirk e a razão de excentricidade (Seção 11.6):

$$\varepsilon_x \cong 0{,}21394 + 0{,}38517\log O_N - 0{,}0008\left(O_N - 60\right) \tag{11.13b}$$

Espessura específica do filme (Seção 11.7):

$$\Lambda = h_c \Big/ \sqrt{R_{q1}^2 + R_{q2}^2} \tag{11.14a}$$

$$h_c \cong \frac{4}{3} h_{min} \tag{11.14b}$$

Espessura mínima de filme para contato cilíndrico EHD (Seção 11.7)

$$h_{min} = 2{,}65R'(\alpha E')^{0{,}54}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0{,}7}\left(\frac{P}{lE'R'}\right)^{-0{,}13} \tag{11.16}$$

$$E' = \frac{2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}} \tag{11.17b}$$

Espessura mínima de filme para contato geral (elíptico) EHD (Seção 11.7)

$$h_{min} = 3{,}63R'(\alpha E')^{0{,}49}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0{,}68}\left(1 - e^{-0{,}68\psi}\right)\left[\frac{P}{E'(R')^2}\right]^{-0{,}073} \tag{11.18}$$

Relação vida-carga para mancais de elementos rolantes (Seção 11.10)

mancal de esferas: $$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 \tag{11.20a}$$

mancal de rolos: $$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^{10/3} \tag{11.20b}$$

Carga equivalente para mancais de elementos rolantes (Seção 11.10)

$$P = XVF_r + YF_a \tag{11.22a}$$

11.15 REFERÊNCIAS

1 **A. G. M. Michell**, "Progress of Fluid-Film Lubrication", *Trans. ASME*, 51: pp. 153-163, 1929.

2 **A. Cameron**, *Basic Lubrication Theory*. John Wiley & Sons: New York, 1976.

3 **B. J. Hamrock,** *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. McGraw-Hill: New York, 1994.

4 **T. A. Harris**, *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons: New York, 1991.

5 **R. C. Elwell**, "Hydrostatic Lubrication", in *Handbook of Lubrication*, E. R. Booser, ed., CRC Press: Boca Raton Fla., p. 105, 1983.

6 **J. L. Radovich**, "Gears", in *Handbook of Lubrication,* E. R. Booser, ed., CRC Press: Boca Raton, Fla., p. 544, 1983.

7 **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: New York, p. 182, 1965.

8 **W. Glaeser**, "Bushings", in *Wear Control Handbook*, M. B. Peterson and W. O. Winer, Editor. ASME: Wear Control Handbook, p. 598, 1980.

9 **D. F. Wilcock and E. R. Booser**, *Bearing Design and Application*. McGraw-Hill: New York, 1957.

10 **A. H. Burr and J. B. Cheatham**, *Mechanical Analysis and Design,* 2nd ed. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., pp. 31-51, 1995.

11 **A. A. Raimondi and J. Boyd**, "A Solution for the Finite Journal Bearing and its Application to Analysis and Design-Parts I, II, and III", *Trans. Am. Soc. Lubrication Engineers,* 1(1): pp. 159-209, 1958.

12 **O. Reynolds**, "On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments". *Phil. Trans. Roy. Soc.* (London), 177: pp. 157-234, 1886.

13 **G. B. DuBois and F. W. Ocvirk**, "The Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings". *Trans. ASME*, 77: pp. 1173-1178, 1955.

14 **G. B. DuBois, F. W. Ocvirk, and R. L. Wehe**, *Experimental Investigation of Eccentricity Ratio, Friction, and Oil Flow of Long and Short Journal Bearings-With Load Number Charts*, TN3491, NACA, 1955.

15 **F. W. Ocvirk**, *Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*, TN2808, NACA, 1952.

16 **G. B. DuBois and F. W. Ocvirk**, *Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*, TN1157, NACA, 1953.

17 **H. S. Cheng**, "Elastohydrodynamic Lubrication", in *Handbook of Lubrication*, E. R. Booser, ed., CRC Press: Boca Raton Fla., pp. 155-160, 1983.

18 **D. Dowson and G. Higginson**, "A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem." *J. Mech. Eng. Sci.*, 1(1): p. 6, 1959.

19 **D. Dowson and G. Higginson**, "New Roller Bearing Lubrication Formula", *Engineering*, 192: pp. 158-159, 1961.

20 **G. Archard and M. Kirk**, "Lubrication at Point Contacts", *Proc. Roy. Soc.* (London) Ser. A261, pp. 532-550, 1961.

21 **B. Hamrock and D. Dowson**, "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts-Part III-Fully Flooded Results", *ASME J. Lubr. Technol.*, 99: pp. 264-276, 1977.

22 **D. Dowson and G. Higginson**, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, 182 (Part 3A): pp. 151-167, 1968.

23 **T. A. Harris**, *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons: New York, pp. 872-888, 1991.

24 *Load Ratings and Fatigue Life for Ball Bearings*, ANSI/AFBMA Standard 9-1990, American National Standards Institute, New York, 1990.

25 *Load Ratings and Fatigue Life for Roller Bearings*, ANSI/AFBMA Standard 11-1990, American National Standards Institute, New York, 1990

26 **B. J. Hamrock**, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. McGraw-Hill: New York, p. 16, 1994.

27 ASME Research Committee on Lubrication "Pressure-Viscosity Report-Vol. 11", ASME, 1953.

28 **T. E. Tallian**, "Lubricant Films in Rolling Contact of Rough Surfaces", *ASLE Trans.,* 7(2): pp. 109-126, 1964.

29 **E. N. Bamberger, et al.**, "Life Adjustment Factors for Ball and Roller Bearings", *ASME Engineering Design Guide*, 1971.

30 **R. Barnsby**, et al., "Life Ratings for Modern Rolling Bearings," ASME International, 2003.

Pressuponha que os mancais atuem como apoios simples.

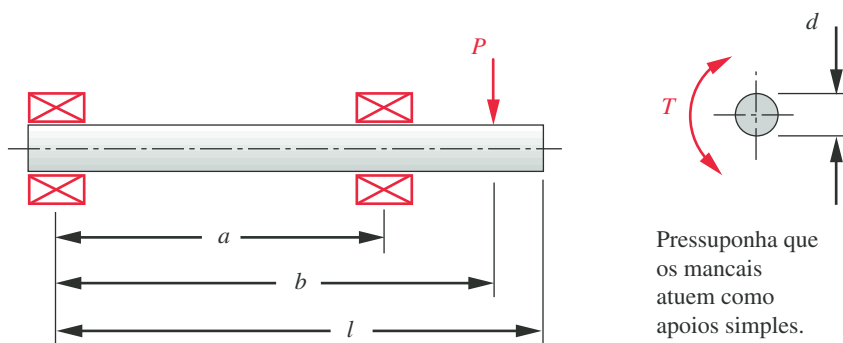



FIGURA P11-1

Projeto do eixo para o Problema 11-1.

11.16 PROBLEMAS

*† ***11-1*** O eixo mostrado na Figura P11-1 foi projetado no Problema 10-1. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P11-1 e para o diâmetro correspondente do eixo encontrado no Problema 10-1, projete mancais convenientes para suportar a carga por pelo menos 7*E*7 ciclos a 1500 rpm. Escreva todas as hipóteses.

(a) Usando mancais de luvas de bronze lubrificadas hidrodinamicamente com $O_N = 20$, $l / d = 1{,}25$ e uma razão de folga de 0,0015.

(b) Usando mancais de esferas de ranhura profunda com 10% de taxa de falha.

11-2 O eixo mostrado na Figura P11-2 foi projetado no Problema 10-2. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P11-1 e para o diâmetro correspondente do eixo encontrado no Problema 10-2, projete mancais convenientes para suportar a carga por pelo menos 3*E*8 ciclos a 2500 rpm. Escreva todas as hipóteses.

(a) Usando mancais de luvas de bronze lubrificadas hidrodinamicamente com $O_N = 30$, $l / d = 1{,}0$ e uma razão de folga de 0,002.

(b) Usando mancais de esferas de ranhura profunda com 10% de taxa de falha.

*11-3 Um óleo tem viscosidade cinemática de 300 centistokes. Encontre sua viscosidade absoluta em centipoise (cP). Suponha uma gravidade específica de 0,89.

11-4 Um óleo tem viscosidade cinemática de 2 μreyn. Encontre sua viscosidade absoluta em in^2/s. Suponha uma gravidade específica de 0,87.

*11-5 Encontre o torque sem carga de Petroff para o mancal de deslizamento no Estudo de Caso 10B.

*11-6 Encontre a espessura mínima do filme para um mancal longo com: 45 mm de diâmetro, 200 mm de comprimento, ε = 0,55, razão de folga = 0,001, 2500 rpm, óleo ISO VG 46 a 150°F.

Tabela P11-1 Dados para os problemas

Linha	l	a	b	P ou p	T_{min}	T_{max}
a	20	16	18	1000	0	2000
b	12	2	7	500	–100	600
c	14	4	12	750	–200	400
d	8	4	8	1000	0	2000
e	17	6	12	1500	–200	500
f	24	16	22	750	1000	2000

Tabela P11-0†
Matriz de problemas/tópicos

11.2 Viscosidade
11-3, 11-4, 11-23, 11-24

11.5 Teoria da lubrificação
11-5, 11-6, 11-7, 11-9, 11-10, 11-11, **11-12**, 11-13, 11-14, 11-15, 11-25, *11-39 a 11-42*

11.6 Mancais de rolamento hidrodinâmicos
11-1a, ***11-2a***, ***11-8***, ***11-17a***, ***11-19a***

11.7 Contato de EHD
11-16, **11-18**, **11-20**, **11-21**, **11-43**

11.10 Contato de rolamento
11-1b, ***11-2b***, ***11-17b***, ***11-19b***, ***11-22***, *11-26*, *11-27*, *11-28*, *11-29*, *11-30*, *11-31*, *11-32*, *11-33*, *11-34*, *11-35*, *11-36*, *11-37*, *11-38*, *11-44*, *11-45*

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

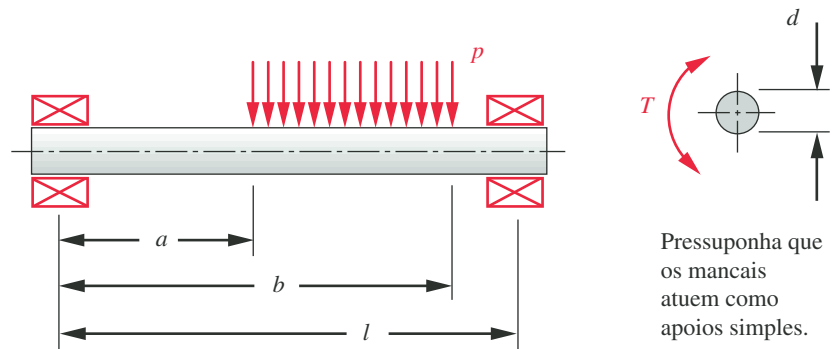



FIGURA P11-2

Projeto do eixo para o Problema 11-2.

*11-7 Encontre os torques e a potência perdida no mancal do Problema 11-6.

****11-8*** Uma máquina de papel processa rolos de papel tendo uma densidade de 948 kg/m^3. O rolo de papel tem 1,50 m diâmetro externo x 22 cm diâmetro interno x 3,23 m de comprimento e é biapoiado em um eixo de aço de 22 cm de diâmetro externo. O rolo gira a 50 rpm. Projete mancais curtos apropriados de bronze de l / d = 0,75, lubrificados hidrodinamicamente de filme completo, para suportar o eixo em cada extremidade. Especifique a viscosidade necessária do lubrificante a 180°F. Escreva todas as hipóteses.

11-9 Encontre a espessura mínima do filme para um mancal longo com os seguintes dados: 30 mm de diâmetro, 130 mm de comprimento, 0,0015 de razão de folga, 1500 rpm, óleo ISO VG 100 a 200°F e suportando uma carga de 7 kN.

*11-10 Encontre a espessura mínima do filme para um mancal com estes dados: 45 mm de diâmetro, 30 mm de comprimento, 0,001 de razão de folga, 2500 rpm, óleo ISO VG 46 a 150°F.

11-11 Encontre a espessura mínima do filme para um mancal com estes dados: 30 mm de diâmetro, 25 mm de comprimento, 0,0015 de razão de folga, 1500 rpm, O_N = 30, óleo ISO VG 220 a 200°F.

11-12 O Problema 7-12 estimou o volume do desgaste de adesivo esperado de um eixo de aço de 40 mm rodando a 250 rpm para 10 anos em uma bucha plana de bronze com uma carga transversal de 1000 N para ambas as condições de boa e má lubrificação. Se a bucha tem l / d = 0,5 e uma razão de folga de 0,001, defina a viscosidade do lubrificante em µreyn necessária para obter uma boa lubrificação.

11-13 Encontre os torques e a perda de potência no mancal do Problema 11-9.

*11-14 Encontre os torques e a perda de potência no mancal do Problema 11-10.

11-15 Encontre os torques e a perda de potência no mancal do Problema 11-11.

11-16 O Problema 7-16 determinou que a meia-largura da área de contato para uma esfera de aço de 0,787 in de diâmetro rolada contra uma placa plana de alumínio com uma força de 224,81 lb é 0,020 in. Supondo que a esfera role a 1200 rpm, determine sua condição de lubrificação com um óleo ISO VG 68 a 150°F. Suponha R_q = 10 min (esfera), R_q = 64 min (placa).

****11-17*** O eixo mostrado na Figura P11-3 foi projetado no Problema 10-17. Para os valores na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P11-1 e o diâmetro correspondente do eixo encontrado no Problema 10-17, projete mancais apropriados para suportar a carga para pelo menos 1*E*8 ciclos a 1800 rpm. Escreva todas as hipóteses.

(a) Usando mancais de deslizamento de bronze lubrificados hidrodinamicamente com O_N = 15, l/d = 0,75 e razão de folga de 0,001.

(b) Usando mancais de esferas de ranhuras profundas com 10% de taxa de falha.

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

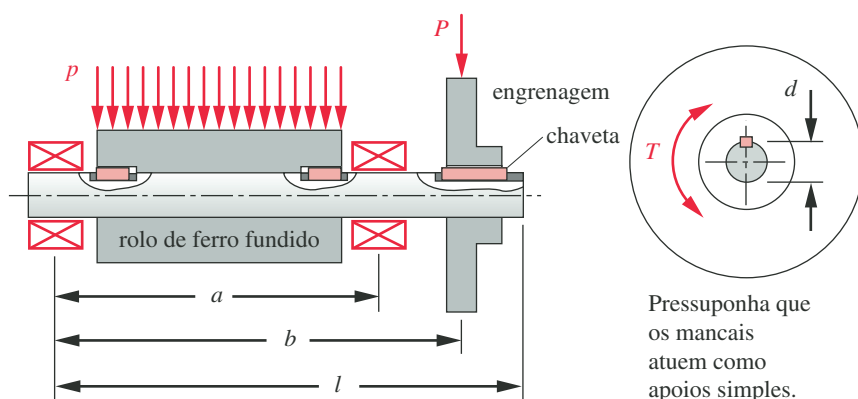



FIGURA P11-3

Projeto do eixo para o Problema 11-17.

11-18 O Problema 7-18 determinou que a meia-largura da área de contato para um cilindro de aço de 1,575 in de diâmetro e 9,843 in de comprimento, rolado contra uma placa plana de alumínio com uma força de 900 lb, é 0,0064 in. Supondo que o cilindro role a 800 rpm. Determine sua condição de lubrificação com um óleo ISO VG 1000 a 200°F. Suponha $R_q = 64$ μin (cilindro), $R_q = 32$ μin (placa).

11-19 O eixo mostrado na Figura P11-4 foi projetado no Problema 10-19. Para os valores na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P11-1 e o diâmetro correspondente do eixo encontrado no Problema 10-19, projete mancais apropriados para suportar a carga para pelo menos 5*E*8 ciclos a 1200 rpm. Escreva todas as hipóteses.

(a) Usando mancais de deslizamento de bronze lubrificados hidrodinamicamente com $O_N = 40$, $l / d = 0{,}80$ e razão de folga de 0,0025.

(b) Usando mancais de esferas de ranhuras profundas com 10% de taxa de falha.

*__11-20__ O Problema 7-20 determinou que a meia-largura da área de contato para uma esfera de aço de 0,787 in de diâmetro rolada contra um cilindro de aço de diâmetro de 1,575 in com uma força de 2248 lb é $a = 0{,}037$ in e $b = 0{,}028$ in. A esfera gira a 1800 rpm. Determine sua condição de lubrificação com um óleo ISO VG 460 a 120°F. Suponha $R_q = 32$ μin para ambos.

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

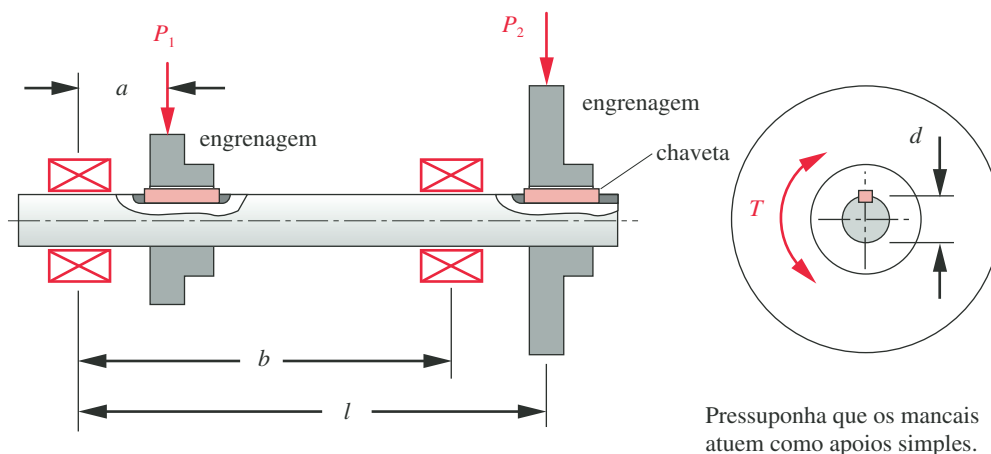



FIGURA P11-4

Projeto do eixo para os Problemas 11-19 e 11-22.

11-21 O Problema 7-21 determinou que as meias-dimensões da área de contato para um sistema camo-seguidor com uma carga dinâmica de 0 a 450 lb são a = 0,080 in e b = 0,015 in. O camo é cilíndrico com um raio mínimo de curvatura de 0,787 in. O cilindro do seguidor de 1 in de diâmetro é coroado com um raio de 6 in na outra dimensão. Encontre a espessura específica do filme e a condição de lubrificacão entre o camo e o seguidor se lubrificado com um óleo ISO VG 1500 a 200°F. Suponha R_q = 8 μin (seguidor) R_q = 32 μin (camo). Seguidor a rpm = 300.

11-22 O eixo mostrado na Figura P11-4 foi projetado no Problema 10-19. Para os dados na(s) linha(s) da Tabela P11-1 e o diâmetro do eixo correspondente encontrado no Problema 10-19, projete mancais apropriados para suportar a carga para pelo menos 5E8 ciclos a 1200 rpm usando mancais de esferas de ranhuras profundas. Além das cargas radiais encontradas no Problema 10-19, o mancal direito suporta uma carga axial que é 120% da carga transversal concentrada P. O diâmetro do eixo é 1,153 in, a vida de projeto L_{10} é 500E6 revoluções e a carga transversal concentrada é 1000 lb. Pressuponha um fator de força axial = 1,2 e um fator de rotação de eixo = 1,0. Também suponha que o diâmetro do eixo pode ser reduzido no mancal esquerdo onde o momento é zero.

11-23 Um óleo ISO VG 100 tem uma temperatura volumétrica de 80°C. Encontre sua viscosidade absoluta em centipoise (cP) e sua viscosidade cinemática em centistokes (cS). Suponha uma gravidade específica de 0,91.

11-24 Um óleo ISO VG 68 tem uma temperatura volumétrica de 175°C. Encontre sua viscosidade absoluta em microreyn (μreyn) e sua viscosidade cinemática em in^2/s. Suponha uma gravidade específica de 0,90.

11-25 Um munhão e um mancal devem ser projetados para um eixo que gira a 200 rpm. Deve-se usar óleo com viscosidade de 2 μreyn e o comprimento do mancal deve ser igual ao diâmetro. Se a perda de potência em vazio não deve exceder 2E-04 e a folga diametral é 0,004 vezes o diâmetro, estime o diâmetro máximo que pode ser usado para o munhão.

11-26 A Figura P11-5 mostra um eixo escalonado suportado por dois mancais da série 6300. Duas engrenagens com torque igual e oposto são fixadas por chavetas ao eixo, como mostrado. A carga em cada engrenagem consiste em uma componente radial e uma componente tangencial, que atua no diâmetro D. A componente radial em cada engrenagem é 0,466 vezes a componente tangencial naquela engrenagem. Observe que as cargas nas engrenagens estão 90 graus fora de fase da engrenagem 1 para a engrenagem 2. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P11-2, selecione um mancal apropriado (da Figura 11-23 com 10% de taxa de falha) para o mancal 1. Escolha o mancal que tem o menor diâmetro de orifício e satisfaça os requisitos de classificação de carga. Especifique o número do mancal, orifício, diâmetro externo, largura (todos em mm) e classificação da carga dinâmica básica do mancal. Ignore a carga axial dada na tabela.

11-27 A Figura P11-5 mostra um eixo escalonado suportado por dois mancais da série 6300. Duas engrenagens com torque igual e oposto são fixadas por chavetas ao eixo, como mostrado. A carga em cada engrenagem consiste em uma componente radial e uma tangencial, que atua no diâmetro D. A componente radial em cada engrenagem é 0,466 vezes a componente tangencial naquela engrenagem. Observe que as cargas na engrenagem estão 90 graus fora de fase da engrenagem 1 para a engrenagem 2. Para o(s) dado(s) na(s) linha(s) assinalada(s) da Tabela P11-2, selecione um mancal apropriado (da Figura 11-23 com 10% de taxa de falha) para o mancal 2. Escolha o mancal que tem o menor diâmetro de orifício e satisfaça os requisitos de classificação de carga. Especifique o número do mancal, orifício, diâmetro externo, largura (todos em mm) e a classificação da carga dinâmica básica do mancal. Ignore a carga axial dada na tabela.

11-28 Repita o Problema 11-26 com a força axial F_a dada na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P11-2 atuando na engrenagem 1.

11-29 Repita o Problema 11-27 com a força axial F_a dada na(s) linha(s) assinalada(s) na Tabela P11-2 atuando na engrenagem 2.

* Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

Tabela P11-2 Dados para os Problemas 11-26 até 11-29

Linha	a in	b in	c in	P_{1t} lb	D_1 in	D_2 in	Projeto L_{10}*	F_a lb
a	4,0	8,0	12,0	2000	2,00	4,00	80	800
b	2,0	6,0	10,0	1800	1,80	2,50	60	900
c	3,0	5,0	8,0	2500	2,25	3,50	75	1200
d	2,0	5,0	10,0	2100	2,00	3,80	70	1000
e	1,5	4,5	7,5	2800	1,50	3,00	65	1200
f	2,5	5,0	8,0	1500	1,75	2,75	50	850

*milhões de revoluções

11-30 Repita o Problema 11-1(*b*) usando uma taxa de falha de 5%.

11-31 Repita o Problema 11-2(*b*) usando uma taxa de falha de 4%.

11-32 Repita o Problema 11-17(*b*) usando uma taxa de falha de 3%.

**11-33* Repita o Problema 11-19(*b*) usando uma taxa de falha de 2%.

11-34 Repita o Problema 11-26 usando uma taxa de falha de 5%.

11-35 Repita o Problema 11-27 usando uma taxa de falha de 4%.

**11-36* Repita o Problema 11-22 usando uma taxa de falha de 5%.

11-37 Repita o Problema 11-28 usando uma taxa de falha de 4%.

11-38 Repita o Problema 11-29 usando uma taxa de falha de 3%.

11-39 Um mancal de deslizamento curto possui as seguintes características: $d = 48{,}6$ mm, $l = 50$ mm e razão de folga diametral = 0,002. Com carga de $U = 6{,}36$ e lubrificante de viscosidade de $\eta = 2{,}30$ *cP*, a razão de excentricidade é $\varepsilon = 0{,}807$. Trace a distribuição de pressão no mancal como uma função de θ e como uma função de z para $\theta = \theta_{max}$.

11-40 Um mancal de deslizamento curto tem as seguintes características: $d = 40{,}0$ mm, $l = 30$ mm e razão de folga diametral = 0,001. Com carga de $U = 3{,}77$ e com lubrificante de viscosidade de $\eta = 20{,}66$ *cP*, a razão de excentricidade é $\varepsilon = 0{,}703$. Trace a distribuição de pressão no mancal como uma função de θ para $z = 0$ e como uma função de z para $\theta = \theta_{max}$.

11-41 Para o mancal e as condições do Problema 11-39, determine

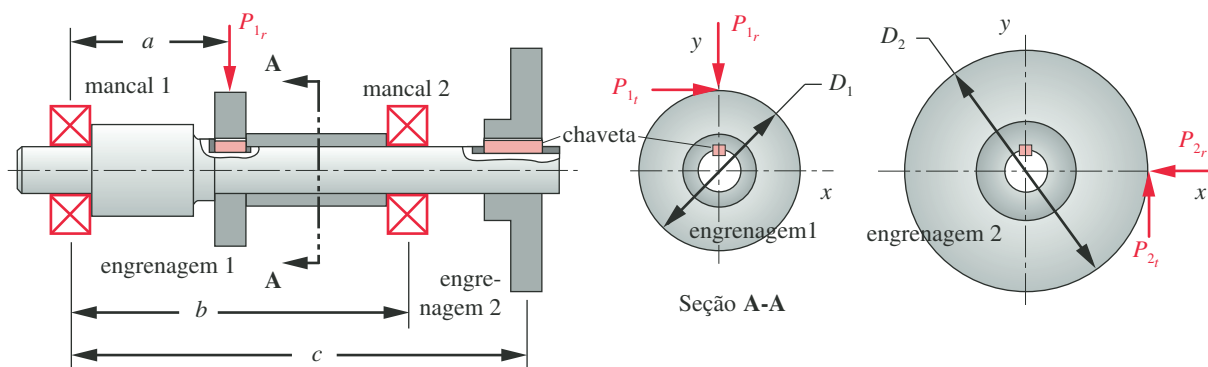
(a) o ângulo ϕ da linha dos centros em relação à direção da carga aplicada
(b) o parâmetro sem dimensão, K_ε
(c) a magnitude da carga aplicada, P
(d) o torque rotacional, T_r

* As respostas a estes problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

FIGURA P11-5

Arranjo de engrenagem e mancal para os Problemas 11-26 a 11-29.

11-42 Para o mancal e as condições do Problema 11-40, determine

(a) o ângulo ϕ da linha dos centros em relação à direção da carga aplicada
(b) o parâmetro sem dimensão, $K\varepsilon$
(c) a magnitude da carga aplicada, P
(d) o torque rotacional, T_r

11-43 O Problema 7-32 determinou as meias-dimensões de contato de duas engrenagens de aço operando com uma força de contato de 1500 lb, sendo $a = 0{,}0177$ in e $b = 0{,}3125$ in (meia-largura de uma face dentada). As engrenagens estão modeladas como dois cilindros em contato com os raios de 2,500 in (condutor) e 5,000 in (engrenagem conduzida). Encontre a espessura específica do filme e condição de lubrificação entre os dois dentes em contato se lubrificados com óleo ISO VG 1000 a 120F. Suponha que os dois dentes possuam $R_q = 4\mu$in. As velocidades tangenciais dos dentes da engrenagem são de 55,6 in/s (condutor) e 57,8 in/s (conduzido).

11-44 Selecione um mancal esférico de pista profunda da Figura 11-23 para uma carga radial de 1500 lb, uma carga axial de 450 lb e rotação de pista externa. Uma vida L_5 de 500 milhões de revoluções é desejável.

11-45 Selecione um mancal esférico de pista profunda da Figura 11-23 para uma carga radial de 600 lb, uma carga axial de 150 lb e rotação de pista externa. Uma vida L_{10} de 180 milhões de revoluções é desejável.

12

ENGRENAGENS CILÍNDRICAS RETAS

O começo da sabedoria consiste em chamar as coisas por seus nomes corretos.

PROVÉRBIO CHINÊS

Tim era tão instruído que sabia dizer a palavra cavalo em nove idiomas: tão ignorante que comprou uma vaca para cavalgar.

BENJAMIN FRANKLIN

12.0 INTRODUÇÃO

Engrenagens são usadas para transmitir torque e velocidade angular em uma ampla variedade de aplicações. Há também uma grande variedade de tipos de engrenagem para escolher. Este capítulo tratará do tipo mais simples de engrenagem, a engrenagem cilíndrica reta, projetada para operar com eixos paralelos e tendo dentes paralelos ao eixo de coordenadas do eixo. Outros tipos de engrenagens como helicoidais, cônicas e sem-fim podem acomodar eixos não paralelos. Estes serão tratados no próximo capítulo.

As engrenagens, hoje em dia, são altamente padronizadas com relação à forma do dente e ao tamanho. A American Gear Manufacturers Association (AGMA) apoia a pesquisa sobre o projeto, os materiais e a manufatura de engrenagens e publica padrões para seu projeto, manufatura e montagem.[1, 2, 3] Seguiremos os métodos AGMA e as recomendações definidas naqueles padrões.

As engrenagens têm uma longa história. A ancestral *Carroça Chinesa Apontando para o Sul*, supostamente usada para navegar pelo deserto de Gobi no tempos pré-Bíblicos, continha engrenagens. Leonardo DaVinci mostra muitos arranjos de engrenagens em seus desenhos. As primeiras engrenagens eram provavelmente feitas cruamente de madeira e outros materiais fáceis de serem trabalhados, com seus dentes sendo meramente uns pedaços de madeira inseridos em um disco ou roda. Foi apenas na revolução industrial que as máquinas demandaram, e que as técnicas de manufatura permitiram, a criação de engrenagens como agora as conhecemos, com dentes especialmente moldados ou cortados em um disco de metal.

Há uma grande quantidade de terminologia especializada para engrenagens, e é necessário que o leitor se familiarize com esses termos. Como indicado na epígrafe acima, chamar as coisas por seus nomes corretos é importante, mas não suficiente para assegurar o completo entendimento do tópico. As variáveis usadas neste capítulo estão listadas na Tabela 12-0.

Tabela 12-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
a	adendo	in	m	Figura 12-8
b	dedendo	in	m	Figura 12-8
C	distância entre centros	in	m	Equação 12.22*b*
C_f	fator de acabamento superficial	nenhuma	nenhuma	Equação 12.8
C_H	fator de dureza	nenhuma	nenhuma	Equação 12.26, -27
C_p	coeficiente elástico	nenhuma	nenhuma	Equação 12.23
d	diâmetro de passo	in	m	várias
F	largura da face	in	m	Equação 12.14
HB	dureza Brinell	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
I	fator AGMA de geometria-superfície	nenhuma	nenhuma	Equação 12.22*a*
J	fator AGMA de geometria-flexão	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
K_a, C_a	fator de aplicação	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
K_B	fator de flexão do aro	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
K_I	fator de ciclo de carga	nenhuma	nenhuma	Equação 12.15
K_L, C_L	fatores de vida	nenhuma	nenhuma	Figura 12-24, -26
K_m, C_m	fatores de distribuição de carga	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
K_R, C_R	fatores de confiabilidade	nenhuma	nenhuma	Tabela 12-19
K_s, C_s	fatores de tamanho	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
K_T, C_T	fatores de temperatura	nenhuma	nenhuma	Equação 12.24*a*
K_v, C_v	fatores dinâmicos	nenhuma	nenhuma	Seção 12.8
m	módulo	–	mm	Equação 12.4*c*
M	momento, função momento	lb-in	N-m	Figura 12-21
m_A	ganho mecânico	nenhuma	nenhuma	Equação 12.1*b*
m_G	razão de engrenagens	nenhuma	nenhuma	Equação 12.1*c*
m_p	razão de contato	nenhuma	nenhuma	Equação 12.7*a*
m_V	razão de velocidade angular	nenhuma	nenhuma	Equação 12.1*a*
N	número de ciclos ou número de dentes	nenhuma	nenhuma	Figura 12.24
N_b, N_c	coeficientes de segurança – flexão e contato	nenhuma	nenhuma	várias
p_b	passo de base	in	m	Equação 12.3*b*
p_c	passo circular	in	m	Equação 12.3*a*
p_d	passo diametral	1/in	–	Equação 12.4*a*
Q_v	índice de qualidade da engrenagem	nenhuma	nenhuma	Figura 12-22
r	raio primitivo ou de referência§	in	m	várias
S_{fb}	resistência corrigida de fadiga à flexão	psi	Pa	Equação 12.24
$S_{fb'}$	resistência não corrigida de fadiga à flexão	psi	Pa	Equação 12.24
S_{fc}	resistência corrigida de fadiga superficial	psi	Pa	Equação 12.25
$S_{fc'}$	resistência não corrigida de fadiga superficial	psi	Pa	Equação 12.25
T	torque	lb-in	N-m	Equação 12.13*a*
V_t	velocidade na linha primitiva	in/s	m/s	Equação 12.16

A fotografia da página capitular é cortesia da Boston Gear, Division of IMO Industries, Quincy, Mass.

§ N. de T.: O termo **raio primitivo**, amplamente usado nas traduções ao português do termo inglês *pitch radius*, refere-se à relevância e prioridade dessa dimensão na obtenção das outras dimensões das engrenagens, ou seja, este é um *raio prioritário ou de referência* para a obtenção das demais dimensões e será usado aqui alternativamente ao termo raio primitivo por motivo de clareza.

Partes deste capítulo, incluindo as Figuras 12-1 a 12-8, 12-11, 12-13 a 12-16 e suas discussões, foram adaptadas de R. L. Norton, *Design of Machinery*, 4ed. McGraw-Hill, 2008, Chapter 10, com autorização do editor.

Tabela 12-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
W	força total nos dentes da engrenagem	lb	N	Equação 12.13*c*
W_r	força radial nos dentes da engrenagem	lb	N	Equação 12.13*b*
W_t	força tangencial nos dentes da engrenagem	lb	N	Equação 12.13*a*
x_1, x_2	coeficientes de modificação do adendo	nenhuma	nenhuma	Seção 12.3
Y	fator de forma de Lewis	nenhuma	nenhuma	Equação 12.14
Z	comprimento de ação	in	m	Equação 12.2
ϕ	ângulo de pressão	graus	graus	várias
ρ	raio de curvatura	in	m	Equação 12.22*b*
σ_b	tensão de flexão	psi	Pa	Equação 12.15
σ_c	tensão de superfície	psi	Pa	Equação 12.21
ω	velocidade angular	rad/s	rad/s	Equação 12.1*a*

(*a*) Conjunto externo

(*b*) Conjunto interno

FIGURA 12-1

Cilindros rodando.

12.1 TEORIA DO DENTE DE ENGRENAGEM

O meio mais fácil de transferir movimento rotatório de um eixo a outro é com um par de cilindros rodando. Eles podem ser um conjunto externo de cilindros rolando, como mostrado na Figura 12-1*a*, ou um conjunto interno, como mostrado na Figura 12-1*b*. Se houver atrito suficiente disponível na interface de rolamento, esse mecanismo funcionará muito bem. Não haverá escorregamento entre os cilindros até que a força de atrito máxima disponível na junção seja excedida pelas demandas da transferência de torque.

As principais deficiências do mecanismo de comando de rolamento de cilindro são a capacidade relativamente baixa de torque e a possibilidade de escorregamento. Alguns mecanismos de comando requerem sintonia de fase dos eixos de entrada e saída para propósito de sincronismo. Isso requer a adição de alguns dentes aos cilindros rodando. Assim, eles se transformam em engrenagens, como mostrado na Figura 12-2, e são juntos denominados *par de engrenagens*. Quando duas engrenagens são colocadas em contato para formar um par de engrenagens como esse, é costumeiro referir-se à *menor das duas engrenagens* como um **pinhão** e a outra como **engrenagem**.

A lei fundamental de engrenamento

Conceitualmente, dentes de qualquer forma prevenirão o escorregamento bruto. Velhos moinhos movidos à água e moinhos de vento usavam engrenagens de madeira cujos dentes eram meramente pedaços de madeira arredondados metidos nos aros dos cilindros. Mesmo ignorando a precariedade da construção desses exemplos pioneiros de pares de engrenagens, não existia a possibilidade de uma transmissão suave de velocidade porque a geometria dos dentes de "cavilha" violava a **lei fundamental de engrenamento**, que afirma que a razão de *velocidade angular das engrenagens de um par de engrenagens deve manter-se constante durante o engrenamento*. A razão da velocidade angular m_V é igual à razão do raio de referência (primitivo) da engrenagem de entrada para aquela da engrenagem de saída.

$$m_V = \frac{\omega_{ext}}{\omega_{int}} = \pm\frac{r_{int}}{r_{ext}} \qquad (12.1a)$$

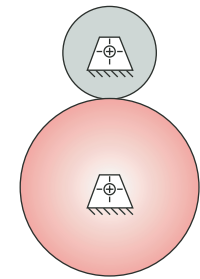
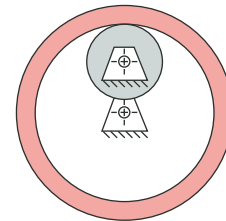
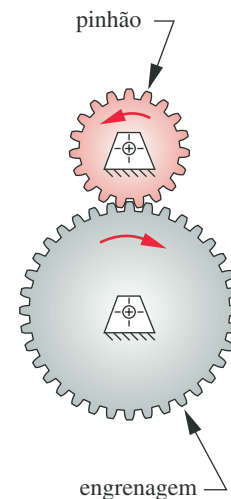



FIGURA 12-2

Par de engrenagens externas.

Os raios de referência na Equação 12.1*a* são aqueles dos cilindros rodando aos quais estamos adicionando dentes. O sinal positivo ou negativo leva em conta a colocação dos cilindros interna ou externamente como mostrado na Figura 12-1. Uma colocação externa inverte a direção de rotação entre os cilindros e requer o sinal negativo. Um conjunto interno (e uma correia ou corrente) terá a mesma direção de rotação nos eixos de entrada e saída e requererá um sinal positivo na Equação 12.1*a*. As superfícies de rotação dos cilindros se transformarão em **circunferências de referência** (**primitivas**) e os diâmetros correspondentes em **diâmetros de referência** (**primitivos**) das engrenagens. Os pontos de contato entre os cilindros jazem na linha de centro, como mostrado na Figura 12-4, e este ponto é chamado de **ponto de referência** (**primitivo**).

A **razão de torque** ou **o ganho mecânico** m_A é o recíproco da razão de velocidades m_V:

$$m_A = \frac{1}{m_V} = \frac{\omega_{int}}{\omega_{ext}} = \pm\frac{r_{ext}}{r_{int}} \tag{12.1b}$$

Assim, um par de engrenagens é essencialmente um dispositivo de troca de torque por velocidade e vice-versa. Uma aplicação comum das engrenagens reduz a velocidade e aumenta o torque para mover cargas mais pesadas, como na transmissão de seu automóvel. Outras aplicações requerem um aumento na velocidade, para o qual uma redução no torque deve ser aceita. Em qualquer caso, em geral é desejável manter constante a razão entre as engrenagens à medida que elas rodam. Qualquer variação na razão se mostrará como oscilação na velocidade de saída e torque, mesmo se a entrada for constante com o tempo.

Para propósito de cálculos, a **razão de engrenamento** m_G é entendida como a magnitude da razão de velocidades ou de torques, qualquer deles que seja > 1.

$$m_G = |m_V| \quad \text{ou} \quad m_G = |m_A|, \quad \text{para} \quad m_G \geq 1 \tag{12.1c}$$

Em outras palavras, a razão de engrenamento é sempre um número positivo > 1, independentemente da direção segundo a qual a potência flui através das engrenagens.

A fim de que a lei fundamental de engrenamento seja verdadeira, os contornos do dente da engrenagem nos dentes engrenantes devem ser conjugados um ao outro. Há um número infinito de pares conjugados possíveis que poderiam ser usados, mas somente umas poucas curvas têm visto aplicações práticas com dentes de engrenagem. A **cicloide** é ainda usada como forma de dente em alguns relógios de pulso e parede, mas a maioria das engrenagens usa a **involuta** de um círculo como forma delas.

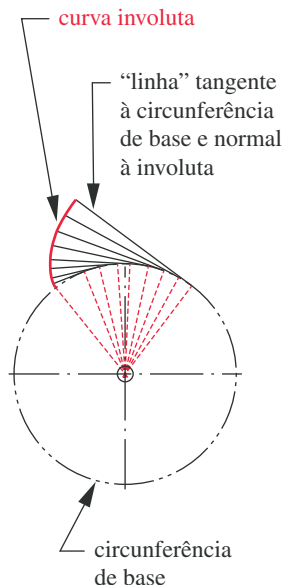



FIGURA 12-3

Geração da involuta de uma circunferência.

A forma involuta do dente

A involuta de um círculo é a curva que pode ser gerada desenrolando-se uma linha esticada de um cilindro, como mostrado na Figura 12-3. Observe o seguinte a respeito dessa curva involuta:

1 A linha está sempre tangente ao círculo de base.

2 O centro de curvatura da involuta está sempre em um ponto de tangência da linha com o círculo de base.

3 Uma tangente à involuta é sempre normal à linha, que é o raio instantâneo de curvatura da curva involuta.

A Figura 12-4 mostra duas involutas em cilindros separados em contato ou "em engrenamento". Elas representam dentes de engrenagem. Os cilindros de onde as linhas são desenroladas são chamados de **circunferência de base** das engrenagens respectivas. Observe que as circunferências de base são necessariamente menores que as circunferências de referência, que têm os raios originais

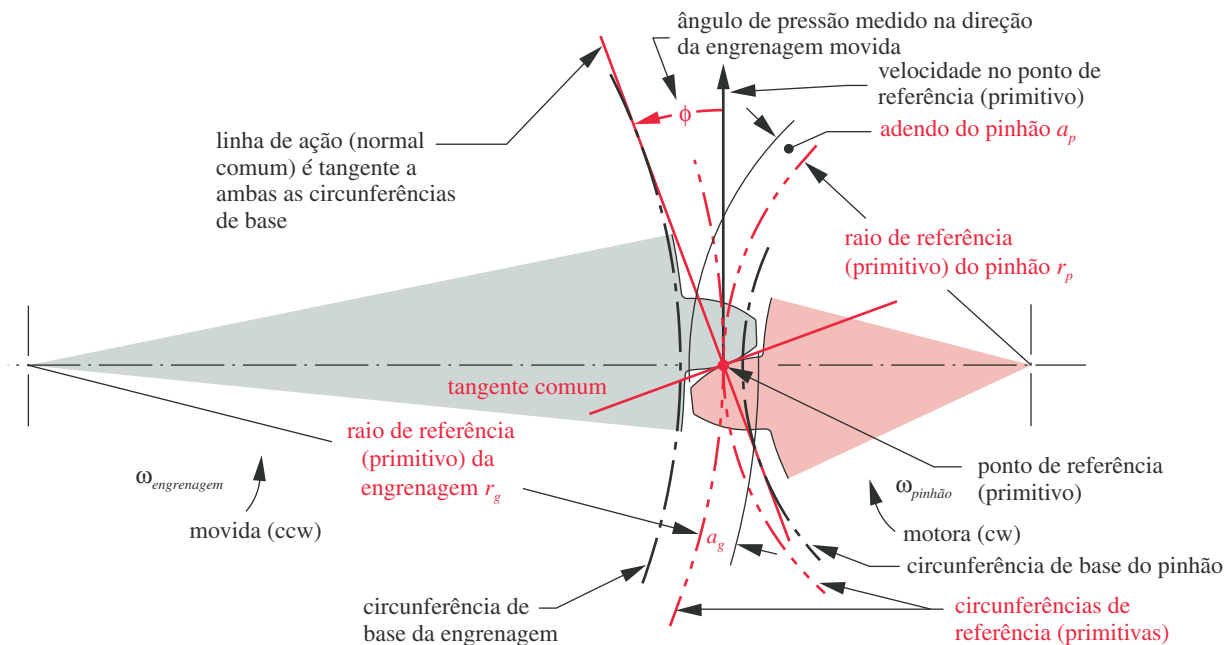



FIGURA 12-4

Geometria de contato e ângulo de pressão dos dentes de engrenagem da involuta.

dos cilindros rodando, r_p e r_g. O dente da engrenagem deve ser projetado abaixo e acima da superfície de rolamento dos cilindros (circunferência de referência ou primitiva), e a involuta *existe somente externamente à circunferência de base.* A quantidade de dente que está saliente acima da circunferência de referência é chamada de **adendo**, **saliência** ou **altura da cabeça**, mostrada como a_p e a_g para o pinhão e engrenagem, respectivamente. Esses adendos são iguais para os dentes de engrenagem padronizados de profundidade completa.

Há uma **tangente comum** a ambas as curvas involutas do dente no ponto de contato, e uma normal comum, perpendicular à tangente comum. Observe que a normal comum é, na verdade, "as linhas" de ambas as involutas, que são colineares. Assim, a **normal comum**, que é também a **linha de ação**, sempre passa pelo **ponto de referência** (primitivo) sem importar onde no engrenamento os dois dentes estão se contatando. O ponto primitivo tem a mesma velocidade linear no pinhão e na engrenagem, chamada de **velocidade de linha de referência** (**primitiva**). O ângulo entre a linha de ação e o vetor de velocidade é o **ângulo de pressão** ϕ.

Ângulo de pressão

O **ângulo de pressão** ϕ de um par de engrenagens é definido como o ângulo entre a linha de ação (normal comum) e a direção da velocidade no ponto de referência (primitivo) tal que a linha de ação seja rodada de um ângulo ϕ em graus na direção de rotação da engrenagem movida, como mostrado nas Figuras 12-4 e 12-5. Os ângulos de pressão do par de engrenagens são padronizados pelos fabricantes de engrenagens a uns poucos valores, que são definidos na distância nominal entre os centros das engrenagens quando estas são cortadas. Os valores padronizados são 14,5°, 20° e 25°, sendo 20° o valor mais comumente usado e 14,5, obsoleto hoje em dia. As engrenagens podem ser feitas com qualquer ângulo de pressão, mas o custo comparado ao custo das engrenagens padronizadas dificilmente se justificaria. Teriam de ser feitos cortadores especiais. Para que as engrenagens possam trabalhar juntas, elas devem ser cortadas com o mesmo ângulo nominal de pressão.

Geometria do engrenamento

A Figura 12-5 mostra um par de dentes de forma involuta em duas posições, entrando em contato e saindo de contato. As normais comuns a ambos os pontos de contato passam pelo mesmo ponto de referência. É esta propriedade da involuta que faz com que ela obedeça à lei fundamental de engrenamento. A razão do raio da engrenagem movida para o raio da engrenagem motora permanece constante à medida que os dentes entram e saem de engrenamento.

A partir dessa observação acerca do comportamento da involuta podemos expressar **a lei fundamental de engrenamento** de uma maneira cinematicamente mais formal: *a normal comum do perfil de dentes, em todos os pontos de contato durante o engrenamento, deve sempre passar por um ponto fixo na linha de centro das engrenagens, chamado de ponto de referência.* A razão de velocidade de engrenamento será então uma constante definida pela razão dos raios respectivos das engrenagens até o ponto de referência.

Os pontos de entrada e saída de contato definem o engrenamento do pinhão e a engrenagem. A distância ao longo da linha de ação entre esses pontos dentro do engrenamento é chamada de **comprimento de ação** Z, definida pelas interseções das respectivas circunferências de cabeça com a linha de ação, como mostrado na Figura 12-5. A distância ao longo da circunferência de referência durante o engrenamento é o **arco de ação**, e os ângulos definidos por esses pontos e a linha de centros são o **ângulo de aproximação** e o **ângulo de afastamento (ou recesso)**. Estes são mostrados somente para a engrenagem na Figura 12-5 por motivo de clareza, mas ângulos similares existem para o pinhão. O arco de ação nas circunferências de referência do pinhão e da engrenagem devem ter o mesmo comprimento para evitar escorregamento entre os cilindros teóricos em rotação. O comprimento de ação Z pode ser calculado a partir da geometria da engrenagem e do pinhão:

$$Z = \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_g + a_g\right)^2 - \left(r_g \cos\phi\right)^2} - C \operatorname{sen}\phi \qquad (12.2)$$

onde r_p e r_g são os raios das circunferências de referência *e* a_p *e* a_g as saliências do pinhão e da engrenagem, respectivamente. C é a distância entre os centros e ϕ é o ângulo de pressão.

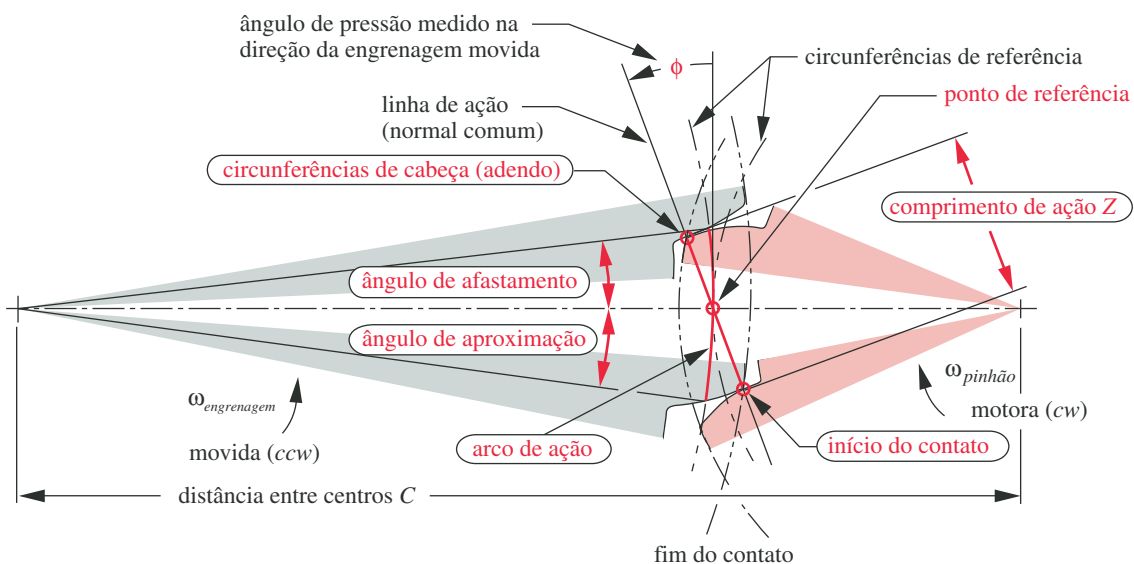



FIGURA 12-5

Comprimento de ação, arco de ação e ângulos de aproximação e recesso (afastamento) durante o engrenamento da engrenagem e o pinhão.

Cremalheira e pinhão

Se o diâmetro da circunferência de base de uma engrenagem for aumentado sem limite, a circunferência de base se transformará em uma linha reta. Se a "linha" que foi enrolada ao redor dessas circunferências de base para gerar a involuta ainda estivesse lá depois do aumento da circunferência de base até o raio infinito, a linha seria pivotada no infinito e geraria uma involuta que seria uma linha reta. Essa engrenagem reta é chamada de **cremalheira**. A Figura 12-6 mostra uma cremalheira e um pinhão e a geometria de uma cremalheira padronizada de profundidade completa. Seus dentes são trapezoidais, mas são verdadeiras involutas. Esse fato facilita a criação de uma ferramenta de corte para gerar os dentes involutos em engrenagens circulares, usinando-se precisamente uma cremalheira e endurecendo-a para cortar dentes de outras engrenagens. Esta é uma outra vantagem da forma de dente involuta. Rodando um disco com respeito ao cortador de cremalheira enquanto movemos o cortador axialmente para frente e para trás pelo disco produzirá, ou desenvolverá, um dente verdadeiro de involuta na engrenagem circular.

A aplicação mais comum da cremalheira e pinhão é na conversão de movimento rotacional a reto ou vice-versa. Ela pode ser movida em ambas as direções, portanto requer um freio se usado para suportar uma carga. Um exemplo deste uso está no par pinhão-cremalheira de direção de automóveis. O pinhão é fixo à extremidade mais baixa da coluna de direção e roda com o volante de direção. A cremalheira engrena com o pinhão e está livre de mover-se para a esquerda e a direita em resposta ao ângulo imposto no volante de direção. A cremalheira é também um elo em uma conexão de múltiplas barras, que converte a translação linear da cremalheira para a quantidade apropriada de movimento angular de um elo, em balanço, atado ao conjunto da roda da frente a fim de girar a roda do carro.

Mudança da distância entre centros

Quando os dentes de involuta (ou qualquer dente) são cortados em um cilindro com respeito a um círculo de base particular para criar uma engrenagem, ainda não temos um círculo de referência. O círculo de referência vem a existir somente quando acoplamos essa engrenagem com uma outra para criar um par de engrenagens, ou conjunto de engrenagens. Haverá um intervalo entre as distâncias de centro sobre as quais conseguiremos um engrenamento entre as engrenagens. Haverá também uma distância ideal entre centros que nos dará os diâmetros nominais de medida para os quais as engrenagens foram projetadas. Contudo, as limitações do processo de fabricação nos dão uma baixa probabilidade quanto a conseguir exatamente essa distância ideal entre centros em todos os casos. É mais provável que exista algum erro na distância entre centros, mesmo que pequeno.

Se a forma do dente de engrenagem **não** for uma involuta, então o erro na distância entre centros causará variação, ou "encrespamento" na velocidade de

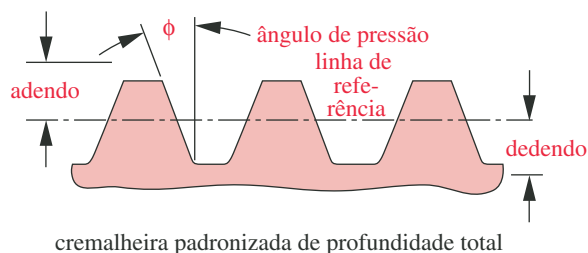



FIGURA 12-6

Uma cremalheira e um pinhão. (Foto por cortesia de Martin Sprocket and Gear Co., Austin, Tex.)

saída. Nesse caso, a velocidade angular de saída não será constante para uma velocidade constante de entrada, violando a lei fundamental de engrenamento. Contudo, **com um dente na forma involuta**, *os erros na distância entre centros não afetarão a relação de velocidades.* Essa é a principal vantagem da involuta sobre todas as outras formas possíveis de dente e é a razão pela qual é usada quase universalmente para dentes de engrenagens. A Figura 12-7 mostra o que acontece quando a distância entre centros é variada em um par de engrenagens de involuta. Observe que a normal comum ainda passa pelo ponto de referência e também por todos os pontos de contato durante o engrenamento. Apenas o ângulo de pressão é afetado pela mudança da distância entre centros.

A Figura 12-7 também mostra os ângulos de pressão para duas distâncias diferentes entre centros. À medida que a distância entre centros aumenta, o ângulo de pressão também aumenta e vice-versa. Este é um resultado da mudança, ou erro, na distância entre centros quando se usam dentes involutos. Observe que a lei fundamental de engrenamento ainda se mantém no caso da distância de centros modificada. A normal comum é ainda tangente aos dois círculos de base e ainda passa pelo ponto de referência. O ponto de referência se move em proporção à mudança da distância entre centros e os raios primitivos. A razão de velocidades se mantém inalterada a despeito da mudança na distância entre centros. Na verdade, a razão de velocidades de engrenagens de involuta é fixa pela razão entre os diâmetros dos círculos de base, que são imutáveis uma vez que a engrenagem tenha sido cortada.

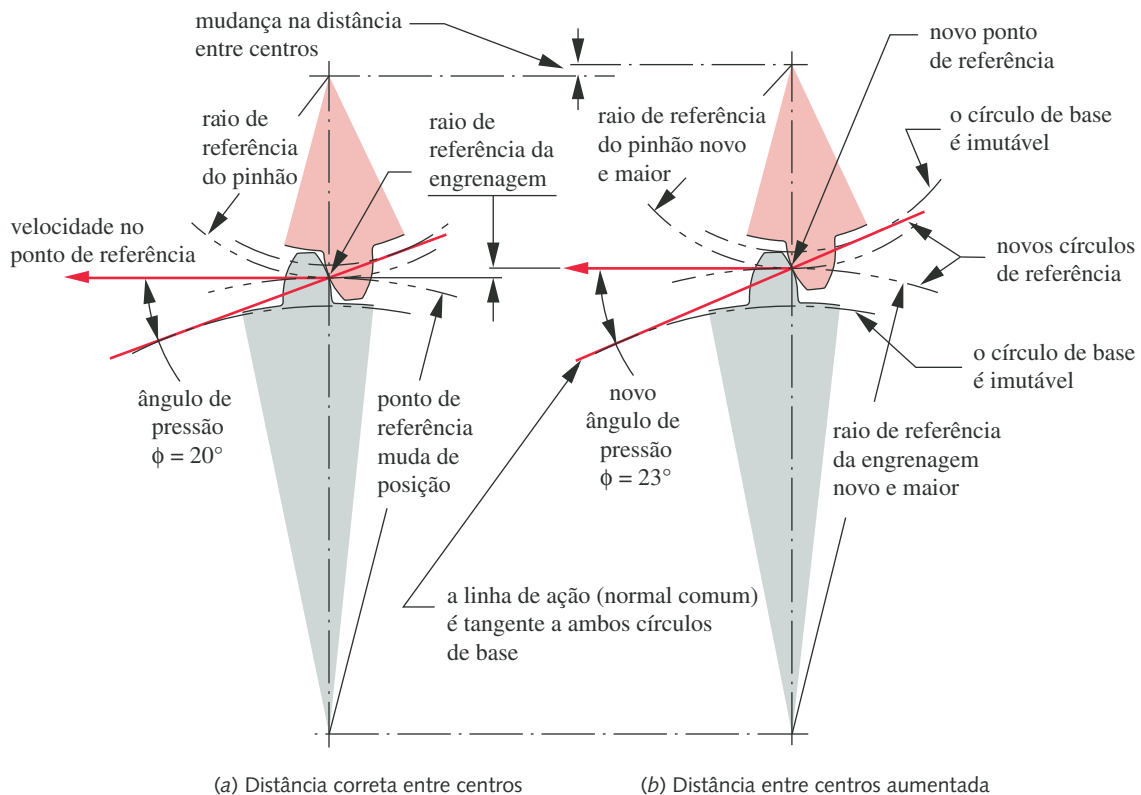



FIGURA 12-7

A mudança da distância entre centros de engrenagens involutas muda somente o ângulo de pressão e os diâmetros primitivos.

Folga de engrenamento

Um outro fator afetado pela mudança da distância entre centros *C* é a folga de engrenamento. Aumentando *C,* aumentará a folga e vice-versa. A **folga** é definida como o *intervalo entre dentes engrenados medida ao longo da circunferência do círculo de referência*. As tolerâncias de fabricação eliminam uma folga zero, mesmo porque todos os dentes não podem ter exatamente as mesmas dimensões e todos devem se engrenar sem obstrução. Assim, devem existir algumas pequenas diferenças entre a espessura do dente e a largura do vão (ver a Figura 12-8). Contanto que o engrenamento ocorra sem reversão do torque, a folga de engrenamento não deve ser um problema. Contudo, sempre que o torque mudar de sinal, os dentes se moverão do contato em um lado para o outro. O intervalo de folga de engrenamento será cruzado e os dentes se chocarão com barulho audível e vibração. Além do aumento de tensões e desgaste, a folga de engrenamento pode causar erros posicionais indesejáveis em algumas aplicações.

Em servomecanismos, em que motores comandam, como, por exemplo, as superfícies de controle de um avião, a folga de engrenamento pode causar "uma caça" potencialmente destrutiva no qual o sistema de controle tenta em vão corrigir os erros posicionais devido à folga de engrenamento "derramada" no sistema mecânico de comando. Tais aplicações necessitam **engrenagens antifolga de engrenamento** que, na verdade, são duas engrenagens costas com costas no mesmo eixo que podem ser giradas ligeiramente na montagem (ou por molas) uma com respeito a outra, de maneira a ocupar a folga de engrenamento. Em aplicações menos críticas, como o comando do propulsor em um barco, a folga de engrenamento com torque revertido não será nem notada.

Movimento relativo do dente

O movimento relativo entre os dentes de involuta é rotação pura no ponto de referência. Em pontos no dente longe do ponto de referência, algum escorregamento ocorre em combinação com rotação. A quantidade média de escorregamento em um engrenamento de dente de involuta é de cerca de 9%, como discutido na Seção 7.13. As tensões de superfície são aumentadas pela componente de deslizamento, como discutido na Seção 7.11. A Tabela 7-7 mostra os valores da resistência à fadiga superficial desenvolvidos por meio de extensivos testes de rolagem mais 9% de deslizamento entre várias combinações de materiais.

12.2 NOMENCLATURA DO DENTE DE ENGRENAGEM

A Figura 12-8 mostra dois dentes de engrenagem com a nomenclatura-padrão definida. **Círculo de referência** (primitivo) e **círculo de base** foram já definidos. A altura do dente é definida pelo **adendo** (adicionar a), saliência ou altura de cabeça e o **dedendo** (subtrair de), reentrância ou altura de pé, que são referidos ao círculo nominal de referência (primitivo). A reentrância é ligeiramente maior que a saliência (altura), para prover um pouco de espaço entre a ponta de um dente engrenado (**círculo de saliência**) e o fundo do vão do outro (**círculo de reentrância**). A **profundidade de trabalho** do dente é duas vezes o adendo, e a **profundidade total** é a soma do adendo e do dedendo. A **espessura do dente** é medida no círculo de referência, e a **largura do vão** entre dentes é ligeiramente maior que a espessura do dente. A diferença entre essas duas dimensões é a **folga de engrenamento**. A **largura de face** do dente é medida ao longo do eixo da engrenagem. O **passo circular** (primitivo) é o comprimento do arco ao longo da circunferência do círculo de referência medido de um ponto em um dente ao mesmo ponto no próximo dente. A definição do **passo circular** de referência p_c é

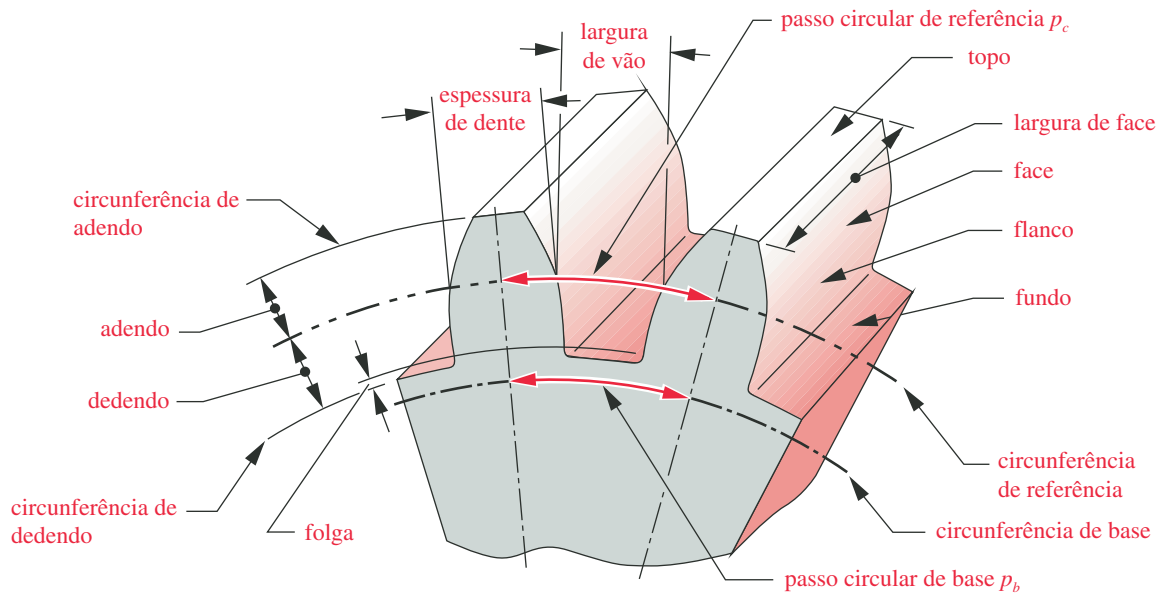



FIGURA 12-8

Nomenclatura do dente de engrenagem.

$$p_c = \frac{\pi d}{N} \tag{12.3a}$$

onde d = diâmetro de referência e N = número de dentes. O passo do dente também pode ser medido ao longo da circunferência do círculo de base e então é chamado de **passo de base** p_b.

$$p_b = p_c \cos\phi \tag{12.3b}$$

As unidades de p_c são polegadas ou milímetros. Uma maneira mais conveniente de definir o tamanho de dente é relacioná-lo diretamente ao diâmetro d do círculo de referência em vez de usar o comprimento do arco. O **passo diametral** p_d é

$$p_d = \frac{N}{d} \tag{12.4a}$$

As unidades de p_d são recíprocas de polegadas, ou número de dentes por polegada. Essa medida é usada somente em especificações de engrenagens nos Estados Unidos. Combinando as Equações 12.3*a* e 12.4*a*, obtemos a relação entre o passo circular e o passo diametral.

$$p_d = \frac{\pi}{p_c} \tag{12.4b}$$

O sistema SI, usado para engrenagens métricas, define um parâmetro chamado de **módulo**, que é *o recíproco do passo diametral* com o diâmetro de referência d medido em milímetros.

$$m = \frac{d}{N} \tag{12.4c}$$

As unidades do módulo são milímetros. Infelizmente, as engrenagens métricas não são intercambiáveis com as engrenagens estadunidenses, a despeito de ambas terem formas de dente de involuta, porque os padrões para os tamanhos de dente são diferentes (ver a Tabela 12-3). Nos Estados Unidos, os tamanhos de

Tabela 12-1 Especificações AGMA para dente de engrenagem de profundidade completa

Parâmetro	Passo diametral grosseiro ($pd < 20$)	Passo diametral fino ($pd \geq 20$)
Ângulo de pressão ϕ	20° ou 25°	20°
Adendo a	$1{,}000 / p_d$	$1{,}000 / p_d$
Dedendo b	$1{,}250 / p_d$	$1{,}250 / p_d$
Profundidade de trabalho	$2{,}000 / p_d$	$2{,}000 / p_d$
Profundidade total	$2{,}250 / p_d$	$2{,}200 / p_d + 0{,}002$ in
Espessura circular de referência de dente	$1{,}571 / p_d$	$1{,}571 / p_d$
Raio de arredondamento – cremalheira básica	$0{,}300 / p_d$	não padronizado
Folga básica mínima	$0{,}250 / p_d$	$0{,}200 / p_d + 0{,}002$ in
Largura mínima do topo	$0{,}250 / p_d$	não padronizado
Folga (dentes polidos ou retificados)	$0{,}350 / p_d$	$0{,}350 / p_d + 0{,}002$ in

Tabela 12-2
Passos diametrais de referência padronizados

Grosseiros ($pd < 20$)	Finos ($pd \geq 20$)
1	20
1,25	24
1,5	32
1,75	48
2	64
2,5	72
3	80
4	96
5	120
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	

dente de engrenagens são especificados pelo passo diametral. A conversão de um padrão ao outro é

$$m = \frac{25{,}4}{p_d} \tag{12.4d}$$

A razão de velocidades m_V de um par de engrenagens pode ser posta em uma forma mais conveniente pela substituição da Equação 12.4*a* na Equação 12.1, observando que o passo diametral das engrenagens deve ser o mesmo.

$$m_V = \pm\frac{r_{int}}{r_{ext}} = \pm\frac{d_{int}}{d_{ext}} = \pm\frac{N_{int}}{N_{ext}} \tag{12.5a}$$

Assim, a **razão de velocidades** pode ser calculada a partir do número de dentes das engrenagens engrenadas, e estes são inteiros. Observe que o sinal menos implica um engrenamento externo, e um sinal positivo, um engrenamento interno, como mostrado na Figura 12-1. A razão de engrenamento m_G pode ser expressa como o número de dentes na engrenagem N_g sobre o número de dentes no pinhão N_p.

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} \tag{12.5b}$$

Dentes padronizados de engrenagem Dentes de engrenagem padronizados de profundidade completa têm adendo igual no pinhão e na engrenagem, com o dedendo ligeiramente maior para permitir folga. As dimensões padronizadas de dente são definidas em termos do passo diametral. A Tabela 12-1 mostra as dimensões de engrenagens de dentes padronizados de altura completa como definidas pela AGMA, e a Figura 12-9 mostra suas formas para três ângulos de pressão padronizados. A Figura 12-10 mostra os tamanhos reais dos dentes padronizados de altura completa e de ângulo de pressão de 20° para $p_d = 4$ a $p_d = 80$. Observe a relação inversa entre p_d e o tamanho do dente.

Embora não exista restrição teórica aos valores possíveis do passo diametral, um conjunto de valores-padrão está definido com base na disponibilidade de ferramentas de corte de engrenagem. Esses tamanhos padronizados de dente são mostrados na Tabela 12-2 em termos do passo diametral e na Tabela 12-3 em termos do módulo métrico.

Tabela 12-3
Módulos métricos padronizados

Módulo métrico (mm)	Equivalente p_d (in^{-1})
0,3	84,67
0,4	63,50
0,4	50,80
0,8	31,75
1	25,40
1,25	20,32
1,5	16,93
2	12,70
3	8,47
4	6,35
5	5,08
6	4,23
8	3,18
10	2,54
12	2,12
16	1,59
20	1,27
25	1,02

(*a*) $\phi = 14{,}5°$

(*b*) $\phi = 20°$

(*c*) $\phi = 25°$

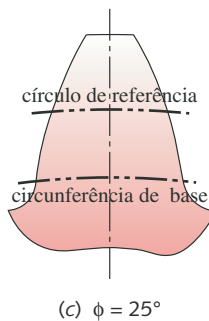
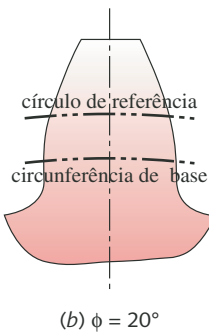
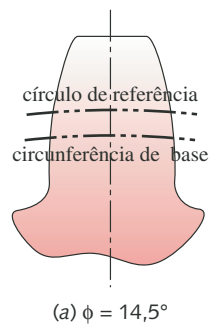



FIGURA 12-9

Perfis de dente AGMA de profundidade completa para três ângulos de pressão.

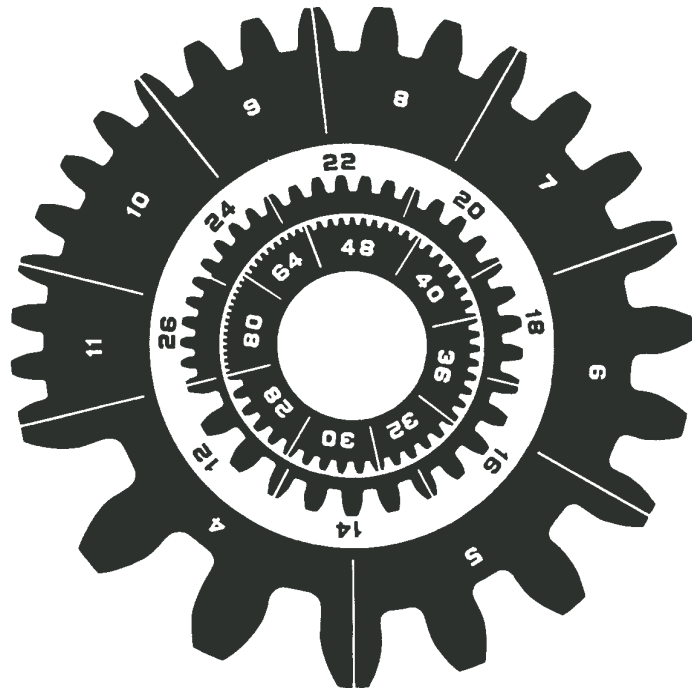



FIGURA 12-10

Tamanhos verdadeiros de dentes de engrenagem para vários passos diametrais de referência. (Cortesia da Barber-Colman Co., Loves Park, Ill.)

12.3 INTERFERÊNCIA E ADELGAÇAMENTO

A forma de dente involuta é definida somente fora da circunferência de base. Em alguns casos, o dedendo será grande o suficiente para estender-se além da circunferência de base. Se for assim, então a porção do dente abaixo da circunferência de base não será involuta e interferirá com a ponta do dente da engrenagem acoplada, que é um dente involuto. Se a engrenagem for cortada com um cortador de engrenagens padronizado, ou "fresa caracol", a ferramenta de corte também interferirá com a parte do dente abaixo da circunferência de base e removerá o material que interfere. Isso resulta em um dente adelgaçado, como mostrado na Figura 12-11. O adelgaçamento enfraquece o dente pela remoção de material na sua raiz. O momento máximo e o cisalhamento máximo do dente carregado como em uma viga em balanço ocorrerão ambos nesta região. Adelgaçamento severo causará falha prematura do dente.

A interferência e o adelgaçamento resultante podem ser prevenidos simplesmente evitando-se engrenagens com muito poucos dentes. Se um pinhão tem um grande número de dentes, então eles serão pequenos comparados com seu diâmetro. À medida que o número de dentes é reduzido para um diâmetro fixo do pinhão, os dentes devem se tornar maiores. Em algum ponto, o dedendo excederá a distância radial entre a circunferência de base e a circunferência de referência, e a interferência ocorrerá. O número mínimo de dentes de profundidade completa requeridos para evitar a interferência no pinhão movendo-se contra uma cremalheira-padrão pode ser calculado por:

$$N_{min} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \phi} \tag{12.6}$$

A Tabela 12-4 mostra o número mínimo de dentes requeridos para evitar o adelgaçamento contra uma cremalheira-padrão como função do ângulo de

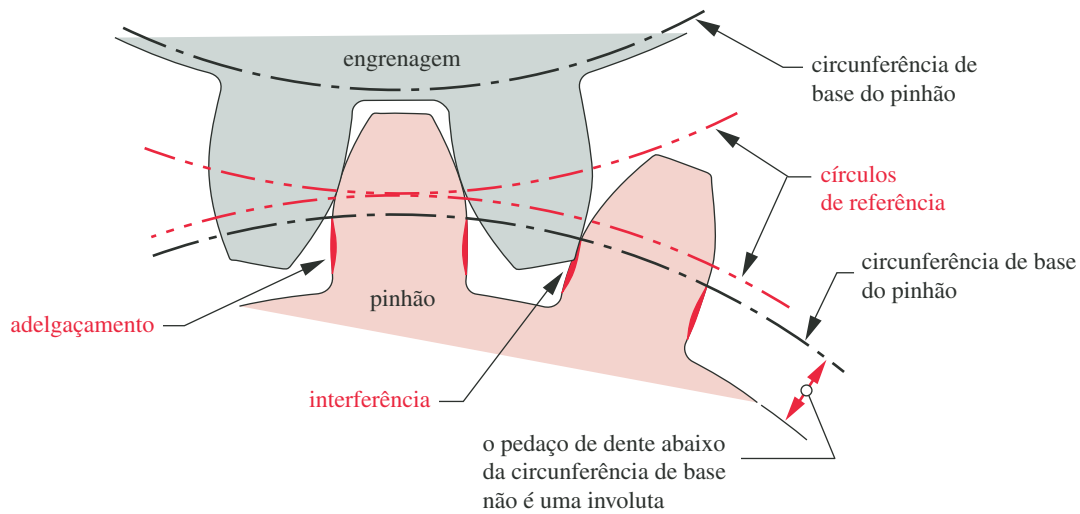



FIGURA 12-11

Interferência e adelgaçamento dos dentes abaixo da circunferência de base.

pressão. A Tabela 12-5 mostra o número mínimo de dentes de pinhão de tamanho completo que pode ser usado contra a seleção de engrenagens de tamanho completo de vários tamanhos (ϕ = 20°). À medida que a engrenagem acoplada fica menor, o pinhão pode ter menos dentes e ainda assim evitar a interferência.

Formas de dentes com adendos desiguais

A fim de evitar a interferência em pinhões pequenos, a forma do dente pode ser mudada das formas padronizadas de profundidade completa da Figura 12-9, que tem adendos iguais em ambos pinhão e engrenagem, para uma forma involuta com um adendo maior no pinhão e outro menor na engrenagem. Estas são chamadas de **engrenagens de perfil transladado**. A AGMA define coeficientes de modificações em adendos, x_1 e x_2, que sempre somam zero, sendo iguais em magnitude e opostos em sinal. O coeficiente positivo x_1 é aplicado para aumentar o adendo do pinhão, e o negativo x_2 decresce o adendo da engrenagem pela mesma quantia. A profundidade total do dente permanece a mesma. O efeito líquido é a translação das circunferências de referência para longe da circunferência de base do pinhão e a eliminação da parte não involuta do dente do pinhão abaixo da circunferência de base. Os coeficientes padronizados são ±0,25 e ±0,50, que adicionam/subtraem 25% ou 50% dos adendos padronizados, respectivamente. O limite desse procedimento ocorre quando o dente do pinhão se torna pontudo.

Existem alguns benefícios secundários para esta técnica. O dente do pinhão fica mais grosso na sua base e, dessa forma, mais forte. O dente da engrenagem é enfraquecido proporcionalmente, mas como o dente de uma engrenagem de profundidade completa é mais forte que um dente de pinhão de profundidade completa, esse translado deixa ambos com resistência aproximadamente igual. A desvantagem das formas de dentes de adendos desiguais está em um aumento na velocidade de escorregamento na ponta do dente. A percentagem de deslizamento entre os dentes é então maior que com dentes de adendos iguais. Isso aumenta as tensões na superfície do dente, como discutido na Seção 7.11. As perdas por atrito no engrenamento são também aumentadas pelas velocidades maiores de deslizamento. Dudley[10] recomenda evitar mais que 25% de aumento no adendo dos dentes de pinhão em engrenagens cilíndricas retas ou helicoidais por causa

Tabela 12-4
Número mínimo de dentes de pinhão para evitar interferência entre um pinhão de profundidade completa e uma cremalheira de profundidade completa

Ângulo de pressão (graus)	Número mínimo de dentes
14,5	32
20	18
25	12

Tabela 12-5
Número mínimo de dentes de pinhão para evitar interferência entre um pinhão de 20°, profundidade completa e engrenagens de profundidade completa e vários tamanhos

Mínimo dentes de pinhão	Máximo dentes de engrenagem
17	1309
16	101
15	45
14	26
13	16

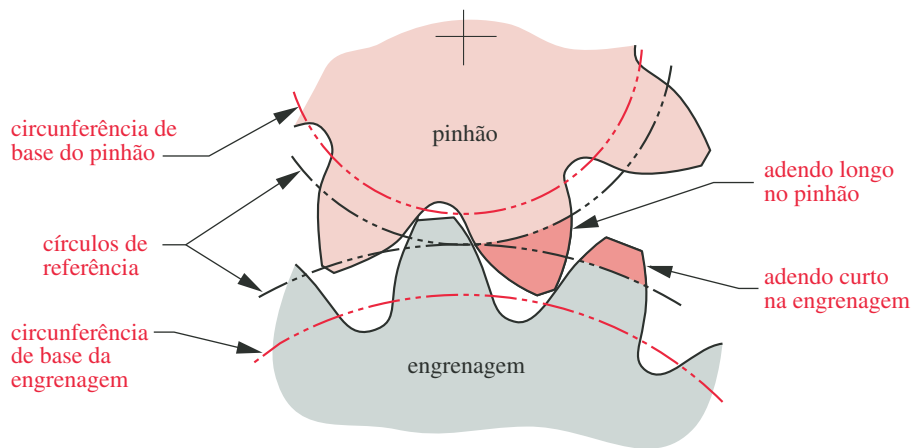



FIGURA 12-12

Dentes de engrenagem de perfil transladado com adendos longo e curto para evitar interferência e adelgaçamento.

das desvantagens associadas com as velocidades elevadas de deslizamento deles. A Figura 12-12 mostra os contornos de dentes de perfil involuto transladado. Compare-os às formas de dente padronizadas na Figura 12-9.

12.4 RAZÃO DE CONTATO

A razão de contato m_p define o número médio de dentes em contato em qualquer momento. É calculada por

$$m_p = \frac{Z}{p_b} \tag{12.7a}$$

onde Z é o comprimento de ação da Equação 12.2 e p_b é o passo de base da equação. Substituindo as Equações 12.3*b* e 12.4*b* na 12.7*a*, pode-se definir m_p em termos do passo diametral:

$$m_p = \frac{p_d Z}{\pi \cos \phi} \tag{12.7b}$$

Se a razão de contato for 1, então um dente estará deixando o contato justamente quando o próximo está entrando em contato. Isso é indesejável, porque um pequeno erro no vão do dente causará oscilações na velociade, vibração e barulho. Além disso, a carga será aplicada na ponta do dente, criando os momentos fletores maiores possíveis. Com razões de contato maiores que 1, existe a possibilidade de divisão da carga entre dentes. Para razões de contato entre 1 e 2, que são comuns para engrenagens retas, ainda haverá momentos durante o engrenamento em que um par de dentes estará recebendo toda a carga. Contudo, ocorrerá em direção ao centro da região de engrenamento onde a carga é aplicada em uma posição mais baixa do dente, em vez de ser na ponta dele. Esse ponto é chamado de o **ponto mais alto de contato de um só dente** ou HPSTC (*highest point of single-tooth contact*). A razão de contato mínima aceitável para uma operação suave é 1,2. Uma razão de contato mínima de 1,4 é preferível, e se for maior, melhor. A maior parte dos engrenamentos de engrenagens retas terá razões de contato entre 1,4 e 2. A Equação 12.7*b* mostra que para dentes menores (p_d maior) e ângulos de pressão maiores, a razão de contato será maior.

EXEMPLO 12-1

Determinação dos parâmetros dos dentes de engrenagem e de engrenamento

Problema **Encontre a razão de engrenamento, passo circular de referência, passo de base, diâmetros de referência, raios de referência, distância entre centros, adendo, dedendo, a profundidade completa, folga, diâmetros externos e razão de contato de um engrenamento com os parâmetros dados. Se a distância entre centros for aumentada em 2%, qual será o novo ângulo de pressão?**

Dados **Uma engrenagem 6p_d, ângulo de pressão de 20°, pinhão de 19 dentes e engrenagem de 37 dentes.**

Hipóteses **As formas dos dentes são perfis de involuta de profundidade completa padronizadas pela AGMA.**

Solução

1 A razão de engrenamento é facilmente encontrada pelo número de dentes no pinhão e na engrenagem usando a Equação 12.5*b*.

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} = \frac{37}{19} = 1,947 \qquad (a)$$

2 O passo circular de referência pode ser encontrado pela Equação 12.3*a* ou pela 12.4*b*.

$$p_c = \frac{\pi}{p_d} = \frac{\pi}{6} = 0,524 \text{ in} \qquad (b)$$

3 O passo de base medido na circunferência de base é (pela Equação 12.3*b*):

$$p_b = p_c \cos\phi = 0,524\cos(20°) = 0,492 \text{ in} \qquad (c)$$

4 Os diâmetros de referência e os raios de referência do pinhão e da engrenagem são encontrados pela Equação 12.4*a*.

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{19}{6} = 3,167 \text{ in}, \qquad r_p = \frac{d_p}{2} = 1,583 \text{ in} \qquad (d)$$

$$d_g = \frac{N_g}{p_d} = \frac{37}{6} = 6,167 \text{ in}, \qquad r_g = \frac{d_g}{2} = 3,083 \text{ in} \qquad (e)$$

5 A distância nominal entre os centros, C, é a soma dos raios de referência:

$$C = r_p + r_g = 4,667 \text{ in} \qquad (f)$$

6 O adendo e dedendo são encontrados pelas equações na Tabela 12-1:

$$a = \frac{1,0}{p_d} = \frac{1}{6} = 0,167 \text{ in}, \qquad b = \frac{1,25}{p_d} = \frac{1,25}{6} = 0,208 \text{ in} \qquad (g)$$

7 A profundidade total, h_t, é a soma do adendo e do dedendo.

$$h_t = a + b = 0,167 + 0,208 = 0,375 \text{ in} \qquad (h)$$

8 A folga é a diferença entre o dedendo e o adendo.

$$c = b - a = 0,208 - 0,167 = 0,042 \text{ in} \qquad (i)$$

9 O diâmetro externo de cada engrenagem é o diâmetro de referência mais dois adendos:

$$D_{o_p} = d_p + 2a = 3{,}500 \text{ in}, \qquad D_{o_g} = d_g + 2a = 6{,}500 \text{ in} \qquad (j)$$

10 A razão de contato é encontrada pelas Equações 12.2 e 12.7.

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{(r_p + a_p)^2 - (r_p \cos\phi)^2} + \sqrt{(r_g + a_g)^2 - (r_g \cos\phi)^2} - C \operatorname{sen}\phi \\ &= \sqrt{(1{,}583 + 0{,}167)^2 - (1{,}583 \cos 20)^2} \\ &\quad + \sqrt{(3{,}083 + 0{,}167)^2 - (3{,}083 \cos 20)^2} - 4{,}667 \operatorname{sen} 20 = 0{,}798 \text{ in} \end{aligned}$$

$$m_p = \frac{Z}{p_b} = \frac{0{,}798}{0{,}492} = 1{,}62 \qquad (k)$$

11 Se a distância entre centros for aumentada do valor nominal devido a erros de montagem ou outros fatores, o raio de referência efetivo mudará na mesma porcentagem. Os raios de base das engrenagens permanecerão os mesmos. O novo ângulo de pressão pode ser encontrado a partir da geometria modificada. Para um aumento de 2% na distância entre centros (1,02×):

$$\phi_{novo} = \cos^{-1}\left(\frac{r_{\text{círc. base}_p}}{1{,}02 r_p}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{r_p \cos\phi}{1{,}02 r_p}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cos 20°}{1{,}02}\right) = 22{,}89° \qquad (l)$$

12 Os arquivos EX12-01 encontram-se no CD-ROM deste livro.

12.5 TREM DE ENGRENAGENS

Um **trem de engrenagens** é qualquer coleção de duas ou mais engrenagens acopladas. Um par de engrenagens é, portanto, a forma mais simples de um trem de engrenagem e *usualmente está limitado a uma razão de cerca de* 10:1. O par de engrenagens se tornará maior e mais difícil de empacotar além da razão acima se o pinhão for mantido acima do número mínimo de dentes mostrado nas Tabelas 12-4 e 12-5. Os trens de engrenagens podem ser **simples, compostos** ou **epicíclicos**. O que se segue é uma breve revisão do projeto cinemático de trens de engrenagens. Para informações mais completas, ver a referência 4.

Trens de engrenagens simples

Em um trem de engrenagens simples, cada eixo carrega somente uma engrenagem. O exemplo mais básico de duas engrenagens desse tipo está mostrado na Figura 12-2. *A razão de velocidade* (também chamada de *razão do trem*) de um par de engrenagens é dada pela Equação 12.5*a*. A Figura 12-13 mostra um trem de engrenagens simples com cinco engrenagens em série. A Equação 12.8 mostra a expressão para a razão de velocidades deste trem:

$$m_V = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_3}{N_4}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right)\left(-\frac{N_5}{N_6}\right) = +\frac{N_2}{N_6} \qquad (12.8)$$

Cada par de engrenagem contribue potencialmente para a razão global do trem, mas no caso de um trem simples, os efeitos numéricos de todas as engrenagens, exceto a primeira e a última, cancelam-se. A razão de velocidades do trem simples é sempre apenas a razão da primeira engrenagem sobre a última. Somente o sinal da razão global de velocidades do trem é afetada pelas engrenagens intermediárias, que são chamadas de “vazias ou sem carga”, porque nenhuma

potência é tipicamente tirada de seus eixos. Se todas as engrenagens em um trem forem externas e se houver um número par de engrenagens no trem, a direção do movimento de saída será oposta àquela de entrada. Se houver um número ímpar de engrenagens externas no trem, a saída será na mesma direção que a entrada. Assim, uma engrenagem única, externa e vazia *de qualquer diâmetro* pode ser usada para mudar a direção da engrenagem de saída sem afetar sua magnitude de velocidade.

É prática comum inserir uma única engrenagem intermediária para mudar a direção, mas mais do que uma engrenagem vazia é supérfluo. Há pouca justificativa para projetar um trem de engrenagem como está mostrado na Figura 12-13. Se o que necessitamos é conectar dois eixos que estão bastante afastados, um simples trem de muitas engrenagens poderia ser usado, mas isso será muito mais caro que uma corrente ou uma correia para a mesma aplicação. Se o que necessitamos é obter uma razão de velocidades maior que aquela que poderíamos obter com um simples par de engrenagens, está claro, pela Equação 12.8, que um trem de engrenagens simples não nos ajudará.

FIGURA 12-13

Um trem de engrenagens simples.

Trem de engrenagens composto

Para obter uma razão de velocidades maior que cerca de 10:1 com engrenagens é necessário **compor o trem** (a menos que um trem de engrenagens epicíclico seja usado – ver a próxima seção). Em um **trem composto**, *pelo menos um eixo tem mais do que uma engrenagem.* Ele terá um arranjo paralelo ou série-paralelo, em vez das conexões puras em série do trem de engrenagens simples. A Figura 12-14*a* mostra um trem composto de quatro engrenagens, duas das quais, as engrenagens 3 e 4, estão postas no mesmo eixo e, assim, têm a mesma velocidade angular. A razão de velocidades do trem é agora

$$m_V = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right) \tag{12.9a}$$

FIGURA 12-14

Trens de engrenagens compostos de dois estágios: (*a*) sem reversão; (*b*) com reversão.

Isso pode ser generalizado para qualquer número de engrenagens no trem como

$$m_V = \pm \frac{\text{produto do número de dentes nas engrenagens motoras}}{\text{produto do número de dentes nas engrenagens movidas}} \qquad (12.9b)$$

Observe que essas razões intermediárias não se cancelam e a razão de velocidades global do trem é o produto das razões de pares de engrenagens paralelas. Assim, uma razão maior pode ser obtida no trem de engrenagens composto a despeito das limitações aproximadas de 10:1 nas razões individuais de pares de engrenamento. O sinal de mais ou menos na Equação 12.9*b* depende do número e tipo de engrenamentos no trem, se interno ou externo. Escrevendo-se a expressão na forma da Equação 12.9*a* e observando cuidadosamente o sinal de cada razão de engrenamento na expressão obteremos o sinal algébrico correto para a razão global de velocidades do trem.

Trens compostos revertidos

Na Figura 12-14*a*, os eixos de entrada e saída estão em locais diferentes. Isso pode ser aceitável e até mesmo desejável em alguns casos, dependendo das outras restrições de empacotamento no projeto global da máquina. Esse trem de engrenagens, cujos *eixos de entrada e saída não são coincidentes,* é chamado de **trem composto não revertido**. Em alguns casos, como em transmissões de automóveis, é desejável e até necessário ter *o eixo de saída concêntrico com o eixo de entrada,* como mostrado na Figura 12-14*b*. Isso é referido como "reversão de trem". O projeto de um **trem composto revertido** é mais complicado por causa da restrição adicional de que as distâncias entre os centros das partes devem ser iguais. Ver a referência 4 para mais informações.

EXEMPLO 12-2

Projetando um trem de engrenagens composto

Problema **Projete um trem de engrenagens composto de engrenagens cilíndricas retas para uma razão global de trem de 29:1.**

Dados **Use engrenagens de ângulo de pressão de 25° com um módulo de 3 mm em todos os estágios.**

Hipóteses **A maior razão em qualquer par de engrenagens deve ser limitada a cerca de 10:1. O número mínimo de dentes em cada pinhão é 12 (Tabela 12-4).**

Solução

1 A razão requerida é muito grande para um estágio (um par de engrenagens), mas no caso de dois, eles estarão, cada um, dentro da limitação 10:1. Podemos ter uma ideia das razões de engrenamento necessárias calculando a raiz quadrada da razão de trem desejada: $(29)^{0,5} = 5{,}385$. Assim, dois pares de engrenagens com essa razão serão suficientes.

2 Como o número de dentes em cada engrenagem deve ser inteiro, veja quão próximo podemos chegar da razão de engrenamento de 5,385:1 com combinações inteiras de dentes, começando com o menor pinhão possível:

$$\begin{aligned} 12(5{,}385) &= 64{,}622 \\ 13(5{,}385) &= 70{,}007 \\ 14(5{,}385) &= 75{,}392 \end{aligned} \qquad (a)$$

O segundo valor dessas combinações será muito próximo da razão correta quando arredondado para um inteiro.

3 Tente dois pares de engrenagens de 13t e 70t. Qual será a razão de trem?

$$\left(\frac{70}{13}\right)\left(\frac{70}{13}\right) = 28{,}994 \qquad (b)$$

4 Se isso for suficientemente próximo para a aplicação, o problema estará resolvido. A única situação na qual esse valor poderia não ser aceitável seria onde fosse requerida uma razão exata para prover uma função de cronometragem.

5 Observe que usar dois pares idênticos em um trem composto automaticamente reverte-o, permitindo que os eixos de entrada e saída sejam concêntricos.

Trens de engrenagens epicíclicos ou planetários

Os trens de engrenagens convencionais descritos nas seções prévias são todos dispositivos de um grau de liberdade (1-DOF). Outra classe de trem de engrenagem, o **trem epicíclico ou planetário**, tem amplas aplicações. Este é um dispositivo de 2-DOF. Duas entradas são necessárias para obter uma saída previsível. Em alguns casos, como o diferencial de automóveis, um eixo é provido (eixo motor) e duas saídas acopladas friccionalmente são obtidas (as duas rodas motoras).

Trens epicíclicos ou planetários têm diversas vantagens sobre trens convencionais, entre as quais estão a obtenção de razões de trem maiores em pacotes menores, reversão garantida e saídas simultâneas, concêntricas, bidirecionais a partir de uma entrada única unidirecional. Essas características fazem os trens planetários muito conhecidos como transmissões automáticas em automóveis e caminhões, etc.

A Figura 12-15*a* mostra um par de engrenagens convencionais de 1-DOF no qual o elo 1 está imobilizado como um elo de fixação. A Figura 12-15*b* mostra o mesmo par de engrenagens com o elo 1 agora livre para rodar como um **braço** que conecta duas engrenagens. Agora somente o pinhão está fixo e o sistema tem dois graus de liberdade, DOF = 2. Este se transformou em um trem **epicíclico** com uma **engrenagem sol** e uma **engrenagem planeta** orbitando ao redor do sol, mantido em sua órbita pelo **braço**. Duas entradas são requeridas. Normalmente, o braço e a engrenagem sol serão, cada um, comandados em alguma direção com alguma velocidade. Em muitos casos, uma dessas entradas terá velocidade zero,

(*a*) Engrenamento convencional

(*b*) Engrenamento planetário ou epicíclico

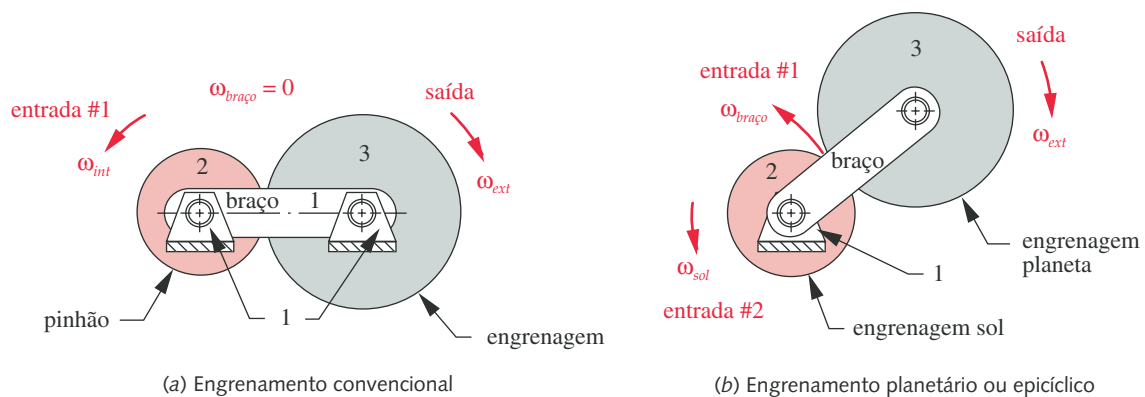



FIGURA 12-15

Pares de engrenamento convencional são casos especiais dos engrenamentos planetários ou epicíclicos.

isto é, um freio aplicado ao braço ou à engrenagem sol. Observe que uma entrada de velocidade nula para o braço meramente transforma o trem epicíclico em um trem convencional de engrenagens, como mostrado na Figura 12-15*a*. Assim, o trem de engrenagem convencional é simplesmente um caso especial de um trem epicíclico, mais complexo, no qual o braço é mantido estacionário.

No exemplo simples de um trem epicíclico na Figura 12-15, a única engrenagem deixada para atuar como saída, depois de pôr as entradas de movimento na engrenagem sol e no braço, é a engrenagem planeta. É um pouco difícil obter uma saída útil de movimento dessa engrenagem planeta, porque seu pino está em movimento. Uma configuração mais útil está mostrada na Figura 12-16, para a qual uma engrenagem anel foi adicionada. Essa **engrenagem anel** engrena com a engrenagem planeta e pinos concêntricos com o pinhão, assim ela pode ser facilmente utilizada como um membro de saída de movimento. A maioria dos trens planetários será arranjada com engrenagens anel para trazer o movimento planetário de regresso ao pino fixo. Observe como a engrenagem sol, a engrenagem anel e o braço são todos dispostos como eixos concêntricos vazados de forma que cada um possa ser acessado para utilizar sua velocidade angular e torque tanto como entrada quanto como saída.

Ao mesmo tempo que é relativamente fácil visualizar o fluxo de potência através de um trem de engrenagens convencional e observar as direções de movimento de suas engrenagens-membros, é muito difícil determinar o comportamento de um trem planetário por simples observação. Devemos fazer os cálculos necessários para determinar seu comportamento e podemos nos surpreender com os frequentes resultados contra-intuitivos. Sendo que as engrenagens estão rodando com respeito ao braço, e o braço em si tem movimento, a equação da velocidade relativa deve ser usada:

$$\omega_{engrenagem} = \omega_{braço} + \omega_{engrenagem/braço} \tag{12.10}$$

As Equações 12.10 e 12.5*a* são todas as necessárias para determinar as velocidades em um trem epicíclico, desde que o número de dentes e duas condições de entrada sejam conhecidas. Rearranje a Equação 12.10 para obter a diferença

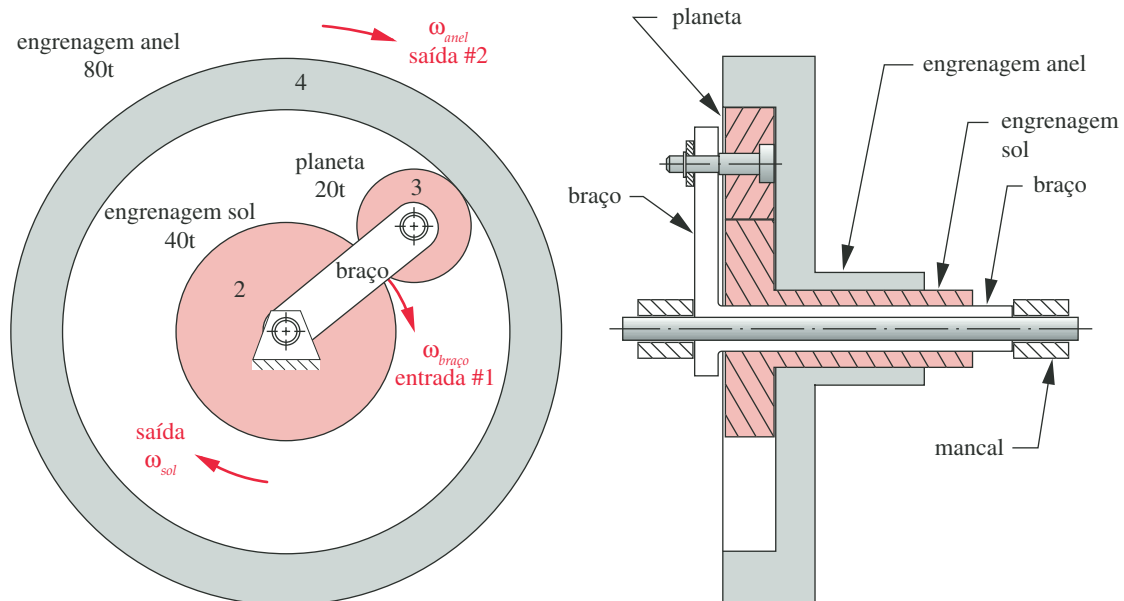



FIGURA 12-16

Trem de engrenagens planetário com engrenagem anel usada como saída.

de velocidades. Então, faça ω_F representar a velocidade angular da primeira engrenagem no trem (escolhida em qualquer extremidade) e ω_L representar a velocidade angular da última engrenagem no trem (na outra extremidade).

Para a primeira engrenagem no sistema:

$$\omega_{F/braço} = \omega_F - \omega_{braço} \tag{12.11a}$$

Para a última engrenagem no sistema:

$$\omega_{L/braço} = \omega_L - \omega_{braço} \tag{12.11b}$$

Dividindo a última pela primeira:

$$\frac{\omega_{L/braço}}{\omega_{F/braço}} = \frac{\omega_L - \omega_{braço}}{\omega_F - \omega_{braço}} = m_V \tag{12.11c}$$

Isso resulta em uma expressão para a razão global do trem m_V. A parte mais à esquerda da Equação 12.1*c* envolve apenas os termos de diferença de velocidade, que são negativos para o braço. Esta fração é igual à razão dos produtos dos números de dentes desde a primeira até a última engrenagem no trem (como definido na Equação 12.9*b*), que pode ser substituída pelo lado mais à esquerda da Equação 12.11*c*.

$$\pm\frac{\text{produto do número de dentes em engrenagens motoras}}{\text{produto do número de dentes em engrenagens movidas}} = \frac{\omega_L - \omega_{braço}}{\omega_F - \omega_{braço}} \tag{12.12}$$

A Equação 12.12 pode ser resolvida para qualquer uma das três variáveis no lado direito, desde que as outras duas estejam definidas como entradas para este trem de engrenagem de 2 graus de liberdade (2-DOF). Devem ser conhecidas ou a velocidade do braço e de uma das engrenagens ou as velocidades das duas engrenagens, a primeira e a última (como designadas). Outra limitação deste método é que ambas as engrenagens escolhidas, a primeira e a última, devem ser pivotadas ao chão (não estarem orbitando), e deve haver um passo de engrenamento conectando-as, o que pode incluir engrenagens planetas orbitando.

EXEMPLO 12-3

Analisando um trem de engrenagens epicíclico

Problema **Determine a razão de trem entre a engrenagem sol e o braço para o trem epicíclico na Figura 12-16.**

Dados **A engrenagem sol tem 40 dentes, a planeta tem 20 dentes e a engrenagem anel tem 80 dentes. O braço é a entrada e a sol é a saída. A engrenagem anel é mantida estacionária.**

Hipóteses **A engrenagem sol é a primeira engrenagem no trem e a engrenagem anel é a última. Faça o braço ter uma velocidade angular, ω, de 1 rpm. A razão do trem desejada é sol/braço.**

Solução

1 A Equação 12.12 define a cinemática de um trem epicíclico:

$$\left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(+\frac{N_3}{N_4}\right) = \frac{\omega_L - \omega_{braço}}{\omega_F - \omega_{braço}}$$

$$\left(-\frac{40}{20}\right)\left(+\frac{20}{80}\right) = \frac{0-1}{\omega_F - 1} \tag{a}$$

$$\omega_F = 3$$

que define a razão de trem como +3. A engrenagem sol roda três vezes mais rápida e na mesma direção que o braço. Observe os sinais nas razões de engrenamento. Um é um par externo (–) e um é um par interno (+).

2 Os arquivos EX12-03 encontram-se no CD-ROM deste livro.

12.6 FABRICAÇÃO DE ENGRENAGENS

Vários métodos são usados para a fabricação de engrenagens. Eles podem ser dividido em duas categorias, conformação e usinagem. A usinagem se divide em operações brutas e de acabamento. A conformação se refere à fundição direta, moldagem, estampagem ou extrusão das formas dos dentes em molde, sinterizados ou materiais abrandados termicamente. A usinagem bruta e a de acabamento são técnicas de remoção de material usadas para cortar ou polir a forma do dente em um disco sólido à temperatura ambiente. Os métodos brutos são frequentemente usados em separado, sem nenhuma operação de acabamento subsequente para engrenagens que não requerem precisão. A despeito do nome, os processos grosseiros na verdade criam um dente de engrenagem suave e preciso. Apenas quando são requeridos alta precisão e funcionamento silencioso adiciona-se e justifica-se o custo de operações secundárias de acabamento.

Dentes de engrenagem por conformação

Em todas as operações de conformação de dentes, os dentes na engrenagem são feitos todos ao mesmo tempo a partir de um molde ou guia no qual as formas do dente foram usinadas. A precisão dos dentes é inteiramente dependente da qualidade da guia (matriz) ou molde e, em geral, é muito menor do que aquela que pode ser obtida pelos métodos grosseiros e de acabamento. A maioria destes métodos tem um alto custo ferramental, fazendo com que sejam somente convenientes para produção de altas quantidades. Ver o Capítulo 2 para uma discussão mais geral destes processos de fabricação.

Fundição Dentes podem ser fundidos em areia ou em matrizes fundidas de vários materiais. A vantagem é o baixo custo, mesmo porque a forma do dente é construída no molde. Normalmente, não são feitas operações de acabamento nos dentes após a fundição, embora isso possa ocorrer. Os dentes resultantes são de baixa precisão e são usados somente em aplicações não críticas como brinquedos e pequenos eletrodomésticos ou betoneiras de misturar concreto, onde o barulho e a folga de engrenamento não são prejudiciais para a operação. A fundição em areia é uma maneira econômica de obter engrenagens de dentes de baixa qualidade e em pequenas quantidades, sendo que os custos das ferramentas são razoáveis, mas o acabamento superficial e a precisão dimensional são muito pobres. A fundição em moldes permite um melhor acabamento superficial e precisão que a fundição em areia, mas tem custos ferramentais mais elevados, requerendo um volume de produção maior para justificar seu uso.

Fundição em molde de cera Também conhecida como fundição de cera perdida, pode produzir engrenagens razoavelmente precisas em uma grande variedade de materiais. O molde é feito de material refratário que permite que materiais de alta temperatura de fusão sejam fundidos. A precisão é uma função do padrão mestre usado para fazer o molde.

Sinterização Metais em pó são prensados em cavidades metálicas moldadas na forma de engrenagens, removidos e pré-aquecidos (sinterizados) para aumentar sua resistência. Essas engrenagens de metais em pó têm precisão similar às engrenagens de moldes fundidos, mas as propriedades dos materiais podem ser

controladas pela mistura de vários pós metálicos. Esta técnica é tipicamente usada para engrenagens de pequeno tamanho.

Molde de injeção É usado para fazer engrenagens não metálicas em vários termoplásticos como o *náilon* e o acetal. São engrenagens de baixa precisão em tamanhos pequenos, mas elas têm a vantagem do custo baixo e podem ser movidas sem lubrificante com cargas pequenas.

Extrusão É usada para formar dentes em eixos longos, que são então cortados em tamanhos utilizáveis e usinados para chavetas, etc. Materiais não ferrosos como o alumínio e ligas de cobre são comumente extrudados em lugar dos aços.

Repuxe a frio Forma dentes em barras de aço ao repuxá-las através de guias endurecidas. O trabalho a frio aumenta a resistência e reduz a ductilidade. As barras, a seguir, são cortadas em tamanhos úteis e usinadas para os orifícios, chavetas, etc.

Estampagem Lâminas metálicas podem ser estampadas com as formas de dentes para fazer engrenagens de baixa precisão e a baixo custo em grandes quantidades. O acabamento superficial e precisão são pobres.

Usinagem

A maior parte das engrenagens metálicas usadas para transmitir potência em maquinárias é feita por um processo de usinagem do material fundido, forjado ou discos laminados a quente. Processos grosseiros incluem fresamento da forma do dente com cortadores de forma ou geradores de forma com um cortador de cremalheira, um cortador de forma ou uma fresa caracol. Os processos de acabamento incluem polimento, brunimento, lapidação, amolamento ou retificação. Cada um desses métodos será descrito brevemente.

Processos grosseiros

Fresamento de forma Requer um cortador de fresa de forma, como mostrado na Figura 12-17, 1. O cortador deve ser feito para a forma do vão do dente da engrenagem, para a geometria do dente e para o número de dentes de cada engrenagem em questão. O cortador em rotação é mergulhado no disco para cortar um dente por vez. O disco da engrenagem é, então, rotado através de um passo circular e o próximo dente é cortado. Como é necessário um cortador de forma diferente para cada tamanho de engrenagem a ser feita, o custo das ferramentas se torna alto. Para reduzir custos, o mesmo cortador é frequentemente usado para engrenagens de tamanhos múltiplos, resultando em erros de perfil para todos os números de dentes, exceto um. Este método é o menos preciso dos métodos grosseiros.

Geração por cremalheira Um cortador de cremalheira para qualquer passo de involuta pode ser facilmente construído, mesmo porque a forma de seu dente é um trapézio (ver a Figura 12-6). A cremalheira endurecida e afiada (ver Figura 12-17, 2) é então movida alternadamente, para frente e para trás, ao longo do eixo do disco da engrenagem e avança sobre ele ao mesmo tempo em que é rodada ao redor do disco de modo a gerar o dente de involuta na engrenagem. A cremalheira e o disco devem ser periodicamente reposicionados para completar a circunferência. Esse reposicionamento pode introduzir erros na geometria do dente, tornando este método menos preciso que outros a serem discutidos.

Geração de engrenagem Usa uma ferramenta cortante na forma de uma engrenagem (ver 3 na Figura 12-17), que é movida para frente e para trás axialmente através do disco para cortar os dentes enquanto o disco roda ao redor da ferramenta cortante, como mostrado na Figura 12-18. É um processo

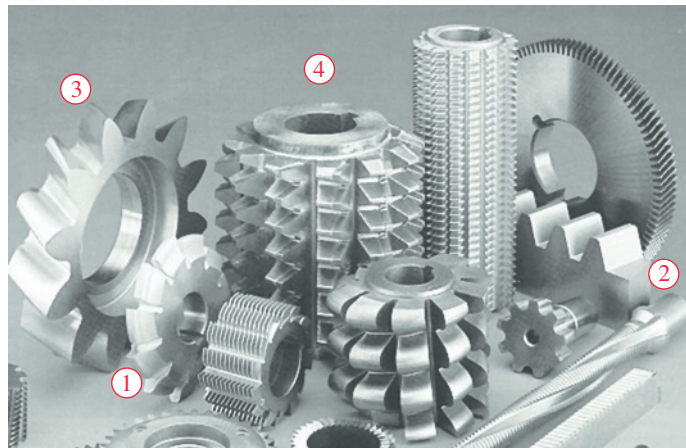



FIGURA 12-17

Uma coleção de ferramentas de corte de engrenagens: 1 – Cortador de fresa, 2 – Cortador de cremalheira, 3 – Cortador de geração, 4 – Caracol. (Cortesia do Pfauter-Maag Cutting Tools Limited Partership, Loves Park, Ill.)

verdadeiro de geração de forma no qual a ferramenta de formato do dente corta a si mesma no engrenamento com um disco. A precisão é boa, mas quaisquer erros, mesmo em um dente do cortador de forma, serão transferidos diretamente para a engrenagem. Engrenagens internas também podem ser cortadas com este método.

Geração por fresa caracol Um caracol (4, na Figura 12-17) é análogo a uma rosca cônica. Seus dentes são feitos para igualar o vão de dente e são interrompidos com ranhuras para permitir as superfícies cortantes. Ele roda ao redor de um eixo perpendicular àquele do disco da engrenagem, cortando no disco que gira para gerar o dente. É o método mais preciso dos processos grosseiros, até porque nenhum reposicionamento da ferramenta ou disco é requerido e cada dente é cortado por múltiplos dentes de caracol, dando uma média para quaisquer erros da ferramenta. Excelente acabamento superficial pode ser conseguido por este método, e é um dos mais usados para a produção de engrenagens.

Processos de acabamento

Quando alta precisão é requerida, operações secundárias podem ser feitas nas engrenagens feitas por qualquer um dos métodos grosseiros anteriores. Operações

FIGURA 12-18

Um gerador de engrenagem cortando uma engrenagem helicoidal. (Cortesia da Pfauter-Maag Cutting Tools, Ltd Prtship, Loves Park, Ill.)

ade acabamento geralmente removem pouco ou nenhum material, mas melhoram a precisão dimensional, o acabamento superficial e/ou a dureza.

Polimento (Rebarbamento) É similar ao processo de dar forma às engrenagens, mas usa ferramentas precisas de polimento para remover pequenas quantidades de material de uma engrenagem bruta para corrigir erros de perfil e melhorar o acabamento.

Retificação Usa uma roda de retificação de contorno que é passada sobre a superfície usinada dos dentes de engrenagem, normalmente controlada pelo computador, para remover pequenas quantidades de material e melhorar o acabamento superficial. Pode ser usada em engrenagens que foram endurecidas depois da geração para corrigir distorções devidas ao tratamento térmico, bem como atingir as outras vantagens listadas acima.

Brunimento Faz-se girar a engrenagem de usinagem grosseira contra uma engrenagem especialmente endurecida. As altas forças na interface do dente podem causar escoamento plástico na superfície do dente de engrenagem, que melhora o acabamento e endurece a superfície, criando tensões residuais benéficas de compressão.

Lapidação e polimento Ambos empregam uma engrenagem impregnada de material abrasivo ou uma ferramenta na forma de engrenagem que gira contra a engrenagem para causar a abrasão da superfície. Em ambos os casos, a ferramenta abrasiva guia a engrenagem na medida necessária para um processo acelerado e controlado a fim de melhorar o acabamento superficial e a precisão.

Qualidade da engrenagem

A norma 2000-A88 da AGMA define as tolerâncias dimensionais para os dentes de engrenagem e um índice de qualidade Q_v que varia desde a menor qualidade (3) até a maior precisão (16). O método de fabricação essencialmente determina o índice de qualidade Q_v da engrenagem.

Engrenagens geradas terão, normalmente, índice de qualidade de 3-4. As engrenagens feitas pelos métodos grosseiros listados anteriormente geralmente caem dentro de um intervalo de Q_v de 5-7. Se as engrenagens forem acabadas por polimento ou retífica, Q_v pode estar no intervalo 8-11. Lapidação e amolamento podem atingir os índices de qualidade mais elevados. Obviamente, o custo da engrenagem será uma função de Q_v.

A Tabela 12-6 mostra os índices de qualidade recomendados pela AGMA para várias aplicações comuns de engrenagens. Uma outra maneira de selecionar o índice de qualidade conveniente se baseia na velocidade linear dos dentes de engrenagem no ponto de referência, chamado de velocidade da linha de referência. Imprecisões no espaçamento do dente causarão impactos entre os dentes, e as forças de impacto aumentam a velocidades mais elevadas. A Tabela 12-7 mostra índices de qualidade de engrenagem recomendados como uma função da velocidade da linha de referência de engrenamento. Engrenagens cilíndricas retas raramente são usadas com velocidades da linha de referência maiores que 10000 ft/min (50 m/s), devido ao barulho excessivo e à vibração. É preferível utilizar engrenagens helicoidais (discutidas no próximo capítulo) para tais aplicações.

A qualidade da engrenagem pode ter um efeito significativo na divisão de cargas entre dentes. Se os vãos dos dentes não forem precisos e uniformes, os dentes em engrenamento não estarão todos em contato simultâneo. Isso mostrará sem dúvidas a vantagem de uma razão de contato grande. A Figura 12-19 mostra duas engrenagens com razão de contato grande, mas com baixa precisão.

Tabela 12-6
Números de qualidade de engrenagem recomendados pela AGMA para várias aplicações

Aplicação	Q_v
Acionador do tambor do misturador de cimento	3-5
Forno de cimento	5-6
Acionadores de fresa de aço	5-6
Selecionador de milho	5-7
Guindaste	5-7
Prensa de esmagamento	5-7
Esteira de mineração	5-7
Máquina de fabricação de caixa de papel	6-8
Mecanismo do medidor de gás	7-9
Furadeira de baixa potência	7-9
Máquina de lavar roupas	8-10
Prensa de impressão	9-11
Mecanismo de computador	10-11
Transmissão de automóveis	10-11
Acionador de antena de radar	10-12
Acionador de propulsor marítmo	10-12
Acionador de motor de avião	10-13
Giroscópio	12-14

Tabela 12-7
Números de qualidade de engrenagem recomendados para velocidade de linha de referência

Velocidade de referência	Q_v
0-800 fpm	6-8
800-2000 fpm	8-10
2000-4000 fpm	10-12
mais de 4000 fpm	12-14

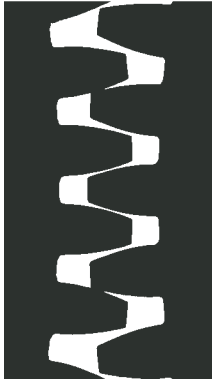



FIGURA 12-19

Engrenamento verdadeiro de dentes de engrenagens retas mostrando uma divisão pobre da carga devido a imperfeições de dente. (Fonte: R. L.Thoen, "Minimizing Backlash in Spur Gears", *Gear Technology*, May/June 1994, p. 27, com autorização.)

Apenas um par de dentes está em contato e recebendo a carga na mesma direção. Os outros no engrenamento não estão recebendo nenhuma carga. A despeito de uma razão de contato de cerca de 5, a razão de contato verdadeira neste ponto do engrenamento é somente 1.

12.7 CARREGAMENTO EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS RETAS

A análise do carregamento nos dentes das engrenagens acopladas pode ser feita pelos métodos padronizados de análise de carga, como discutido no Capítulo 3, usando as Equações 3.2 ou 3.3, como apropriado. Discutiremos apenas brevemente suas aplicações aos dentes de engrenagem. A Figura 12-20 mostra um par de dentes de engrenagem. Os dentes estão de fato engrenados (em contato) no ponto de referência, mas são mostrados separados para facilitar a explicação. O torque T_p está sendo passado pelo pinhão para a engrenagem. Ambos são mostrados em diagrama de corpo livre. No ponto de referência, a única força que pode ser transmitida de um dente a outro, negligenciando o atrito, é a força W que atua ao longo da linha de ação no ângulo de pressão. Essa força pode ser resolvida em duas componentes, W_r atuando na direção radial e W_t na direção tangencial. A magnitude da componente tangencial W_t pode ser encontrada por

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2p_d T_p}{N_p} \tag{12.13a}$$

onde T_p é o torque no eixo do pinhão, r_p é o raio de referência (primitivo), d_p é o diâmetro de referência (primitivo), N_p o número de dentes e p_d é o passo diametral do pinhão.

A componente radial W_r é

$$W_r = W_t \tan\phi \tag{12.13b}$$

e a força resultante W é

$$W = \frac{W_t}{\cos\phi} \tag{12.13c}$$

Observe que a Equação 12.13*a* poderia também ter sido escrita para a engrenagem em vez do pinhão, porque a força W é igual e oposta na engrenagem e no pinhão.

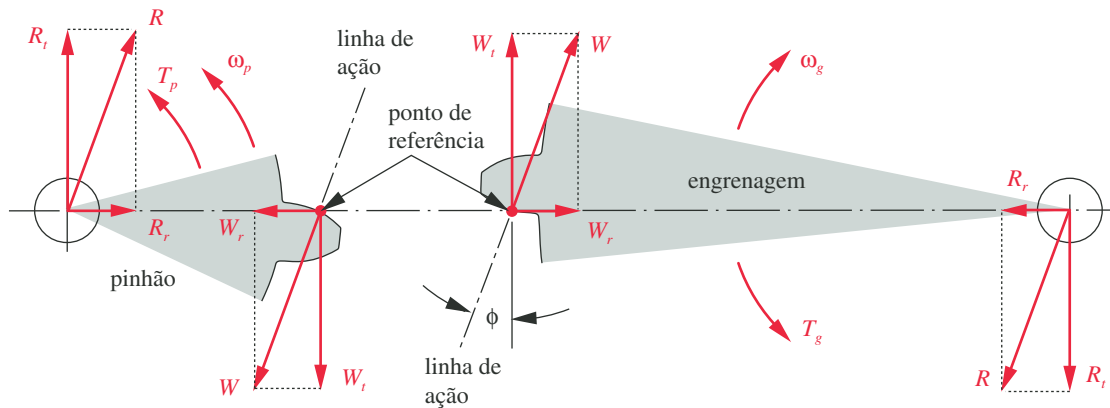



FIGURA 12-20

Forças no pinhão e na engrenagem em um par acoplado (engrenagens foram separadas para ilustração – pontos de referência estão na verdade em contato).

A força de reação R e suas componentes R_t e R_r nos pivôs são iguais e opostas às forças correspondentes que atuam no ponto de referência da respectiva engrenagem ou pinhão. As forças no pinhão são iguais e opostas àquelas que atuam sobre a engrenagem.

Dependendo da razão de contato, os dentes podem receber toda ou parte da carga W em qualquer localização da ponta do dente para um ponto próximo ao círculo de dedendo à medida que ela roda no engrenamento. Obviamente, a pior condição de carregamento é quando W atua na ponta dos dentes. Então, a componente tangencial W_t tem o maior braço de momento possível atuando no dente como uma viga em balanço. O momento fletor e a força de cisalhamento transversal devido à flexão serão ambas máximas na raiz do dente. Para razões de contato > 1, haverá um ponto máximo de contato de um único dente (HPSTC) em algum lugar abaixo da ponta, e este criará o momento fletor máximo em qualquer dente, admitindo que as precisões de fabricação das engrenagens sejam suficientemente boas para permitir a divisão da carga. Se os dentes forem de baixa qualidade, como mostrado na Figura 12-19, então o carregamento da ponta do dente com o valor total de W ocorrerá sem importar a razão de contato.

Mesmo se o torque T_p for constante com o tempo, cada dente experimentará carregamentos repetidos à medida em que este entrar em engrenamento, criando uma situação de fadiga de carregamento. A função momento fletor-tempo de um par será como mostrado na Figura 12-21*a*. Haverá componentes médias (M_m) e alternantes (M_a) iguais de momento fletor. Existe alguma vantagem em evitar valores inteiros da razão de engrenamento m_G para pares a fim de evitar o contato dos mesmos dentes a cada m_G revoluções. Razões não inteiras distribuirão o contato mais uniformemente entre todos os dentes.

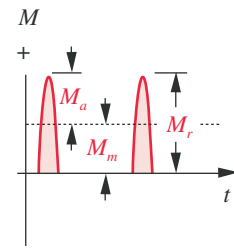
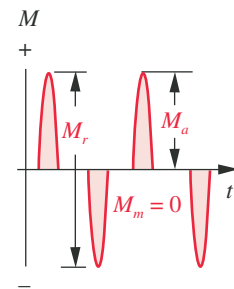
Se uma engrenagem intermediária (morta) for inserida entre o pinhão e a engrenagem para mudar a direção do movimento, cada um dos dentes dessa engrenagem experimentará um momento completamente invertido, como mostrado na Figura 12-21*b*, por causa da força W que atua em lados opostos de cada dente da engrenagem intermediária em engrenamentos alternados. Observe que o intervalo M_r da magnitude do momento na engrenagem intermediária é duas vezes aquele das engrenagens não intermediárias, tornando-a uma engrenagem carregada com maior carga, embora seu momento médio seja zero. O mesmo é verdadeiro para as engrenagens planetas, como mostrado na Figura 12-16.

(*a*) Momento repetido em dente de engrenagem intermediária

(*b*) Momento invertido em dente de engrenagem intermediária

FIGURA 12-21

Variação no tempo dos momentos fletores nos dentes da engrenagem.

EXEMPLO 12-4

Análise da carga de um trem de engrenagens retas

Problema **Determine os torques e as cargas transmitidas nos dentes de engrenagem em um trem de 3 engrenagens contendo um pinhão, uma engrenagem vazia e uma engrenagem. Encontre os diâmetros das engrenagens e as componentes média e alternante da carga transmitida em cada engrenagem.**

Dados **O eixo do pinhão passa 20 hp a 2500 rpm. A razão de trem é 3,5:1. O pinhão tem 14 dentes, um ângulo de pressão de 25° e p_d = 6. A engrenagem vazia tem 17 dentes.**

Hipóteses **O pinhão engrena com a engrenagem vazia e esta engrena com a engrengem.**

Solução

1 Encontre o número de dentes da engrenagem a partir da informação dada:

$$N_g = m_G N_p = 3{,}5(14) = 49 \text{ dentes} \qquad (a)$$

2 O torque no eixo do pinhão é encontrado pela Equação 10.1:

$$T_p = \frac{P}{\omega_p} = \frac{20 \text{ hp} \left(6600 \ \frac{\text{in-lb}}{\text{s}} \Big/ \text{hp}\right)}{2500 \text{ rpm} \left(2\pi/60\right) \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Big/ \text{rpm}} = 504 \text{ lb-in} \qquad (b)$$

3 O torque de saída é

$$T_g = m_G T_p = 3{,}5(504) = 1765 \text{ lb-in} \qquad (c)$$

4 Os diâmetros de referência são

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{14}{6} = 2{,}33 \text{ in} \qquad d_i = \frac{17}{6} = 2{,}83 \text{ in} \qquad d_g = \frac{49}{6} = 8{,}17 \text{ in} \qquad (d)$$

5 A carga transmitida é a mesma em todas as três engrenagens e pode ser encontrada a partir do torque e raio da qualquer uma das engrenagens:

$$W_t = \frac{T_p}{d_p/2} = \frac{504}{2{,}33/2} = 432 \text{ lb} \qquad (e)$$

6 A componente radial de carga é

$$W_r = W_t \operatorname{tg} \phi = 432 \operatorname{tg} 25° = 202 \text{ lb} \qquad (f)$$

7 A carga total é

$$W = \frac{W_t}{\cos\phi} = \frac{432}{\cos 25°} = 477 \text{ lb} \qquad (g)$$

8 As cargas repetidas em qualquer dente do pinhão ou engrenagem são

$$W_{t_{alternante}} = \frac{W_t}{2} = 216 \text{ lb} \qquad W_{t_{média}} = \frac{W_t}{2} = 216 \text{ lb} \qquad (h)$$

9 As cargas completamente revertidas na engrenagem vazia são

$$W_{t_{alternante}} = W_t = 432 \text{ lb} \qquad W_{t_{média}} = 0 \text{ lb} \qquad (i)$$

10 Os arquivos EX12-04 encontram-se no CD-ROM deste livro.

12.8 TENSÕES EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS RETAS

Há dois modos de falha que afetam os dentes de engrenagem: **fratura por fadiga** devido às tensões variadas de flexão na raiz do dente e **fadiga superficial** (crateração) das superfícies do dente. Ambos os modos de falha devem ser verificados quando se projetam engrenagens. A fratura de fadiga devido à flexão pode ser prevenida com um projeto apropriado mantendo-se o estado de tensão dentro da linha modificada de Goodman para o material, como discutido no Capítulo 6. Sendo que a maioria das engrenagens altamente carregadas são feitas de materiais ferrosos que têm um limite de resistência à fadiga por flexão, pode-se obter vida infinita para cargas de flexão. Contudo, como foi discutido no Capítulo 7, os materiais não exibem um limite de resistência à fadiga para tensões repetidas de contato de superfície. Assim, não é possível projetar engrenagens para vida infinita contra a falha superficial. Um par de engrenagens propriamente projetadas não devem nunca fraturar um dente em serviço normal (salvo por sobrecargas maiores que aquelas que elas foram projetadas para suportar), mas deve-se esperar que elas falhem mais cedo ou mais tarde por um dos mecanismos de desgaste discutidos no Capítulo 7. A crateração é o modo mais comum de falha, embora

possa ocorrer desgaste por abrasão ou adesivo (marcas), especialmente se as engrenagens não forem lubrificadas em serviço adequadamente. Enfocaremos cada um dos dois principais modos de falha por vez, usando os procedimentos recomendados pela AGMA.

Tensões de flexão

A EQUAÇÃO DE LEWIS A primeira equação útil para as tensões de flexão em um dente de engrenagem foi desenvolvida por W. Lewis em 1892. Ele reconheceu que o dente é uma viga em balanço com sua seção crítica na raiz. Começando com a equação da tensão de flexão em uma viga em balanço, ele derivou o que é agora conhecido como a equação de Lewis:

$$\sigma_b = \frac{W_t \, p_d}{FY} \tag{12.14}$$

onde W_t é a força tangencial no dente, p_d é o passo diametral, F é a largura da face e Y é um fator adimensional da geometria, definido por ele, e agora chamado de fator de forma de Lewis. Esse fator de forma levou em conta a geometria do dente para determinar sua resistência efetiva no filete da raiz. Ele publicou uma tabela dos valores de Y para engrenagens de diferentes ângulos de pressão e número de dentes.[5] Observe que a componente radial W_r é ignorada, porque ela põe o dente em compressão e atua para reduzir a perigosa tensão de tração de flexão. Assim, ignorar a tensão radial é conservativo e também simplifica a análise.

A equação de Lewis não é mais usada em sua forma original, mas ela serve como base para uma versão mais moderna como definida pela AGMA e baseada no trabalho de Lewis e muitos outros. Os princípios da equação de Lewis ainda são válidos, mas ela foi aumentada com fatores adicionais para levar em conta mecanismos de falha que só foram entendidos mais tarde. Seu fator de forma Y foi suplantado por um novo fator geométrico J, que inclui os efeitos da concentração de tensão na raiz do filete.[3] A concentração de tensão, nos dias de Lewis, ainda não tinha sido descoberta.

A EQUAÇÃO DE TENSÕES DE FLEXÃO DA AGMA como definida no Padrão 2001-B88 da AGMA é válida somente para certas hipóteses a respeito do dente e da geometria de engrenamento:

1 A razão de contato está entre 1 e 2.
2 Não há interferência entre as pontas e os filetes de raiz dos dentes acoplados e não há adelgaçamento dos dentes abaixo do início teórico do perfil ativo.
3 Nenhum dente é pontudo.
4 A folga de engrenamento não é nula.
5 Os filetes da raiz são padronizados, supõe-se que sejam suaves, e são produzidos por um processo de geração.
6 As forças de atrito são desprezadas.

A primeira suposição vem a despeito do anseio teórico de razões de contato elevadas, porque a partição real da carga entre dentes em tais situações está sujeita a fatores de precisão e rigidez do dente que são difíceis de prever, transformando o problema em indeterminado. A suposição 1 é, então, conservadora com respeito a razões de contato mais elevadas. A hipótese 2 limita a análise das combinações pinhão-engrenagem que obedecem às limitações do número mínimo de dentes descritas na Tabela 12-4 e 12-5. Se o número de dentes necessário for menor por razões de empacotamento, então devem ser usados dentes com

dedendos desiguais e o método AGMA deve ser aplicado com o fator de geometria apropriado J usado na equação. A hipótese 3 trata dos limites de pinhões de adendos desiguais. A hipótese 4 reconhece que as engrenagens sem folga de engrenamento não girarão juntas livremente devido ao atrito excessivo. A hipótese 5 leva em conta o uso de fatores de concentração de tensão para filetes de raiz baseados no trabalho de Dolan e Broghammer.[6] A hipótese 6 é autoexplicativa. Além disso, este método é válido apenas para dentes de engrenagens externos. A geometria de dentes de engrenagens internos é suficientemente diferente para requerer um outro enfoque para o cálculo das tensões de flexão. Ver a padronização da AGMA para mais informações.

A equação AGMA das tensões de flexão difere ligeiramente para as especificações SI e estadunidenses de engrenagens devido à relação recíproca entre o passo diametral e o módulo. Listamos ambas as versões com sufixos *us* ou *si* no número das equações onde aplicável

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{12.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{12.15si}$$

A essência desta equação é a fórmula de Lewis com um fator de geometria J atualizado substituindo seu fator de forma Y. W_t, F e p_d têm o mesmo significado que na Equação 12.14 e m é o módulo métrico. Os fatores K são modificadores para levar em conta diversas condições. Discutiremos agora cada um dos termos empíricos na Equação 12.15.

Fator geométrico de resistência de flexão J O fator geométrico J pode ser calculado por um algoritmo complicado definido na Norma 908-B89 da AGMA. O mesmo padrão também fornece as tabelas dos fatores J para dentes padronizados de profundidade completa e para dentes de adendos desiguais de 25% e 50%, todos com 14,5, 20 e 25° de ângulo de pressão. Os fatores J variam com o número de dentes no pinhão e na engrenagem e são dados somente para o intervalo de combinações que obedece a hipótese 2. A AGMA recomenda que as combinações de número de dentes que criam interferência sejam evitadas.

As Tabelas 12-8 até 12-15* replicam os fatores de geometria J da AGMA para um subconjunto de combinações de dentes de engrenagem cobertos na norma. Nestas oito tabelas, dois projetos de dentes de engrenagem são cobertos (dente de profundidade completa e dente de adendo 25% mais comprido), cada um para dois ângulos de pressão (20 e 25°) e ambos para carregamento de ponta de dente e para carregamento no ponto mais alto de contato de um único dente (HPSTC). Ver a norma para outras combinações.

Observe nestas tabelas que os fatores J são diferentes para o pinhão e a engrenagem (rotulados P e G) em cada combinação de engrenamento. Isso resulta em níveis de tensão de flexão diferentes nos dentes do pinhão e nos dentes da engrenagem. A letra U nas tabelas indica que o adelgaçamento ocorre com aquela combinação devido à interferência entre a ponta do dente da engrenagem e o flanco da raiz do pinhão. A escolha entre os fatores J HPSTC ou ponta-carregada deve basear-se na precisão de fabricação do par de engrenagens. Se as tolerâncias de fabricação são pequenas (engrenagens de alta precisão), então a divisão de cargas entre os dentes pode ser aceita e as tabelas HPSTC, usadas. Se não, então é provável que somente um par de dentes carregará toda a carga na ponta no pior caso, como visto na Figura 12-19. Ver a Norma 908-B89 da AGMA para mais

* Extraído da Folha de Informações da Norma 908-B89 AGMA, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth,* com autorização dos editores, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

informações a respeito de variações aceitáveis de fabricação no passo de base para assegurar HPSTC.

Fator dinâmico K_v O fator dinâmico K_v tenta levar em conta as cargas de vibração geradas internamente pelos impactos de dente contra dente induzidos pelo engrenamento não conjugado dos dentes de engrenagem. Essas cargas de vibração são chamadas de **erros de transmissão** e serão piores em engrenagens de baixa precisão. As engrenagens precisas se aproximarão mais do ideal de transmissão de torque suave e de razão de velocidade constante. Na ausência de dados experimentais que definam o nível de erro da transmissão a ser esperado em um projeto de engrenagem, o projetista deve estimar o fator dinâmico. A AGMA provê curvas empíricas para K_v como uma função da velocidade V_t da linha de passo. A Figura 12-22* mostra uma família dessas curvas, que variam com o índice de qualidade Q_v do engrenamento. As equações empíricas para as curvas numeradas de 6 até 11 na Figura 12-22 são

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}}\right)^B \tag{12.16us}$$

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{200V_t}}\right)^B \tag{12.16si}$$

onde V_t é a velocidade da linha de passo de engrenamento em unidades de ft/min (US) ou m/s (SI). Os fatores A e B são definidos como

$$A = 50 + 56(1 - B) \tag{12.17a}$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \qquad \text{para} \quad 6 \le Q_v \le 11 \tag{12.17b}$$

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth,* com autorização dos editores, American Gear Manufacturing Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

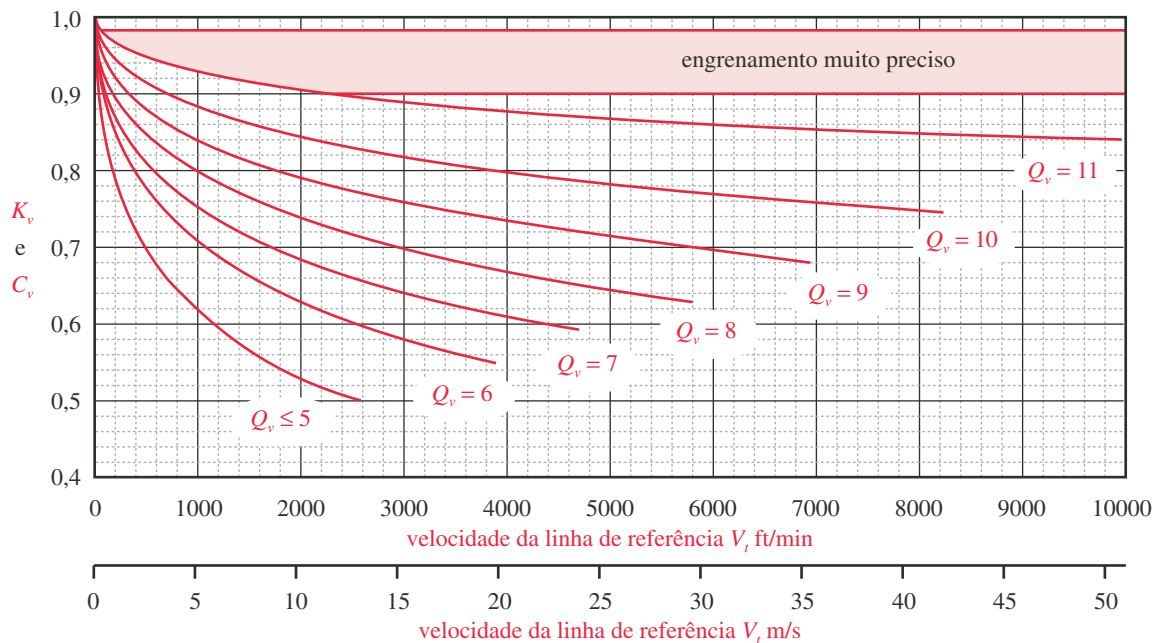



FIGURA 12-22

Fatores dinâmicos da ACMA K_v e C_v.

Tabela 12-8 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 20°, dentes de profundidade completa com carregamento na ponta[§]

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0,24	0,24								
26	U	U	U	U	U	U	0,24	0,25	0,25	0,25						
35	U	U	U	U	U	U	0,24	0,26	0,25	0,26	0,26	0,26				
55	U	U	U	U	U	U	0,24	0,28	0,25	0,28	0,26	0,28	0,28	0,28		
135	U	U	U	U	U	U	0,24	0,29	0,25	0,29	0,26	0,29	0,28	0,29	0,29	0,29

[§] N. de R.: No original, usa-se ponto decimal em vez de vírgula nas Tabelas 12-8 a 12-15.

Tabela 12-9 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 20°, dentes de profundidade completa com carregamento HPSTC

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0,33	0,33								
26	U	U	U	U	U	U	0,33	0,35	0,35	0,35						
35	U	U	U	U	U	U	0,34	0,37	0,36	0,38	0,39	0,39				
55	U	U	U	U	U	U	0,34	0,40	0,37	0,41	0,40	0,42	0,43	0,43		
135	U	U	U	U	U	U	0,35	0,43	0,38	0,44	0,41	0,45	0,45	0,47	0,49	0,49

Tabela 12-10 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 20°, dentes de adendos alongados 25% com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0,27	0,19										
21	U	U	U	U	0,27	0,21	0,27	0,21								
26	U	U	U	U	0,27	0,22	0,27	0,22	0,28	0,22						
35	U	U	U	U	0,27	0,24	0,27	0,24	0,28	0,24	0,28	0,24				
55	U	U	U	U	0,27	0,26	0,27	0,26	0,28	0,26	0,28	0,26	0,29	0,26		
135	U	U	U	U	0,27	0,28	0,27	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,29	0,28	0,30	0,28

Tabela 12-11 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 20°, dentes de adendos alongados 25% com carregamento HPSTC

	Dentes do pinhão															
Dentes da engrenagem	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0,36	0,24										
21	U	U	U	U	0,37	0,26	0,39	0,27								
26	U	U	U	U	0,37	0,29	0,39	0,29	0,41	0,30						
35	U	U	U	U	0,37	0,32	0,40	0,32	0,41	0,33	0,43	0,34				
55	U	U	U	U	0,38	0,35	0,40	0,36	0,42	0,36	0,44	0,37	0,47	0,39		
135	U	U	U	U	0,39	0,39	0,41	0,40	0,43	0,41	0,45	0,42	0,48	0,44	0,51	0,46

Tabela 12-12 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 25°, dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

	Dentes do pinhão															
Dentes da engrenagem	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0,28	0,28												
17	U	U	0,28	0,30	0,30	0,30										
21	U	U	0,28	0,31	0,30	0,31	0,31	0,31								
26	U	U	0,28	0,33	0,30	0,33	0,31	0,33	0,33	0,33						
35	U	U	0,28	0,34	0,30	0,34	0,31	0,34	0,33	0,34	0,34	0,34				
55	U	U	0,28	0,36	0,30	0,36	0,31	0,36	0,33	0,36	0,34	0,36	0,36	0,36		
135	U	U	0,28	0,38	0,30	0,38	0,31	0,38	0,33	0,38	0,34	0,38	0,36	0,38	0,38	0,38

Tabela 12-13 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 25°, dentes de profundidade completa com carregamento HPSTC

	Dentes do pinhão															
Dentes da engrenagem	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0,33	0,33												
17	U	U	0,33	0,36	0,36	0,36										
21	U	U	0,33	0,39	0,36	0,39	0,39	0,39								
26	U	U	0,33	0,41	0,37	0,42	0,40	0,42	0,43	0,43						
35	U	U	0,34	0,44	0,37	0,45	0,40	0,45	0,43	0,46	0,46	0,46				
55	U	U	0,34	0,47	0,38	0,48	0,41	0,49	0,44	0,49	0,47	0,50	0,51	0,51		
135	U	U	0,35	0,51	0,38	0,52	0,42	0,53	0,45	0,53	0,48	0,54	0,53	0,56	0,57	0,57

Tabela 12-14 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 25°, dentes de adendos alongados 25% com carregamento na ponta

	Dentes do pinhão															
Dentes da engrenagem	**12**		**14**		**17**		**21**		**26**		**35**		**55**		**135**	
	P	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**
12	0,32	0,20														
14	0,32	0,22	0,33	0,22												
17	0,32	0,25	0,33	0,25	0,34	0,25										
21	0,32	0,27	0,33	0,27	0,34	0,27	0,36	0,27								
26	0,32	0,29	0,33	0,29	0,34	0,29	0,36	0,29	0,36	0,29						
35	0,32	0,31	0,33	0,31	0,34	0,31	0,36	0,31	0,36	0,31	0,37	0,31				
55	0,32	0,34	0,33	0,34	0,34	0,34	0,36	0,34	0,36	0,34	0,37	0,34	0,38	0,34		
135	0,32	0,37	0,33	0,37	0,34	0,37	0,36	0,37	0,36	0,37	0,37	0,37	0,38	0,37	0,39	0,37

Tabela 12-15 Fator geométrico de flexão J da AGMA para 25°, dentes de adendos alongados 25% com carregamento HPSTC

	Dentes do pinhão															
Dentes da engrenagem	**12**		**14**		**17**		**21**		**26**		**35**		**55**		**135**	
	P	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**	**P**	**G**
12	0,38	0,22														
14	0,38	0,25	0,40	0,25												
17	0,38	0,29	0,40	0,29	0,43	0,29										
21	0,38	0,32	0,41	0,32	0,43	0,33	0,46	0,33								
26	0,39	0,35	0,41	0,35	0,44	0,36	0,46	0,36	0,48	0,37						
35	0,39	0,38	0,41	0,39	0,44	0,39	0,47	0,40	0,49	0,41	0,51	0,41				
55	0,39	0,42	0,42	0,43	0,44	0,44	0,47	0,44	0,49	0,45	0,52	0,46	0,55	0,47		
135	0,40	0,47	0,42	0,48	0,45	0,49	0,48	0,49	0,50	0,50	0,53	0,51	0,56	0,53	0,59	0,55

onde Q_v é o índice de qualidade da engrenagem de pior qualidade no engrenamento.

Observe na Figura 12-22 que cada uma dessas curvas empíricas termina abruptamente em algum valor particular de V_t. Elas podem ser extrapoladas além desses pontos, mas os valores experimentais a partir dos quais elas foram geradas não se estenderam além daqueles limites. Os valores terminais de V_t para cada curva podem ser calculados a partir de

$$V_{t_{max}} = \left[A + \left(Q_v - 3 \right) \right]^2 \quad \text{ft/min} \tag{12.18us}$$

$$V_{t_{max}} = \frac{\left[A + \left(Q_v - 3 \right) \right]^2}{200} \quad \text{m/s} \tag{12.18si}$$

Para engrenagens com $Q_v \le 5$, uma equação diferente é usada:

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{V_t}} \tag{12.19us}$$

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200 V_t}} \tag{12.19si}$$

Esta relação é válida somente para $V_t \leq 2500$ ft/min (13 m/s), como pode ser visto a partir da linha $Q_v = 5$ na Figura 12-22. Acima dessa velocidade, engrenagens de Q_v mais alto devem ser usadas. Ver Tabela 12-7.

Mark[7] deriva um método para o cálculo do erro de transmissão em engrenagens de eixos paralelos que leva em conta o desalinhamento dos mancais, o desalinhamento dinâmico do eixo, as variações do vão de dente, as modificações do perfil do dente e a rigidez das estruturas que sustentam os mancais. Se o carregamento dinâmico real devido aos erros de transmissão for conhecido e for levado em conta aumentando a carga aplicada W_t, então o fator dinâmico K_v pode ser posto igual a 1.

Fator de distribuição de carga K_m Qualquer desalinhamento axial ou desvio na forma do dente fará com que a carga transmitida W_t seja distribuída desigualmente sobre a largura da face dos dentes da engrenagem. Esse problema se torna mais pronunciado com larguras de face maiores. Uma maneira conservativa e aproximada de levar em conta a distribuição de carga menos que uniforme é aplicar o fator K_m para aumentar as tensões para larguras de face maiores. Alguns dos valores sugeridos são mostrados na Tabela 12-16. Uma regra útil é manter a largura da face F de uma engrenagem reta dentro dos limites $8 / p_d < F < 16 / p_d$, com um valor nominal de $12 / p_d$. Essa razão é referida como o **fator de largura de face.**

Tabela 12-16
Fatores de distribuição de carga K_m

Largura da face		
in	(mm)	K_m
< 2	(50)	1,6
6	(150)	1,7
9	(250)	1,8
≥ 20	(500)	2,0

Fator de aplicação K_a O modelo de carregamento discutido na Seção 12.7 supunha que a carga transmitida W_t fosse uniforme com o tempo. As variações dos momentos nos dentes descritas naquela seção devem-se aos dentes entrando e saindo de engrenamento sob uma carga média ou uniforme. Se a máquina motora ou a máquina movida tiverem torques ou forças variando com o tempo, então estas aumentarão o carregamento sentido pelos dentes da engrenagem acima dos valores médios.

Na ausência de informação definitiva acerca das cargas dinâmicas nas máquinas motoras e movidas, um fator de aplicação K_a pode ser aplicado para aumentar a tensão de dente baseado no "impacto" das máquinas conectadas ao trem de engrenagens. Por exemplo, se o trem de engrenagens conecta um motor elétrico a uma bomba centrífuga de água (ambos sendo dispositivos funcionando suavemente), não há necessidade em aumentar as cargas média, então $K_a = 1$. Mas se um motor de combustão interna de um único cilindro move um esmagador de rochas por meio de um trem de engrenagens, tanto a fonte de potência quanto o dispositivo motor enviam cargas de impacto para os dentes da engrenagem, então $K_a > 1$. A Tabela 12-17 mostra alguns valores sugeridos pela AGMA para K_a baseados nos níveis supostos de carregamento de impacto nos dispositivos motor e movido.

Fator de tamanho K_s Pode ser usado da mesma maneira que o fator de tamanho descrito no Capítulo 6 para carregamento geral de fadiga. Os espécimes de teste usados para desenvolver os valores da resistência de fadiga são relativamente pequenos (cerca de 0,3 in em diâmetro). Se a parte que está sendo projetada

Tabela 12-17 Fatores de Aplicação K_a

	Máquina movida		
Máquina motora	Uniforme	Choque moderado	Choque severo
Uniforme (motor elétrico, turbina)	1,00	1,25	1,75 ou mais
Choque leve (motor multi-cilindros)	1,25	1,50	2,00 ou mais
Choque médio (motor de um único cilindro)	1,50	1,75	2,25 ou mais

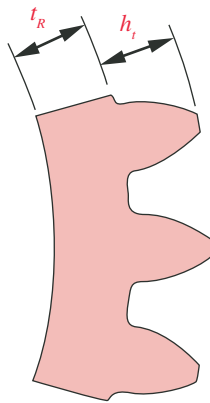



FIGURA 12-23

Parâmetros para o fator de espessura de borda K_B da AGMA.

for maior que essa medida, ela pode ser mais fraca que o indicado pelos dados de teste. O fator K_s permite uma modificação da tensão de dente para levar em conta tais situações. Contudo, muitos dos valores disponíveis de resistência de engrenagem foram desenvolvidos a partir de testes de dentes de engrenagem reais, e assim representam melhor a realidade do que os valores gerais de resistência do Capítulo 6. A AGMA não estabeleceu ainda normas para os fatores de tamanho e recomenda que K_s seja igualado a 1, a menos que o projetista deseje aumentar seu valor para levar em conta situações particulares, como dentes muito grandes. Um valor de 1,25 a 1,5 seria uma hipótese conservadora em tais casos.

Fator de espessura de borda K_B Este fator foi introduzido recentemente pela AGMA para levar em conta situações em que uma engrenagem de diâmetro maior, feita com um anel ou catraca em vez de com um disco sólido, tem uma profundidade de borda fina em comparação com a profundidade do disco. Tais projetos podem falhar com uma fratura radial atravessando a borda em vez da raiz do dente. A AGMA define uma **razão de recuo** m_B como

$$m_B = \frac{t_R}{h_t} \tag{12.20a}$$

onde t_R é a espessura da borda medida do diâmetro da raiz do dente até o diâmetro interno da borda *e* h_t *é a* profundidade total do dente (a soma do adendo e dedendo), como mostrado na Figura 12-23.* Esta razão é usada para definir o fator de espessura de borda a partir de

$$\begin{aligned} K_B &= -2m_B + 3{,}4 \qquad & 0{,}5 \le m_B \le 1{,}2 \\ K_B &= 1{,}0 & m_B > 1{,}2 \end{aligned} \tag{12.20b}$$

Razões de recuo < 0,5 não são recomendadas. Engrenagens de disco sólido sempre terão $K_B = 1$.

Fator de ciclo de carga K_I Uma engrenagem livre (intermediária) está sujeita a mais ciclos de tensão por unidade de tempo e a cargas alternantes de maior magnitude que as semelhantes engrenadas. Para levar em conta essa situação, o fator K_I é definido igual a 1,42 para uma engrenagem intermediária e a 1,0 para uma engrenagem não solta. A AGMA usa o inverso desse fator para reduzir a resistência aparente do material para uma engrenagem solta, mas isso não é consistente com o enfoque usado neste texto de aplicação de fatores que afetam o estado de tensão de uma parte da equação de tensão, não à resistência do material.

EXEMPLO 12-5

Análise das tensões de flexão de um trem de engrenagens cilíndricas retas

Problema **Determine uma largura de face conveniente e as tensões de flexão nos dentes da engrenagem do trem de 3 engrenagens do Exemplo 12-4.**

Dados **A carga transmitida nos dentes é 432 lb. O pinhão tem 14 dentes, um ângulo de pressão de 25 *e* $p_d = 6$. A engrenagem intermediária (*idler*) tem 17 dentes e a engrenagem tem 49 dentes. A velocidade do pinhão é 2500 rpm. Ver o Exemplo 12-3 para outras informações dimensionais.**

Hipóteses **Os dentes têm perfis padronizados AGMA de profundidade completa. A carga e a fonte são ambas uniformes por natureza. Um índice de qualidade da engrenagem de 6 será usado.**

* Extraído da Norma 2001-B88 da AGMA, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va, 22314.

Solução

1 Embora a carga transmitida seja a mesma, a tensão de flexão nos dentes de cada engrenagem de tamanho distinto será diferente por causa de pequenas diferenças na geometria dos seus dentes. A fórmula geral para a tensão de flexão no dente é a Equação 12.15:

$$\sigma_b = \frac{W_t \, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{a}$$

W_t, p_d, F, K_a, K_m, K_v e K_s são comuns para todas as engrenagens no conjunto e J, K_B e K_I são potencialmente diferentes para cada engrenagem.

2 Uma primeira aproximação da largura da face pode ser estimada como uma função do passo diametral. Tome o valor médio do intervalo do fator de largura da face recomendado, $8 / p_d < F < 16 / p_d$, para um primeiro cálculo:

$$F \cong \frac{12}{p_d} = \frac{12}{6} = 2 \text{ in} \tag{b}$$

3 Baseado na hipótese de carga e fonte uniformes, o fator de aplicação K_a pode ser posto como 1.

4 O fator de distribuição de carga pode ser estimado pela Tabela 12-16 baseado na largura de face suposta: $K_m = 1{,}6$.

5 O fator de velocidade K_v pode ser calculado pelas Equações 12.16 e 12.17 baseado no índice de qualidade da engrenagem Q_v suposto e na velocidade da linha de referência V_t.

$$V_t = \frac{d_p}{2} \omega_p = \frac{2{,}33 \text{ in}}{2(12)} (2500 \text{ rpm})(2\pi) = 1527 \ \frac{\text{ft}}{\text{min}} \tag{c}$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} = \frac{(12 - 6)^{2/3}}{4} = 0{,}826 \tag{d}$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0{,}826) = 59{,}745 \tag{e}$$

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}} \right)^B = \left(\frac{59{,}745}{59{,}745 + \sqrt{1\,527}} \right)^{0{,}826} = 0{,}660 \tag{f}$$

6 O fator de tamanho $K_s = 1$ para as três engrenagens.

7 Essas engrenagens são todas muito pequenas para ter uma borda e catraca; assim $K_B = 1$.

8 O fator de ciclo de carga $K_I = 1$ para o pinhão e engrenagem e $K_I = 1{,}42$ para a engrenagem intermediária (em vazio).

9 O fator de geometria de flexão J para o pinhão de 25° e 14 dentes em engrenamento com a engrenagem intermediária de 17 dentes é encontrado pela Tabela 12-13 como sendo $J_{pinhão} = 0{,}33$. A tensão de flexão no dente do pinhão é então

$$\sigma_{b_p} = \frac{W_t \, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{432(6)}{2(0{,}33)} \frac{1(1{,}6)}{0{,}66} (1)(1)(1) = 9526 \text{ psi} \tag{g}$$

10 O fator de geometria de flexão J para a engrenagem de 25° e 17 dentes em engrenamento com um pinhão de 14 dentes é encontrado pela Tabela 12-13 como sendo $J_{engrenagem} = 0{,}36$. A tensão de flexão no dente da engrenagem intermediária é então

$$\sigma_{b_i} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v}K_s K_B K_I = \frac{432(6)}{2(0{,}36)}\frac{1(1.6)}{0{,}66}(1)(1)(1{,}42) = 12400 \text{ psi} \qquad (h)$$

Observe na Tabela 12-13 que a engrenagem intermediária tem um fator J diferente quando considerado ser "a engrenagem" no engrenamento com o pinhão menor (0,36) que quando considerada ser o "pinhão" em engrenamento com a engrenagem maior (0,37). O valor menor dos dois é usado porque ele dá uma tensão maior.

11 O fator geométrico de flexão J para a engrenagem de 25° e 49 dentes em engrenamento com uma engrenagem intermediária de 17 dentes é encontrado (por interpolação) pela Tabela 12-13 como sendo $J_{engrenagem} = 0{,}46$. A tensão de flexão no dente da engrenagem é então

$$\sigma_{b_g} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v}K_s K_B K_I \cong \frac{432(6)}{2(0{,}46)}\frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)(1) \cong 6834 \text{ psi} \qquad (i)$$

12 Se este é um nível aceitável de tensão, então a largura da face suposta pode ser usada. Esse tema será revisto para este projeto em um exemplo posterior.

13 Os arquivos EX12-05 encontram-se no CD-ROM deste livro.

Tensões superficiais

Dentes acoplados de engrenagem têm uma combinação de rolamento e escorregamento em suas interfaces. No ponto de referência, o movimento relativo é rolamento puro. A porcentagem de deslizamento aumenta com a distância ao ponto de referência. Um valor médio de 9% de deslizamento é às vezes tomado para representar o movimento combinado de rolar-escorregar entre os dentes.[8] As tensões no dente são tensões Hertzianas de contato dinâmicas em combinação com rolamento e deslizamento, como definido na Seção 7.11. Essas tensões são tridimensionais e têm valores pico na superfície ou ligeiramente abaixo dela, dependendo da quantidade de deslizamento presente em combinação com rolamento. Dependendo da velocidade de superfície, dos raios de curvatura do dente e da viscosidade do lubrificante, uma condição de lubrificação elasto-hidrodinâmica (EHD) parcial ou total, ou de lubrificação de fronteira podem existir na interface, como descrito no Capítulo 11. Se for fornecido um lubrificante de um tipo apropriado, limpo e em quantidade suficiente, a fim de criar pelo menos lubrificação EHD parcial (espessura específica de filme $\Lambda > 2$) e evitar falha superficial pelos mecanismos abrasivo, adesivo ou corrosivo descritos no Capítulo 7, o último modo de falha será crateração e lascamento devido à fadiga de superfície. Ver a Seção 7.7 para uma discussão desse mecanismo e a Figura 7-12 para exemplos de falha superficial de dente de engrenagem.

As tensões de superfície nos dentes de engrenagem foram investigadas pela primeira vez de uma maneira sistemática por Buckingham,[9] que reconheceu que dois cilindros com o raio de curvatura igual ao dos dentes de engrenagem no ponto de referência e que fossem carregados radialmente em contato de rolamento poderiam ser usados para simular o contato de dente de engrenagem, enquanto se controlam as variáveis necessárias. Seu trabalho levou ao desenvolvimento de uma equação para tensões de superfície em dentes de engrenagem que é agora conhecida como a equação de Buckingham. Ela serve como base para a fórmula de resistência à crateração da AGMA, que é

$$\sigma_c = C_p\sqrt{\frac{W_t}{FId}\frac{C_a C_m}{C_v}C_s C_f} \qquad (12.21)$$

onde W_t é a força tangencial no dente, d é o diâmetro de referência da menor das duas engrenagens no engrenamento, F é a largura da face e I é um **fator geométrico de superfície adimensional** para resistência à crateração. C_p é um **coeficiente elástico** que leva em conta as diferenças nas constantes do material do pinhão e engrenagem. Os fatores C_a, C_m, C_v e C_s são iguais, respectivamente, a K_a, K_m, K_v e K_s, definidos pela equação de tensão de flexão 12.15. Os novos fatores I, C_p e C_f serão definidos agora.

Fator geométrico de superfície *I* Este fator leva em conta os raios de curvatura dos dentes da engrenagem e o ângulo de pressão. A AGMA define uma equação para I:

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_p} \tag{12.22a}$$

onde ρ_p e ρ_g são os raios de curvatura dos dentes do pinhão e engrenagem, respectivamente, ϕ é o ângulo de pressão e d_p é o diâmetro de referência do pinhão. O sinal ± leva em conta engrenamentos externos ou internos. Use o sinal superior para engrenamentos externos em todas as expressões relacionadas. O raios de curvatura dos dentes são calculados a partir a geometria do engrenamento.

$$\rho_p = \sqrt{\left(r_p + \frac{1 + x_p}{p_d}\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi$$

$$\rho_g = C \operatorname{sen}\phi \mp \rho_p \tag{12.22b}$$

onde p_d é o passo diametral, r_p é o raio de referência do pinhão, ϕ é o ângulo de pressão, C é a distância entre os centro do pinhão e engrenagem e x_p é o coeficiente do adendo do pinhão, que é igual à porcentagem decimal do alongamento do adendo para dentes de adendos desiguais. Para dentes padronizados, de profundidade completa, $x_p = 0$. Para adendos de dentes alongados 25%, $x_p = 0{,}25$, etc. Observe a escolha do sinal na segunda equação de 12.22*b*. Use o sinal superior para um engrenamento externo e o inferior para um engrenamento interno.

Coeficiente elástico C_p O coeficiente elástico leva em conta as diferenças entre os materiais dos dentes e é encontrado a partir de

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(\dfrac{1-\nu_p^2}{E_p}\right) + \left(\dfrac{1-\nu_g^2}{E_g}\right)\right]}} \tag{12.23}$$

onde E_p e E_g são, respectivamente, os módulos de elasticidade para o pinhão e a engrenagem, e ν_p e ν_g são os respectivos coeficientes de Poisson. As unidades de C_p são ou $(\text{psi})^{0,5}$ ou $(\text{MPa})^{0,5}$. A Tabela 12-18* mostra os valores de C_p para várias combinações de materiais comuns de engrenagem e pinhão baseadas em um valor hipotético de $\nu = 0{,}3$ para todos os materiais.

Fator de acabamento superficial C_f É usado para levar em conta acabamentos superficiais extraordinariamente grosseiros nos dentes de engrenagem. A AGMA não estabeleceu ainda normas para os fatores de acabamento superficial e recomenda que C_f seja posto igual a 1 para engrenagens feitas por métodos convencionais. Seu valor pode ser aumentado para levar em conta acabamentos superficiais extraordinariamente grosseiros ou para levar em conta a presença sabida de tensões residuais detrimentais.

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va, 22314.

Tabela 12-18 O coeficiente elástico C_p da AGMA em unidades de (psi) 0,5 ([MPa]0,5)* †

Material pinhão	E_p psi (MPa)	Material da engrenagem					
		Aço	Ferro maleável	Ferro nodular	Ferro fundido	Alumínio bronze	Estanho bronze
Aço	30*E*6 (2*E*5)	2300 (191)	2180 (181)	2160 (179)	2100 (174)	1950 (162)	1900 (158)
Ferro maleável	25*E*6 (1,7*E*5)	2180 (181)	2090 (174)	2070 (172)	2020 (168)	1900 (158)	1850 (154)
Ferro nodular	24*E*6 (1,7*E*5)	2160 (179)	2070 (172)	2050 (170)	2000 (166)	1880 (156)	1830 (152)
Ferro fundido	22*E*6 (1,5*E*5)	2100 (174)	2020 (168)	2000 (166)	1960 (163)	1850 (154)	1800 (149)
Alumínio bronze	17,5*E*6 (1,2*E*5)	1950 (162)	1900 (158)	1880 (156)	1850 (154)	1750 (145)	1700 (141)
Estanho bronze	16*E*6 (1,1*E*5)	1900 (158)	1850 (154)	1830 (152)	1800 (149)	1700 (141)	1650 (137)

† Os valores de E_p nesta tabela são aproximados e $\nu = 0{,}3$ foi usado como um coeficiente de Poisson aproximado para todos os materiais. Se números mais precisos para E_p e ν estiverem disponíveis, eles devem ser usados na Equação 12.23 para obter C_p.

EXEMPLO 12-6

Análise da tensão superficial de um trem de engrenagens retas

Problema **Determine as tensões de superfície nos dentes de engrenagem do trem de 3 engrenagens dos Exemplos 12-4 e 12-5.**

Dados **A carga transmitida nos dentes é 432 lb. O pinhão tem 14 dentes, um ângulo de pressão de 25 *e* $p_d = 6$. *A* engrenagem intermediária tem 17 dentes e a engrenagem tem 49 dentes. A velocidade do pinhão é 2500 rpm. A largura na face é 2 in. Ver o Exemplo 12-3 para informações sobre outras dimensões.**

Hipóteses **Os dentes são de perfil padronizado AGMA de profundidade completa. A carga e a fonte são ambas uniformes por natureza. Um índice de qualidade da engrenagem de 6 será usado. Todas as engrenagens são de aço com $\nu = 0{,}28$.**

Solução

1 A fórmula geral para a tensão na superfície do dente é a Equação 12.21:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I d} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \qquad (a)$$

W_t, F, C_a, C_m, C_v e C_s são comuns para todas as engrenagens no conjunto. C_p, d, C_f e I são potencialmente diferentes para cada par no engrenamento. Use o menor d do par em engrenamento.

2 A largura da face pode ser estimada como uma função do passo diametral. Tome o valor médio do intervalo recomendado, $8 / p_d < F < 16 / p_d$, para um primeiro cálculo:

$$F \cong \frac{12}{p_d} = \frac{12}{6} = 2 \text{ in} \qquad (b)$$

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va, 22314.

3 Dadas uma carga uniforme e uma fonte, o fator de aplicação C_a pode ser posto como 1.

4 O fator de distribuição de carga pode ser estimado pela Tabela 12-16 baseado na largura suposta da face: $C_m = K_m = 1{,}6$.

5 O fator de velocidade C_v pode ser calculado pelas Equações 12.16 e 12.17 baseado no índice suposto de qualidade da engrenagem Q_v e na velocidade da linha de referência V_t.

$$V_t = \frac{d_p}{2}\omega_p = \frac{2{,}33 \text{ in}}{2(12)}(2500 \text{ rpm})(2\pi) = 1527 \ \frac{\text{ft}}{\text{min}} \qquad (c)$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} = \frac{(12-6)^{2/3}}{4} = 0{,}826 \qquad (d)$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0{,}826) = 59{,}745 \qquad (e)$$

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}}\right)^B = \left(\frac{59{,}745}{59{,}745 + \sqrt{1527}}\right)^{0{,}826} = 0{,}660 \qquad (f)$$

6 O fator de tamanho $C_s = 1$ para todas as três engrenagens.

7 O fator de superfície $C_f = 1$ para engrenagens bem acabadas feitas por métodos convencionais.

8 O coeficiente elástico C_p é encontrado a partir da Equação 12.23.

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(\frac{1-\nu_p^2}{E_p}\right)+\left(\frac{1-\nu_g^2}{E_g}\right)\right]}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(\frac{1-0{,}28^2}{30E6}\right)+\left(\frac{1-0{,}28^2}{30E6}\right)\right]}} = 2276 \qquad (g)$$

9 O fator geométrico de crateração I é calculado para um par de engrenagens acopladas. Já que temos dois engrenamentos (pinhão/intermediária e intermediária/engrenagem), haverá dois valores diferentes de I a serem calculados usando as Equações 12.22. Necessitaremos do diâmetro de referência e o raio de referência de cada engrenagem para este cálculo. A partir dos dados no Exemplo 12-4:

$$\begin{array}{lll} d_p = 2{,}333 & d_i = 2{,}833 & d_g = 8{,}167 \\ r_p = 1{,}167 & r_i = 1{,}417 & r_g = 4{,}083 \end{array} \qquad (h)$$

10 Para o par pinhão/intermediária, assuma $I_{pi} = I$, $d_l = d$, $r_l = r$ e $r_2 = r_i$; então

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\left(r_1 + \frac{1}{p_d}\right)^2 - (r_1\cos\phi)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi \\ &= \sqrt{\left(1{,}167 + \frac{1}{6}\right)^2 - (1{,}167\cos 25°)^2} - \frac{\pi}{6}\cos 25° = 0{,}338 \text{ in} \end{aligned} \qquad (i)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= C\,\text{sen}\,\phi - \rho_1 = (r_1 + r_2)\,\text{sen}\,\phi - \rho_1 \\ &= (1{,}167 + 1{,}417)\,\text{sen}\,25° - 0{,}338 = 0{,}754 \text{ in} \end{aligned} \qquad (j)$$

$$I_{pi} = \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}\right)d_1} = \frac{\cos 25°}{\left(\frac{1}{0{,}338} + \frac{1}{0{,}754}\right)2{,}33} = 0{,}091 \qquad (k)$$

11 Para o par intermediária/engrenagem, assuma $I_{ig} = I$, $d_1 = d_i$, $r_1 = r_i$ e $r_2 = r_g$; então

$$\rho_1 = \sqrt{\left(r_1 + \frac{1}{p_d}\right)^2 - \left(r_1 \cos\phi\right)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi$$

$$= \sqrt{\left(1{,}417 + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1{,}417\cos 25°\right)^2} - \frac{\pi}{6}\cos 25° = 0{,}452 \text{ in} \qquad (l)$$

$$\rho_2 = C \operatorname{sen}\phi - \rho_1 = \left(r_1 + r_2\right)\operatorname{sen}\phi - \rho_1$$

$$= \left(1{,}417 + 4{,}083\right)\operatorname{sen} 25° - 0{,}452 = 1{,}872 \text{ in} \qquad (m)$$

$$I_{ig} = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_1} \pm \dfrac{1}{\rho_2}\right)d_1} = \frac{\cos 25°}{\left(\dfrac{1}{0{,}452} + \dfrac{1}{1{,}872}\right)2{,}83} = 0{,}116 \qquad (n)$$

12 A tensão de superfície para o engrenamento pinhão-intermediária é então

$$\sigma_{c_p} = C_p\sqrt{\frac{W_t}{F I_{pi} d_p}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

$$= 2276\sqrt{\frac{432}{2(0{,}091)(2{,}33)}\frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)} = 113 \text{ kpsi} \qquad (o)$$

13 A tensão de superfície para o engrenamento intermediária-engrenagem é então

$$\sigma_{c_i} = C_p\sqrt{\frac{W_t}{F I_{ig} d_i}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

$$= 2276\sqrt{\frac{432}{2(0{,}116)(2{,}83)}\frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)} = 91 \text{ kpsi} \qquad (p)$$

14 Os arquivos EX12-06 encontram-se no CD-ROM deste livro.

12.9 MATERIAIS PARA ENGRENAGEM

Apenas um número limitado de metais e ligas é apropriado para engrenagens que transmitem potência significativa. A Tabela 12-18 mostra alguns deles. Aços, ferros fundidos e ferros maleáveis e nodulares são as escolhas mais comuns para engrenagens. Endurecimento total ou superficial é recomendado (naquelas ligas que o permitem) para obter resistência suficiente e resistência ao desgaste. Onde a resistência à corrosão for necessária, como em ambientes marítimos, bronzes são frequentemente usados. A combinação de uma engrenagem de bronze com um pinhão de aço tem vantagens em termos da compatibilidade e conformidade do material, como discutido no Capítulo 7, e essa combinação é frequentemente usada em aplicações não marítimas também.

Ferros fundidos são comumente usados para engrenagens. Os ferros fundidos cinzentos têm vantagens de baixo custo, facilidade de usinagem, alta resistência ao desgaste e amortecimento interno (devido às inclusões de grafite), que os fazem acusticamente mais silenciosos que as engrenagens de aço. Contudo, eles têm baixa resistência à tração, o que requer dentes maiores que aqueles das engrenagens de aço para obter resistência à flexão suficiente. Ferros nodulares têm resistência à tração mais alta que os cinzentos e ainda as outras vantagens de usinabilidade, resistência ao desgaste e amortecimento interno, mas são mais caros. A combinação de pinhão de aço (para resistência no membro mais solicitado) com engrenagem de ferro fundido é frequentemente usada.

Aços são também comumente usados para engrenagens. Eles têm resistência à tensão superior ao ferro fundido e competem em termos de custo nas suas formas de baixas ligas. Eles necessitam tratamento térmico para obter uma dureza superficial que resistirá ao desgaste, mas engrenagens de aço brando são usadas, às vezes, com baixas cargas, aplicações de baixa velocidade ou nos casos em que a longevidade pode não ser uma preocupação preponderante. Para o tratamento térmico, é necessário um aço de média ou alta porcentagem de carbono (0,35 a 0,60%) puro ou uma liga de aço. Engrenagens pequenas geralmente passam por endurecimento completo, e engrenagens maiores são endurecidas por chama ou indução para minimizar a distorção. Aços de baixo carbono podem ter superfície endurecida por cementação pelo carbono ou nitrogênio (nitretação). Uma engrenagem com superfície endurecida tem a vantagem de um miolo forte e uma superfície dura, mas se o tratamento não for profundo o suficiente, os dentes podem falhar por fadiga de flexão abaixo da superfície tratada, no material brando e mais fraco do miolo. É necessário, frequentemente, usar métodos de acabamento secundários como retífica, lapidação e polimento para remover a distorção do tratamento térmico de engrenagens endurecidas se for necessária alta qualidade.

Bronzes são os metais não ferrosos mais comuns usados para engrenagens. O módulo de elasticidade baixo destas ligas de cobre provê uma deflexão maior do dente e melhora a divisão de carga entre os dentes. Sendo que bronze e aço trabalham bem juntos, a combinação de um pinhão de aço e uma engrenagem de bronze é frequentemente usada.

Engrenagens não metálicas são frequentemente feitas de moldes de injeção de termoplásticos como o *náilon* e o acetal, às vezes enchidos com materiais inorgânicos como vidro e talco. Teflon é às vezes adicionado ao *náilon* ou acetal para diminuir o coeficiente de atrito. Lubrificantes secos, como o grafite e o dissulfato de molibdênio (MoS_2), podem ser adicionados ao plástico para permitir funcionamento a seco. Engrenagens compostas de termoplásticos fenólicos reforçados de fibra natural têm sido usadas há bastante tempo para aplicações como engrenagem motora de eixo de camo (sincronização) movida por um pinhão de aço em motores à gasolina. Engrenagens não metálicas têm ruído muito baixo, mas são limitadas na capacidade de torque pela baixa resistência do material.

Resistências dos materiais

Já que ambos os modos de falha de engrenagem envolvem carregamento de fadiga, as resistências à fadiga do material são necessárias tanto para tensões de flexão como para tensões de contato de superfície. Os métodos para estimar a resistência à fadiga descritos no Capítulo 6 podem ser usados para aplicações de engrenagem, porque os princípios envolvidos são os mesmos. Contudo, dados melhores estão disponíveis quanto à resistência à fadiga de ligas para engrenagens por causa dos programas extensos de teste que foram feitos para esta aplicação no século passado. Os dados de teste para resistência à fadiga da maioria dos materiais de engrenagem foram compilados pela AGMA. Como dito na Seção 6.6 deste livro:

> A melhor informação a respeito da resistência à fadiga de um material para uma vida finita, ou seu limite de resistência à fadiga para uma vida infinita, provém de ensaios com montagens reais ou protótipos dos dispositivos de um projeto real (...) Se os dados publicados estiverem disponíveis para a resistência à fadiga S_f ou o limite de resistência à fadiga S_e do material, eles devem ser utilizados(...).

Assim, não faria sentido começar supondo uma resistência à fadiga incorreta como uma fração da resistência final de tração estática para então reduzi-la por meio de uma coleção de fatores de correção descritos na Seção 6.6, se dispomos de valores da resistência à fadiga mais próximos dos verdadeiros.

Resistências à fadiga de flexão da AGMA para materiais de engrenagem

Os valores publicado pela AGMA para resistência à fadiga por flexão e fadiga de superfície são, na verdade, valores parcialmente corretos de resistências à fadiga, já que foram gerados com peças apropriadamente dimensionadas tendo a mesma geometria, acabamento superficial, etc., que as engrenagens a serem projetadas. A AGMA se refere à resistência do material como *tensões admissíveis*, o que não é consistente com o nosso procedimento de reservar o termo *tensão* para os resultados do carregamento aplicado e usar o termo *resistência* para nos referirmos às propriedades do material. No intuito de manter a consistência interna deste livro, designaremos os valores de resistência à fadiga de flexão publicados pela AGMA como S_{fb}' para diferenciá-los da resistência à fadiga completamente não corrigida S_f' do Capítulo 6. Existem ainda três fatores que precisam ser aplicados aos valores de resistência à fadiga de flexão publicados pela AGMA a fim de obter o que designaremos como a resistência à fadiga de flexão corrigida para engrenagens S_{fb}.

Os valores da resistência à fadiga de flexão da AGMA estão todos expressos para 5*E*7 ciclos de tensão repetida (em vez de para 1*E*6 ou 1*E*8 ciclos às vezes usados para outros materiais) e para 99% de nível de confiabilidade (em vez de para 50% de confiabilidade, comum para fadiga geral e valores de resistência estática). Essas resistências são comparadas à tensão de pico σ_b calculada pela Equação 12.15 usando a carga W_t. A análise da linha de Goodman está encapsulada nestas comparações diretas, porque os valores de resistência são obtidos de um teste que provê um estado de tensão variada idêntico àquele do carregamento verdadeiro da engrenagem.

A fórmula de correção para a resistência à fadiga de flexão das engrenagens é

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} \qquad (12.24)$$

onde S_{fb}' é a resistência à fadiga de flexão publicada pela AGMA, como definido acima. S_{fb} é a resistência corrigida, e os fatores *K* são modificadores para levar em conta condições diversas. Esses modificadores serão agora definidos e discutidos brevemente.

Fator de Vida K_L como os dados experimentais são para uma vida de 1*E*7 ciclos, um ciclo de vida menor ou mais longo requererá modificações na resistência à fadiga de flexão baseado na relação *S-N* do material. O número de ciclos de carga neste caso é definido como o número de contatos de engrenamento, sob carga, do dente de engrenagem sendo analisado. A Figura 12-24* mostra as resistências como definidas pelos números de dureza Brinell. As equações das curvas aproximadas também são mostradas na figura para cada linha *S-N*. Essas equações podem ser usadas para calcular o fator K_L apropriado para um número requerido de ciclos de carga *N*. A AGMA sugere que:

> A porção superior da zona hachurada pode ser usada para aplicações comerciais. A porção abaixo da zona hachurada é geralmente usada para aplicações de serviço crítico onde pouca crateração e desgaste de dente são permissíveis e onde se requer suavidade de operação e níveis baixos de vibração. Infelizmente, valores similares ainda não foram desenvolvidos para engrenagens de materiais distintos desses aços.

Fator de temperatura K_T A temperatura do lubrificante é uma medida razoável da temperatura da engrenagem. Para aços em óleos com temperaturas até cerca de 250°F, K_T pode ser posto igual a 1. Para temperaturas maiores, K_T pode ser estimado a partir de

$$K_T = \frac{460 + T_F}{620} \qquad (12.24a)$$

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth,* com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St, Suite 201, Alexandria, Va, 22134.

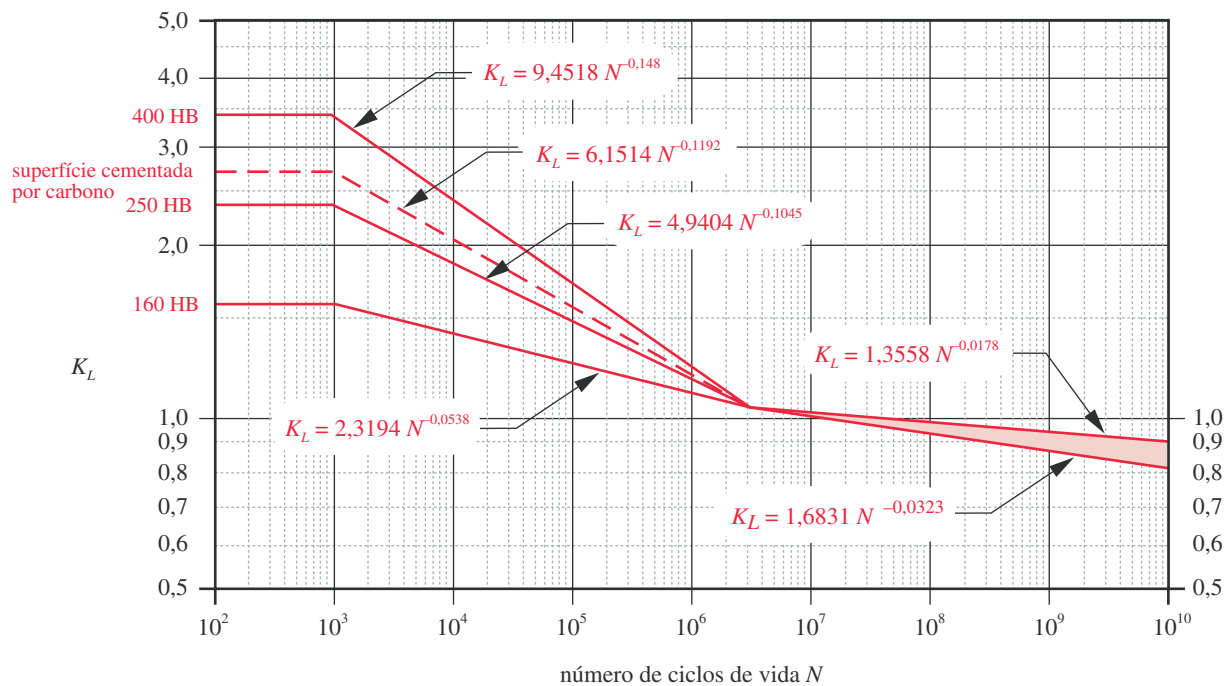



FIGURA 12-24*

Fator de vida para resistência à flexão da AGMA.

onde T_F é a temperatura do óleo em °F. Não use esta relação para materiais diferentes do aço.

Fator de confiabilidade K_R Os valores de resistência da AGMA baseiam-se na probabilidade estatística de 1 falha em 100 amostras, ou uma confiabilidade de 99%. Se esta for satisfatória, defina $K_R = 1$. Se um fator de confiabilidade maior ou menor for desejado, K_R pode ser definido como um dos valores na Tabela 12-19.*

Tabela 12-19
Fator K_R da AGMA

Confiabilidade %	K_R
90	0,85
99	1,00
99,9	1,25
99,99	1,50

Dados da resistência à fadiga de flexão A Tabela 12-20 mostra as resistências à fadiga de flexão segundo a AGMA para um número de materiais usados comumente para engrenagens. A norma AGMA também define as especificações do tratamento térmico onde aplicável. Um gráfico mostrando os intervalos das resistências à fadiga de flexão da AGMA para aços como uma função de sua dureza Brinell está mostrado na Figura 12-25.* Ver a norma referida para as propriedades metalúrgicas requeridas para os graus AGMA de aços. Para alcançar os valores de resistência na Tabela 12-20 e na Figura 12-25, o material deve ser especificado para cumprir com essa norma.

Resistências à fadiga de superfície da AGMA para materiais de engrenagem

Designaremos os valores de resistência à fadiga de superfície publicados pela AGMA como S_{fc}'. Há quatro fatores de correção que necessitam ser aplicados aos valores publicados pela AGMA a fim de obter o que designaremos como a resistência à fadiga de superfície corrigida para engrenagens, S_{fc},

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} \tag{12.25}$$

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth,* com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va, 22314.

Tabela 12-20 Resistências à fadiga de flexão $S_{fb'}$ da AGMA para seleção de materiais para engrenagem*

Material	Classe AGMA	Designação do material	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima	Resistência à fadiga de flexão psi x 10^3	Resistência à fadiga de flexão MPa
Aço	A1–A5		Endurecimento completo	≤ 180 HB	25–33	170–230
			Endurecimento completo	240 HB	31–41	210–280
			Endurecimento completo	300 HB	36–47	250–325
			Endurecimento completo	360 HB	40–52	280–360
			Endurecimento completo	400 HB	42–56	290–390
			Endurecimento por chama ou indução	Tipo A padronizado 50-55 HRC	45–55	310–380
			Endurecimento por chama ou indução	Tipo B padronizado	22	150
			Cementação por carbono e endurecimento superficial	55–64 HRC	55–75	380–520
		AISI 4140	Nitretado	84,6 HR15N†	34–45	230–310
		AISI 4340	Nitretado	83,5 HR15N	36–47	250–325
		Nitroliga 135M	Nitretado	90,0 HR15N	38–48	260–330
		Nitroliga	Nitretado	90,0 HR15N	40–50	280–345
		2,5% Cromo	Nitretado	87,5–90,0 15N	55–65	380–450
Ferro recozido	20	Classe 20	Como fundido		5	35
	30	Classe 30	Como fundido	175 HB	8	69
	40	Classe 40	Como fundido	200 HB	13	90
Ferro nodular (dúctil)	A-7-a	60-40-18	Recozido	140 HB	22–33	150–230
	A-7-c	80-55-06	Revenido e temperado	180 HB	22–33	150–230
	A-7-d	100-70-03	Revenido e temperado	230 HB	27–40	180–280
	A-7-e	120-90-02	Revenido e temperado	230 HB	27–40	180–280
Ferro maleável (perlítico)	A-8-c	45007		165 HB	10	70
	A-8-e	50005		180 HB	13	90
	A-8-f	53007		195 HB	16	110
	A-8-i	80002		240 HB	21	145
Bronze	Bronze 2	AGMA 2C	Molde de areia	40 ksi resistência de tração mínima	5,7	40
	Al/Br 3	ASTM B-148 78 liga 954	Tratado termicamente	90 ksi resistência de tração mínima	23,6	160

† Escala Rockwell 15N usada para materiais endurecidos superficialmente. Ver Seção 2.4.

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St, Suite 201, Alexandria, Va, 22134.

onde S_{fc}' é a resistência à fadiga de superfície publicada como definida na Tabela 12-21 e na Figura 12-26, S_{fc} é a resistência corrigida e os fatores C são modificadores para levar em conta diversas condições. Os fatores C_T e C_R são idênticos, respectivamente, a K_T e K_R, e podem ser escolhidos como descrito na seção anterior. O fator de vida C_L tem o mesmo propósito que K_L na Equação 12.24, mas refere-se a um diagrama S-N diferente. C_H é o fator da razão de dureza para resistência à crateração. Esses dois fatores diferentes serão definidos agora.

Fator de vida de superfície C_L Já que os dados de testes de fadiga de superfície são para uma vida de $1E7$ ciclos, um ciclo de vida menor ou mais longo requererá modificações da resistência à fadiga de superfície baseado na relação S-N para o material. O número de ciclos de carga é definido como o número de contatos de engrenamento, sob carga, do dente de engrenagem sendo analisado. A Figura 12-26* mostra as curvas S-N para a resistência à fadiga de superfície de aços. As equações de aproximação são também mostradas na figura para as linhas S-N.

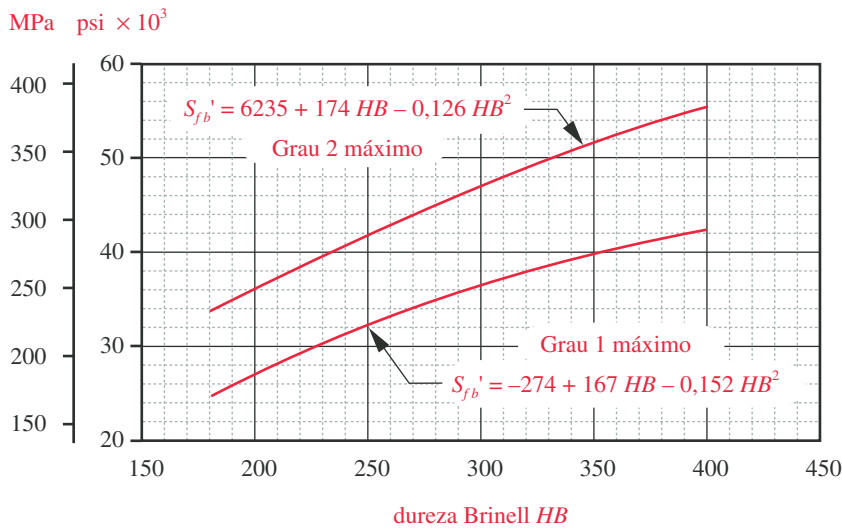



FIGURA 12-25

Resistências a fadiga de flexão S_{fb}' da AGMA para aços.*

Essas equações podem ser usadas para calcular o fator apropriado C_L para um número requerido de ciclos de carga N. A AGMA sugere que: “A porção superior da zona hachurada pode ser usada para aplicações comerciais. A porção inferior é geralmente usada para aplicações de serviço críticas onde pouca crateração ou desgaste do dente é permissível e onde a suavidade de operação e os níveis baixos de vibração são requeridos”. Infelizmente, dados similares não foram desenvolvidos para engrenagens de outros materiais.

Fator de razão de dureza C_H Este fator é uma função da razão de engrenamento e da dureza relativa do pinhão e engrenagem. C_H é o numerador da Equação 12.25 e é sempre $\geq 1{,}0$, então ele atua para aumentar a resistência aparente da engrenagem. Ele leva em conta situações nas quais os dentes do pinhão são mais duros que os dentes da engrenagem e, assim, atua para endurecer as superfícies do dente da engrenagem quando em funcionamento. C_H é aplicado somente para a resistência do dente da engrenagem, não do pinhão. Duas fórmulas para seu

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth,* com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St, Suite 201, Alexandria, Va, 22134.

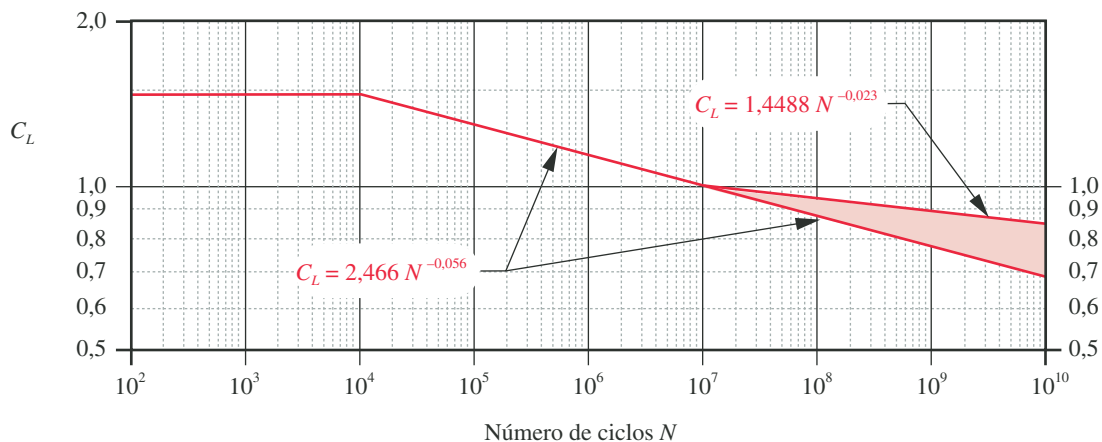



FIGURA 12-26*

Fator de vida C_L de resistência à fadiga de superfície da AGMA.

Tabela 12-21 Resistências à fadiga de superfície S_{fc}' da AGMA para seleção de materiais para engrenagem*

Material	Classe AGMA	Designação do material	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima	Resistência à fadiga de flexão	
					psi x 10^3	MPa
Aço	A1–A5		Endurecimento completo	≤ 180 HB	85–95	590–660
			Endurecimento completo	240 HB	105–115	720–790
			Endurecimento completo	300 HB	120–135	830–930
			Endurecimento completo	360 HB	145–160	1000–1100
			Endurecimento completo	400 HB	155–170	1100–1200
			Endurecimento por chama ou indução	50 HRC	170–190	1200–1300
			Endurecimento por chama ou indução	54 HRC	175–195	1200–1300
			Cementação por carbono e endurecimento superficial	55–64 HRC	180–225	1250–1300
		AISI 4140	Nitretado	84,6 HR15N†	155–180	1100–1250
		AISI 4340	Nitretado	83,5 HR15N	150–175	1050–1200
		Nitroliza 135M	Nitretado	90,0 HR15N	170–195	1170–1350
		Nitroliza	Nitretado	90,0 HR15N	195–205	1340–1410
		Cromo 2,5%	Nitretado	87,5 HR15N	155–172	1100–1200
		Cromo 2,5%	Nitretado	90,0 HR15N	192–216	1300–1500
Ferro fundido	20	Classe 20	Como fundido		50–60	340–410
	30	Classe 30	Como fundido	175 HB	65–70	450–520
	40	Classe 40	Como fundido	200 HB	75–85	520–590
Ferro nodular (dúctil)	A-7-a	60-40-18	Recozido	140 HB	77–92	530–630
	A-7-c	80-55-06	Revenido e temperado	180 HB	77–92	530–630
	A-7-d	100-70-03	Revenido e temperado	230 HB	92–112	630–770
	A-7-e	120-90-02	Revenido e temperado	230 HB	103–126	710–870
Ferro maleável (perlítico)	A-8-c	45007		165 HB	72	500
	A-8-e	50005		180 HB	78	540
	A-8-f	53007		195 HB	83	570
	A-8-i	80002		240 HB	94	650
Bronze	Bronze 2	AGMA 2C	Molde de areia	40 ksi resistência de tração mínima	30	450
	Al/Br 3	ASTM B-148 78 liga 954	Tratado termicamente	90 ksi resistência de tração mínima	65	450

† Escala Rockwell 15N usada para materiais endurecidos superficialmente. Ver Seção 2.4.

cálculo são sugeridas na norma. A escolha de uma ou de outra depende da dureza relativa dos dentes do pinhão e da engrenagem.

Para pinhões endurecidos completamente que trabalham contra engrenagens endurecidas completamente:

$$C_H = 1 + A\left(m_G - 1\right) \tag{12.26a}$$

onde m_G é a razão de engrenamento e A é encontrado a partir de

$$\text{se} \quad \frac{HB_p}{HB_g} \; 1{,}2 \quad \text{então} \quad A = 0 \tag{12.26b}$$

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth,* com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va, 22314.

$$\text{se} \quad 1{,}2 \le \frac{HB_p}{HB_g} \le 1{,}7 \quad \text{então } A = 0{,}00898\frac{HB_p}{HB_g} - 0{,}00829 \qquad (12.26c)$$

$$\text{se} \quad \frac{HB_p}{HB_g} > 1{,}7 \quad \text{então } A = 0{,}00698 \qquad (12.26d)$$

onde HB_p e HB_g são as durezas Brinell do pinhão e da engrenagem, respectivamente.

Para pinhões de superfície endurecida (> 48 HRC) trabalhando contra engrenagens endurecidas inteiramente, C_H é encontrado a partir de

$$C_H = 1 + B\left(450 - HB_g\right) \qquad (12.27)$$

$$B = 0{,}00075e^{-0{,}0112R_q} \qquad (12.28us)$$

$$B = 0{,}00075e^{-0{,}052R_q} \qquad (12.28si)$$

onde R_q *é a* rugosidade da superfície rms dos dentes do pinhão em μin rms (ver a Seção 7.1).

A Tabela 12.21* mostra as resistências à fadiga de superfície para um número de materiais normalmente usados para engrenagens. A norma AGMA define as especificações de tratamento térmico para aços superficialmente endurecidos. Um gráfico mostrando os intervalos de resistências à fadiga de superfície da AGMA para aços como uma função de suas durezas Brinell é mostrado na Figura 12-27.* Ver a norma correspondente para as propriedades metalúrgicas requeridas para aços de Graus 1, 2 e 3 da AGMA. Para alcançar os valores de resistência na Tabela 12-21 e na Figura 12-27, o material deve ser especificado para cumprir essa norma.

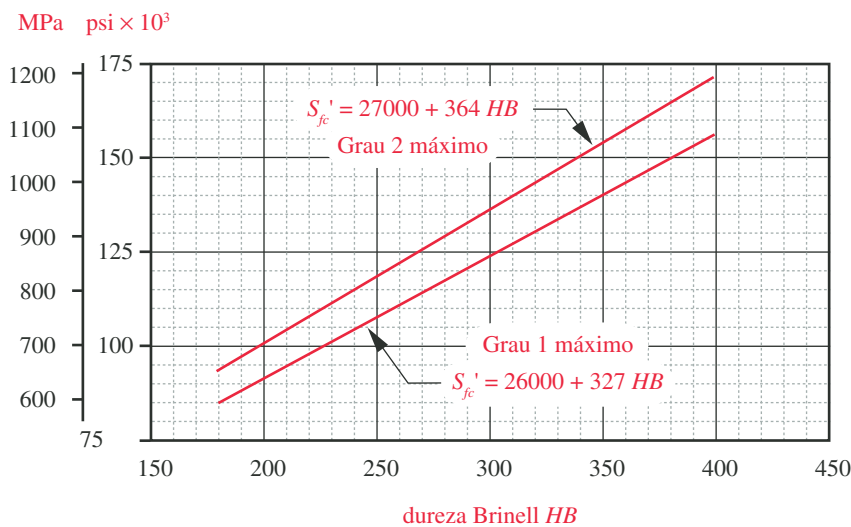



FIGURA 12-27*

Resistências à fadiga de superfície S_{fc}' da AGMA para aços.

* Extraído da Norma 2001-B88, AGMA, *Fundamental Ratings Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth,* com autorização do editor, American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va, 22314.

EXEMPLO 12-7

Seleção de material e coeficiente de segurança de engrenagens retas

Problema **Selecione materiais apropriados e calcule os coeficientes de segurança para tensões de flexão e superficiais no trem de 3 engrenagens dos Exemplos 12-4, 12-5 e 12-6.**

Dados **As tensões são calculadas nos Exemplos 12-5 e 12-6.**

Hipóteses **A vida em serviço requerida é de 5 anos em operação de um turno. Todas as engrenagens são de aço. A temperatura de operação é 200 °F.**

Solução

1 Uma estimativa da resistência à fadiga de flexão não corrigida pode ser feita pela da curva da Figura 12-25. Tentaremos um aço AGMA Grau 2 endurecido inteiramente a 250 HB. A resistência à fadiga de flexão não corrigida é encontrada a partir da curva superior da figura

$$S_{fb'} = 6235 + 174HB - 0{,}126HB^2$$
$$= 6235 + 174(250) - 0{,}126(250)^2 = 41860 \text{ psi} \tag{a}$$

2 Esse valor precisa ser corrigido por certos fatores usando a Equação 12.24.

3 O fator de vida K_L é encontrado a partir da equação apropriada na Figura 12-24 com base no número requerido de ciclos na vida das engrenagens. O pinhão vê o número maior de repetições de carregamentos de dente, portanto calculamos a vida baseado nele. Primeiro, calculamos o número de ciclos N para a vida requerida de 5 anos, um turno.

$$N = 2500 \text{ rpm}\left(\frac{60 \text{ min}}{\text{h}}\right)\left(\frac{2080 \text{ h}}{\text{turno.ano}}\right)(5 \text{ anos})(1 \text{ turno}) = 1{,}56E9 \text{ ciclos} \tag{b}$$

O valor de K_L é encontrado por

$$K_L = 1{,}3558N^{-0{,}0178} = 1{,}3558(1{,}56E9)^{-0{,}0178} = 0{,}9302 \tag{c}$$

4 Na temperatura de operação especificada, $K_T = 1$.

5 Os dados sobre o material da engrenagem são todos tomados a um nível de confiabilidade de 99%. Isso é satisfatório neste caso, fazendo $K_R = 1$.

6 A resistência à fadiga de flexão corrigida é, então,

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} = \frac{0{,}9302}{1(1)} 41860 = 38937 \text{ psi} \tag{d}$$

7 Um valor estimado da resistência à fadiga de superfície não corrigida pode ser feita a partir das curvas da Figura 12-27. Para um aço AGMA Grau 2 endurecido inteiramente a 250 HB, a resistência é encontrada pela curva superior da figura como sendo

$$S_{fc'} = 27000 + 364HB = 27000 + 364(250) = 118000 \text{ psi} \tag{e}$$

8 Este valor precisa ser corrigido para certos fatores usando a Equação 12.25:

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} \tag{f}$$

9 O fator de vida C_L é encontrado pela equação apropriada na Figura 12-26 baseado no número requerido de ciclos N encontrados anteriormente.

$$C_L = 1{,}4488\,N^{-0{,}023} = 1{,}4488\left(1{,}56E9\right)^{-0{,}023} = 0{,}8904 \qquad (g)$$

10 $C_T = K_T = 1$ e $C_R = K_R = 1$.

11 Como o pinhão e as engrenagens são de materiais com a mesma dureza neste caso, $C_H = 1$.

12 A resistência à fadiga de superfície corrigida é, então,

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} = \frac{0{,}8904(1)}{1(1)} 118.000 = 105.063 \text{ psi} \qquad (h)$$

13 O coeficiente de segurança contra falha de flexão é encontrado comparando a resistência de flexão corrigida com a tensão de flexão para cada engrenagem no engrenamento:

$$N_{b_{pinhão}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{pinhão}}} = \frac{38937}{9526} = 4{,}1 \qquad (i)$$

$$N_{b_{interm}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{interm}}} = \frac{38937}{12400} = 3{,}1 \qquad (j)$$

$$N_{b_{engrenagem}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrenagem}}} = \frac{38937}{6834} = 5{,}7 \qquad (k)$$

que são aceitáveis.

14 O coeficiente de segurança contra falha de superfície deve ser encontrado comparando a carga real à carga que produziria uma tensão igual à resistência de flexão corrigida do material. Como a tensão de superfície está relacionada com a raiz quadrada da carga, o coeficiente de segurança à fadiga de superfície pode ser calculado como o quociente do quadrado da resistência de superfície corrigida dividido pelo quadrado da tensão de superfície para cada engrenagem no engrenamento:

$$N_{c_{pinhão-interm}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{pinhão}}}\right)^2 = \left(\frac{105063}{113315}\right)^2 = 0{,}86 \qquad (l)$$

$$N_{c_{interm-engrenagem}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{interm}}}\right)^2 = \left(\frac{105063}{90696}\right)^2 = 1{,}34 \qquad (m)$$

que é muito baixo para o engrenamento do pinhão e da intermediária.

15 Uma mudança pequena no projeto melhorará esses valores. O aumento da largura da face das engrenagens do valor presente de 2,0 para 2,5 in (15 / p_d) reduz todas as tensões e dá novos coeficientes de segurança de

$$N_{b_{pinhão}} = 5{,}1 \qquad N_{b_{interm}} = 3{,}9 \qquad N_{b_{engrenagem}} = 7{,}1$$

$$N_{c_{pinhão-interm}} = 1{,}1 \qquad N_{c_{interm-engrenagem}} = 1{,}7 \qquad (n)$$

16 Essas engrenagens são muito seguras contra a queda de dente e, com base nas hipóteses e cálculos, deve ter uma probabilidade de 99% da duração de

5 anos requeridos antes que a crateração do pinhão ou da intermediária comece.

17 Os arquivos EX12-07*a* e EX12-07*b* encontram-se no CD-ROM deste livro.

12.10 LUBRIFICAÇÃO DE ENGRENAMENTO

Com a exceção de engrenagens de plástico ligeiramente carregadas, todos os engrenamentos devem ser lubrificados para evitar falha prematura de um dos modos de falha de superfície discutidos no Capítulo 7, como desgaste por abrasão ou adesivo. Controlar a temperatura na interface de engrenamento é importante para reduzir escórias, riscos e aspereza dos dentes. Os lubrificantes removem calor e separam as superfícies metálicas para reduzir o atrito e desgaste. Deve-se prover lubrificante em quantidade suficiente para transferir o calor de atrito para o ambiente sem permitir temperaturas locais excessivas no engrenamento.

O enfoque usual e preferido é prover um banho de óleo alojando as engrenagens em uma caixa com óleo bem fechada, chamada de redutor. Esse redutor é parcialmente enchido com um lubrificante apropriado de forma que pelo menos um membro de cada par engrenado esteja parcialmente submerso. (A caixa nunca é completamente enchida com óleo.) A rotação da engrenagem carregará o lubrificante para os pares engrenados e manterá as engrenagens não submersas lubrificadas. O óleo deve ser mantido limpo e livre de contaminantes e deve ser mudado periodicamente. Um arranjo bem menos desejável, às vezes usado para situações na qual um redutor não é prático, é periodicamente aplicar graxa lubrificante a engrenagens quando elas estão paradas para manutenção. Graxa é meramente um óleo suspenso em uma emulsão de sabão. Essa lubrificação típica de graxa faz pouca remoção de calor e é recomendada somente para baixa velocidade e engrenagens carregadas levemente.

Lubrificantes de engrenagem são tipicamente óleos, baseados no petróleo, de viscosidade diferente dependendo da lubrificação. Óleos leves (10-30W) são usados às vezes para engrenagens com velocidades altas o suficiente e/ou cargas baixas o suficiente para promover a lubrificação elasto-hidrodinâmica (ver o Capítulo 11). Em engrenamentos de cargas elevadas e/ou baixa velocidade, ou aqueles com grandes componentes deslizando, lubrificantes de pressão extrema (EP) são frequentemente usados. São normalmente óleos de engrenagem 80-90W com aditivos do tipo ácidos graxos que proveem alguma proteção contra escoreamento sob condições limites de lubrificação. Ver a Seção 7.3 e o Capítulo 11 para mais informações acerca de lubrificação e lubrificantes. A AGMA provê uma grande quantidade de dados nas suas normas sobre a seleção apropriada de lubrificantes de engrenagem. O leitor é remetido àquela fonte e a outras como vendedores de lubrificante para informações mais detalhadas.

12.11 PROJETO DE ENGRENAGENS RETAS

O projeto de engrenagens geralmente requer alguma iteração. Em geral não existe informação suficiente no enunciado do problema para encontrar diretamente as incógnitas. Devem-se pressupor os valores de alguns parâmetros e tentar obter uma solução. Muitas abordagens são possíveis.

Normalmente, a razão de engrenamento e a potência e velocidade, ou torque e velocidade, de um eixo são definidas. Os parâmetros a serem determinados são os diâmetros de referência do pinhão e da engrenagem, o passo diametral, a lar-

gura de face, o(s) material(is) e os coeficientes de segurança. Algumas decisões de projeto sobre a precisão de engrenamento requerida, o método de fabricação da engrenagem (por considerações de acabamento de superfície), o intervalo de temperatura operacional e a confiabilidade desejada devem ser tomadas. Com pelo menos informações preliminares sobre estes fatores, o processo de projetar pode começar.

Em algum momento, precisaremos calcular os coeficientes de segurança para falha de fadiga de flexão e falha de fadiga de superfície. Eles podem ser investigados em qualquer ordem, mas a melhor estratégia é calcular as tensões de flexão primeiro, porque o aumento de dureza da superfície do material tem um efeito maior no desgaste que na resistência à flexão. Assim, se o material escolhido sobreviver às tensões de flexão, sua dureza poderá ser ajustada para melhorar sua vida de desgaste sem outra mudança de projeto. Além disso, o aumento do tamanho do dente tem um efeito maior na resistência de flexão que na vida de desgaste, e o tamanho do dente é a variável primordial nos cálculos.

Antes que quaisquer cálculos de tensão sejam feitos, as cargas devem ser determinadas. A carga tangencial nos dentes de engrenagem pode ser encontrada pelo torque conhecido no eixo e o raio de referência suposto para seu pinhão ou engrenagem (ver a Equação 12.13*a*). Observe que um raio de referência maior reduz a carga de dente, mas aumenta a velocidade da linha de referência. Um compromisso razoável entre esses fatores deve ser determinado. Além disso, um raio de referência muito pequeno pode resultar em um pinhão com muito poucos dentes para evitar interferência, dependendo do passo diametral ou módulo selecionado. Uma vez que um passo diametral de tentativa tenha sido selecionado, seu menor diâmetro de pinhão aceitável pode ser usado como primeira escolha a fim de manter o pacote de tamanho pequeno. A primeira tentativa de projeto deve usar uma forma de dente normalizada para manter os custos baixos. Se o projeto precisar ser menor que a forma de dente normalizado permite, uma forma com adendo alongado pode ser investigada.

Sendo que a resistência de flexão do dente da engrenagem está diretamente relacionada com o tamanho do dente como definido pelo seu passo diametral ou módulo, um ponto comum de começo para o cálculo da tensão é supor valores para o passo diametral ou módulo e também para a largura de face, e então calcular a tensão de flexão usando a Equação 12.15. Observe que a largura de face pode também ser grosseiramente expressa como uma função intervalo do passo diametral ($8 / p_d < F < 16 / p_d$). Releia a discussão sobre o fator K_m.

Um material de tentativa é então escolhido e sua resistência à fadiga de flexão calculada pela Equação 12.24. Se o coeficiente de segurança resultante for muito grande ou muito pequeno, os valores supostos são ajustados e o cálculo repetido até que ele convirja para uma solução aceitável.

A tensão de superfície e a resistência à fadiga de superfície são, então, calculadas pelas Equações 12.21 e 12.25, e o coeficiente de segurança contra desgaste determinado. A dureza do material pode ser ajustada neste ponto, se necessário, ou o processo completo pode ser repetido com os valores ajustados do passo ou largura de face, ou ambos.

Uma estratégia útil é alinhavar os coeficientes de segurança para falha de flexão para serem mais altos que aqueles para falha de superfície. A falha de flexão é repentina e catastrófica, resultando em quebra do dente e parada da máquina. Falhas de superfície dão aviso audível e as engrenagens podem funcionar algum tempo depois do barulho começar, antes de serem substituídas. Assim, a falha de superfície é o limite de projeto mais desejável na vida da engrenagem.

12.12 ESTUDO DE CASO

Vamos tratar agora do projeto de engrenagens retas em uma das montagens de estudo de caso que foram definidas no Capítulo 9.

ESTUDO DE CASO 8C

Projeto de engrenagens retas para o trem motor de um compressor

Problema **Projete um par de engrenagens retas para o redutor de compressor da Figura 9-1 baseado nos carregamentos definidos no Estudo de Caso 8A e especifique materiais e tratamentos térmicos apropriados.**

Dados **A função torque-tempo do eixo de saída é como mostrado na Figura 9-3 (repetida na próxima página). A razão de engrenamento requerida é uma redução 2,5:1 na velocidade desde o eixo de entrada ao eixo de saída. A velocidade do eixo de saída é 1500 rpm.**

Hipóteses **Deseja-se uma vida de 10 anos para um turno de operação. Serão utilizados dentes de profundidade completa padronizados pela AGMA. Com base nos dados das Tabelas 12-6 e 12-7, faça** $Q_v = 10$**. Tanto o pinhão quanto a engrenagem serão de aço endurecido completamente.**

Solução **Ver as Figuras 9-1 e 9-3.**

1 O torque variável com o tempo no eixo de saída está definido na Figura 9-3 como variando entre –175 e +585 lb-in. No Estudo de Caso 8B, no qual os eixos para esta mesma máquina foram projetados, pressupusemos um passo diametral de 4 in, um pinhão de 20° e uma engrenagem de 10 in. Como uma primeira tentativa no projeto de engrenamento, manteremos essas hipóteses. A partir desses dados, podemos determinar as forças no engrenamento. A componente tangencial é encontrada a partir do torque de saída conhecido e do raio da engrenagem suposto:

$$W_{t_{max}} = \frac{T_{max}}{r_g} = \frac{585 \text{ lb-in}}{5 \text{ in}} = 117 \text{ lb}$$

$$W_{t_{min}} = \frac{T_{min}}{r_g} = \frac{-175 \text{ lb-in}}{5 \text{ in}} = -35 \text{ lb} \qquad (a)$$

2 Tomaremos o valor de pico positivo como sendo a carga transmitida, $W_t = 117$ lb. A força de pico de –35 lb atua em lados opostos dos dentes, carregando engrenagem e pinhão de forma similar a uma engrenagem intermediária. Tomaremos esse aspecto do carregamento em consideração com o fator de aplicação K_a.

3 Suponha um pinhão com $N_p = 20$ dentes. A engrenagem então tem 2,5 $N_p = 50$ dentes. O passo diametral para essa combinação é

$$p_d = \frac{N}{d} = \frac{20}{4} = 5 \qquad (b)$$

que é um passo padronizado (Tabela 12-2).

4 Os fatores de geometria de flexão, J, para essa combinação são encontrados na Tabela 12-9 para o carregamento no seu ponto mais alto de contato de um único dente (HPSTC) e são, aproximadamente:

$$J_p = 0{,}34 \qquad J_g = 0{,}40 \qquad (c)$$

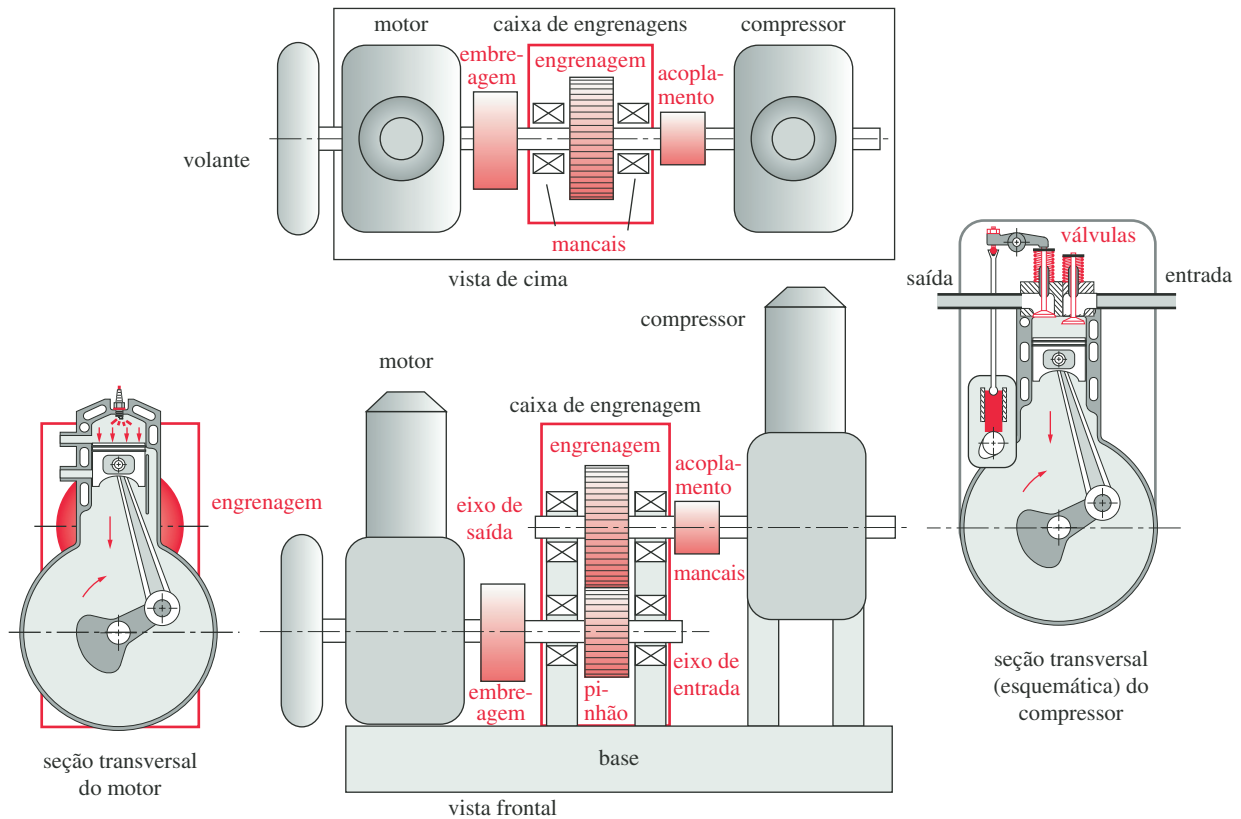



FIGURA 9-1 Repetida

Desenho esquemático preliminar de um compressor de ar portátil movido por motor à gasolina, caixa de engrenagens, acoplamentos, eixos e mancais.

5 O fator de dinâmico, K_v (C_v), é calculado pelas Equações 12.16 e 12.17 com base no índice de qualidade da engrenagem, Q_v, pressuposto e na velocidade da linha de referência, V_t.

$$V_t = \frac{d_p}{2}\omega_p = \frac{4{,}0 \text{ in}}{2(12)}(3750 \text{ rpm})(2\pi) = 3927 \frac{\text{ft}}{\text{min}} \qquad (d)$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} = \frac{(12 - 10)^{2/3}}{4} = 0{,}397 \qquad (e)$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0{,}397) = 83{,}77 \qquad (f)$$

$$K_v = C_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}}\right)^B = \left(\frac{83{,}77}{83{,}77 + \sqrt{3\,927}}\right)^{0{,}397} = 0{,}801 \qquad (g)$$

6 V_t deve ser verificado contra a velocidade máxima permissível da linha de referência para esta qualidade de engrenagem usando a Equação 12.18:

$$V_{t_{max}} = \left[A + (Q_v - 3)\right]^2 = \left[83{,}77 + (10 - 3)\right]^2 = 8239 \text{ ft/min} \qquad (h)$$

que é maior que V_t, portanto é aceitável.

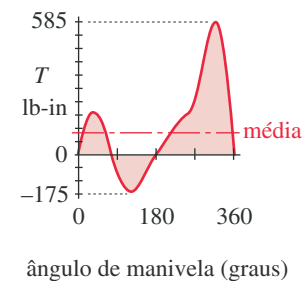



FIGURA 9-3 Repetida

Função torque-tempo no eixo manivela com ω constante.

7 Supondo um fator de largura de face de 12, a largura da face pode ser estimada como

$$F \cong \frac{12}{p_d} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \text{ in} \tag{i}$$

8 Esse valor é usado para interpolar na Tabela 12-16 para K_m (C_m).

$$K_m = C_m \cong 1{,}61 \tag{j}$$

9 O fator de aplicação, K_a, se destina a levar em conta a possibilidade de choque na maquinária motora e movida. Esta máquina tem ambos, já que é movida por um motor de um único cilindro e move um compressor de um único cilindro. Em muitos casos, apenas um valor médio do torque transmitido é conhecido, baseado na potência média transmitida. Neste caso, calculamos (no Estudo de Caso 8A) uma função torque-tempo bem precisa para o compressor, que de fato define as "sobrecargas" na parte movida do sistema. Usamos o torque pico em vez do torque médio para definir a carga transmitida. Assim, o valor completo do fator de aplicação recomendado na Tabela 12-17 pode não ser necessário aqui. Vamos usá-lo para levar em conta o carregamento parcialmente invertido nos dentes da engrenagem (Figura 9-3), bem como o carregamento de choque associado com o motor, e vamos estimá-lo em $K_a = C_a = 2$.

10 O fator de tamanho, K_s (C_s), e o fator de flexão de borda, K_B, são todos 1 para essas engrenagens pequenas.

11 As tensões de flexão no pinhão e engrenagem podem agora ser calculadas.

$$\sigma_{b_p} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{117(5)}{2{,}4(0{,}34)}\frac{1(1{,}61)}{0{,}801}(1)(1)(1) = 2881 \text{ psi} \tag{k}$$

$$\sigma_{b_g} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{117(5)}{2{,}4(0{,}40)}\frac{1(1{,}61)}{0{,}801}(1)(1)(1) = 2449 \text{ psi} \tag{l}$$

12 Fatores adicionais são necessários para o cálculo da tensão de superfície. A Tabela 12-18 mostra um coeficiente elástico aproximado de 2300 para aço em aço. No Exemplo 12-6, calculamos um valor mais preciso de $C_p = 2276$. O fator de acabamento de superfície C_f é 1.

13 O fator de geometria da superfície, I, é calculado a partir das Equações 12.22:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\left(r_p + \frac{1}{p_d}\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi \\ &= \sqrt{\left(2{,}0 + \frac{1}{5}\right)^2 - \left(2{,}0 \cos 20°\right)^2} - \frac{\pi}{5}\cos 20° = 0{,}553 \text{ in} \end{aligned} \tag{m}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= C \operatorname{sen}\phi - \rho_1 = \left(r_p + r_g\right)\operatorname{sen}\phi - \rho_1 \\ &= \left(2{,}0 + 5{,}0\right)\operatorname{sen} 20° - 0{,}553 = 1{,}841 \text{ in} \end{aligned} \tag{n}$$

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right)d_p} = \frac{\cos 20°}{\left(\dfrac{1}{0{,}553} + \dfrac{1}{1{,}841}\right)2{,}0} = 0{,}100 \tag{o}$$

14 As tensões de superfície no engrenamento pinhão-engrenagem podem agora ser calculadas.

$$\sigma_{c_{pg}} = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId_p}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$
$$= 2276\sqrt{\frac{117}{2,4(0,100)(4,0)}\frac{1(1,61)}{0,801}(1)(1)} = 50393 \text{ psi} \qquad (p)$$

15 Uma estimativa da resistência à fadiga de flexão não corrigida pode ser feita a partir das curvas da Figura 12-25. Tentaremos um aço AGMA Grau 1 endurecido completamente a 250 HB. A resistência à fadiga de flexão não corrigida é encontrada a partir da curva mais baixa da figura:

$$S_{fb'} = -274 + 167HB - 0,152Hb^2$$
$$= -274 + 167(250) - 0,152(250)^2 = 31976 \text{ psi} \qquad (q)$$

16 Esse valor precisa ser corrigido para certos fatores usando a Equação 12.24. O fator de vida K_L é encontrado pela equação apropriada na Figura 12-24 baseado no número requerido de ciclos na vida das engrenagens. O pinhão vê o maior número de repetições de carregamentos de dente, portanto calculamos a vida baseado nele. Primeiro, calculamos o número de ciclos N para a vida requerida de 10 anos, um turno.

$$N = 3750 \text{ rpm}\left(\frac{60 \text{ min}}{\text{h}}\right)\left(\frac{2080 \text{ h}}{\text{turno-ano}}\right)(10 \text{ anos})(1 \text{ turno}) = 4,7E9 \text{ ciclos} \qquad (r)$$

O valor de K_L é encontrado a partir de

$$K_L = 1,3558N^{-0,0178} = 1,3558(4,7E9)^{-0,0178} = 0,9121 \qquad (s)$$

17 Na temperatura especificada de operação, $K_T = 1$.

18 Os dados de material-engrenagem são todos usados em um nível de confiabilidade de 99%. Isso é satisfatório neste caso, assim fazemos $K_R = 1$.

19 A resistência à fadiga de flexão corrigida é, então,

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} = \frac{0,9121}{1(1)} 31976 = 29167 \text{ psi} \qquad (t)$$

20 Uma estimativa da resistência à fadiga de flexão não corrigida pode ser feita pelas curvas da Figura 12-27. Para um aço AGMA de Grau 1, endurecido completamente a 250 HB, a resistência é encontrada pela curva mais baixa da figura:

$$S_{fc'} = 26000 + 327HB = 26000 + 327(250) = 107750 \text{ psi} \qquad (u)$$

21 Esse valor precisa ser corrigido para certos fatores usando a Equação 12.25. O fator de vida C_L é encontrado pela equação apropriada na Figura 12-26 baseado no número de ciclos N requeridos encontrados acima.

$$C_L = 1,4488N^{-0,023} = 1,4488(4,7E9)^{-0,023} = 0,8681 \qquad (v)$$

22 $C_T = K_T = 1$ e $C_R = K_R = 1$.

23 Já que as engrenagens e o pinhão são de material de mesma dureza neste caso, $C_H = 1$.

24 A resistência à fadiga de superfície corrigida é, então,

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} = \frac{0{,}8681(1)}{1(1)} 107750 = 93543 \text{ psi} \qquad (w)$$

25 Os coeficientes de segurança contra falha de flexão são encontrados comparando a resistência de flexão corrigida à tensão de flexão de cada engrenagem no engrenamento:

$$N_{b_{pinhão}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{pinhão}}} = \frac{29167}{2881} = 10{,}1$$

$$N_{b_{engrenagem}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrenagem}}} = \frac{29167}{2449} = 11{,}9 \qquad (x)$$

que são muito altas, fazendo com que o pacote seja maior do que necessário.

26 O coeficiente de segurança contra falha é encontrado comparando a carga real à carga que produziria uma tensão igual à tensão de superfície corrigida do material. Como a tensão de superfície é relacionada à raiz quadrada da carga, o coeficiente de segurança de fadiga da superfície pode ser calculado como o quociente do quadrado da resistência de superfície corrigida dividida pelo quadrado da tensão de superfície de cada engrenagem no engrenamento:

$$N_{c_{pinhão-engrenagem}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{pinhão}}} \right)^2 = \left(\frac{93543}{50393} \right)^2 = 3{,}4 \qquad (y)$$

27 Eles são maiores que o necessário. O passo diametral foi aumentado do valor presente 5 a 8 (diminuindo o tamanho do dente) a fim de reduzir os diâmetros de referência, aumentar as tensões e diminuir os coeficientes de segurança. A largura de face se torna 1,5 in para o mesmo fator de largura de face de 12. O pinhão foi aumentado para 22 dentes, dando 55 dentes na engrenagem com o novo p_d. Os cálculos foram refeitos com os resultados mostrados na Tabela 12-22. Os novos coeficientes de segurança são

$$N_{b_{pinhão}} = 2{,}8 \qquad N_{b_{engrenagem}} = 3{,}3 \qquad N_{c_{pinhão-engrenagem}} = 1{,}1 \qquad (z)$$

28 Essas engrenagens ainda são seguras contra a quebra de dente. Baseado nas hipóteses e cálculos, e se lubrificadas apropriadamente, elas deverão ter uma probabilidade de 99% de durar os 10 anos requeridos antes de que a crateração do pinhão comece.

29 Observe que a mudança dos passos diametrais da engrenagem sobre aqueles supostos no Estudo de Caso 8B para o projeto do eixo também aumenta as cargas da engrenagem no eixo em 45%. Isso requererá uma outra iteração do projeto daquele eixo.

30 Os arquivos CASE8C-1 (primeiro projeto) e CASE8C-2 (projeto final) encontram-se no CD-ROM deste livro.

12.13 RESUMO

Existem dois tipos principais de falhas de engrenagem: quebra do dente por tensões de flexão e crateração por tensões de superfície (Hertzianas). Das duas, a falha de flexão é a mais catastrófica, porque a quebra do dente normalmente desabilita a máquina. A falha de crateração vem gradualmente e dá aviso audível e visível (se os dentes puderem ser inspecionados). As engrenagens podem fun-

Tabela 12-22 Estudo de caso 8C – Projeto final de engrenagens cilíndricas de dentes retos[§]

Entrada	Variável	Saída	Unidade	Comentários
2,50	*razão*			razão de engrenamento
8	p_d		1/in	passo diametral
20	*phi*		graus	ângulo de pressão
170	W_t		lb	força tangencial
22	$N_{pinhão}$			número de dentes no pinhão
	$N_{engrenagem}$	55		número de dentes na engrenagem
	$d_{pinhão}$	2,75	in	diâmetro de passo do pinhão
	$d_{engrenagem}$	6,88	in	diâmetro de passo da engrenagem
1,50	*face*		in	largura da face
0,34	$J_{pinhão}$			fator geométrico – pinhão
0,40	$J_{engrenagem}$			fator geométrico – engrenagem
	I	0,10		fator I para engrenamento pinhão/engrenagem
2,0	K_a			fator de aplicação
1,6	K_m			fator de distribuição de carga
2 276	C_p			coeficiente elástico
10	Q_v			índice de qualidade de engrenagem
	V_t	2 700	ft/min	velocidade da linha de referência
	V_{tmax}	8 239	ft/min	velocidade da linha de referência máxima permitida
	K_v	0,826		fator dinâmico
	$\sigma_{bpinhão}$	10 346	psi	tensão de flexão — dentes do pinhão
	$\sigma_{bengrenagem}$	8 794	psi	tensão de flexão — dentes da engrenagem
	$\sigma_{cpinhão}$	90 026	psi	tensão superficial no pinhão e na engrenagem
	Sf_{bprime}	31 976	psi	resistência não corrigida de flexão
	Sf_b	29 167	psi	resistência corrigida de flexão
	Sf_{cprime}	107 750	psi	resistência não corrigida de superfície
	Sf_c	93 543	psi	resistência corrigida de superfície
	K_R	1,00		fator de confiabilidade
	ciclos	4,7*E*+9		número de ciclos repetidos do pinhão
	K_L	0,91		fator de vida — fadiga à flexão
	C_L	0,87		fator de vida — fadiga superficial
	N_{bp}	2,8		coeficiente de segurança de flexão do pinhão
	N_{bg}	3,3		coeficiente de segurança de flexão da engrenagem
	N_{cp}	1,1		coeficiente de segurança superficial do engrenamento

[§] N. de R.: Estes dados também estão no CD, em inglês, que acompanha o livro. Estão traduzidos aqui para facilitar o entendimento do leitor.

cionar por algum tempo depois que a crateração começa antes que tenham que ser trocadas.

Ambos os modos de falha são falhas de fadiga devido a tensionamento repetido de dentes individuais à medida que entram e saem do engrenamento. Os princípios da análise de fadiga (Capítulo 6) se aplicam, e uma análise modificada de Goodman é necessária. Contudo, a natureza similar do carregamento em todos os dentes da engrenagem permite que a análise de Goodman seja resumida em uma abordagem padronizada como definida pela AGMA.

A geometria de dente involuta é crucial para a operação e vida das engrenagens. A AGMA define um perfil de dente padronizado além de várias modificações para aquele padrão para diversas situações. Fatores geométricos necessários para os cálculos apropriados das tensões são definidos para essas geometrias. A experimentação extensiva dos materiais de engrenagem sob condições de carregamento realistas em combinação com os anos de experiência dos fabricantes de engrenagem produziram um conjunto de equações testadas para o cálculo das tensões e resistências à fadiga corrigida em flexão e em fadiga de superfície para as engrenagens.

Este capítulo resume a abordagem da AGMA para o projeto de engrenagens retas e apresenta vários gráficos e fórmulas empíricas de cálculo. Recomendamos ao leitor dirigir-se às normas da AGMA para informações mais completas.

Equações importantes usadas neste capítulo

Passo circular (Seção 12.2):

$$p_c = \frac{\pi d}{N} \tag{12.3a}$$

Passo diametral (Secção 12.2):

$$p_d = \frac{N}{d} \tag{12.4a}$$

Módulo métrico (Seção 12.2):

$$m = \frac{d}{N} \tag{12.4c}$$

Razão de engrenamento (Seção 12.2):

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} \tag{12.5b}$$

Razão de contato (Seção 12.4):

$$m_p = \frac{p_d Z}{\pi \cos\phi} \tag{12.7b}$$

$$Z = \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_g + a_g\right)^2 - \left(r_g \cos\phi\right)^2} - C \operatorname{sen}\phi \tag{12.2}$$

Carga tangencial nos dentes da engrenagem (Seção 12.5):

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2p_d T_p}{N_p} \tag{12.13a}$$

Equações para tensão de flexão da AGMA (Seção 12.8)

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{12.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{12.15si}$$

Equação de tensão de superfície da AGMA (Seção 12.8)

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I d} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{12.21}$$

Equação de resistência à fadiga de flexão da AGMA (Seção 12.9):

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} \qquad (12.24)$$

Equação de resistência à fadiga de superfície da AGMA (Seção 12.9):

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} \qquad (12.25)$$

12.14 REFERÊNCIAS

1 **AGMA**, *Gear Nomenclature, Definitions of Terms with Symbols*. ANSI/AGMA Standard 1012-F90. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314, 1990.

2 **AGMA**, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. ANSI/AGMA Standard 2001-B88. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314, 1988.

3 **AGMA**, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical, and Herringbone Gear Teeth*. ANSI/AGMA Standard 908-B89. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314, 1989.

4 **R. L. Norton**, *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines, 3ed*. McGraw-Hill: New York, pp. 462-521, 2004.

5 **W. Lewis**, "Investigation of the Strength of Gear Teeth, an address to the Engineer's Club of Philadelphia, October 15, 1892." reprinted in *Gear Technology*, vol. 9, no. 6, p. 19, Nov./Dec. 1992.

6 **T. J. Dolan and E. L. Broghammer**, *A Photoelastic Study of the Stresses in Gear Tooth Fillets*. Bulletin 335, U. Illinois Engineering Experiment Station:, 1942.

7 **W. D. Mark**, The Generalized Transmission Error of Parallel-Axis Gears. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. **111**: pp. 414-423, 1989.

8 **R. A. Morrison** "Load/Life Curves for Gear and Cam Materials." *Machine Design*, pp. 102-108, Aug. 1, 1968.

9 **E. Buckingham**, *Analytical Mechanics of Gears*, McGraw-Hill: New York, 1949.

10 **D. W. Dudley**, Gear Wear, in *Wear Control Handbook,* M. B. Peterson and W. O. Winer, ed. ASME: New York, p. 764, 1980.

12.15 PROBLEMAS

*12-1 Uma engrenagem de dentes retos de 20° de ângulo de pressão e 27 dentes tem um passo diametral $p_d = 5$. Encontre o diâmetro de referência, o adendo, o dedendo, o diâmetro externo e o passo circular.

12-2 Uma engrenagem de dentes retos de 25° de ângulo de pressão e 43 dentes tem um passo diametral $p_d = 8$. Encontre o diâmetro de referência, o adendo, o dedendo, o diâmetro externo e o passo circular.

*12-3 Uma engrenagem de dentes retos tem 57 dentes e está engrenada com um pinhão de 23 dentes. O $p_d = 6$ e $\phi = 25°$. Encontre a razão de contato.

Tabela P12-0†
Matriz de problemas/tópicos

12.1 Teoria de dente de engrenagem
12-5, 12-6, 12-37,12-38, 12-41, 12-42, **12-59**, **12-65**

12.2 Nomenclatura
12-1, 12-2, 12-44, 12-45, *12-60*, *12-66*

12.4 Razão de contato
12-3, 12-4, 12-39, 12-40, 12-61, 12-67

12.5 Trens compostos
12-7, *12-9*, *12-10*, *12-29*, *12-30*, *12-31*, 12-43, *12-46*, *12-47*

12.5 Trens epicíclicos
12-11, 12-12, 12-13, *12-48*, *12-49*, 12-62, 12-68

12.7 Carregamento
12-14, 12-15, 12-20, 12-21, 12-22, 12-27, 12-52, 12-55

12.8, .9 Tensão de flexão
12-16, *12-17*, *12-23*, *12-24*, 12-50, 12-63

12.8, .9 Tensão de superfície
12-18, *12-19*, *12-25*, *12-26*, 12-51, 12-64

12.11 Projeto de engrenagem
12-8, *12-28*, *12-29*, *12-30*, *12-31*, ***12-32***, *12-33*, *12-34*, *12-53*, *12-54*, *12-56*, *12-57*, *12-58*

12-4 Uma engrenagem reta de 78 dentes está engrenada a um pinhão de 27 dentes. O $p_d = 6$ e $\phi = 20°$. Encontre a razão de contato.

*12-5 Qual será o ângulo de pressão se a distância entre os centros do par de engrenagens retas do Problema 12-3 for aumentada em 5%?

12-6 Qual será o ângulo de pressão se a distância entre os centros do par de engrenagens retas do Problema 12-4 for aumentada em 7%?

*12-7 Se os pares de engrenagens retas nos Problemas 12-3 e 12-4 forem compostos como mostrado na Figura 12-14, qual será a razão de trem global?

†***12-8*** Uma máquina de papel processa rolos de papel tendo uma densidade de 984 kg/m^3. O rolo de papel tem 1,50 m de diâmetro externo por 0,22 m de diâmetro interno por 3,23 m de comprimento e está em um eixo de aço, furado, biapoiado com S_{ut} = 400 Mpa. Projete uma redução de 2,5:1 de engrenagens retas para mover esse eixo do rolo e obter um coeficiente de segurança dinâmica mínimo de 2 para uma vida de 10 anos se o diâmetro externo do eixo for 22 cm e o rolo girar a 50 rpm com 1,2 hp absorvidos.

**12-9* Projete um trem de engrenagens retas composto de dois estágios para uma razão global de aproximadamente 47:1. Especifique os números de dentes para cada engrenagem no trem.

†*12-10* Projete um trem de engrenagens retas composto de três estágios para uma razão global de aproximadamente 656:1. Especifique os números de dentes para cada engrenagem no trem.

*12-11 Um trem de engrenagens retas epicíclico, como mostrado na Figura 12-16, tem uma engrenagem sol de 33 dentes e uma engrenagem planeta de 21 dentes. Encontre o número requerido de dentes na engrenagem anel e determine a razão entre o braço e engrenagem sol se a engrenagem anel for mantida estacionária. Dica: considere o braço com rotação de 1 rpm.

12-12 Um trem de engrenagens retas epicíclico, como mostrado na Figura 12-16, tem uma engrenagem sol de 23 dentes e uma engrenagem planeta de 31 dentes. Encontre o número requerido de dentes na engrenagem anel e determine a razão entre o braço e engrenagem anel se a engrenagem sol for mantida estacionária. Dica: considere o braço com rotação de 1 rpm.

12-13 Um trem de engrenagens retas epicíclico, como mostrado na Figura 12-16, tem uma engrenagem sol de 23 dentes e uma engrenagem planeta de 31 dentes. Encontre o número requerido de dentes na engrenagem anel e determine a razão entre a engrenagem sol e a engrenagem anel se o braço for mantido estacionário. Dica: considere a engrenagem sol com rotação de 1 rpm.

*12-14 Se o engrenamento no Problema 12-3 transmite 125 hp com uma rotação de 1000 rpm do pinhão, encontre o torque em cada eixo.

12-15 Se o engrenamento no Problema 12-4 transmite 33 kW com uma rotação de 1600 rpm do pinhão, encontre o torque em cada eixo.

**12-16* Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-14 para um coeficiente de segurança de falha de flexão de pelo menos 2 supondo um torque constante, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 9$, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido da classe 40.

12-17 Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-15 para um coeficiente de segurança de falha de flexão de 2,5 supondo um torque constante, um ângulo de pressão de 20°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 11$, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

**12-18* Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-14 para um coeficiente de segurança de falha de superfície de pelo menos 2 supondo um torque constante, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 9$, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido da classe 40.

12-19 Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-15 para um coeficiente de segurança de falha de superfície de 1,2 supondo um torque constante, um ângulo

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

de pressão de 20°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 11$, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

*12-20 Se a redução no Problema 12-11 transmite 83 kW no braço girando a 1200 rpm, encontre o torque em cada eixo.

12-21 Se a redução no Problema 12-12 transmite 39 hp no braço girando a 2600 rpm, encontre o torque em cada eixo.

12-22 Se a redução no Problema 12-13 transmite 23 kW na engrenagem sol girando a 4800 rpm, encontre o torque em cada eixo.

**12-23* Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-20 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2,8 supondo um torque constante, ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 9$, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido classe 40.

12-24 Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-21 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2,4 supondo um torque constante, ângulo de pressão de 20°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 11$, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

**12-25* Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-20 para um fator de segurança de superfície de pelo menos 1,7 supondo um torque constante, ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 9$, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido classe 40.

12-26 Dimensione as engrenagens retas no Problema 12-21 para um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,3 supondo um torque constante, ângulo de pressão de 20°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 11$, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

*12-27 Se a redução no Problema 12-10 transmite 190 kW no pinhão de entrada girando a 1800 rpm, encontre o torque em cada um dos quatro eixos.

**12-28* Dimensione as engrenagens retas do primeiro estágio no Problema 12-27 para um coeficiente de segurança à flexão de pelo menos 3,0 e um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,7, supondo um torque constante, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 8$ e aço AISI 4140 para todas as engrenagens.

**12-29* Dimensione as engrenagens retas do segundo estágio no Problema 12-27 para um coeficiente de segurança a flexão de pelo menos 3,0 e um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,7, supondo um torque constante, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 8$ e aço AISI 4140 para todas as engrenagens.

**12-30* Dimensione as engrenagens retas do terceiro estágio no Problema 12-27 para um coeficiente de segurança a flexão de pelo menos 3,0 e um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,7, supondo um torque constante, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 8$ e aço AISI 4140 para todas as engrenagens.

**12-31* Projete um trem de engrenagens retas composto de dois estágios para uma razão global de aproximadamente 78:1. Especifique os números de dentes para cada engrenagem reta no trem.

12-32 A Figura P12-1 mostra a mesma máquina de papel que foi analisada no Problema 6-46 e em outros problemas de capítulos prévios. Os rolos de papel na Figura P12-1 possuem 0,9 m de diâmetro externo × 0,22 m de diâmetro interno × 3,23 m comprimento e têm uma densidade de 984 kg/m^3. Os rolos são transferidos da esteira da máquina (não mostrada) para o garfo da empilhadeira pelo elo V da estação de descarga, que é girado em 90° por um cilindro pneumático. O papel então rola para os garfos do caminhão. A máquina faz 30 rolos por hora e trabalha em 2 turnos. Os elos V são girados por um braço de manivela através de um eixo que tem 60 mm de diâmetro por 3,23 de comprimento. Um novo projeto do mecanismo de rotação do elo V é requerido a fim de introduzir um par de engrenagens entre o braço da manivela e o eixo do elo V com uma razão de 2:1. Isso reduzirá

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

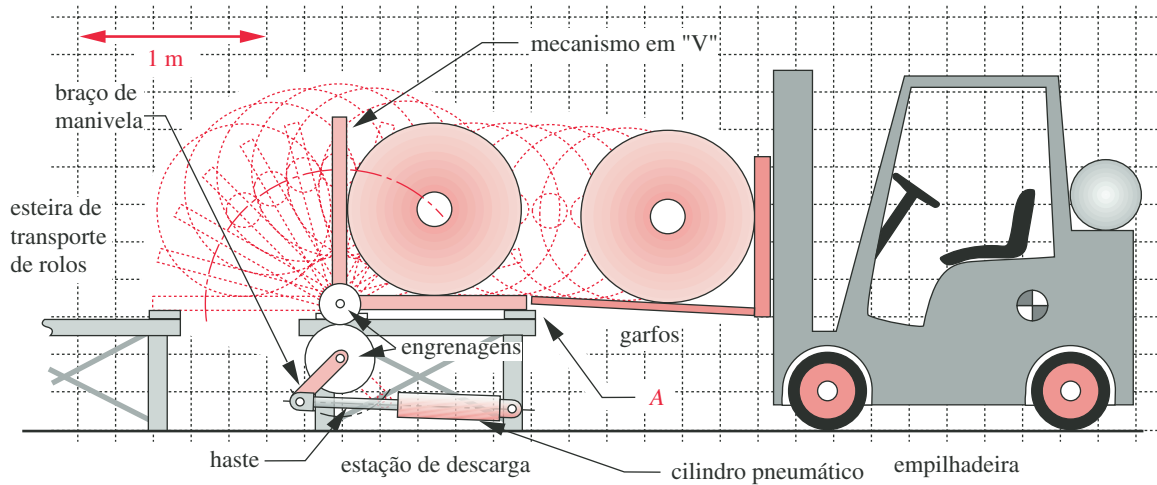



FIGURA P12-1

Problema 12-32.

o golpe requerido de um cilindro de ar em 50% e melhorará sua geometria. Projete um conjunto de engrenagens retas apropriadas para esta aplicação para uma vida de 10 anos contra falha de superfície. Declare todas as hipóteses.

†*12-33* Projete uma transmissão composta não revertida baseada no arranjo mostrado na Figura 12-14*a* para uma razão global do trem de aproximadamente 90:1. Ela deve ser capaz de transmitir 50 hp a um eixo de entrada girando à velocidade de 1000 rpm. Declare todas as hipóteses.

12-34 Projete uma transmissão composta revertida baseada no arranjo mostrado na Figura 12-14*b* para uma razão global do trem de aproximadamente 80:1. Ela deve ser capaz de transmitir 30 hp a um eixo de entrada girando a 1500 rpm. Declare todas as hipóteses.

12-35 Se o pinhão de 23 dentes no engrenamento no Problema 12-3 está no eixo de entrada, encontre a razão de velocidade, a razão de torque e a razão de engrenamento para o par.

12-36 Se a engrenagem de 78 dentes no engrenamento no Problema 12-4 está no eixo de entrada, encontre a razão de velocidade, a razão de torque e a razão de engrenamento para o par.

12-37 A Figura P12-2 mostra uma involuta de um círculo que começa no ponto $A(0, r_b)$ e continua até o ponto $P(x, y)$. O ângulo θ é mostrado como o ângulo de rolamento e ϕ é o ângulo de pressão da involuta. Derive as expressões para as coordenadas x e y de P em termos do raio r_b da circunferência de base e do ângulo de pressão. Faça o gráfico de y *versus* x para o intervalo $0° < \phi < 40°$ para $r_b = 2$ in.

FIGURA P12-2

Problema 12-37.

12-38 Derive a Equação 12-2 usando a Figura 12-5.

12-39 Uma engrenagem reta de 39 dentes está acoplada a um pinhão de 18 dentes. O $p_d = 8$ e $\phi = 25°$. Encontre a razão de contato.

12-40 Uma engrenagem reta de 79 dentes está acoplada a um pinhão de 20 dentes. O $p_d = 8$ e $\phi = 20°$. Encontre a razão de contato.

12-41 Qual será o ângulo de pressão se a distância entre o centro das engrenagens retas no Problema 12-39 for aumentada em 6%?

12-42 Qual será o ângulo de pressão se a distância entre o centro das engrenagens retas no Problema 12-40 for aumentada em 5%?

12-43 Se o conjunto de engrenagens retas nos Problemas 12-39 e 12-40 for composto como mostrado na Figura 12-14, qual será a razão global do trem?

12-44 Uma engrenagem reta de 23 dentes e ângulo de pressão de 20° tem um passo diametral de 6. Encontre o diâmetro de referência, o adendo, o dedendo, o diâmetro externo e o passo circular.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

12-45 Uma engrenagem reta de 32 dentes e ângulo de pressão de 25° tem um passo diametral de 4. Encontre o diâmetro de referência, o adendo, o dedendo, o diâmetro externo e o passo circular.

12-46 Projete um trem de engrenagens cilíndricas retas composto de dois estágios para uma razão global de aproximadamente 53:1. Especifique o número de dentes de cada engrenagem no trem.

12-47 Projete um trem de engrenagens cilíndricas retas composto de três estágios para uma razão global de aproximadamente 592:1. Especifique o número de dentes de cada engrenagem no trem.

12-48 Projete um trem de engrenagens planeta similar àquele mostrado na Figura 12-16 para uma razão global de velocidade de exatamente 0,2 se a engrenagem sol for a entrada, o braço for a saída e a engrenagem anel for estacionária. Especifique o número de dentes de cada engrenagem no trem.

12-49 Projete um trem de engrenagens planeta similar àquele mostrado na Figura 12-16 para uma razão global de velocidade de exatamente 4/3 se a engrenagem sol for estacionária, o braço for a entrada e a engrenagem anel for a saída. Especifique o número de dentes de cada engrenagem no trem.

12-50 Um pinhão de 21 dentes rodando a 1800 rpm engrena com uma engrenagem de 33 dentes em um redutor de engrenagens retas. Tanto o pinhão quanto a engrenagem são fabricados para um nível de qualidade 9. Uma confiabilidade de 0,9 foi especificada, e a carga tangencial transmitida é 2800 lb. As condições são tais que $K_m = 1{,}7$. É proposto o uso do padrão 25°, dentes de profundidade completa, com o pinhão e a engrenagem produzidos por fresamento de um aço nitretado AISI 4140. O passo diametral é 6 e a largura de face, 2000 in. Estime o número de ciclos de tensão de flexão (usando as equações da AGMA) que o par de engrenagens pode suportar.

12-51 Um pinhão de 21 dentes rodando a 1800 rpm engrena com uma engrenagem de 33 dentes em um redutor de engrenagens retas. Tanto o pinhão quanto a engrenagem são fabricados para um nível de qualidade 9. Uma confiabilidade de 0,9 foi especificada, e a carga tangencial transmitida é 2800 lb. As condições são tais que $C_m = 1{,}7$. É proposto o uso de padrão 25°, dentes de profundidade completa, com o pinhão e a engrenagem produzidos por fresamento de um aço nitretado AISI 4140. O passo diametral é 6 e a largura da face, 2,0 in. Estime o número de ciclos de tensão de contato (superfície), usando as equações da AGMA, que o par de engrenagens pode suportar.

*12-52 Se o conjunto de engrenagens no Problema 12-46 transmite 7,5 kW no pinhão de entrada girando a 1750 rpm, encontre o torque em cada um dos três eixos.

**12-53* Dimensione o primeiro estágio das engrenagens cilíndricas retas do Problema 12-52 para um fator de segurança de flexão de pelo menos 2,8 e um fator de segurança superficial de pelo menos 1,8 pressupondo um torque fixo, ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 9$ e aço AISI 4340 para todas as engrenagens.

12-54 Dimensione o segundo estágio das engrenagens cilíndricas retas do Problema 12-52 para um fator de segurança de flexão de pelo menos 2,8 e um fator de segurança superficial de pelo menos 1,8 pressupondo um torque fixo, ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 9$ e aço AISI 4340 para todas as engrenagens.

12-55 Se o conjunto de engrenagens do Problema 12-47 transmite 18,8 kW a 1184 rpm no pinhão de entrada, encontre o torque em cada um dos quatro eixos.

12-56 Dimensione o primeiro estágio das engrenagens cilíndricas retas do Problema 12-55 para um fator de segurança de flexão de pelo menos 2,4 e um fator de segurança superficial de pelo menos 2,0 pressupondo um torque fixo, ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, $Q_v = 10$ e aço AISI 4140 para todas as engrenagens.

†*12-57* Dimensione o segundo estágio das engrenagens cilíndricas retas do Problema 12-55 para um fator de segurança de flexão de pelo menos 2,4 e um fator de segurança superficial de pelo menos 2,0 pressupondo um torque fixo, ângulo de

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Problemas numberados em *itálico* são problemas de projeto.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

pressão de 25°, dentes de profundidade completa, Q_v = 10 e aço AISI 4140 para todas as engrenagens.

12-58 Dimensione o terceiro estágio das engrenagens cilíndricas retas do Problema 12-55 para um fator de segurança de flexão de pelo menos 2,4 e um fator de segurança superficial de pelo menos 2,0 pressupondo um torque fixo, ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, Q_v = 10 e aço AISI 4140 para todas as engrenagens.

12-59 O pinhão de um conjunto de engrenagens externo tem um raio de referência r_p = 40 mm, e a engrenagem tem um raio de referência de r_g = 160 mm. Se o pinhão é o membro de entrada do conjunto, determine a razão de velocidade, a razão do torque e a razão de engrenamento do conjunto.

12-60 Um pinhão que possui 20 dentes e um passo diametral de 8 (in-1) está engrenada com uma cremalheira. Se o pinhão fizer uma revolução, quanto se moverá a cremalheira?

12-61 Um conjunto de engrenagens com dentes de profundidade completa é projetado para ter um pinhão de 24 dentes, uma engrenagem com 54 dentes e um passo diametral de 6. Compare o raio de contato deste conjunto para ângulos de pressão de 14,5, 20 e 25°.

12-62 Projete um trem de engrenagem planeta similar ao mostrado na Figura 12-16 para uma razão de velocidade geral de exatamente 5 se a engrenagem anel for estacionária, o braço for a entrada e a engrenagem sol for a saída. Especifique o número de dentes para cada engrenagem no trem.

12-63 Um pinhão de 22 dentes rodando a 1650 rpm engrena com uma engrenagem de 66 dentes em um redutor de engrenagem cilíndrica reta. Tanto o pinhão quanto a engrenagem são fabricados com um nível de qualidade 10. A confiabilidade de 0,9 foi especificada, e a carga tangencial transmitida é de 5000 lb. As condições são tais que K_m = 1,7. É proposto o uso do padrão 25°, dentes de profundidade completa, com o pinhão e a engrenagem produzidos por fresamento de um aço nitretado AISI 4340. O passo diametral é 5 e a largura da face, 2.500 in. Estime o número de ciclos de tensão de flexão (usando as equações da AGMA) que o par de engrenagens pode suportar.

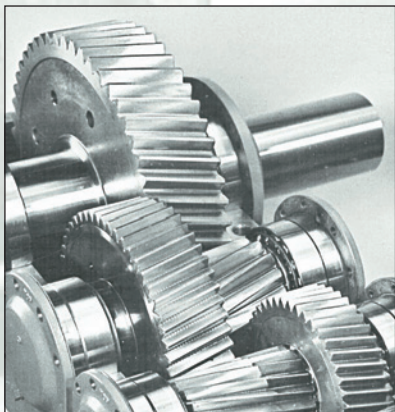
12-64 Um pinhão de 22 dentes rodando a 1650 rpm engrena com uma engrenagem de 66 dentes em um redutor de engrenagens retas. Tanto o pinhão quanto a engrenagem são fabricados a um nível de qualidade 10. Uma confiabilidade de 0,9 foi especificada, e a carga tangencial transmitida é de 5000 lb. As condições são tais que K_m = 1,7. É proposto o uso do padrão 25°, dentes de profundidade completa, com o pinhão e a engrenagem produzidos por fresamento de um aço nitretado AISI 4340. O passo diametral é 5 e a largura da face, 2.500 in. Estime o número de ciclos de tensão de contato (usando as equações da AGMA) que o par de engrenagens pode suportar.

12-65 O pinhão de um conjunto de engrenagens interno possui um raio de referência r_p = 30 mm e a engrenagem possui um raio de referência de r_g = 150 mm. Se o pinhão é o membro de entrada do conjunto, determine a razão de velocidade, a razão do torque e a razão da engrenagem do conjunto.

12-66 Um pinhão que possui 18 dentes e um passo diametral de 10 (in-1) está engrenada com uma cremalheira. Se a cremalheira fizer uma revolução, quantos graus o pinhão rodará?

12-67 Um conjunto de engrenagens com padrão 25°, dentes de profundidade completa, é projetado para possuir um pinhão com 24 dentes, uma engrenagem com 54 dentes e um passo diametral de 6. Compare a razão de contato para este conjunto para uma série de distâncias a partir do centro de 0,90C a 1,10C.

12-68 Projete um trem de engrenagem planeta similar ao mostrado na Figura 12-16 para uma razão de velocidade global de exatamente 1,25 se a engrenagem anel for estacionária, o braço for a entrada e a engrenagem sol for a saída. Especifique o número de dentes para cada engrenagem no trem.

13

ENGRENAGENS HELICOIDAIS, CÔNICAS E SEM-FIM

Ciclos e epiciclos, órbita em órbita...
JOHN MILTON, PARAÍSO PERDIDO

13.0 INTRODUÇÃO

O Capítulo 12 explorou os tópicos de engrenagens retas ou de dentes retos detalhadamente. Há engrenagens disponíveis em muitas outras configurações de dentes para aplicações específicas. Este capítulo apresentará uma breve introdução ao projeto de engrenagens helicoidais, cônicas e sem-fim. A complexidade do problema de projeto aumenta significativamente quando essas formas de dente de engrenagem mais complicadas são usadas. A *American Gear Manufacturers Association* (AGMA) apresenta dados detalhados e algoritmos para o cálculo delas. Basearemos esta apresentação nas recomendações da AGMA, mas não poderemos dar um tratamento completo deste tema complexo no espaço disponível aqui. Recomendamos que o leitor consulte as normas da AGMA para mais informações quando confrontado com um problema verdadeiro de projeto envolvendo engrenagens. A Tabela 13-0 lista as variáveis usadas neste capítulo e indica a seção ou equação na qual elas aparecem. Um resumo e uma lista das equações importantes aparecem no fim do capítulo.

13.1 ENGRENAGENS HELICOIDAIS

As engrenagens helicoidais são similares às engrenagens retas. Seus dentes são involutas. A diferença é que seus dentes são inclinados com respeito ao eixo de rotação em um ângulo de hélice ψ, como mostrado na Figura 13-1. O ângulo de hélice pode normalmente variar de cerca de 10 a 45°. Se a engrenagem fosse suficientemente longa em termos axiais, qualquer dente daria a volta completa de 360°. Os dentes formam uma hélice, que pode ser para a direita ou para a esquerda. Um par de engrenagens de mãos opostas engrenam com seus eixos paralelos como mostrado na Figura 13-1*a*. Engrenagens helicoidais de mesma direção podem ser acopladas com seus eixos enviesados, sendo então chamadas de eixos cruzados ou simplesmente de engrenagens helicoidais cruzadas, como mostrado na Figura 13-1*b*.

Tabela 13-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 1 de 2

Simbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
a	adendo	in	m	Eq. 13.18
b	dedendo	nenhuma	m	Eq. 13.18
C	distância entre centros	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.16
C_f	fator de acabamento superficial	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.10
C_H	fator de dureza	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.11
C_{md}	fator de montagem	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.11
C_P	coeficiente elástico	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.10
C_R	coeficiente de confiabilidade	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.11
C_s	fator de materiais	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.24
C_T	fator de temperatura	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.11
C_{xc}	fator de coroação	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.10
d	diâmetro primitivo (com vários subscritos)	in	m	várias
e	eficiência	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.30
F	largura de face	in	m	Eq. 13.9, .19
I	fator de geometria de superfície da AGMA	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.10
J	fator de geometria de flexão da AGMA	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.9
K_a, C_a	fator de aplicação	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.9
K_B	fator de flexão de anel	nenhuma	nenhuma	Eq. 12.15
K_I	fator de ciclo de carga	nenhuma	nenhuma	Eq. 12.15
K_m, C_m	fator de distribuição de carga	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.9, .10
K_s, C_s	fator de tamanho	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.9, .10
K_v, C_v	fator dinâmico, fator de velocidade	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.9, .26
K_x	fator de curvatura	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.9
L	comprimento, avanço	in	m	Eq. 13.6, .7
m	módulo	não usada	mm	Eq. 13.9
m_F	razão de contato axial	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.5
m_G	razão de engrenamento	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.15
m_N	razão de compartilhamento de carga	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.6
m_p	razão de contato transversal	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.6
N	número de dentes (com vários subscritos)	nenhuma	nenhuma	várias
N_B, N_C	coeficientes de segurança – flexão e contato	nenhuma	nenhuma	várias
p_c	passo circular	in	mm	Eq. 13.1*c*
p_d	passo diametral	1/in	não usada	Eq. 13.1*c*
p_t	passo transversal	in	m	Eq. 13.1*a*
p_x	passo axial	in	mm	Eq. 13.1*b*
S_{fb}	resistência corrigida à fadiga de flexão	psi	Pa	Ex. 13-2
S_{fc}	resistência à fadiga de superfície corrigida	psi	Pa	Ex. 13-2
S'_{fc}	resistência à fadiga de superfície não corrigida	psi	Pa	Eq. 13.11
T	torque (com vários subscritos)	lb-in	N-m	várias
V_t	velocidade da linha de referência	in/s	m/s	Eq. 13.27
W	força total no dente da engrenagem	lb	N	Eq. 13.3
W_a	força axial no dente da engrenagem	lb	N	Eq. 13.3

A fotografia da página capitular é cortesia da The Falk Corporation, Milwaukee, WI.

Tabela 13-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 2 de 2

Simbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
Wf	força de atrito no dente da engrenagem	lb	N	Eq. 13.28
Wr	força radial no dente da engrenagem	lb	N	Eq. 13.3
Wt	força tangencial no dente da engrenagem	lb	N	Eq. 13.3
α	ângulo do cone de referência (primitivo)	graus	graus	Eq. 13.7
ϕ	ângulo de pressão	graus	graus	várias
ψ	ângulo de hélice ou ângulo de espiral	graus	graus	várias
λ	ângulo de avanço	graus	graus	Eq. 13.12
μ	coeficiente de atrito	nenhuma	nenhuma	Eq. 13.28
ω	velocidade angular	rad/s	rad/s	Ex. 13-2
ρ	raio de curvatura	in	m	Eq. 13.6
Φ	potência	hp	W	Eq. 13.20
σ_b	tensão de flexão	psi	Pa	Eq. 13.9
σ_c	tensão de superfície	psi	Pa (Figura 13-1*a*)	Eq. 13.10

(*a*) Par de engrenagens de hélices de lados opostos acopladas em eixos paralelos

(*b*) Par de engrenagens de hélices de lados iguais acopladas em eixos cruzados

FIGURA 13-1

Engrenagens helicoidais. (Cortesia de Boston Gear, Division of IMO Industries, Quincy, MA.)

Engrenagens helicoidais paralelas (Figura 13-1*a*) engrenam com uma combinação de rolamento e deslizamento com contato começando em uma extremidade do dente e "varrendo" cruzado pela largura de sua face. Isso é bastante diferente do contato de engrenagens de dentes retos, que ocorre todo de uma vez ao longo de uma linha que cruza a face do dente no instante do contato do dente. Um resultado dessa diferença é que as engrenagens helicoidais são mais silenciosas e têm menos vibração que as engrenagens retas por causa do contato gradual dos dentes. As transmissões automotivas usam engrenagens helicoidais quase exclusivamente a fim de obter uma operação silenciosa. Um exceção comum está no engrenamento da engrenagem de retrocesso de uma transmissão não automática, que frequentemente usa engrenagens retas para habilitar suas entrada e saída do acoplamento. Em uma transmissão desse tipo, um "ruído de engrenamento" observável pode ser ouvido ao retroceder o veículo, devido à ressonância dos dentes da engrenagem reta sendo movidos por impactos repentinos de dente contra dente na linha de contato. Os acoplamentos de avanço de engrenagens helicoidais são essencialmente silenciosos. Engrenagens helicoidais paralelas também são capazes de transmitir níveis elevados de potência.

Engrenagens helicoidais cruzadas (Figura 13-1*b*) engrenam diferentemente das engrenagens helicoidais paralelas; seus dentes escorregam sem rolamento e estão teoricamente em contato pontual em vez de contato de linha como nas engrenagens paralelas. Isso reduz severamente sua capacidade de carregamento de cargas. As engrenagens helicoidais cruzadas não são recomendadas para aplicações que devem transmitir torque elevado ou potência. Contudo, elas são frequentemente usadas em aplicações de cargas leves, como distribuidor e comando de velocímetros de automóveis.

Geometria da engrenagem helicoidal

A Figura 13-2 mostra a geometria de uma cremalheira helicoidal básica. Os dentes formam o ângulo de hélice ψ com o "eixo" da cremalheira. Os dentes são cortados neste ângulo e a forma do dente está então no **plano normal**. O **passo normal** p_n e o **ângulo de pressão normal** ϕ_n são medidos neste plano. O **passo transversal** p_t e o **ângulo de pressão transversal** ϕ_t são medidos no **plano transversal**. O passo transversal é a hipotenusa do triângulo reto *ABC*.

$$p_t = p_n / \cos\psi \tag{13.1a}$$

Um passo axial p_x pode também ser definido como a hipotenusa do triângulo reto *BCD*.

$$p_x = p_n / \operatorname{sen}\psi \tag{13.1b}$$

p_t corresponde ao passo circular p_c, medido no plano de referência de uma engrenagem circular. O passo diametral é mais comumente usado para definir o tamanho de dente e está relacionado ao passo circular por

$$p_d = \frac{N}{d} = \frac{\pi}{p_c} = \frac{\pi}{p_t} \tag{13.1c}$$

onde N é o número de dentes e d é o diâmetro de referência.

O passo diametral no plano normal é

$$p_{nd} = p_d / \cos\psi \tag{13.1d}$$

Os ângulos de pressão nos dois planos estão relacionados por

$$\operatorname{tg}\phi_t = \operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\phi_n / \cos\psi \tag{13.2}$$

Forças em engrenagens helicoidais

Um conjunto de forças agindo em um dente é mostrado esquematicamente na Figura 13-2. A força resultante W está em um ângulo composto definido pelo ângulo de pressão e pelo ângulo de hélice em combinação. A força tangencial W_t no acoplamento pode ser encontrada a partir do torque aplicado à engrenagem ou ao pinhão, como definido na Equação 11.13*a* para o pinhão.

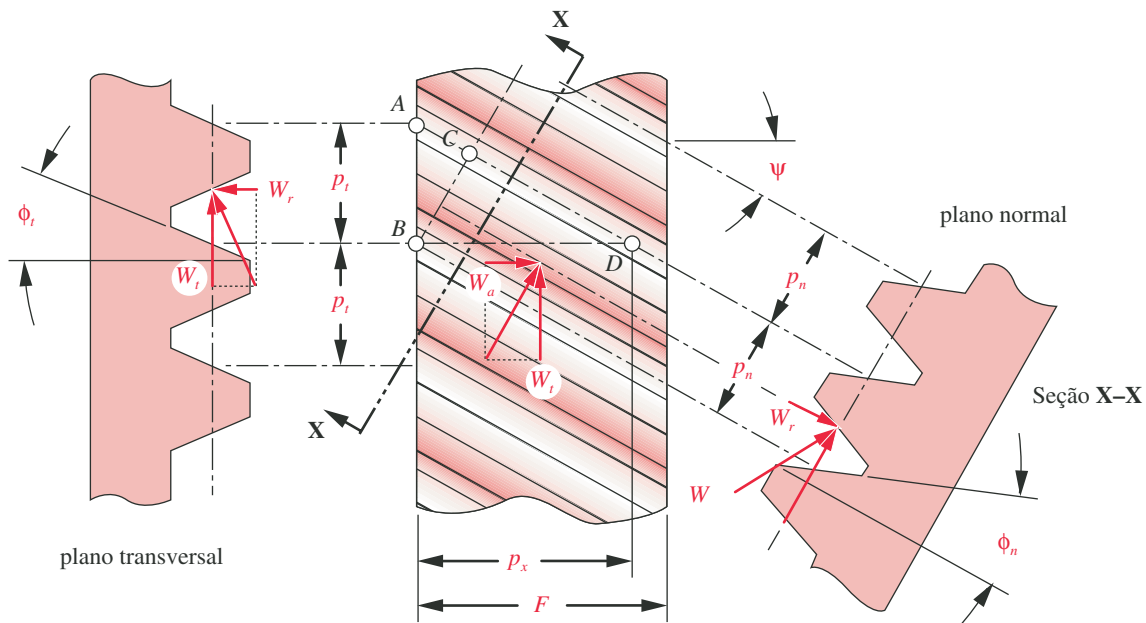



FIGURA 13-2

Cremalheira helicoidal básica mostrando os planos normal e transversal e a decomposição das forças.

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2p_d T_p}{N_p} \qquad (13.13a)$$

Além da componente radial W_r devido ao ângulo de pressão, há agora também uma componente de força W_a, que tende a separar as engrenagens axialmente. Mancais com capacidade para cargas axiais devem ser usados com engrenagens helicoidais para resistir a essa componente de força, a menos que as engrenagens helicoidais sejam montadas em pares de direções opostas no mesmo eixo para cancelar a componente de força axial. Às vezes, para esse propósito, conjuntos de dentes de lado esquerdo e direito são cortados lado a lado no mesmo disco de engrenagem com uma ranhura entre eles para remover o cortador. Estas são chamadas de **engrenagens helicoidais duplas**. Se a ranhura de remoção for eliminada e os dentes de mãos opostas cortados para funcionar um com o outro, ela é chamada de **engrenagem espinha de peixe**.

As componentes de força em um engrenamento helicoidal são

$$W_r = W_t \operatorname{tg} \phi \qquad (13.3a)$$

$$W_a = W_t \operatorname{tg} \psi \qquad (13.3b)$$

$$W = \frac{W_t}{\cos\psi \cos\phi_n} \qquad (13.3c)$$

Número virtual de dentes

Uma outra vantagem das engrenagens helicoidais sobre as engrenagens retas, além da operação silenciosa, são os dentes relativamente mais fortes para uma engrenagem com o mesmo passo normal, diâmetro de referência e número de dentes. A razão para isso pode ser vista na Figura 13-2. A componente de força que transmite o torque é W_t, que está no plano transversal. O tamanho dos dentes (passo normal) é definido no plano normal. A espessura do dente no plano transversal é $1 / \cos\psi$ vezes aquele de uma engrenagem reta de mesmo passo normal. Uma outra maneira de visualizar isso é considerar o fato de que a interseção do plano normal e o cilindro de referência do diâmetro d é uma elipse cujo raio é $r_e = (d / 2) / \cos^2 \psi$. Podemos então definir um número virtual de dentes N_e como o quociente da circunferência de um círculo virtual de referência de raio r_e e o passo normal p_c:

$$N_e = \frac{2\pi r_e}{p_n} = \frac{\pi d}{p_n \cos^2 \psi} \qquad (13.4a)$$

Substitua a Equação 13.1a por p_n:

$$N_e = \frac{\pi d}{p_t \cos^3 \psi} \qquad (13.4b)$$

e substitua $p_t = \pi_d / \mathrm{N}$ da Equação 13.1c para obter

$$N_e = \frac{N}{\cos^3 \psi} \qquad (13.4c)$$

Isso define uma **engrenagem virtual** que é equivalente a uma engrenagem reta com N_e dentes, dando, portanto, um dente mais forte em fadiga de flexão e de superfície que uma engrenagem reta com o mesmo número físico de dentes que a engrenagem helicoidal. O número maior de dentes virtuais também reduz o adelgaçamento em pinhões pequenos, permitindo um número mínimo menor de dentes para as engrenagens helicoidais do que para engrenagens retas.

Razões de contato

A **razão de contato transversal** m_p foi definida para engrenagens retas na Equação 12.7 e é a mesma para engrenagens helicoidais. O ângulo de hélice introduz uma outra razão chamada de **razão de contato axial** m_F, que é definida como o quociente da largura de face F e o passo axial p_x:

$$m_F = \frac{F}{p_x} = \frac{F\, p_d \operatorname{tg}\psi}{\pi} \tag{13.5}$$

Essa razão deve ser pelo menos 1,15 e indica o grau de **entrelaçamento helicoidal** no engrenamento.

Assim como uma razão de contato transversal permite a múltiplos dentes dividir a carga, uma largura de face maior para um dado ângulo de hélice aumentará o entrelaçamento dos dentes e assim promoverá uma divisão de carga. Contudo, a divisão efetiva de carga ainda estará limitada pela precisão com a qual as engrenagens são feitas (ver a Figura 12-19). Observe que ângulos de hélice maiores aumentarão a razão de contato axial, permitindo que engrenagens de larguras mais estreitas sejam usadas, mas isso ocorrerá às custas de componentes axiais de força maiores.

Se m_F for mantido acima de 1 como desejado, as engrenagens são consideradas helicoidais convencionais. Se $m_F < 1$, então elas são chamadas de engrenagens de **razão de contato axial baixa** (LACR – *low axial contact ratio*) e o cálculo delas envolve passos adicionais. Consulte as normas da AGMA[1, 2, 3] para mais informações acerca das engrenagens LACR. Consideraremos somente engrenagens helicoidais convencionais.

Tensões em engrenagens helicoidais

As equações da AGMA para tensões de flexão e tensão de superfície em engrenagens retas também são usadas para engrenagens helicoidais. Estas equações foram apresentadas no Capítulo 12 com explicação extensa e definição dos termos que não serão repetidos aqui. As equações daquele capítulo são, para tensões de flexão:

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{12.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{12.15si}$$

e para tensão de superfície:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I d} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{12.21}$$

As únicas diferenças significativas na sua aplicação para engrenagens helicoidais envolve os fatores de geometria I e J. Os valores de J para várias combinações de ângulo de hélice (10°, 15°, 20°, 25°, 30°), ângulo de pressão (14,5°, 20°, 25°) e razão de adendo (0, 0,25 e 0,5) são apresentados na referência 3. Alguns exemplos são reproduzidos nas Tabelas 13-1 a 13-6.* Consulte a norma da AGMA para informações mais completas.

* Extraído da AGMA 908-B89, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth*, com a autorização da American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, VA 22314.

O cálculo de I para pares de engrenagens helicoidais convencionais requer a inclusão de um termo adicional na Equação 12.22*a*, que se torna:*

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_p m_N} \tag{13.6a}$$

onde ρ_p e ρ_g são os raios de curvatura dos dentes do pinhão e da engrenagem, respectivamente, ϕ é o ângulo de pressão *e* d_p *é o* diâmetro de referência do pinhão. O sinal $\pm$ leva em conta os engrenamentos externos e internos. Use o sinal superior para engrenamentos externos em todas as expressões relacionadas. O termo m_N *é* uma **razão de divisão de carga** definida como

$$m_N = \frac{F}{L_{min}} \tag{13.6b}$$

onde F é a largura da face. O cálculo do **comprimento mínimo das linhas de contato** L_{min} requer vários passos. Primeiro, dois fatores devem ser formados a partir dos resíduos da razão de contato transversal m_p e da razão de contato axial m_F.

$$\begin{aligned} n_r &= \text{parte fracional de } m_p \\ n_a &= \text{parte fracional de } m_F \end{aligned} \tag{13.6c}$$

e

$$\text{se } n_a \le 1 - n_r \quad \text{então} \qquad L_{min} = \frac{m_p F - n_a n_r p_x}{\cos\psi_b} \tag{13.6d}$$

$$\text{se } n_a > 1 - n_r \quad \text{então} \qquad L_{min} = \frac{m_p F - (1 - n_a)(1 - n_r)\, p_x}{\cos\psi_b} \tag{13.6e}$$

Todos os fatores nessas equações são definidos nesta seção ou no Capítulo 12, exceto ψ_b, o ângulo de hélice da base, que é

$$\psi_b = \cos^{-1}\left(\cos\psi \frac{\cos\phi_n}{\cos\phi}\right) \tag{13.6f}$$

Além disso, o raio de curvatura de um pinhão helicoidal para a Equação 13.6*a* é calculado com uma fórmula diferente daquela usada para engrenagens retas. Em vez da Equação 11.22*b*, use

$$\begin{aligned} \rho_p &= \sqrt{\left\{0{,}5\left[\left(r_p + a_p\right) \pm \left(C - r_g - a_g\right)\right]\right\}^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} \\ \rho_g &= C\, sen\, \phi \mp \rho_p \end{aligned} \tag{13.6g}$$

onde (r_p, a_p) e (r_g, a_g) são o (raio de referência, adendo) do pinhão e da engrenagem, respectivamente, e C é a distância real de centros (operacional).

As tensões de flexão e de superfície podem ser calculadas a partir das equações acima usando os valores nas Tabelas 13-1 a 13-6. A resistência dos materiais pode ser encontrada no Capítulo 12, e os coeficientes de segurança podem ser calculados da mesma maneira descrita nesse capítulo para engrenagens retas.

* Um segundo termo adicional é requerido para engrenagens helicoidais LARC, mas estes não serão considerados, como observado anteriormente.

Tabela 13-1 Fator geométrico de flexão J da AGMA para $\phi = 20°$, $\psi = 10°$ dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0,46	0,46								
26	U	U	U	U	U	U	0,47	0,49	0,49	0,49						
35	U	U	U	U	U	U	0,48	0,52	0,50	0,53	0,54	0,54				
55	U	U	U	U	U	U	0,49	0,55	0,52	0,56	0,55	0,57	0,59	0,59		
135	U	U	U	U	U	U	0,50	0,60	0,53	0,61	0,57	0,62	0,60	0,63	0,65	0,65

Tabela 13-2 Fator geométrico de flexão J da AGMA para $\phi = 20°$, $\psi = 20°$ dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0,44	0,44										
21	U	U	U	U	0,45	0,46	0,47	0,47								
26	U	U	U	U	0,45	0,49	0,48	0,49	0,50	0,50						
35	U	U	U	U	0,46	0,51	0,49	0,52	0,51	0,53	0,54	0,54				
55	U	U	U	U	0,47	0,54	0,50	0,55	0,52	0,56	0,55	0,57	0,58	0,58		
135	U	U	U	U	0,48	0,58	0,51	0,59	0,54	0,60	0,57	0,61	0,60	0,62	0,64	0,64

Tabela 13-3 Fator geométrico de flexão J da AGMA para $\phi = 20°$, $\psi = 30°$ dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0,39	0,39												
17	U	U	0,39	0,41	0,41	0,41										
21	U	U	0,40	0,43	0,42	0,43	0,44	0,44								
26	U	U	0,41	0,44	0,43	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46						
35	U	U	0,41	0,46	0,43	0,47	0,45	0,48	0,47	0,48	0,49	0,49				
55	U	U	0,42	0,49	0,44	0,49	0,46	0,50	0,48	0,50	0,50	0,51	0,52	0,52		
135	U	U	0,43	0,51	0,45	0,52	0,47	0,53	0,49	0,53	0,51	0,54	0,53	0,55	0,56	0,56

Tabela 13-4 Fator geométrico de flexão J da AGMA para $\phi = 25°$, $\psi = 10°$ dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0,47	0,47												
17	U	U	0,48	0,51	0,52	0,52										
21	U	U	0,48	0,55	0,52	0,55	0,56	0,56								
26	U	U	0,49	0,58	0,53	0,58	0,57	0,59	0,60	0,60						
35	U	U	0,50	0,61	0,54	0,62	0,57	0,63	0,61	0,64	0,64	0,64				
55	U	U	0,51	0,65	0,55	0,66	0,58	0,67	0,62	0,68	0,65	0,69	0,70	0,70		
135	U	U	0,52	0,70	0,56	0,71	0,60	0,72	0,63	0,73	0,67	0,74	0,71	0,75	0,76	0,76

Tabela 13-5 Fator geométrico de flexão J da AGMA para $\phi = 25°$, $\psi = 20°$ dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	0,47	0,47														
14	0,47	0,50	0,50	0,50												
17	0,48	0,53	0,51	0,54	0,54	0,54										
21	0,48	0,56	0,51	0,57	0,55	0,58	0,58	0,58								
26	0,49	0,59	0,52	0,60	0,55	0,60	0,69	0,61	0,62	0,62						
35	0,49	0,62	0,53	0,63	0,56	0,64	0,60	0,64	0,62	0,65	0,66	0,66				
55	0,50	0,66	0,53	0,67	0,57	0,67	0,60	0,68	0,63	0,69	0,67	0,70	0,71	0,71		
135	0,51	0,70	0,54	0,71	0,58	0,72	0,62	0,72	0,65	0,73	0,68	0,74	0,72	0,75	0,76	0,76

Tabela 13-6 Fator geométrico de flexão J da AGMA para $\phi = 25°$, $\psi = 30°$ dentes de profundidade completa com carregamento na ponta

Dentes da engrenagem	Dentes do pinhão 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	0,46	0,46														
14	0,47	0,49	0,49	0,49												
17	0,47	0,51	0,50	0,52	0,52	0,52										
21	0,48	0,54	0,50	0,54	0,53	0,55	0,55	0,55								
26	0,48	0,56	0,51	0,56	0,53	0,57	0,56	0,57	0,58	0,58						
35	0,49	0,58	0,51	0,59	0,54	0,59	0,56	0,60	0,58	0,60	0,61	0,61				
55	0,49	0,61	0,52	0,61	0,54	0,62	0,57	0,62	0,59	0,63	0,62	0,64	0,64	0,64		
135	0,50	0,64	0,53	0,64	0,55	0,65	0,58	0,66	0,60	0,66	0,62	0,67	0,65	0,68	0,68	0,68

EXEMPLO 13-1

Análise de tensão de um trem de engrenagem helicoidal

Problema **Projete outra vez o trem de engrenagens retas dos Exemplos 12-4 a 12-7 usando engrenagens helicoidais e compare os coeficientes de segurança.**

Dados **Os exemplos mencionados referem-se, respectivamente, à cinemática, a tensões de flexão, tensões de superfície e a coeficientes de segurança para um trem de 3 engrenagens com os seguintes dados: W_t = 432,17 lb, N_p = 12, N_{interm} = 17, N_g = 49, ϕ = 25°, p_d = 6, F = 2,667 in, velocidade do pinhão = 2500 rpm e 20 hp. O fator dinâmico K_v = 0,66 de cálculos prévios.**

Hipóteses **Os dentes são perfis padronizados AGMA de profundidade completa. A carga e a fonte são ambas uniformes em natureza. Um índice de qualidade da engrenagem de 6 será usado. Todas engrenagens são de aço com ν = 0,28. A vida de serviço requerida é 5 anos de um turno de trabalho. A temperatura de operação é 200°F. Baseado na hipótese de carga e fonte uniforme, o fator de aplicação K_a pode ser fixado em 1. O fator de distribuição de carga pode ser estimado a partir da Tabela 12-6 baseado na largura de face suposta: K_m = 1,6. O fator de ciclo de carga K_I = 1 para o pinhão e a engrenagem e K_I = 1,42 para a engrenagem intermediária. O fator de tamanho K_s = 1 para todas as três engrenagens. C_f = 1. K_B = 1. Mantenha os mesmos ϕ e p_d dos exemplos prévios de engrenagens retas e tente um ângulo de hélice de 20°.**

Solução

1 O fator de geometria de flexão, J, para um pinhão de 14 dentes com ângulo de pressão de 25°, ângulo de hélice de 20°, acoplado com a engrenagem intermediária de 17 dentes, é encontrado na Tabela 13-5 como $J_{pinhão}$ = 0,51. A tensão de flexão no dente do pinhão é, então,

$$\sigma_{b_p} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432{,}17(6)}{2{,}667(0{,}51)}\frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)(1) \cong 4620 \text{ psi} \qquad (a)$$

2 O fator de geometria de flexão, J, para a engrenagem intermediária de 17 dentes com um ângulo de pressão de 25° e um ângulo de hélice de 20°, acoplada com o pinhão de 14 dentes, é encontrado na Tabela 13-5 como J_{interm} = 0,54. A tensão de flexão no dente da engrenagem livre é, então,

$$\sigma_{b_i} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432{,}17(6)}{2{,}667(0{,}54)}\frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)(1{,}42) \cong 6200 \text{ psi} \qquad (b)$$

Observe na Tabela 13-5 que a engrenagem intermediária tem um valor diferente de J quando se considera que seja a "engrenagem" no acoplamento com o pinhão menor do que quando se considera que seja o "pinhão" em engrenamento com a engrenagem maior. O menor valor entre os dois é usado porque ele dá a tensão maior.

3 O fator de geometria de flexão, J, para a engrenagem de 49 dentes com ângulo de pressão de 25° e ângulo de hélice 20° no acoplamento com a engrenagem intermediária de 17 dentes é encontrado na Tabela 13-5 como $J_{engrenagem}$ = 0,66. A tensão de flexão no dente da engrenagem é, então,

$$\sigma_{b_g} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432{,}17(6)}{2{,}667(0{,}66)}\frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)(1) \cong 3570 \text{ psi} \qquad (c)$$

4 Necessitaremos o diâmetro de referência e o raio de referência de cada engrenagem para este cálculo. Dos dados no Exemplo 12-4:

$$\begin{array}{lll} d_p = 2{,}333 & d_i = 2{,}833 & d_g = 8{,}167 \\ r_p = 1{,}167 & r_i = 1{,}417 & r_g = 4{,}083 \end{array} \qquad (d)$$

5 Os adendos, dedendos e distâncias entre centros de engrenamento são:

$$\begin{aligned} a_p &= a_i = a_g = \frac{1{,}0}{p_d} = \frac{1}{6} = 0{,}167 \text{ in} \\ C_{pi} &= \frac{d_p + d_i}{2} = \frac{2{,}333 + 2{,}833}{2} = 2{,}58 \text{ in} \\ C_{id} &= \frac{d_i + d_g}{2} = \frac{2{,}833 + 8{,}167}{2} = 5{,}50 \text{ in} \end{aligned} \qquad (e)$$

6 Encontre os comprimentos de ação Z_{pi} e Z_{ig} para os dois engrenamentos usando a Equação 12.2.

$$\begin{aligned} Z_{pi} &= \sqrt{(r_p + a_p)^2 - (r_p \cos\phi)^2} + \sqrt{(r_i + a_i)^2 - (r_i \cos\phi)^2} - C_{pi} \operatorname{sen}\phi \\ &= \sqrt{(1{,}167 + 0{,}167)^2 - (1{,}167 \cos 25°)^2} \\ &\qquad + \sqrt{(1{,}417 + 0{,}167)^2 - (1{,}417 \cos 25°)^2} - 2{,}58 \operatorname{sen} 25° = 0{,}647 \end{aligned} \qquad (f)$$

$$\begin{aligned} Z_{ig} &= \sqrt{(r_p + a_p)^2 - (r_p \cos\phi)^2} + \sqrt{(r_g + a_g)^2 - (r_g \cos\phi)^2} - C_{ig} \operatorname{sen}\phi \\ &= \sqrt{(1{,}167 + 0{,}167)^2 - (1{,}167 \cos 25°)^2} \\ &\qquad + \sqrt{(4{,}083 + 0{,}167)^2 - (4{,}083 \cos 25°)^2} - 5{,}50 \operatorname{sen} 25° = 0{,}5787 \end{aligned}$$

7 As razões de contato transversal para os dois engrenamentos são encontradas pela Equação 12.7*b*.

para o engrenamento pinhão-intermediária: $m_{p_{pi}} = \dfrac{p_d Z_{pi}}{\pi \cos\phi} = \dfrac{6(0{,}647)}{\pi \cos 25} = 1{,}36$

para o engrenamento intermediária-engrenagem: $m_{p_{ig}} = \dfrac{p_d Z_{ig}}{\pi \cos\phi} = \dfrac{6(0{,}692)}{\pi \cos 25} = 1{,}46$ $\qquad (g)$

8 A razão de contato axial m_F é encontrada pela Equação 13.5 e o passo axial p_x pelas Equações 13.1*a*, *b* e *c*.

$$\begin{aligned} m_F &= \frac{F\, p_d \operatorname{tg}\psi}{\pi} = \frac{2{,}667(6)\operatorname{tg} 20°}{\pi} = 1{,}85 \\ p_x &= p_n/\operatorname{sen}\psi = p_t \cos\psi/\operatorname{sen}\psi = \frac{\pi\cos\psi}{p_d \operatorname{sen}\psi} = \frac{\pi \cos 20°}{6 \operatorname{sen} 20°} = 1{,}44 \text{ in} \end{aligned} \qquad (h)$$

9 Encontre o ângulo de pressão normal ϕ_n e o ângulo de hélice da base ψ_b pelas Equações 13.2 e 13.6*f*, respectivamente.

$$\begin{aligned} \phi_n &= \operatorname{tg}^{-1}(\cos\psi \operatorname{tg}\phi) = \operatorname{tg}^{-1}(\cos 20° \operatorname{tg} 25°) = 23{,}66° \\ \psi_b &= \cos^{-1}\left(\cos\psi \frac{\cos\phi_n}{\cos\phi}\right) = \cos^{-1}\left(\cos 20° \frac{\cos 23{,}66°}{\cos 25°}\right) = 18{,}25° \end{aligned} \qquad (i)$$

10 Encontre o comprimento mínimo das linhas de contato para cada engrenamento usando as Equações 13.6*c* e 13.6*d* ou *e* e use-o para encontrar a razão de compartilhamento de carga m_N pela Equação 13.6*b*.

$$\begin{aligned}
&\text{para o engrenamento pinhão-intermediária:} && n_{r_{pi}} = \text{parte fracional de } m_{p_{pi}} = 0{,}36 \\
&\text{para o engrenamento intermediária-engrenagem:} && n_{r_{ig}} = \text{parte fracional de } m_{p_{ig}} = 0{,}46 \\
&\text{para ambos engrenamentos:} && n_a = \text{parte fracional de } m_F = 0{,}85
\end{aligned} \qquad (j)$$

para o engrenamento pinhão-intermediária (Equação 13.6*e*):

$$\text{se } n_a > 1 - n_{r_{pi}} \text{ então:} \quad L_{min_{pi}} = \frac{m_{p_{pi}} F - (1 - n_a)(1 - n_{r_{pi}}) p_x}{\cos \psi_b}$$

$$L_{min_{pi}} = \frac{1{,}36(2{,}667) - (1 - 0{,}85)(1 - 0{,}36)(1{,}44)}{\cos(18{,}25°)} = 3{,}674 \qquad (k)$$

$$m_{N_{pi}} = \frac{F}{L_{min_{pi}}} = \frac{2{,}667}{3{,}674} = 0{,}726 \qquad (l)$$

para o engrenamento intermediária-engrenagem (Equação 13.6*e*):

$$\text{se } n_a > 1 - n_{r_{ig}} \text{ então:} \quad L_{min_{ig}} = \frac{m_{p_{ig}} F - (1 - n_a)(1 - n_{r_{ig}}) p_x}{\cos \psi_b}$$

$$L_{min_{ig}} = \frac{1{,}46(2{,}667) - (1 - 0{,}85)(1 - 0{,}46)(1{,}44)}{\cos(18{,}25°)} = 3{,}977 \qquad (m)$$

$$m_{N_{ig}} = \frac{F}{L_{min_{ig}}} = \frac{2{,}667}{3{,}977} = 0{,}671 \qquad (n)$$

11 Os raios de curvatura para os dentes de engrenagem são:

$$\begin{aligned}
\rho_p &= \sqrt{\left\{0{,}5\left[(r_p + a_p) \pm (C_{pi} - r_i - a_i)\right]\right\}^2 - (r_p \cos \phi)^2} \\
&= \sqrt{\left\{0{,}5\left[(1{,}167 + 0{,}0167) + (2{,}58 - 1{,}417 - 0{,}0167)\right]\right\}^2 - (1{,}167 \cos 25°)^2} \\
&= 0{,}4931 \text{ in} \\
\rho_i &= C_{pi} \operatorname{sen} \phi - \rho_p = 2{,}58 \operatorname{sen} 25° - 0{,}4931 = 0{,}5987 \text{ in} \\
\rho_g &= C_{ig} \operatorname{sen} \phi - \rho_i = 5{,}5 \operatorname{sen} 25° - 0{,}5987 = 1{,}726 \text{ in}
\end{aligned} \qquad (o)$$

12 O fator *I* – fator de geometria de superfície da AGMA (Tab. 13-0) – é calculado para o par de engrenagens acopladas. Como temos dois engrenamentos (pinhão/intermediária e intermediária/engrenagem), haverá dois valores diferentes de *I* a serem calculados usando as Equações 13.6.

$$I_{pi} = \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{\rho_p} + \frac{1}{\rho_i}\right) d_p m_{N_{pi}}} = \frac{\cos 25°}{\left(\frac{1}{0{,}4931} + \frac{1}{0{,}5987}\right)(2{,}333)(0{,}726)} = 0{,}14$$

$$I_{ig} = \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_g}\right) d_i m_{N_{ig}}} = \frac{\cos 25°}{\left(\frac{1}{0{,}5987} + \frac{1}{1{,}726}\right)(2{,}833)(0{,}671)} = 0{,}21 \qquad (p)$$

13 O coeficiente elástico C_p é encontrado pela Equação 12.23 e, como antes, é 2276.

14 A tensão de superfície para o engrenamento pinhão-intermediária é

$$\sigma_{c_p} = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I_{pi} d_p} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$
$$\cong 2276 \sqrt{\frac{432{,}17}{2{,}667(0{,}14)(2{,}33)} \frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)} \cong 79 \text{ kpsi} \qquad (q)$$

15 A tensão de superfície para o engrenamento intermediária-pinhão é

$$\sigma_{c_i} = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I_{ig} d_i} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$
$$\cong 2276 \sqrt{\frac{432{,}17}{2{,}667(0{,}21)(2{,}83)} \frac{1(1{,}6)}{0{,}66}(1)(1)} \cong 59 \text{ kpsi} \qquad (r)$$

16 A resistência à fadiga de flexão corrigida do aço do Exemplo 12-7 é 39 kpsi, e a sua resistência à fadiga de superfície corrigida é 105 kpsi. Os coeficientes de segurança contra a falha de flexão são encontrados comparando a resistência à flexão corrigida à tensão de flexão para cada engrenagem no acoplamento:

$$N_{b_{pinhão}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{pinhão}}} = \frac{39}{4{,}6} \cong 8{,}5 \qquad (s)$$

$$N_{b_{interm}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{interm}}} = \frac{39}{6{,}2} = 6{,}3 \qquad (t)$$

$$N_{b_{engrenagem}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrenagem}}} = \frac{39}{3{,}6} = 10{,}8 \qquad (u)$$

17 Os coeficientes de segurança contra falha de superfície são encontrados comparando a resistência de superfície corrigida à tensão de superfície para cada engrenagem no acoplamento:*

$$N_{c_{pinhão-interm}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{pinhão-interm}}}\right)^2 = \left(\frac{105}{79}\right)^2 \cong 1{,}8 \qquad (v)$$

$$N_{c_{interm-engrenagem}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{interm-engrenagem}}}\right)^2 = \left(\frac{105}{59}\right)^2 \cong 3{,}2 \qquad (w)$$

* O coeficiente de segurança contra falha de superfície deve ser encontrado comparando a carga real à carga que produziria uma tensão igual à resistência de superfície corrigida do material. Sendo a tensão de superfície relacionada à raiz quadrada da carga, o coeficiente de segurança à fadiga de superfície pode ser calculado como o quociente do quadrado da resistência de superfície corrigida dividido pelo quadrado da tensão de superfície para cada engrenagem no engrenamento.

18 Compare esses resultados aos coeficientes de segurança para o trem de engrenagens retas no Exemplo 12-7. As engrenagens helicoidais têm coeficientes de segurança significativamente maiores que as engrenagens retas de mesmo passo.

$$N_{b_{pinhão}} = 8{,}5 \qquad N_{b_{interm}} = 6{,}3 \qquad N_{b_{engrenagem}} = 10{,}8$$
$$N_{c_{pinhão-interm}} = 1{,}8 \qquad N_{c_{interm-engrenagem}} = 3{,}2 \qquad (x)$$

19 Os arquivos EX13-01 estão no CD-ROM.

13.2 ENGRENAGENS CÔNICAS

Engrenagens cônicas são cortadas em cones acoplados em vez de em cilindros acoplados de engrenagens retas ou helicoidais. Os eixos delas são não paralelos e interceptam nos vértices de cones. O ângulo entre seus eixos pode ser qualquer valor, mas é frequentemente 90°. Se os dentes forem cortados paralelos ao eixo do cone, elas serão **engrenagens cônicas retas**, análogas às engrenagens retas. Se os dentes forem cortados em um ângulo de espiral ψ com relação ao eixo do cone, elas serão **engrenagens cônicas espirais**, análogas às engrenagens helicoidais. O contato entre os dentes das engrenagens cônicas retas ou espirais tem os mesmos atributos que as suas contrapartes cilíndricas, com o resultado que as cônicas espirais trabalham mais silenciosa e suavemente que as cônicas retas, e as espirais podem ter diâmetros menores para a mesma capacidade de carga.

A Figura 13-3*a* mostra um par de engrenagens cônicas retas e a Figura 13-3*b*, um par de engrenagens cônicas espirais. Uma outra forma é a engrenagem *ZEROL®* (não mostrada), que tem dentes curvados como uma engrenagem espiral, mas tem um ângulo de espiral zero como uma engrenagem cônica reta. As engrenagens Zerol têm algumas das características de quietude e suavidade de funcionamento das engrenagens espirais. As espirais são o máximo em suavidade e quietude de funcionamento e são recomendadas para velocidades de até 8000 fpm (40 m/s). Velocidades maiores requerem engrenagens de precisão de acabamento. As engrenagens helicoi-

(*a*)

(*b*)

FIGURA 13-3

(*a*) Engrenagens cônicas retas (Cortesia de Martin Sprocket and Gear Co, Arlington Tex.) e (*b*) engrenagens cônicas espirais (Cortesia da Boston Gear Division of IMO Industries, Quincy Mass).

dais retas são limitadas à velocidade de cerca de 1000 fpm (10 m/s). As engrenagens Zerol podem girar tão rapidamente quanto as espirais. Como no caso das engrenagens retas e helicoidais, a redução máxima de 10:1 é recomendada para qualquer conjunto de engrenagens cônicas ou espirais. Um limite de 5:1 é recomendado quando usado como um aumentador de velocidade. O torque no pinhão é usado como um parâmetro de classificação. O ângulo de pressão mais comum para engrenagens cônicas e espirais é $\phi = 20°$. As espirais mais frequentemente têm um ângulo de espiral ψ de 35°. Engrenagens cônicas em geral não são intercambiáveis: elas são feitas e trocadas como conjuntos de pinhão e engrenagem.

Geometria das engrenagens cônicas e nomenclatura

A Figura 13-4 mostra uma seção transversal de duas engrenagens cônicas acopladas. Seus ângulos de cone de referência são denotados por α_p e α_g para o pinhão e a engrenagem, respectivamente. Os diâmetros de referência são definidos nas extremidades maiores, na parte detrás do cone. O tamanho e o formato do dente são definidos no cone detrás e são similiares a um dente de engrenagem reta com um pinhão de adendo longo para minimizar a interferência e o adelgaçamento. A razão de adendos varia com a razão de engrenamento desde adendos iguais (dentes de profundidade completa) para uma razão de engrenamento 1:1 a adendos de pinhão cerca de 50% mais longos para razões de engrenamento acima de 6:1. A

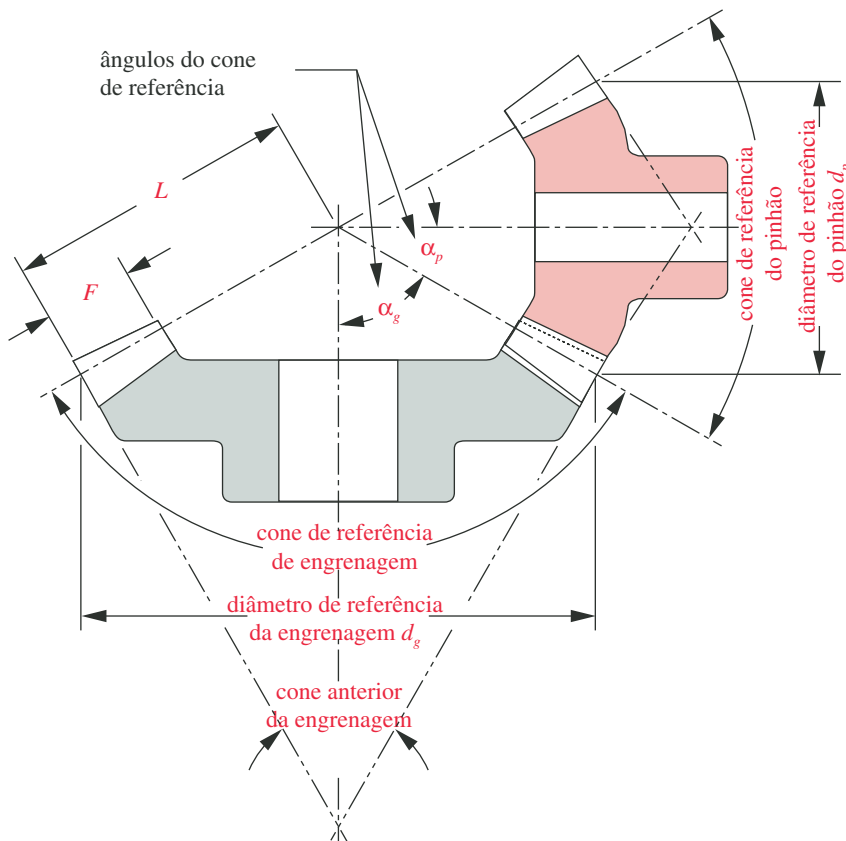



FIGURA 13-4

Geometria e nomenclatura da engrenagem cônica. (Fonte: Extraído da norma AGMA 2005-B88, *Design Manual for Bevel Gears*, com autorização do editor, a American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.)

largura de face, F, é geralmente limitada a $L / 3$, com L como definido na Figura 13-4. Pela geometria:

$$L = \frac{r_p}{\operatorname{sen} \alpha_p} = \frac{d_p}{2 \operatorname{sen} \alpha_p} = \frac{d_g}{2 \operatorname{sen} \alpha_g} \tag{13.7a}$$

A razão de engrenamento, m_G, para um par de engrenagens cônicas a 90° pode ser definida em termos dos ângulos de cones de referência como

$$m_G = \frac{\omega_p}{\omega_g} = \frac{N_g}{N_p} = \frac{d_g}{d_p} = \operatorname{tg} \alpha_g = \cot \alpha_p \tag{13.7b}$$

Ver também as Equações 12.1*a* até 12.1*c*.

Montagem de engrenagens cônicas

A montagem encavalada (mancais em ambos os lados do plano do dente) é preferida para melhor suporte, mas é difícil de se conseguir em ambos pinhão e engrenagem com eixos se intersectando. A engrenagem é geralmente montada encavalada e o pinhão em balanço, a menos que haja espaço suficiente para colocar um mancal na parte interna do pinhão para montá-lo encavalado também.

Forças em engrenagens cônicas

Como nas engrenagens helicoidais, há componentes de força tangencial, radial e axial agindo em uma engrenagem cônica ou espiral. Para uma engrenagem cônica reta:

$$\begin{aligned} W_a &= W_t \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \alpha \\ W_r &= W_t \operatorname{tg} \phi \cos \alpha \\ W &= W_t / \cos \phi \end{aligned} \tag{13.8a}$$

Para uma engrenagem cônica espiral:

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{W_t}{\cos \psi}\left(\operatorname{tg} \phi_n \operatorname{sen} \alpha \mp \operatorname{sen} \psi \cos \alpha\right) \\ W_r &= \frac{W_t}{\cos \psi}\left(\operatorname{tg} \phi_n \cos \alpha \pm \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \alpha\right) \end{aligned} \tag{13.8b}$$

onde os sinais superiores de $\pm$ e $\mp$ são usados para um pinhão motor com uma espiral de hélice à direita (RH) rodando no sentido horário visto desde sua extremidade maior, ou para um pinhão motor com uma espiral de hélice à esquerda (LH) rodando no sentido anti-horário vista desde sua extremidade maior, e o sinal inferior usado para as condições opostas.

Nas Equações 13.8*a* e 13.8*b*, use o ângulo apropriado de cone de referência α_p para o pinhão ou α_g para a engrenagem no lugar de α para obter as forças em cada membro. A carga tangencial W_t pode ser encontrada pelo torque aplicado para qualquer membro em combinação com seu diâmetro de referência médio d_m.

$$W_t = \frac{2T}{d_m} \tag{13.8c}$$

onde o diâmetro e o torque, atuando no mesmo elemento (engrenagem ou pinhão), são usados para encontrar as forças transmitidas comuns.*

* Ver a norma AGMA 2005-B88 para o método de cálculo de d_m, ou para estimá-lo de um arranjo de engrenamento (similar à Figura 13-4). Os arquivos modelos para o Exemplo 13-2 também contêm o cálculo para o diâmetro de referência médio.

Tensões em engrenagens cônicas

O cálculo das tensões e a estimativa de vida de engrenagens cônicas é mais complicado que para engrenagens retas ou helicoidais. As normas AGMA[4, 5] proveem informação mais completa do que aquela que pode ser apresentada aqui e devem ser consultadas para qualquer projeto verdadeiro de aplicações. Apresentaremos apenas um breve resumo da abordagem do projeto de engrenagens cônicas como uma introdução ao assunto, conveniente para um entendimento básico dos fatores envolvidos e para a execução de alguns exercícios.*

Tensões de flexão em engrenagens cônicas A tensão de flexão em engrenagens cônicas retas ou espirais é encontrada essencialmente com a mesma equação usada para engrenagens retas e helicoidais. A principal diferença é levada em conta com o valor do fator J.

$$\sigma_b = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \quad \text{psi} \tag{13.9us}$$

$$\sigma_b = \frac{2000T_p}{d}\frac{1}{FmJ}\frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \quad \text{MPa} \tag{13.9si}$$

Observe que a carga aplicada é expressa em termos do torque do pinhão T_p por substituição na Equação 13.8*c* em vez de usar W_t como na Equação 12.15. O diâmetro de referência d na Equação 13.9 é aquele do pinhão. (A fórmula do sistema internacional, SI, tem comprimentos expressos em mm.) Para os nossos propósitos, os fatores K_a, K_m, K_s e K_v podem ser considerados os mesmos, como foi definido no Capítulo 12 para engrenagens retas. Contudo, alguns desses fatores têm definições ligeiramente diferentes para engrenagens cônicas na norma AGMA[4, 5] e devem ser consultados para fórmulas mais precisas em qualquer projeto verdadeiro de aplicações. O fator $K_x = 1$ para engrenagens cônicas retas e é uma função do raio do cortador para as engrenagens espirais ou Zerol. Use $K_x = 1{,}15$ como uma aproximação nos últimos dois casos.

Tensão de superfície em engrenagens cônicas A tensão de superfície em engrenagens cônicas retas ou espirais é calculada de maneira similar àquela das engrenagens retas e helicoidais, mas com alguns fatores adicionais de ajuste incluídos. Como com a tensão de flexão de engrenagens cônicas, a carga aplicada é expressa como o torque do pinhão em vez de como uma carga tangencial.

$$\sigma_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2T_D}{FId^2}\left(\frac{T_p}{T_D}\right)^z \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f C_{xc}} \tag{13.10}$$

Para nossos propósitos, os fatores C_p, C_a, C_m, C_v, C_s e C_f podem ser considerados os mesmos que aqueles definidos no Capítulo 12. Contudo, alguns desses fatores têm definições ligeiramente diferentes para engrenagens cônicas na norma da AGMA,[5] e ela deve ser consultada para fórmulas mais precisas no caso de qualquer projeto verdadeiro de aplicações. Os fatores de ajuste novos para esta versão da equação de tensão de superfície contra a Equação 12.21 são C_b, que é uma **constante de ajuste de tensão**, definida como 0,634 pela norma atual da AGMA,[5] e C_{xc}, um **fator de coroação** definido como 1,0 para dentes não coroados e como 1,5 para dentes coroados.† O exponente z é 0,667 quando $T_p < T_D$, e 1,0 em outros casos.

Os dois termos de torque T_D e T_p requerem alguma explicação. T_p é o **torque de operação do pinhão**, definido pelas cargas aplicadas, o torque aplicado ou a potência e velocidade, e pode ser variável no tempo. T_D é o **torque de**

* Extraído da norma AGMA 2005-B88, *Design Manual for Bevel Gears* e/ou AGMA 2003-A86 *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*, com autorização da American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

† Dentes coroados têm superfícies modificadas para ter curvatura convexa na direção do comprimento (ao longo da largura da face) no intuito de produzir contato localizado e/ou de evitar contato nas extremidades do dente. A coroação pode ser aplicada para todos os tipo de dentes. Dentes coroados reduzem a necessidade de alinhamento preciso dos eixos das engrenagens que se acoplam para serem exatamente paralelos.

projeto do pinhão, que é o mínimo valor necessário para produzir uma área de contato completo (ideal) nos dentes da engrenagem. Em muitos casos, T_D é o torque necessário para criar uma tensão de contato igual à tensão de contato permissível para o material como definido na Tabela 12-21. T_D pode ser estimado por

$$T_D = \frac{F}{2}\frac{IC_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc} d}{C_p C_b}\frac{0,774 C_H}{C_T C_R}\right)^2 \qquad \text{lb-in} \qquad (13.11us)$$

$$T_D = \frac{F}{2000}\frac{IC_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc} d}{C_p C_b}\frac{0,774 C_H}{C_T C_R}\right)^2 \qquad \text{N-m} \qquad (13.11si)$$

onde S'_{fc} é a resistência à fadiga de superfície do material da Tabela 12-21 e os fatores C são como definidos acima ou no Capítulo 12. (Ver a Equação 12.25 para C_H, C_T e C_R.) C_{md} é um **fator de montagem** para levar em conta a montagem de balanço ou encavalada de uma ou ambas as engrenagens. Se os dentes da engrenagem forem coroados, C_{md} varia de 1,2, para ambos os membros montados encavalados, a 1,8, se ambos estiverem em balanço. Use um valor entre esses dois números se um membro estiver em balanço e o outro montado encavalado. Para dentes sem coroa, dobre esses números. Ver a norma AGMA[5] para informações mais detalhadas.

Fatores geométricos *I* e *J* Os fatores de geometria para engrenagens cônicas retas e espirais são diferentes daqueles para engrenagens retas ou helicoidais. A norma AGMA provê gráficos para esses fatores para engrenagens cônicas retas, Zerol e espirais. Alguns desses gráficos são reproduzidos pelas Figuras 13-5 até 13-8.*

Coeficientes de segurança Os coeficientes de segurança contra falha de flexão ou crateração são calculados da mesma maneira como delineado para engrenagens retas no Capítulo 12.

EXEMPLO 13-2

Análise de tensão de um trem de engrenagens cônicas

Problema **Determine as tensões de flexão e superfície e os coeficientes de segurança em um acoplamento de engrenagens cônicas retas feitas do mesmo aço e operando sob as mesmas condições para a mesma vida de 5 anos como no Exemplo 12-7.**

Dados **$N_p = 20$, $N_g = 35$, $\phi = 25°$ e $p_d = 8$, passando 10 hp a 2500 rpm. Do Exemplo 12-7: a resistência de flexão corrigida é 38937 psi, e a resistência de superfície é 118000 psi não corrigida e 105063 psi corrigida.**

Hipóteses **Do Exemplo 11-7: $K_a = C_a = K_s = C_s = C_f = C_H = C_R = C_T = 1$, $K_m = C_m = 1,6$, $K_v = C_v = 0,652$, $C_L = 0,890$ e $C_p = 2276$. Desta seção, suponha $C_{xc} = K_x = 1$, $C_b = 0,634$ e $C_{md} = 1,5$.**

Solução

1 Determine o torque do pinhão a partir da potência e velocidade dadas

* Extraído da norma AGMA 2005-B88, *Design Manual for Bevel Gears* e/ou AGMA 2003-A86 *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*, com autorização da American Gear Ma-nufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

$$T_p = \frac{P}{\omega_p} = \frac{10\text{ hp}\left(6600\ \frac{\text{in-lb}}{\text{s}}\Big/\text{hp}\right)}{2500\text{ rpm}\left(2\pi/60\right)\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\Big/\text{rpm}} = 252{,}1\text{ lb-in} \qquad (a)$$

2 Encontre os diâmetros de referência do pinhão e da engrenagem.

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{20}{8} = 2{,}50\text{ in,} \qquad d_g = \frac{35}{8} = 4{,}375\text{ in} \qquad (b)$$

3 Encontre os ângulos do cone de referência pela Equação 13.7*b*:

$$\alpha_g = \text{tg}^{-1}\left(\frac{N_g}{N_p}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{35}{20}\right) = 60{,}26°$$
$$\alpha_p = 90 - \alpha_g = 90 - 60{,}26 = 29{,}74° \qquad (c)$$

4 Encontre o comprimento do cone de referência L pela Equação 13.7*a*:

$$L = \frac{d_p}{2\,\text{sen}\,\alpha_p} = \frac{2{,}50}{2\,\text{sen}\,29{,}74} = 2{,}519\text{ in} \qquad (d)$$

5 Use o comprimento do cone de referência L para encontrar uma largura de face apropriada, fixe-o ao valor máximo recomendado.

$$F = \frac{L}{3} = \frac{2{,}519}{3} = 0{,}840\text{ in} \qquad (e)$$

6 Busque os fatores geométricos de flexão para o pinhão e a engrenagem na Figura 13-5 para encontrar $J_p = 0{,}237$ e $J_g = 0{,}201$.

7 Encontre a tensão de flexão no pinhão pela Equação 13.9 usando J_p.

$$\sigma_{b_{pinhão}} = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_aK_mK_s}{K_vK_x} = \frac{2(252{,}1)}{2{,}5}\frac{8}{0{,}840(0{,}237)}\frac{1(1{,}6)(1)}{0{,}652(1)} \cong 19880\text{ psi} \quad (f)$$

8 Encontre a tensão de flexão no pinhão pela Equação 13.9 usando J_g.

$$\sigma_{b_{engrenagem}} = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_aK_mK_s}{K_vK_x} = \frac{2(252{,}1)}{2{,}5}\frac{8}{0{,}840(0{,}201)}\frac{1(1{,}6)(1)}{0{,}652(1)} \cong 23440\text{ psi} \quad (g)$$

Observe que o dente da engrenagem está sob tensão mais alta que o dente do pinhão, porque o adendo mais longo no pinhão o faz mais forte às expensas de um dente de engrenagem de adendo curto.

9 Busque o fator de geometria de superfície para esta combinação de pinhão e engrenagem na Figura 13-6 para encontrar $I = 0{,}076$. Use isso na Equação 13.11 para encontrar T_D.

$$T_D = \frac{F}{2}\frac{IC_v}{C_sC_{md}C_fC_aC_{xc}}\left(\frac{S'_{fc}d}{C_pC_b}\frac{0{,}774C_H}{C_TC_R}\right)^2$$
$$= \frac{0{,}840}{2}\frac{0{,}076(0{,}652)}{1(1{,}5)(1)(1)(1)}\left(\frac{118000(2{,}5)}{2276(0{,}634)}\frac{0{,}774(1)}{1(1)}\right)^2 \cong 347{,}5\text{ lb-in} \qquad (h)$$

10 Sendo $T_D > T_p$, $z = 0{,}667$. Use esses dados para encontrar a tensão de superfície com a Equação 13.10.

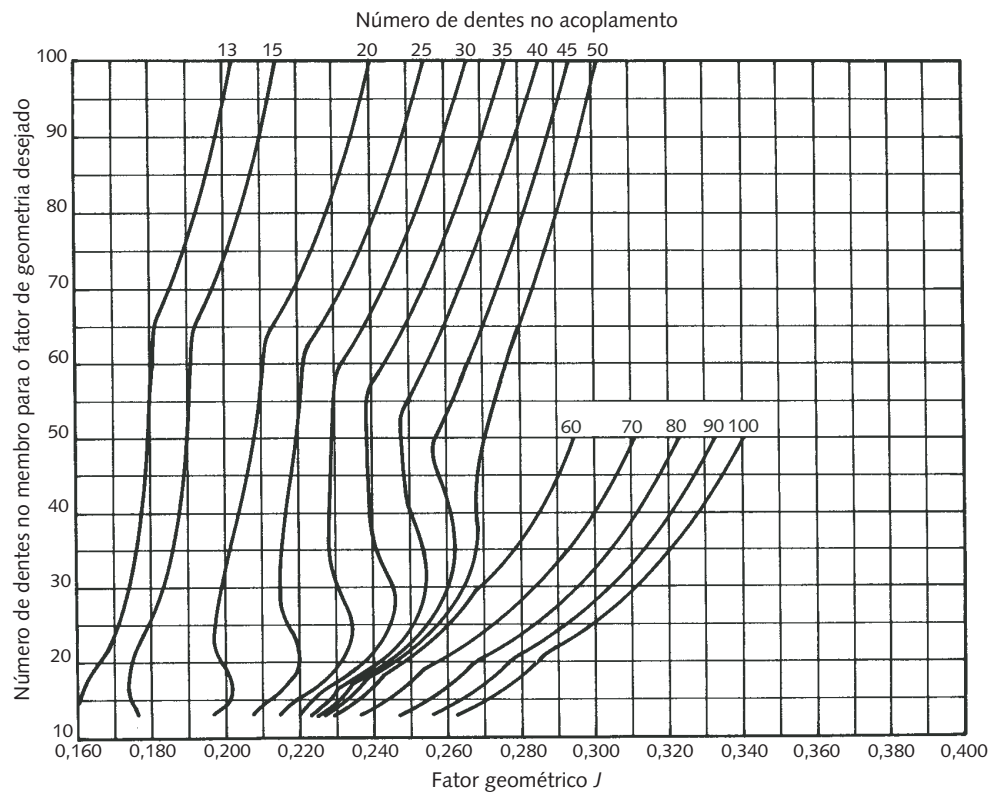



FIGURA 13-5

Fator geométrico J para engrenagens cônicas retas com $\phi = 20°$ e raio de extremidade da ferramenta $0{,}120/p_d$. (Fonte: Extraído da norma AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*, com autorização do editor, the American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.)

$$\sigma_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2T_D}{FId^2}\left(\frac{T_p}{T_D}\right)^z \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f C_{xc}}$$

$$= 2276(0{,}634)\sqrt{\frac{2(347{,}5)}{0{,}840(0{,}076)(2{,}5)^2}\left(\frac{252{,}1}{347{,}5}\right)^{0{,}667}\frac{1(1{,}6)}{0{,}652}(1)(1)(1)}$$

$$\cong 84753 \text{ psi} \tag{i}$$

11 Os coeficientes de segurança podem agora ser encontrados como

$$N_{b_{pinhão}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{pinhão}}} = \frac{38937}{19880} \cong 2{,}0 \tag{j}$$

$$N_{b_{engrenagem}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrenagem}}} = \frac{38937}{23440} \cong 1{,}7 \tag{k}$$

$$N_c = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_c}\right)^2 = \left(\frac{105063}{84753}\right)^2 \cong 1{,}5 \tag{l}$$

12 Estes são coeficientes de segurança aceitáveis. Os arquivos EX13-02 estão no CD-ROM.

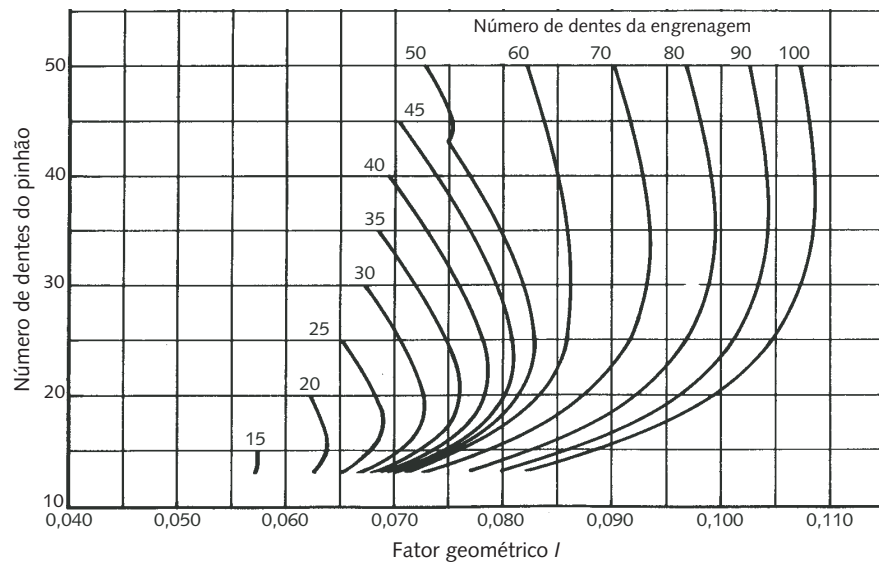



FIGURA 13-6

Fator geométrico I para engrenagens cônicas retas com $\phi = 20°$ e raio de extremidade da ferramenta $0{,}120/p_d$. (Fonte: Extraído da norma AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*, com autorização do editor, the American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.)

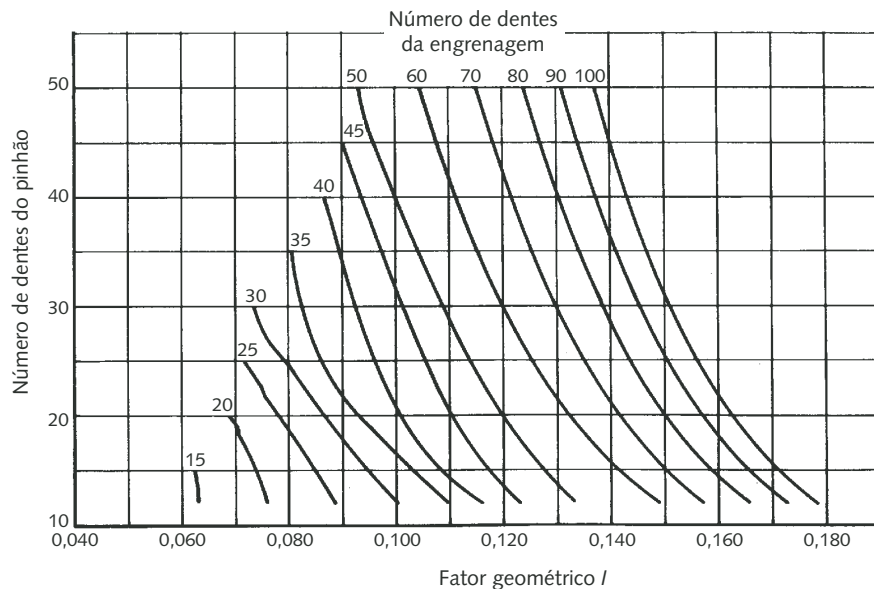



FIGURA 13-7

Fator geométrico I para engrenagens cônicas espirais com $\phi = 20°$, ângulo de espiral $\psi = 35°$ e raio de extremidade da ferramenta $0{,}240/p_d$. (Fonte: Extraído da norma AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth,* com autorização do editor, the American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.)

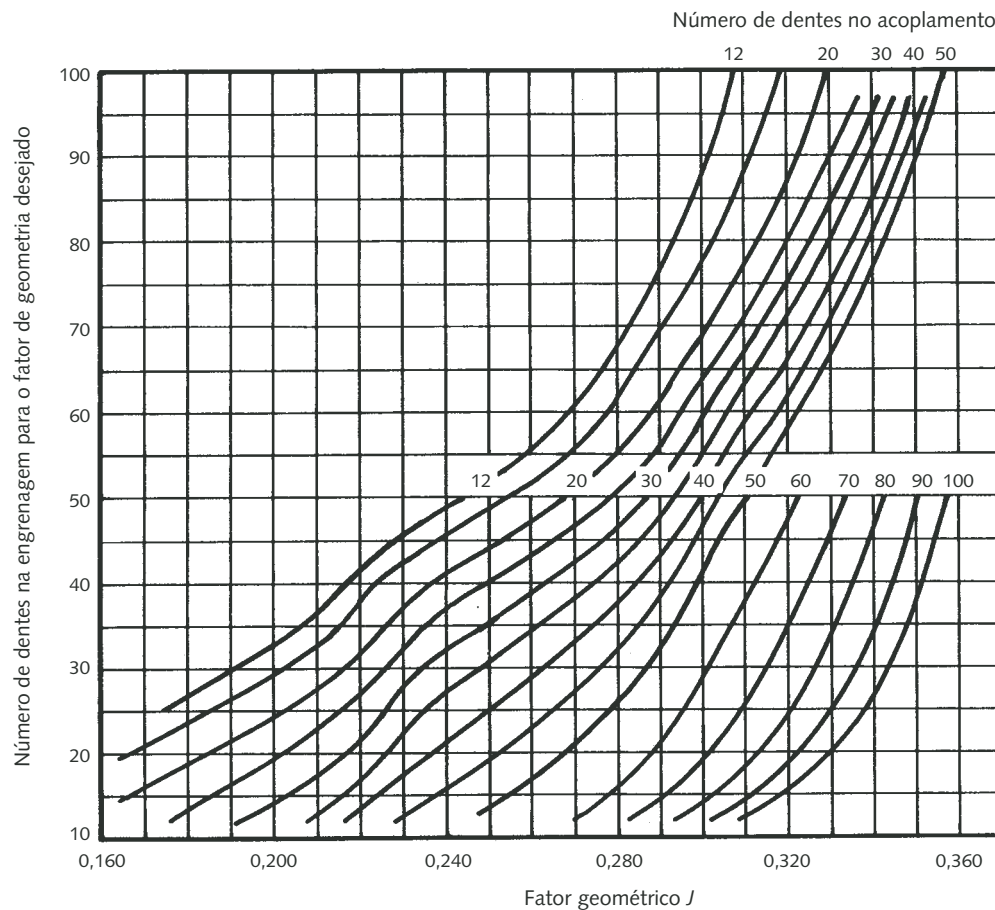



FIGURA 13-8

Fatorgeométrico J para engrenagens cônicas espirais com $\phi = 20°$, ângulo de espiral $\psi = 35°$ e raio de extremidade da ferramenta $0{,}240/p_d$. (Fonte: Extraído da norma AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth,* com autorização do editor, the American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.)

13.3 ENGRENAGENS SEM-FIM

O engrenamento de sem-fim é mais complicado de projetar que o engrenamento convencional. Apresentamos apenas uma visão breve do processo como uma introdução ao tópico. As normas AGMA contêm muito mais informação. Para qualquer aplicação verdadeira, o leitor é incentivado a consultar os documentos da AGMA.[6, 7] Eles contêm muitas tabelas de dados necessários para um projeto completo. A maior parte das equações relevantes foram retiradas da norma, mas seu dados tabelados não são apresentados aqui. Em vez disso, foram incluídas equações empíricas do apêndice da norma AGMA[7] para cálculo dos valores tabelados.*

Um engrenamento sem-fim consiste em um sem-fim e uma engrenagem sem-fim (também chamada de roda sem-fim, ou coroa) como mostrado na Figura 13-9. Eles conectam eixos não paralelos, sem interseção, normalmente em ângulos retos entre eles. O sem-fim é, na realidade, uma engrenagem helicoidal com um ângulo de hélice tão grande que um único dente se envolve continuamente ao redor de sua circunferência. Um sem-fim é análogo a uma rosca de parafuso, e a engrenagem sem-fim é análoga a sua porca. A distância que um ponto na engrenagem acoplada (porca) move axialmente em uma revolução do sem-fim é

* Extraído da Norma AGMA 6022-C93, *Design Manual for Cylindrical Wormgearing*, e/ou Norma AGMA 6034-B92, *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed Reducers and Gearmotors*, com autorização da American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.

chamada de **avanço** L, e o avanço dividido pelo comprimento da circunferência de referência πd do sem-fim é a tangente do seu **ângulo de avanço** λ.

$$\text{tg}\,\lambda = \frac{L}{\pi d} \tag{13.12}$$

Os sem-fins normalmente têm apenas um dente (ou rosca) e, assim, podem criar razões tão grandes quanto o número de dentes na engrenagem sem-fim. Essa habilidade de prover altas razões em um pacote compacto é uma das principais vantagens de um engrenamento sem-fim sobre outras configurações de engrenamento possíveis, a maior parte das quais são limitadas a uma razão aproximada de 10:1 por par de engrenagens. Engrenamentos sem-fim podem ser produzidos com razões variando de 1:1 até 360:1, embora a variação usual disponível de catálogos seja 3:1 a 100:1. Razões acima de 30:1 geralmente têm um sem-fim de uma única rosca, e razões abaixo desse valor frequentemente usam sem-fins de roscas múltiplas. O número de roscas no sem-fim é também referido por seu número de *começos* ou *entradas.* Um sem-fim de 2 ou 3 entradas pode ser usado para um engrenamento sem-fim de razão baixa, por exemplo. O passo axial p_x do sem-fim iguala o passo circular p_c da engrenagem sem-fim e está relacionado ao avanço L pelo número escolhido de começo ou pelo número de dentes no sem-fim N_w.

$$p_x = \frac{L}{N_w} = p_c = \frac{\pi d_g}{N_g} \tag{13.13}$$

onde d_g é o diâmetro de referência e N_g é o número de dentes na engrenagem sem-fim. O número de começo N_w é normalmente entre 1 e 10 para engrenamentos comerciais sem-fim, embora mais começos possam ser usados em engrenamentos maiores.

Outra vantagem dos engrenamentos sem-fim sobre outros tipos de engrenamentos é sua habilidade de autotravamento. Se o par sem-fim for autotravante, ele não retrocederá, isto é, o torque aplicado à engrenagem sem-fim (coroa) não rodará o sem-fim. Um engrenamento autotravante pode ser movido somente "para a frente" do sem-fim para a engrenagem sem-fim. Assim, ele pode ser usado para suportar uma carga como, por exemplo, no levantamento de um carro. Se um engrenamento sem-fim será ou não autotravante depende de vários fatores, incluindo a razão entre o tg λ e o coeficiente de atrito μ, o acabamento da superfície, lubrificação e vibração. Geralmente, o autotravamento ocorre em ângulos de avanço abaixo de 6° e pode ocorrer em ângulos de avanço tão elevados quanto 10°.[8] (Ver a Seção 15.2 para uma discussão completa de autotravamento, pois ele se aplica a parafusos de potência, cujos princípios são igualmente aplicáveis a engrenamentos sem-fim.)

Ângulos de pressão padronizados para engrenamento sem-fim são 14,5, 17,5, 20, 22,5, 25, 27,5 ou 30°. Ângulos de pressão mais elevados dão maior resistência ao dente à custa de um atrito mais elevado, cargas mais elevadas nos mancais e tensões de flexão mais elevadas no sem-fim. Para aplicações de alta potência à alta velocidade, uma engrenagem sem-fim de passo relativamente fino deve ser usada. Altos torques a baixas velocidades necessitam passo áspero e diâmetros maiores de coroa.

As formas de dente para sem-fim e engrenagens sem-fim não são involutas, e existem componentes grandes de velocidade de escorregamento no engrenamento. O sem-fim e a coroa não são intercambiáveis, mas são feitos e trocados aos pares. Para aumentar a área de contato entre os dentes, formas de dente de envolvimento simples ou duplo são usadas. Um conjunto de envolvimento simples (como mostrado na Figura 13-9) enrola os dentes de engrenagem sem-fim parcialmente ao redor do sem-fim. Um conjunto de envolvimento duplo tam-

FIGURA 13-9

Um engrenamento de envelope simples, consistindo de um sem-fim e uma engrenagem sem-fim de envelope. (Cortesia da Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Tex.)

bém enrola o sem-fim parcialmente ao redor da engrenagem sem-fim, deixando o sem-fim na forma de uma ampulheta em vez de na forma de um cilindro. Essas configurações aumentam a complexidade e o custo, mas também aumentam a capacidade de carga. Ambos os tipos encontram-se disponíveis comercialmente.

Materiais para engrenagens sem-fim

Somente poucos materiais são apropriados para engrenagens sem-fim. O sem-fim é bastante tensionado e requer um aço endurecido. Aços de baixo carbono, como AISI 1020, 1117, 8620 ou 4320, são usados e endurecidos a HRC 58-62. Aços de médio carbono como AISI 4140 ou 4150 também são usados, endurecidos por indução ou chama a HRC 58-62. Eles precisam ser retificados ou polidos para um acabamento de 16 μin (0,4 μm) R_a ou melhor. A engrenagem sem-fim necessita ser feita de um material brando e complacente o suficiente para engrenar e moldar-se ao sem-fim duro sob condições de escorregamento elevado. O bronze fundido em molde areia, molde metálico, por centrifugação ou forjado é geralmente usado para engrenagem sem-fim. Fósforo ou bronze estanho são usados para aplicações de potência elevada e manganês bronze, para sem-fim pequeno e de baixa velocidade. Ferro fundido, aços brandos ou plásticos são às vezes usados para aplicações de baixa velocidade carregadas levemente.

Lubrificação de sem-fim

A condição de lubrificação em um engrenamento de sem-fim pode mudar de lubrificação de borda (limite) à lubrificação parcial ou total de EHD dependendo das cargas, velocidades, temperaturas e viscosidade dos lubrificantes, como discutido no Capítulo 11. A situação de lubrificação é mais parecida àquela de mancais de deslizamento que à de rolamento, neste caso, devido às velocidades dominantes de deslizamento. Suas porcentagens elevadas de deslizamento fazem os sem-fins menos eficientes que os engrenamentos convencionais. Lubrificantes contendo aditivos de extrema pressão (EP) são às vezes usados em engrenamentos de sem-fim.

Forças em engrenamentos sem-fim

Uma condição tridimensional de carregamento existe no engrenamento de sem-fim. Componentes tangencial, radial e axial atuam em cada membro. Com um ângulo (típico) de 90° entre os eixos do sem-fim e da engrenagem sem-fim, a magnitude da componente tangencial na coroa W_{tg} iguala a componente axial no sem-fim W_{aw} e vice-versa. Essas componentes podem ser definidas como

$$W_{tg} = W_{aw} = \frac{2T_g}{d_g} \tag{13.14a}$$

onde T_g e d_g são o torque na coroa e o diâmetro de referência da coroa. A força axial W_{ag} na coroa e a força tangencial no sem-fim W_{tw} são

$$W_{ag} = W_{tw} = \frac{2T_w}{d} \tag{13.14b}$$

onde T_w é o torque no sem-fim e d_g é o diâmetro de referência do sem-fim. A força radial W_r separando os dois elementos é

$$W_r = \frac{W_{tg}\operatorname{tg}\phi}{\cos\lambda} \tag{13.14c}$$

onde ϕ é o ângulo de pressão e λ é o ângulo de avanço.

Geometria do engrenamento de sem-fins

Os diâmetros de referência e os números de dentes de engrenagens comuns têm uma relação única, mas este não é o caso das engrenagens sem-fim. Uma vez que a decisão é feita com relação ao número de entradas (começos) ou dentes N_w desejados no sem-fim, o número de dentes na coroa N_g é definido pela relação de engrenamento requerida m_G:

$$N_g = m_G N_w \tag{13.15}$$

Contudo, o diâmetro de referência do sem-fim não está ligado a esses números de dentes como acontece com outros engrenamentos. O sem-fim pode, teoricamente, ter qualquer diâmetro desde que a seção transversal de seu dente (passo axial) iguale o passo circular da coroa. (Isso é análogo aos parafusos de máquinas de diâmetros diferentes que têm o mesmo passo de rosca, como os tamanhos #6-32, 8-32 e 10-32.) Assim, o diâmetro de referência d do sem-fim pode ser selecionado independentemente do diâmetro da coroa d_g e, para qualquer diâmetro dado d_g, mudanças em d apenas variarão a distância entre centros C entre o sem-fim e a coroa, mas não afetarão a razão de engrenamento. A AGMA recomenda valores mínimos e máximos para o diâmetro de referência do sem-fim como

$$\frac{C^{0,875}}{3} \le d \le \frac{C^{0,875}}{1,6} \tag{13.16a}$$

e Duddley[9] recomenda usar

$$d \cong \frac{C^{0,875}}{2,2} \tag{13.16b}$$

que é aproximadamente um valor médio entre os limites da AGMA.

O diâmetro de passo da coroa d_g pode ser relacionado com aquele do sem--fim através da distância entre centros C.

$$d_g = 2C - d \tag{13.17}$$

O adendo a e o dedendo b dos dentes são encontrados a partir de

$$a = 0,3183 p_x \qquad b = 0,3683 p_x \tag{13.18}$$

A largura da face da coroa é limitada pelo diâmetro do sem-fim. A AGMA recomenda um valor máximo para a largura da face F como

$$F_{max} \le 0,67d \tag{13.19}$$

A Tabela 13-7 mostra os números mínimos recomendados pela AGMA para dentes de engrenagem sem-fim como uma função do ângulo de pressão.

Métodos de classificação

Diferentemente dos engrenamentos entre engrenagens cônicas e helicoidais, nas quais os cálculos são feitos separadamente para as tensões de flexão e de superfície nos dentes da engrenagem e comparados com as propriedades do material, os engrenamentos sem-fim são classificados pela sua habilidade em lidar com um nível de potência de entrada. A **classificação de potência da AGMA** está baseada na resistência de crateração e desgaste, porque a experiência tem mostrado que esses são os modos usuais de falha. Por causa das altas velocidades de deslizamento em engrenamentos de sem-fim, a temperatura do filme de óleo separando os dentes de engrenagem se torna um fator importante, e isso é levado em conta pela norma da AGMA.[6,7] Essas padronizações estão baseadas em um ciclo de vida de 10 horas contínuas por dia de serviço sob carga uniforme, definido como um fator de serviço de 1,0. Pressupõe-se que os materiais para sem-fim e coroa sejam como definido anteriormente.

Tabela 13-7
A AGMA sugeriu números mínimos de dentes para engrenagens sem-fim
Fonte: Referência 6

ϕ	N_{min}
14,5	40
17,5	27
20	21
22,5	17
25	14
27,5	12
30	10

A classificação de um engrenamento de sem-fim pode ser expressa como a potência de entrada permitida Φ, potência de saída Φ_o ou o torque admissível T a uma dada velocidade no eixo de entrada ou de saída, estes sendo relacionados pela relação geral de potência-torque-velocidade (Equação 9.1*a*). A AGMA define a fórmula

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_l \tag{13.20}$$

onde Φ_l é a potência perdida por atrito no engrenamento. A potência de saída Φ_o é definida como

$$\Phi_o = \frac{n W_{tg} d_g}{126000\, m_G} \text{ hp} \tag{13.21us}$$

$$\Phi_o = \frac{n W_{tg} d_g}{1{,}91E7\, m_G} \text{ kW} \tag{13.21si}$$

e a potência perdida Φ_l é definida como

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{33000} \text{ hp} \tag{13.22us}$$

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{1000} \text{ kW} \tag{13.22si}$$

Estas são equações com unidades misturadas. A velocidade rotacional n está em rpm. A velocidade de deslizamento tangencial V_t está em fpm (m/s) e é calculada no diâmetro d do sem-fim em polegadas (mm). As cargas W_{tg} e W_f estão em lb (N). A potência está em hp (kW).

A carga tangencial W_{tg} na coroa em lb (N) é encontrada a partir de

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0,8} F \tag{13.23us}$$

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0,8} F / 75{,}948 \tag{13.23si}$$

onde C_s é um fator dos materiais definido pela AGMA para bronze* produzido em moldes metálicos como

$$\begin{array}{lll} \text{se} & C < 8 \text{ in} & C_s = 1000 \\ \text{se} & C \geq 8 \text{ in} & C_s = 1411{,}6518 - 455{,}8259 \log_{10} d_g \end{array} \tag{13.24}$$

e C_m é um fator de correção de razão definido pela AGMA como

$$\begin{array}{ll} \text{se } 3 < m_G \leq 20 & C_m = 0{,}0200\sqrt{-m_G^2 + 40 m_G - 76} + 0{,}46 \\ \text{se } 20 < m_G \leq 76 & C_m = 0{,}0107\sqrt{-m_G^2 + 56 m_G + 5145} \\ \text{se } 76 < m_G & C_m = 1{,}1483 - 0{,}00658\, m_G \end{array} \tag{13.25}$$

C_v é um fator de velocidade definido pela AGMA como

$$\begin{array}{ll} \text{se } 0 < V_t \leq 700 \text{ fpm} & C_v = 0{,}659 e^{-0{,}0011 V_t} \\ \text{se } 700 < V_t \leq 3000 \text{ fpm} & C_v = 13{,}31 V_t^{-0{,}571} \\ \text{se } 3000 < V_t \text{ fpm} & C_v = 65{,}52 V_t^{-0{,}774} \end{array} \tag{13.26}$$

A velocidade tangencial no diâmetro de referência do sem-fim é

$$V_t = \frac{\pi n d}{12 \cos \lambda} \text{ fpm} \tag{13.27}$$

* Observe que a AGMA define os fatores de material para outros bronzes também. Consulte a norma para mais informações (ver Referências 6 e 7).

A força de atrito W_f na engrenagem é

$$W_f = \frac{\mu W_{tg}}{\cos\lambda \cos\phi_n} \tag{13.28}$$

O coeficiente de atrito em um engrenamento sem-fim não é constante: é uma função da velocidade. A AGMA sugere as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&\text{se} \quad V_t = 0 \text{ fpm} && \mu = 0,15 \\
&\text{se} \quad 0 < V_t \leq 10 \text{ fpm} && \mu = 0,124e^{\left(-0,074V_t^{0,645}\right)} \\
&\text{se} \quad 10 < V_t \text{ fpm} && \mu = 0,103e^{\left(-0,110V_t^{0,450}\right)} + 0,012
\end{aligned} \tag{13.29}$$

A eficiência de um engrenamento sem-fim isoladamente (excluindo o mancal, reservatório de óleo, etc.) é

$$\eta = \frac{\Phi_o}{\Phi} \tag{13.30}$$

O torque de saída de classificação pode ser encontrado pelas Equações 13.14 e 13.23:

$$T_g = W_{tg}\frac{d_g}{2} \tag{13.31}$$

Um procedimento de projeto para engrenamento de sem-fim

Uma especificação de projeto comum para um par de sem-fins definirá a velocidade de entrada (ou de saída) desejada e a razão de engrenamento. Normalmente, será conhecida alguma informação acerca do carregamento de saída, em termos de força ou torque, ou da potência requerida de saída. Poderá haver alguns limites especificados para o tamanho do pacote. Uma abordagem (das muitas possíveis) é supor um número de entrada para o sem-fim e calcular os dados cinemáticos para o sem-fim e para a coroa. A seguir, suponha uma distância entre centros C e use-a para encontrar um diâmetro de referência d tentativo para o sem-fim a partir da Equação 13.16. Encontre uma largura de face F apropriada para a coroa que obedeça à Equação 13.19. O diâmetro de referência da coroa pode, então, ser encontrado pela Equação 13.17 e usado nas Equações 13.23 e 13.28 para encontrar as forças tangentes no engrenamento. A partir desses valores, a potência de classificação (permissível) e os níveis de torque para um engrenamento de sem-fim de tamanho hipotético podem ser encontrados pelas Equações 13.20, 13.22 e 13.31. Se esses valores de potência e torque forem altos o suficiente para satisfazer os requisitos de projeto com margens de segurança apropriadas, o projeto está pronto. Se não (o que é bem provável), as hipóteses originais relativas ao número de entradas, diâmetro do sem-fim, distância de centro, etc., devem ser revistas e os cálculos repetidos até que uma combinação aceitável seja encontrada. A distância entre centros pode ser ajustada ainda mais para obter um passo diametral ou módulo que iguale as fresas disponíveis. Um programa de solução de equações pode facilitar essa tarefa, permitindo iterações rápidas das equações.

13.4 ESTUDO DE CASO

O Estudo de Caso 9A, no Capítulo 9, configura um problema de projeto envolvendo um guincho para levantar fardos de feno em um estábulo. O dispositivo proposto deve ser movido por um motor elétrico conectado a um guincho com um engrenamento de redução de 75:1, que precisa ser autotravante para suportar a carga. Um engrenamento de sem-fim é uma solução razoável para esta aplicação. Vamos dedicar-nos, a seguir, ao projeto do trem de engrenagens.

ESTUDO DE CASO 9B

Projeto de um redutor de velocidade de engrenamento de sem-fim para um guincho de elevação

Problema **Dimensione o sem-fim e a coroa para o guincho de elevação definido no Estudo de Caso 9A como mostrado na Figura 9-4 (repetida).**

Dados **Estimou-se no estudo prévio que a função força-tempo é como mostrado na Figura 9-6*b* (repetida). Para um raio suposto do tambor do guincho de 10 in, o torque de pico será de cerca de 7800 lb-in. A potência média de saída requerida foi calculada como cerca de 0,6 hp. Uma redução de 75:1 é requerida. A velocidade de entrada para o sem-fim é 1725 rpm. A velocidade de saída é 23 rpm.**

Hipóteses **Um sem-fim de uma única entrada com um ângulo de pressão de 20° será experimentado. O sem-fim será de aço endurecido a 58 HRC e a coroa de fósforo bronze fundido em molde metálico. Um engrenamento autotravante é necessário.**

Solução **Ver as Figuras 9-4 e 9-6.**

1 Um sem-fim de entrada única requererá uma engrenagem sem-fim de 75 dentes para a razão desejada 75:1. Esse número de dentes de engrenagem sem-fim é bem acima do mínimo recomendado na Tabela 13-7.

2 Suponha a distância entre centros de 5,5 in para um cálculo preliminar e encontre um diâmetro de sem-fim apropriado com base naquela hipótese da Equação 13.16*b*,

$$d \cong \frac{C^{0,875}}{2,2} \cong \frac{5,5^{0,875}}{2,2} = 2,02 \text{ in} \qquad (a)$$

3 Encontre um diâmetro apropriado para a engrenagem sem-fim pela Equação 13.17.

$$d_g = 2C - d = 2(5,5) - 2,02 = 8,98 \text{ in} \qquad (b)$$

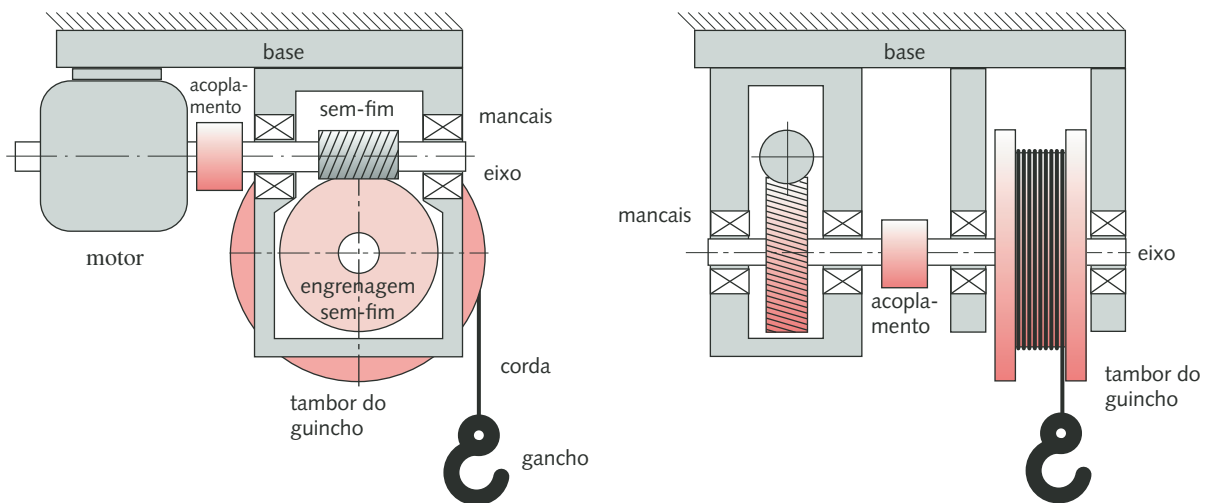



FIGURA 9-4 Repetida

Guincho movido a motor com trem de engrenagens, eixos, mancais e acoplamentos.

(a) Aceleração da carga (b) Força dinâmica no cabo

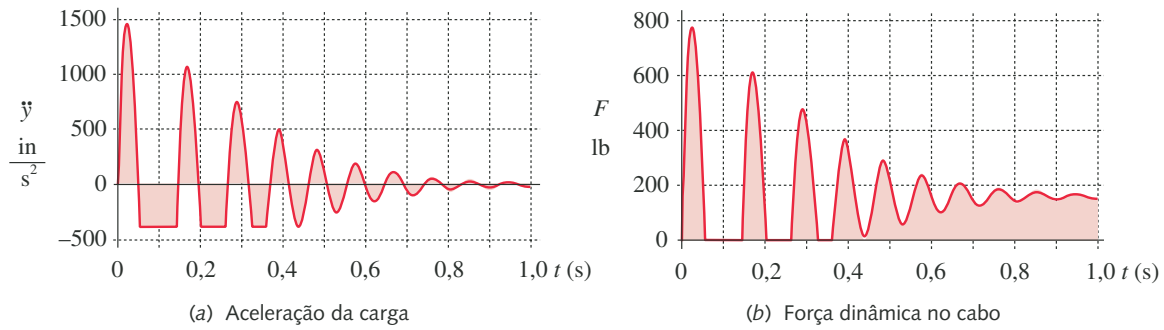



FIGURA 9-6 Repetida

Aceleração e força no cabo durante o arranque de levantamento da carga.

4 Encontre o avanço pela Equação 13.13.

$$L = \pi d_g \frac{N_w}{N_g} = \pi(8{,}98)\frac{1}{75} = 0{,}376 \text{ in} \qquad (c)$$

5 Encontre o ângulo de avanço pela Equação 13.12.

$$\lambda = \mathrm{tg}^{-1}\frac{L}{\pi d} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{0{,}376}{\pi(2{,}02)} = 3{,}39° \qquad (d)$$

Isso é menos que 6°, assim o engrenamento de sem-fim será de travação automática, como requerido.

6 Encontre a largura de face máxima recomendada pela Equação 13.19.

$$F_{max} \cong 0{,}67d = 0{,}67(2{,}02) = 1{,}354 \text{ in} \qquad (e)$$

7 Encontre o fator de materiais C_s pela Equação 13.24. Sendo $C < 8$ in, $C_s = 1000$.

8 Encontre o fator de correção de razão C_m pelas Equações 13.25. Baseado em $m_G = 75$, a segunda das expressões naquele conjunto de equações será usada:

$$C_m = 0{,}0107\sqrt{-m_G^2 + 56m_G + 5\,145} = 0{,}0107\sqrt{-75^2 + 56(75) + 5145} = 0{,}653 \quad (f)$$

9 Encontre a velocidade tangencial V_t pela Equação 13.27.

$$V_t = \frac{\pi n d}{12\cos\lambda} = \frac{\pi(1725)(2{,}02)}{12\cos(3{,}392°)} = 913{,}9 \text{ fpm} \qquad (g)$$

10 Use essa velocidade para encontrar o fator de velocidade C_v pelas Equações 13.26. Para este valor de V_t, a segunda dessas equações é apropriada.

$$C_v = 13{,}31(913{,}9)^{-0{,}571} = 0{,}271 \qquad (h)$$

11 Encontre a carga tangencial W_t pela Equação 13.23.

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0{,}8} F = 1000(0{,}653)(0{,}271)(8{,}98)^{0{,}8}(1{,}354) = 1388 \text{ lb} \qquad (i)$$

12 Encontre o coeficiente de atrito pela terceira expressão na Equação 13.29.

$$\mu = 0{,}103e^{\left(-0{,}110V_t^{0{,}450}\right)} + 0{,}012 = 0{,}103e^{\left(-0{,}110[913{,}9]^{0{,}450}\right)} + 0{,}012 = 0{,}022 \qquad (j)$$

13 Encontre a força de atrito W_f pela Equação 13.28.

$$W_f = \frac{\mu W_{tg}}{\cos\lambda\cos\phi} = \frac{0{,}022(1\,388)}{\cos 3{,}392°\ \cos 20°} = 32 \text{ lb} \qquad (k)$$

14 Encontre a potência de saída de classificação pela Equação 13.21.

$$\Phi_o = \frac{nW_{tg}d_g}{126000\,m_G} = \frac{1725(1388)(8{,}98)}{126000(75)} = 2{,}274 \text{ hp} \tag{l}$$

15 Encontre a potência perdida no engrenamento pela Equação 13.22.

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{33\,000} = \frac{913{,}9(32)}{33\,000} = 0{,}888 \text{ hp} \tag{m}$$

16 Encontre a potência de entrada de classificação pela Equação 13.20.

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_l = 2{,}274 + 0{,}888 = 3{,}162 \text{ hp} \tag{n}$$

17 A eficiência do engrenamento é

$$\eta = \frac{\Phi_o}{\Phi} = \frac{2{,}274}{3{,}162} = 71{,}9\% \tag{o}$$

18 Encontre o torque de saída classificado pela Equação 13.31.

$$T_g = W_{tg}\frac{d_g}{2} = 1388\frac{8{,}98}{2} = 6230 \text{ lb-in} \tag{p}$$

19 Se a classificação de potência parece ser adequada para essas aplicações, a classificação de torque de saída fica longe do torque máximo projetado de 7800 lb-in modelado no Estudo de Caso 9A; assim, alguma reavaliação é necessária.

20 A hipótese original da distância entre centros foi aumentada para 6,531 in e o modelo, recalculado. A distância entre centros também foi ajustada ligeiramente para dar um passo diametral inteiro de 7 in^{-1}. Isso aumentou o diâmetro da engrenagem sem-fim para 10,714 in e a classificação de torque de saída para 9131 lb-in. A nova potência de saída avaliada é 4,52 hp e a perda de potência é 1,18 hp para um eficiência de 73,8 %. A potência de saída de avaliação é 3,33 hp. O novo ângulo de avanço é 3,48°, portanto o engrenamento de sem-fim é ainda de travação automática.

21 Embora este novo projeto pareça ser realizável com base nos cálculos de carregamento feitos no estudo de caso prévio, uma das hipóteses originais relativas ao tamanho do motor elétrico necessitará ser revista. A potência média líquida foi estimada como 0,62 hp. Esperava-se que um motor de 1 a 1,25 hp fosse adequado, o que permitiria uma operação a 110 V. Isso agora parece ser impossível devido à perda de 1,18 hp no engrenamento de sem-fim, que deixaria muito pouca potência disponível para levantar a carga, mesmo se um motor de 1,25 hp fosse usado. O efeito de volante do tambor do guincho rodando pode suprir a explosão de energia para passar os picos de oscilação de carga mostrados na Figura 9-6, mas não pode prover um aumento sustentável de potência acima da média disponível. Assim, um motor de 220 V de cerca de 2 a 2,25 hp parece ser necessário para este projeto. O intervalo de potência de entrada do engrenamento deveria acomodar facilmente aquele nível de potência sem nenhum problema de sobreaquecimento.

22 Os arquivos CASE9B-1 e CASE9B-2, respectivamente, contêm a primeira solução (incorreta) e a segunda (correta) para este problema.

13.5 RESUMO

Existem várias formas especializadas de engrenagem. Este capítulo apresentou uma breve introdução à aplicação e ao projeto de três tipos: helicoidal, cônica e sem-fim.

Engrenagens helicoidais são formadas pelo rolamento de cilindros e podem fazer essencialmente a mesma função que as engrenagens retas, conectando eixos paralelos para redução/aumento de velocidade e multiplicação/divisão de

torque. Os dentes das engrenagens helicoidais têm ângulo em relação ao eixo em um ângulo de hélice, que pode ser de uns poucos graus ou chegar a cerca de 45°. Suas hélices são para a esquerda ou para a direita. Engrenagens com hélices de direções opostas com o mesmo ângulo de hélice se engrenam com seus eixos paralelos. Engrenagens com hélices de direções iguais se engrenam com eixos enviesados (que não se interceptam) ou cruzados e tem um ponto teórico de contato entre os dentes. Isso limita sua capacidade de carga comparado com as engrenagens helicoidais de eixos paralelos, que se acoplam com um movimento de rolamento e escorregamento similar ao das engrenagens retas, mas engrenam seus dentes em uma ação de roçar suave ao longo da largura da face.

As vantagens principais do engrenamento helicoidal sobre o reto são o funcionamento mais silencioso e a maior resistência para o mesmo tamanho de engrenagem. A desvantagem é o custo maior que o das engrenagens retas e a introdução de uma componente axial de força que requer mancais de escora no eixo. Engrenagens helicoidais de eixos paralelos são usadas extensivamente em transmissão de veículos, tanto de mudança automática quanto manual, principalmente por causa do funcionamento silencioso.

O projeto de engrenagens helicoidais é muito similar àquele de engrenagens retas. As mesmas equações de tensão de superfície e flexão se aplicam, mas com valores diferentes para os fatores de geometria I e J. Alguns fatores adicionais também são introduzidos às equações. Esses fatores são obtidos nas normas AGMA, que contêm tabelas de valores para engrenagens helicoidais de vários ângulos de pressão, ângulos de hélice e razão de adendos. Algumas dessas tabelas são reproduzidas neste livro. Consulte as normas da AGMA para informações mais completas. Os materiais usados são os mesmos que para engrenagens retas. Uma engrenagem helicoidal terá tensões menores e coeficientes de segurança mais elevados que uma engrenagem reta de mesmo passo e diâmetro, porque o dente curvado é mais grosso na direção da carga aplicada.

Engrenagens cônicas são formadas de cones de rolamento e assim conectam eixos que se interceptam. Elas são usadas principalmente para levar movimento e torque "ao redor de um canto". Seus dentes se afunilam com a mudança do diâmetro do cone e elas são especificadas pelo diâmetro e tamanho do dente na sua extremidade maior. Os dentes podem ser retos e paralelos ao eixo (de maneira análoga às engrenagens retas), caso em que elas são chamadas de **engrenagens cônicas retas**, ou podem ser curvados em relação ao eixo em um ângulo de espiral (de maneira análoga ao ângulo de hélice de engrenagens helicoidais), caso em que elas são chamadas de **engrenagens cônicas espirais**, ou simplesmente engrenagens espirais. As engrenagens cônicas espirais têm vantagens sobre as engrenagens cônicas retas similares àquelas das helicoidais sobre as engrenagens retas. Como seus dentes curvos se engrenam gradualmente, as espirais trabalham mais suave e silenciosamente que as engrenagens cônicas retas e têm menos vibrações. Devido ao fato de que o dente da engrenagem espiral é mais grosso na direção do carregamento, ela é mais forte que uma engrenagem cônica reta de mesmo passo e diâmetro. Uma engrenagem tipo espiral com dentes curvados, mas com zero ângulo de espiral, chamada de engrenagem ZEROL®, é também feita para obter o engrenamento suave de uma engrenagem espiral sem a carga adicional ao dente introduzida pelo ângulo de espiral.

As engrenagens cônicas são raramente feitas com adendos iguais no pinhão e na engrenagem. Um pinhão de adendo longo é usado, com a porcentagem de aumento variando de zero na razão 1:1 até mais de 50% em razões de engrenamento elevadas. Isso faz o dente do pinhão mais forte e o dente da engrenagem mais fraco para balancear o projeto, como discutido no Capítulo 12 a respeito de engrenagens retas.

O projeto de engrenagens cônicas é muito similar àquele de engrenagens retas ou helicoidais. As mesmas equações de tensões de flexão e de superfície se aplicam, mas elas usam valores diferentes para os fatores de geometria *I* e *J*. Alguns fatores adicionais são também introduzidos às equações. Esses fatores são obtidos das normas AGMA, que contêm gráficos mostrando *I* e *J* para engrenagens cônicas e espirais de vários ângulos de pressão, ângulos de espiral e razões de adendo. Alguns desses gráficos são reproduzidos neste livro. Consulte as normas AGMA para informações mais completas. Os materiais usados para engrenagens cônicas são os mesmos que para engrenagens retas ou helicoidais.

Sem-fins e engrenagens sem-fim conectam eixos não paralelos e sem interseção. O sem-fim é similar a uma rosca de parafuso, tem um ou alguns dentes enrolados ao redor de si no que é, na verdade, um ângulo de hélice muito grande. O sem-fim se acopla com uma engrenagem especial chamada de engrenagem sem-fim, coroa ou roda sem-fim que é análoga a uma porca sendo avançada pela rosca de um sem-fim. Os eixos dessas engrenagens estão geralmente a 90° um do outro. O par de sem-fins pode produzir razões de engrenamento muito grandes (até cerca de 360:1) em um pacote compacto por causa do pequeno número de dentes no sem-fim. Se o ângulo de avanço do sem-fim for pequeno o suficiente (< de cerca de 6°), o engrenamento de sem-fim pode ser de travação automática, significando que ele não pode ser movido para trás pela engrenagem sem-fim, isto é, ele suportará a carga. A principal desvantagem é sua eficiência relativamente baixa, comparada a outros engrenamentos. O movimento relativo nos dentes é deslizamento em vez de rolamento, o que gera notável aquecimento. A transferência de calor da caixa de engrenagens, em vez das tensões nos dentes, pode limitar a vida de um acoplamento de sem-fim. A temperatura do óleo no engrenamento deve ser mantida baixa, ao redor de 200°F, para uma vida longa do dente.

O projeto de engrenamentos de sem-fim é diferente daquele de outros engrenamentos. A AGMA define uma equação de **classificação de potência de entrada** para acoplamentos de sem-fim. Essa equação, em combinação com um número de fatores empíricos definidos pela AGMA, permite que o acoplamento de sem-fim seja dimensionado para uma combinação dada de potência ou torque-velocidade. Consulte as normas da AGMA para informações mais completas. Os materiais usados para engrenamento de sem-fim são muito limitados. O sem-fim é normalmente um aço, endurecido a 58 HRC, e a coroa é uma liga de bronze. A engrenagem mais branda trabalha contra o sem-fim mais duro nas primeiras poucas horas de operação e se molda ao seu contorno particular. Se posta em funcionamento adequadamente e sem excesso de carga ou de aquecimento, pode-se esperar que um par de engrenagens sem-fim dimensionado (classificado) corretamente tenha um ciclo de vida muito longo antes de sucumbir por crateração de fadiga da superfície. A falha por flexão dos dentes no engrenamento é rara. A capacidade de carga de um engrenamento de sem-fim pode ser aumentada para uma configuração de envelope simples ou duplo. Um conjunto de envelope simples envolve a coroa parcialmente ao redor do sem-fim para ganhar área de contato de superfície. Um conjunto de envelope duplo faz o mesmo descrito acima e também envolve o sem-fim parcialmente ao redor da coroa em uma forma de ampulheta para obter uma área de contato ainda maior.

Equações importantes usadas neste capítulo

Geometria da engrenagem helicoidal (Seção 13.1):

$$p_t = p_n / \cos \psi \qquad (13.1a)$$

$$p_x = p_n / \text{sen}\ \psi \qquad (13.1b)$$

$$p_d = \frac{N}{d} = \frac{\pi}{p_c} = \frac{\pi}{p_t} \qquad (13.1c)$$

Forças da engrenagem helicoidal (Seção 13.1):

$$W_r = W_t \operatorname{tg}\phi \qquad (13.3a)$$

$$W_a = W_t \operatorname{tg}\psi \qquad (13.3b)$$

$$W = \frac{W_t}{\cos\psi\cos\phi_n} \qquad (13.3c)$$

Tensões nas engrenagens helicoidais (Seção 13.1):

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \qquad (12.15us)$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \qquad (12.15si)$$

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F\,I\,d}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \qquad (12.21)$$

Fator de geometria de superfície para engrenagens helicoidais (Seção 13.1):

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_p m_N} \qquad (13.6a)$$

Razão de engrenamento para um par de engrenagens cônicas (Seção 13.2):

$$m_G = \frac{\omega_p}{\omega_g} = \frac{N_g}{N_p} = \frac{d_g}{d_p} = \operatorname{tg}\alpha_g = \cot\alpha_p \qquad (13.7b)$$

Forças em engrenagens cônicas retas (Seção 13.2):

$$\begin{aligned} W_a &= W_t \operatorname{tg}\phi \operatorname{sen}\alpha \\ W_r &= W_t \operatorname{tg}\phi \cos\alpha \\ W &= W_t / \cos\phi \end{aligned} \qquad (13.8a)$$

Tensões em engrenagens cônicas (Seção 13.2):

$$\sigma_b = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \quad \text{psi} \qquad (13.9us)$$

$$\sigma_b = \frac{2000 T_p}{d}\frac{1}{FmJ}\frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \quad \text{MPa} \qquad (13.9si)$$

$$\sigma_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2T_D}{F\,I\,d^2}\left(\frac{T_p}{T_D}\right)^z \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f C_{xc}} \qquad (13.10)$$

Torque de projeto para engrenagens cônicas (Seção 13.2):

$$T_D = \frac{F}{2}\frac{I C_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc} d}{C_p C_b}\frac{0{,}774 C_H}{C_T C_R}\right)^2 \quad \text{lb-in} \qquad (13.11us)$$

$$T_D = \frac{F}{2000}\frac{I C_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc} d}{C_p C_b}\frac{0{,}774 C_H}{C_T C_R}\right)^2 \quad \text{N}\cdot\text{m} \qquad (13.11si)$$

Avanço e ângulo de avanço de um sem-fim (Seção 13.3):

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{L}{\pi d} \tag{13.12}$$

Forças em engrenamento de sem-fim (Seção 13.3):

$$W_{tg} = W_{aw} = \frac{2T_g}{d_g} \tag{13.14a}$$

$$W_{ag} = W_{tw} = \frac{2T_w}{d} \tag{13.14b}$$

$$W_r = \frac{W_{tg} \operatorname{tg} \phi}{\cos \lambda} \tag{13.14c}$$

Diâmetro de referência recomendado para o sem-fim (Seção 13.3):

$$d \cong \frac{C^{0,875}}{2,2} \tag{13.16b}$$

Diâmetro de referência da engrenagem sem-fim (Seção 13.3):

$$d_g = 2C - d \tag{13.17}$$

Largura máxima de face recomendada para engrenagem sem-fim (Seção 13.3):

$$F_{max} \leq 0,67d \tag{13.19}$$

Potência de classificação de um conjunto sem-fim (Seção 13.3):

$$\Phi_o = \frac{n W_{tg} d_g}{126000\, m_G} \text{ hp} \tag{13.21us}$$

$$\Phi_o = \frac{n W_{tg} d_g}{1,91E7\, m_G} \text{ kW} \tag{13.21si}$$

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{33000} \text{ hp} \tag{13.22us}$$

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{1000} \text{ kW} \tag{13.22si}$$

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_l \tag{13.20}$$

Força tangencial em uma engrenagem sem-fim (Seção 13.3):

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0,8} F \tag{13.23us}$$

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0,8} F / 75,948 \tag{13.23si}$$

Força de atrito em uma engrenagem sem-fim (Seção 13.3):

$$W_f = \frac{\mu W_{tg}}{\cos \lambda \cos \phi_n} \tag{13.28}$$

Torque de saída de uma engrenagem sem-fim (Seção 13.3):

$$T_g = W_{tg} \frac{d_g}{2} \tag{13.31}$$

Eficiência de um conjunto de sem-fim (Seção 13.3):

$$\eta = \frac{\Phi_o}{\Phi} \tag{13.30}$$

13.6 REFERÊNCIAS

1 **AGMA**, *Gear Nomenclature, Definitions of Terms with Symbols*. ANSI/AGMA 1012-F90. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.

2 **AGMA**, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. ANSI/AGMA Standard 2001-B88. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1988.

3 **AGMA**, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical, and Herringbone Gear Teeth*. ANSI/AGMA Standard 908-B89. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1989.

4 **AGMA**, *Design Manual for Bevel Gears*. ANSI/AGMA Standard 2005-B88. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1988.

5 **AGMA**, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*. ANSI/AGMA Standard 2003-A86. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1986.

6 **AGMA**, *Design Manual for Cylindrical Wormgearing*. ANSI/AGMA Standard 6022-C93. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1993.

7 **AGMA**, *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed Reducers and Gearmotors*. ANSI/AGMA Standard 6034-B92. American Gear Manufacturers Association, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1992.

8 **D. W. Dudley**, *Handbook of Practical Gear Design*. McGraw-Hill: New York, p. 3.66, 1984.

9 ***Ibid.***, p. 3.67.

13.7 PROBLEMAS

*13-1 Uma engrenagem helicoidal de ângulo de pressão de 20°, ângulo de hélice de 30° e com 27 dentes tem um passo diametral $p_d = 5$. Encontre o diâmetro de referência, adendo, dedendo, diâmetro externo, passo normal, transversal e axial.

13-2 Uma engrenagem helicoidal de ângulo de pressão de 25°, ângulo de hélice de 20° e com 43 dentes tem um passo diametral $p_d = 8$. Encontre o diâmetro de referência, adendo, dedendo, diâmetro externo, passo normal, transversal e axial.

*13-3 Uma engrenagem helicoidal de 57 dentes e ângulo de hélice de 10° está engrenada com um pinhão de 23 dentes. O $p_d = 6$ e $\phi = 25°$. Encontre as razões de contato axial e transversal.

13-4 Uma engrenagem helicoidal de 78 dentes e ângulo de hélice de 30° está engrenada com um pinhão de 27 dentes. O $p_d = 6$ e $\phi = 20°$. Encontre as razões de contato axial e transversal.

*13-5 Um engrenamento de engrenagens cônicas retas de 90° é necessário para dar uma redução de 9:1. Determine os ângulos do cone de referência, diâmetros de referência, e forças nas engrenagens se o pinhão de ângulo de pressão de 25° tiver 14 dentes de $p_d = 6$ e a potência transmitida for 746 W a uma rotação de 1000 rpm do pinhão.

13-6 Um engrenamento de engrenagens cônicas retas de 90° é necessário para dar uma redução de 4,5:1. Determine os ângulos do cone de referência, diâmetros de referência e forças nas engrenagens se o pinhão de ângulo de pressão de 20° tiver 18 dentes de $p_d = 5$ e a potência transmitida for 7460 W a uma rotação de 800 rpm do pinhão.

* As respostas para esses problemas são mostradas no Apêndice D.

Tabela P13-0†
Matriz de tópicos/problemas

13.1 Engrenagens helicoidais

Geometria
13-1, 13-2, 13-3, 13-4, 13-29, 13-30, 13-31, 13-32

Cargas
13-14, 13-15, 13-33, 13-34

Projeto
13-8, *13-16*, *13-17*, *13-18*, *13-19*, *13-35*, *13-36*

13.2 Engrenagens cônicas

Geometria e cargas
13-5, 13-6, 13-7, 13-39, 13-40, 13-41

Projeto
13-20, *13-21*, *13-22*, *13-23*, *13-24*, *13-25*, *13-49*, *13-50*, *13-51*

13.3 Conjuntos sem-fim

Geometria
13-9, 13-10, 13-11, 13-42, 13-43, 13-44, 13-47, 13-48

Cargas
13-12, 13-13, 13-26, 13-27, 13-28, 13-45, 13-46

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, tendo o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

*13-7 Um engrenamento de engrenagens cônicas espirais de 90° é necessário para dar uma redução de 5:1. Determine os ângulos do cone de referência, diâmetros de referência, e forças nas engrenagens se o pinhão de ângulo de pressão de 20° tiver 16 dentes de $p_d = 7$ e a potência transmitida for 3 hp a uma rotação de 600 rpm do pinhão.

†***13-8*** Uma máquina de papel processa rolos de papel tendo uma densidade de 984 kg/m^3. O rolo de papel é de 1,50 m de diâmetro externo × 0,22 m de diâmetro interno × 3,23 m de comprimento e está em um eixo de aço, furado e biapoiado com $S_{ut} = 400$ MPa. Projete um engrenamento helicoidal de redução 2,5:1 para mover o eixo deste rolo de forma a obter um coeficiente de segurança dinâmico mínimo de 2 para uma vida de 10 anos se o diâmetro externo do eixo for 0,22m e o rolo girar a 50 rpm com 1,2 hp absorvidos.

*13-9 Um engrenamento sem-fim de 2 entradas tem $d = 50$ mm, $p_x = 10$ mm e $m_G = 22$:1. Encontre o avanço, ângulo de avanço, diâmetro da engrenagem sem-fim e distância entre centros. Ele terá travamento automático? A velocidade de entrada é 2200 rpm.

13-10 Um engrenamento sem-fim de 3 entradas tem $d = 1{,}75$ in, $p_x = 0{,}2$ in e $m_G = 17$:1. Encontre o avanço, ângulo de avanço, diâmetro da engrenagem sem-fim e distância entre centros. Ele terá travamento automático? A velocidade de entrada é 1400 rpm.

*13-11 Um engrenamento sem-fim de 1 entrada tem $d = 40$ mm, $p_x = 5$ mm e $m_G = 82$:1. Encontre o avanço, ângulo de avanço, diâmetro da engrenagem sem-fim e distância entre centros. Ele terá travamento automático? A velocidade de entrada é 4500 rpm.

*13-12 Determine a potência transmitida, torques e forças no engrenamento para o conjunto de sem-fins no Problema 13-9 se ele girar o sem-fim a 1000 rpm.

13-13 Determine a potência transmitida, torques e forças no engrenamento para o conjunto de sem-fins no Problema 13-10 se ele girar o sem-fim a 500 rpm.

*13-14 Se o engrenamento no Problema 13-3 transmite 125 hp a 1000 rpm do pinhão, encontre o torque em cada eixo.

13-15 Se o engrenamento no Problema 13-4 transmite 33 kW a 1600 rpm do pinhão, encontre o torque em cada eixo.

**13-16* Dimensione as engrenagens helicoidais no Problema 13-14 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, um fator de largura de face de 10, $Q_v = 9$, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido classe 40.

13-17 Dimensione as engrenagens helicoidais no Problema 13-15 para um coeficiente de segurança de flexão de 2,5 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão de 20°, dentes de profundidade completa, um fator de largura de face de 12, $Q_v = 11$, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

**13-18* Dimensione as engrenagens helicoidais no Problema 13-14 para um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,6 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão de 25°, dentes de profundidade completa, um fator de largura de face de 10, $Q_v = 9$, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido classe 40.

13-19 Dimensione as engrenagens helicoidais no Problema 13-15 para um coeficiente de segurança de superfície de 1,2 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão de 20°, dentes de profundidade completa, um fator de largura de face de 12, $Q_v = 11$, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

**13-20* Dimensione as engrenagens cônicas no Problema 13-5 para um coeficiente de segurança de flexão de 2, supondo uma vida de 5 anos, 1 turno de trabalho, torque contínuo, $Q_v = 9$, pinhão e engrenagem de aço AISI 4140.

13-21 Dimensione as engrenagens cônicas no Problema 13-6 para um coeficiente de segurança de flexão de 2,5, supondo uma vida de 15 anos, 3 turnos de trabalho, torque contínuo, $Q_v = 11$, pinhão e engrenagem de aço AISI 4340.

13-22 Dimensione as engrenagens cônicas no Problema 13-7 para um coeficiente de segurança de flexão de 2,2, supondo uma vida de 10 anos, 3 turnos de trabalho, torque contínuo, $Q_v = 8$, pinhão e engrenagem de aço AISI 4340.

**13-23* Dimensione as engrenagens cônicas no Problema 13-5 para um coeficiente de segurança mínimo de 1,4 para qualquer modo de falha do pinhão ou engrenagem, supondo uma vida de 5 anos, 1 turno de trabalho, torque contínuo, $Q_v = 9$, pinhão e engrenagem de aço AISI 4140.

13-24 Dimensione as engrenagens cônicas no Problema 13-6 para um fator de segurança de superfície de 1,3, supondo uma vida de 15 anos, 3 turnos de trabalho, torque contínuo, $Q_v = 11$, pinhão e engrenagem de aço AISI 4340.

13-25 Dimensione as engrenagens cônicas no Problema 13-7 para um coeficiente de segurança de superfície de 1,4, supondo uma vida de 10 anos, 3 turnos de trabalho, torque contínuo, $Q_v = 8$, pinhão e engrenagem de aço AISI 4340.

13-26 Encontre a potência de classificação (nominal) e o torque de saída de classificação do conjunto de sem-fim no Problema 13-9 com uma velocidade de entrada de 2200 rpm.

*13-27 Encontre a potência de classificação (nominal) e o torque de saída de classificação do conjunto de sem-fim no Problema 13-10 com uma velocidade de entrada de 1400 rpm.

13-28 Encontre a potência de classificação (nominal) e o torque de saída de classificação do conjunto de sem-fim no Problema 13-11 com uma velocidade de entrada de 4500 rpm.

13-29 Uma engrenagem helicoidal de 23 dentes é cortada com uma fresa de ângulo de pressão de 20 graus em um ângulo de hélice de 25°. A fresa tem um passo diametral padronizado de 5. Os dentes resultantes têm dimensões de engrenagem reta padronizadas no plano normal. Encontre o diâmetro de referência, adendo, dedendo, diâmetro externo, passos normal, transversal e axial e ângulo de pressão transversal.

13-30 Uma engrenagem helicoidal de 38 dentes é cortada com uma fresa de ângulo de pressão de 25 graus em um ângulo de hélice de 30°. A fresa tem um passo diametral padronizado de 4. Os dentes resultantes têm dimensões de engrenagem reta padronizadas no plano normal. Encontre o diâmetro de referência, adendo, dedendo, diâmetro externo, passos normal, transversal e axial e ângulo de pressão transversal.

13-31 Uma engrenagem helicoidal de 39 dentes e ângulo de hélice de 20 graus está acoplada a um pinhão de 18 dentes. O $p_d = 8$ e $\phi = 20°$. Encontre as razões de contato transversal e axial.

13-32 Uma engrenagem helicoidal de 79 dentes e ângulo de hélice de 30 graus está acoplada a um pinhão de 20 dentes. O $p_d = 6$ e $\phi = 20°$. Encontre as razões de contato transversal e axial.

13-33 Se o conjunto de engrenagens no Problema 13-31 transmite 135 HP no pinhão a 1200 rpm, encontre o torque em cada eixo.

13-34 Se o conjunto de engrenagens no Problema 13-32 transmite 30 kW no pinhão a 1200 rpm, encontre o torque em cada eixo.

13-35 Dimensione as engrenagens helicoidais no problema 13-33 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão 25°, dentes de profundidade completa, índice de qualidade de 9, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido da classe 40.

13-36 Dimensione as engrenagens helicoidais no problema 13-34 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2,5 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão 20°, dentes de profundidade completa, índice de qualidade de 11, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

13-37 Dimensione as engrenagens helicoidais no problema 13-33 para um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,6 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão 25°, dentes de profundidade completa, índice de quali-

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

dade de 9, um pinhão de aço AISI 4140 e uma engrenagem de ferro fundido da classe 40.

13-38 Dimensione as engrenagens helicoidais no problema 13-34 para um coeficiente de segurança de superfície de pelo menos 1,2 supondo um torque contínuo, um ângulo de pressão 20°, dentes de profundidade completa, índice de qualidade de 11, um pinhão de aço AISI 4340 e uma engrenagem de ferro nodular A-7-d.

13-39 Um conjunto de engrenagens cônicas retas de 90 graus é necessário para dar uma redução de 3:1. Determine os ângulos do cone de referência, diâmetros de referência, forças nas engrenagens se o pinhão de ângulo de pressão de 25° tiver 15 dentes de $p_d = 4$ e a potência transmitida for 8 hp no pinhão a 550 rpm.

13-40 Um conjunto de engrenagens cônicas retas de 90 graus é necessário para dar uma redução de 6:1. Determine os ângulos do cone de referência, diâmetros de referência, forças nas engrenagens se o pinhão de ângulo de pressão de 20° tiver 20 dentes de $p_d = 8$ e a potência transmitida for 3 kW no pinhão a 900 rpm.

13-41 Um conjunto de engrenagens cônicas espirais de 90 graus é necessário para dar uma redução de 8:1. Determine os ângulos do cone de referência, diâmetros de referência, forças nas engrenagens se o pinhão de ângulo de pressão de 20° tiver 21 dentes de $p_d = 10$ e a potência transmitida for 2,5 kW no pinhão a 1100 rpm.

13-42 Um conjunto de sem-fim de 1 entrada tem $d = 2{,}00$ in, $p_x = 0{,}25$ in e $m_G = 40$. Encontre o avanço, ângulo de avanço, diâmetro da engrenagem sem-fim e distância entre centros. Ele será de travamento automático? A velocidade de entrada é 1100 rpm.

13-43 Um conjunto de sem-fim de 2 entradas tem $d = 2{,}50$ in, $p_x = 0{,}30$ in e $m_G = 50$. Encontre o avanço, ângulo de avanço, diâmetro da engrenagem sem-fim e distância entre centros. Ele será de travamento automático? A velocidade de entrada é 1800 rpm.

13-44 Um conjunto de sem-fim de 3 entradas tem $d = 60$ mm, $p_x = 12$ mm e $m_G = 60$. Encontre o avanço, ângulo de avanço, diâmetro da engrenagem sem-fim e distância entre centros. Ele será de travamento automático? A velocidade de entrada é 2500 rpm.

13-45 Determine a potência transmitida, torques e forças no engrenamento para o conjunto de sem-fim do Problema 13-42 se ele girar o sem-fim a 800 rpm.

13-46 Determine a potência transmitida, torques e forças no engrenamento para o conjunto de sem-fim do Problema 13-43 se ele girar o sem-fim a 1200 rpm.

13-47 Um conjunto de sem-fim de 2 entradas tem $L = 2{,}00$ in, $C = 9{,}00$ in, $m_G = 20$ e o ângulo entre os eixos é 90°. Encontre os diâmetros de referência do sem-fim e da engrenagem sem-fim, o ângulo de avanço e o passo axial.

13-48 Um conjunto de sem-fim de 5 entradas tem $l = 20°$, $C = 2{,}75$ in, $N_g = 33$ e o ângulo entre os eixos é 90°. Encontre os diâmetros de referência do sem-fim e da engrenagem sem-fim, o ângulo de avanço e o passo axial.

**13-49* Dimensione as engrenagens cônicas no problema 13-40 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2,5, supondo torque contínuo, vida de cinco anos e dois turnos de trabalho, índice de qualidade 8 e pinhão e engrenagem de aço AISI 4140.

13-50 Dimensione as engrenagens cônicas no problema 13-40 para um coeficiente de segurança mínimo para qualquer falha do pinhão ou engrenagem, supondo torque contínuo, vida de cinco anos e dois turnos de trabalho, índice de qualidade 8 e pinhão e engrenagem de aço AISI 4140.

13-51 Dimensione as engrenagens cônicas no problema 13-41 para um coeficiente de segurança de flexão de pelo menos 2,0, supondo um torque contínuo, vida de sete anos e três turnos de trabalho, índice de qualidade 8 e pinhão e engrenagem de aço AISI 4340.

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

14

PROJETO DE MOLAS

Não saber é ruim; não querer saber é pior.

PROVÉRBIO NIGERIANO

14.0 INTRODUÇÃO

Praticamente qualquer parte feita de um material elástico possui alguma "mola" dentro de si. O termo mola no contexto deste capítulo se refere a partes construídas em configurações particulares para prover um intervalo de força dentro de um espaço significativo de deflexão e/ou para armazenar energia potencial. Molas são projetadas para prover uma força de *tração, compressão* ou um *torque,* ou principalmente para guardar energia, e podem ser dividas nessas quatro categorias gerais. Dentro de cada categoria, muitas configurações de molas são possíveis. Molas podem ser feitas de fio redondo ou retangular dobrado em alguma forma adequada como de espira, ou de uma barra plana carregada como uma viga. A foto de abertura deste capítulo mostra algumas configurações de molas. Muitas configurações padronizadas para molas estão disponíveis como itens de estoque em catálogos de fabricantes de molas. É geralmente mais econômico para o projetista utilizar uma mola de catálogo, se possível. Algumas vezes, contudo, a tarefa requer uma mola projetada segundo as necessidades do cliente. Essas molas podem desenvolver funções secundárias, como localização ou montagem de componentes. Em todos casos, o projetista deve entender e utilizar apropriadamente a teoria de molas a fim de que possa especificar ou projetar a peça. A Tabela 14-0 define as variáveis utilizadas neste capítulo e faz referência à seção ou equação(ões) nas quais estas são utilizadas.

14.1 CONSTANTE DE MOLA

Independentemente da configuração da mola, esta possui uma **constante de mola** *k,* definida como a inclinação da sua curva força-deflexão. Se a inclinação for constante, a mola é linear e *k* pode ser definida como:

$$k = \frac{F}{y} \tag{14.1}$$

A fotografia na página capitular é cortesia de Asssociated Spring, Barnes Group, Inc.

Tabela 14-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área	in^2	m^2	Eq. 14.8*a*
C	índice de mola	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.5
d	diâmetro de fio	in	m	várias
D	diâmetro médio de espira	in	m	várias
D_i	diâmetro interno	in	m	várias
D_o	diâmetro externo	in	m	várias
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	várias
F	força ou carga	lb	N	várias
F_a	carga alternante	lb	N	Eq. 14.15
F_i	tração inicial – mola de extensão	lb	N	Eq. 14.20
F_m	carga média	lb	N	Eq. 14.15
F_{max}	máxima carga variada	lb	N	Eq. 14.15
F_{min}	mínima carga variada	lb	N	Eq. 14.15
f_n	frequência natural	Hz	Hz	Eq. 14.11
g	aceleração gravitacional	in/s^2	m/s^2	várias
G	módulo de cisalhamento, módulo de rigidez	psi	Pa	várias
h	altura de cone	in	m	Eq. 14.35
k	razão ou constante de mola	lb/in	N/m	Eq. 14.1
K_b	fator de Wahl – flexão	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.23*b*
K_c	fator de curvatura	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.10
K_s	fator de cisalhamento direto	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.8*b*
K_{rw}	fator de cisalhamento para fio retangular	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.11*a*
K_w	fator de Wahl – torção	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.9*b*
L_b	comprimento do corpo – mola de extensão	in	m	Eq. 14.19
L_f	comprimento livre – mola de compressão	in	m	várias
L_{max}	comprimento de espira – mola de torção	in	m	Ex. 14.3
L_s	comprimento fechado – mola de compressão	in	m	Ex. 14.3
M	momento	lb-in	N-m	Eq. 14.27
N	número de espiras	nenhuma	nenhuma	várias
N_a	número de espiras ativas	nenhuma	nenhuma	várias
N_{fs}	coeficiente de segurança à fadiga – torção	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.16*a*
N_{fb}	coeficiente de segurança à fadiga – flexão	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.34*b*
N_t	número total de espiras	nenhuma	nenhuma	várias
N_s	coeficiente de segurança – escoamento estático	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.14
r	raio	in	m	várias
R	razão de tensão	nenhuma	nenhuma	várias
R_d	razão de diâmetro	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.35*b*
R_F	razão de força	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.15*b*
s	logaritimo natural para índide de mola C	nenhuma	nenhuma	Eq. 14-11

O autor deseja agradecer ao **Associated Spring, Barnes Group Inc.,** 10 Main St., Bristol, Conn., pela permissão para utilizar material contido em seu *Design Handbook: Engineering Guide to Spring Design*, edição de 1987.

Tabela 14-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
S_f, S_e	resistência de fadiga à flexão, resistência de endurança – $R = -1$	psi	Pa	Eq. 14.34
S_{fs}, S_{es}	resistência de fadiga torcional, resistência de endurança – $R = -1$	psi	Pa	Eq. 14.17*b*
S_{fw}, S_{ew}	resistências de fadiga torcional do fio – $R = 0$	psi	Pa	Eq 14.12
S_{fwb}, S_{ewb}	resistências à fadiga à flexão do fio – R = 0	psi	Pa	Eq 14.33
S_{ys}, S_y	resistências ao escoamento de cisalhamento, tração	psi	Pa	Tabelas 14-6, -13
S_{ms}	resistência média à torção para 10^3 ciclos	psi	Pa	Eq. 14.13
S_{us}	limite de resistência ao cisalhamento	psi	Pa	Eq. 14.4
S_{ut}	limite de resistência à tração	psi	Pa	Eq. 14.3
t	espessura	in	m	Eq. 14.35
T	torque	lb-in	N-m	Eq. 14.8*a*
W	peso	lb	N	Eq. 14.11*b*
y	deflexão	in	m	várias
ν	coeficiente de Poisson	nenhuma	nenhuma	Eq. 14.35
θ	deflexão angular – torção	rad	rad	Eq. 14.27
γ	densidade em peso	lb/in^3	N/m^3	Eq. 14.11
σ	tensão normal (flexão)	psi	Pa	Eq. 14.23*a*
τ	tensão de cisalhamento	psi	Pa	várias
ω_n	frequência natural	rad/s	rad/s	Eq. 14.11*a*

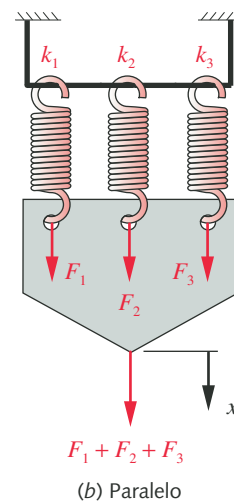
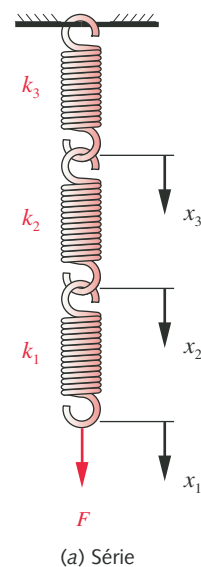
onde F é a força aplicada e y a deflexão. Uma vez que a função deflexão pode ser sempre determinada para cada geometria conhecida e carregamento, e porque a função de deflexão expressa uma relação entre força aplicada e deflexão, ela pode facilmente ser rearranjada algebricamente para expressar k como escrito na Equação 14.1.

A constante de mola pode ser um valor constante (mola linear) ou pode variar com a deflexão (mola não linear). Ambas têm suas aplicações, mas frequentemente queremos uma mola linear para controlar o carregamento. Muitas configurações de mola possuem constantes de mola constantes e, para algumas, essa constante pode ser nula (força constante).

Quando várias molas são combinadas, a constante de mola resultante depende do fato de a combinação ser em série ou em paralelo. Combinações em série caracterizam-se por ter a mesma força presente em todas as molas com cada uma contribuindo um pouco com a deflexão total, como mostrado na Figura 14-1*a*. As molas em paralelo têm todas a mesma deflexão e a força total é dividida individualmente entre as molas, como mostrado na Figura 14-1*b*. Para molas em paralelo, constantes de mola individuais são adicionadas diretamente:

$$k_{total} = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \qquad (14.2a)$$

Para molas em série, as constantes de mola adicionam-se em forma inversa:

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} \qquad (14.2b)$$

(*a*) Série

(*b*) Paralelo

FIGURA 14-1
Molas em série e em paralelo.

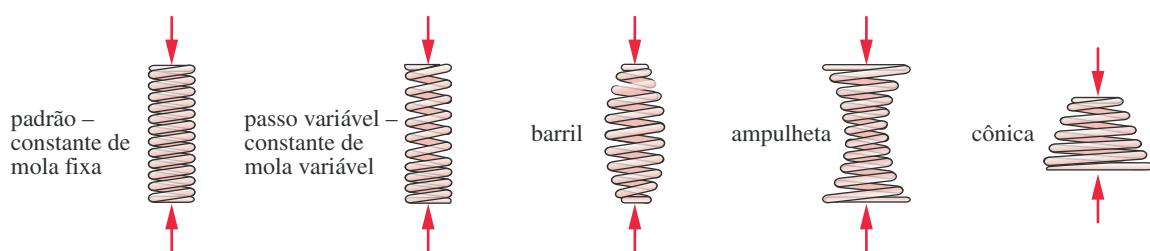
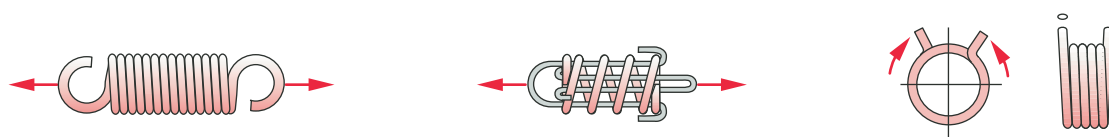
14.2 CONFIGURAÇÕES DE MOLA

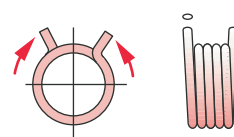
As molas podem ser classificadas de diferentes maneiras. A classificação segundo os quatro tipos de carga mencionada na Seção 14.0 é uma forma. Uma outra considera a configuração física da mola. Utilizaremos este último procedimento. A Figura 14-2 mostra uma seleção de configurações de mola. Exemplos adicionais podem ser encontrados na referência 1. Molas de fio aparecem na forma de molas **helicoidais de compressão**, **helicoidais de tração**, **helicoidais de torção** e formas encomendadas. Molas planas são geralmente do tipo **em balanço** ou **vigas biapoiadas**, e podem ter diferentes formas. Molas arruela, ou prato, são apresentadas em grande variedade de estilos: **curvadas**, **onduladas**, **dedo** e **Belleville**. Molas enroladas planas podem ser do tipo **motor** (ou de relógio), **voluta**, ou molas de **força constante**. Discutiremos todas essas configurações brevemente e dimensionaremos algumas delas em detalhe.

A Figura 14-2*a* mostra cinco formas de **molas helicoidais de compressão**. Todas fornecem uma força de compressão e são capazes de grandes deflexões. Costumam ser usadas em molas de retorno de válvulas em motores, molas de matrizes, etc. A forma-padrão tem um diâmetro de espira constante, passo constante (distância axial entre espiras) e constante de mola fixa. É a forma de mola mais comum, e existem diversos tamanhos disponíveis em prateleira de distribuidores. A maior parte delas é feita de fio de seção transversal circular, mas podem ser feitas de seção retangular também. O passo pode ser variado a fim de criar uma **mola de constante variável**. As espiras de baixa constante de mola se fecharão primeiro, aumentando a constante efetiva à medida que as espiras se tocam ou "aterrissam".

Molas cônicas podem ser construídas com uma razão de mola constante ou crescente. As suas constantes de mola são em geral não lineares, aumentando com a deflexão porque as espiras de menor diâmetro oferecem maior resistência à deflexão, enquanto as maiores defletem primeiro. Variando o passo das espiras, uma razão de mola quase constante pode ser obtida. A vantagem principal desse tipo de molas é a sua habilidade de fechar-se em uma altura tão pequena quanto o diâmetro de um fio quando as espiras se juntam. Molas em forma de barril e de ampulheta podem ser consideradas como duas molas cônicas justapostas, possuindo uma constante de mola não linear. As molas em forma de **barril** e de **ampulheta** são utilizadas principalmente para mudar a frequência natural de mola em relação àquela da forma padrão.

A Figura 14-2*b* mostra uma **mola helicoidal de extensão** com ganchos em cada extremidade. Ela provê força de tração e admite grandes deflexões. Essas molas são normalmente utilizadas em fechadores de porta e contrabalanços (contrapesos). O gancho possui tensões maiores que as espiras e normalmente falha primeiro. Qualquer coisa que for mantida suspensa pelo gancho cairá quando a mola de extensão falhar, tornando este projeto potencialmente inseguro. A Figura 14-2*c* mostra uma **mola de barra de estiramento**, que resolve esse problema por meio de uma mola helicoidal de compressão utilizada no modo extensional. A barra de estiramento comprime a mola, e se esta quebra, ainda assim suportará a carga de maneira segura. A Figura 14-2*d* mostra uma mola helicoidal de torção, que é enrolada de forma similar àquela da mola extensional, só que carregada por um esforço de torção (torque). Aplicações comuns deste tipo de mola incluem os contrabalanços de portas de garagem, ratoeiras, etc. Diferentes formas e detalhes de "pernas" são possíveis, neste caso.

A Figura 14-2*e* mostra cinco variedades comuns de **mola arruela**, ou **de prato**. Todas proveem uma força de compressão e são normalmente utilizadas para carregar algo axialmente, como por exemplo fazer a terminação de curso em um mancal. Normalmente possuem pouca deflexão e, exceto no caso da Belleville, podem fornecer apenas pequenas forças. A **mola voluta** mostrada na Figura

(*a*) Molas helicoidais de compressão. *Compressão* – intervalo amplo de carga e deflexão – fio redondo ou retangular. A mola padrão possui diâmetro, passo e constante de mola constantes. Molas tipo barril, em forma de ampulheta e molas de passo variável são utilizadas para minimizar sobresalto ressonante e vibração. Molas cônicas podem ser construídas com altura sólida mínima e com constante de mola constante ou crescente.

(*b*) Mola helicoidal de extensão. *Tração* – intervalo amplo de carga e deflexão – fio redondo ou retangular, constante de mola constante.

(*c*) Molas de barra de extensão. *Tração* – utilizam molas de compressão e barras de extensão para fornecer extensão com segurança sob carga, degrau positivo.

(*d*) Molas de torção. *Torção* – fio redondo ou retangular – constante de mola constante.

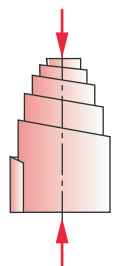
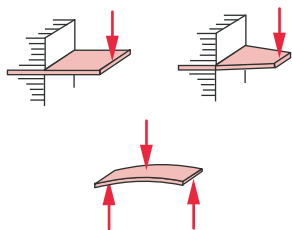
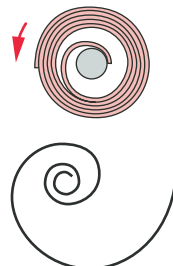
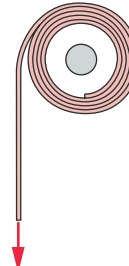
(*e*) Molas arruela ou de prato. *Tração* – molas Belleville resistem a altas cargas com pequenas deflexões – constantes de mola podem ser escolhidas (constantes, que aumentam, que diminuem). Molas onduladas resistem a baixas cargas, apresentam pequenas deflexões e utilizam espaço radial limitado. Molas de fendas apresentam deflexões maiores que as Belleville. Molas em dedo são utilizadas para carga axial em mancais. Molas curvadas são utilizadas para fim de percurso axial.

(*f*) Molas de voluta. *Compressão* – podem ter inerentemente um alto coeficiente de amortecimento por atrito.

(*g*) Molas de viga. *Compressão* ou *tração* – ampla gama de carga, porém com pequenas deflexões – retangulares, em forma de viga em balanço ou biapoiadas.

(*h*) Molas de potência ou motor. *Torção* – exercem torque por várias voltas. Mostrada dentro de retentor e removida dele.

(*i*) Mola de força constante. *Tração* – deflexão extensa com constante de mola baixa ou nula.

FIGURA 14-2

Configurações de molas. (Adaptado de: *Design Handbook: Engineering Guide to Spring Design*, 1987, Associated Spring, Barnes Group Inc., 10 Main St., Bristol, Conn., sob permissão.)

14-2*f* fornece uma força de compressão, porém possui uma quantidade significativa de atrito e histerese.

A Figura 14-2*g* mostra três variedades de **molas de viga**. Qualquer tipo de viga pode servir como mola. Vigas engastadas e biapoiadas são os tipos mais comuns. Uma mola de viga pode ter largura constante ou ter a forma trapezoidal

mostrada, por exemplo. A constante de mola e a distribuição de tensão podem ser controladas por meio de mudanças na largura ou altura ao longo do comprimento da mola. As cargas podem ser altas, mas as deflexões são limitadas.

A Figura 14-2*h* mostra um tipo de **mola de potência**, também chamada de **mola motor** ou **mola de relógio**. É utilizada primordialmente para guardar energia e fornecer torção. Relógios de corda e brinquedos utilizam este tipo de mola. A Figura 14-2*i* mostra uma mola de força constante utilizada para contrabalançar cargas e retorno de carros de impressão de máquinas de escrever, e também para fabricar motores de mola de torque constante. Elas fornecem grandes ciclos de deflexão a valores praticamente constantes de força de tração (constante de mola nula).

Discutiremos o dimensionamento de alguns desses tipos de molas. Para mais informações sobre os outros tipo, ver a referência 1.

14.3 MATERIAIS PARA MOLAS

Existe uma quantidade limitada de materiais e ligas adequados para uso como material de mola. O material ideal para construção de molas deve ter uma resistência à tração alta, um ponto de escoamento alto e um módulo de elasticidade baixo a fim de proporcionar máximo armazenamento de energia (área sob a porção elástica da curva tensão-deformação). Para molas carregadas dinamicamente, as propriedades relacionadas com a resistência à fadiga são de importância primordial. Altas resistências à tração e escoamento podem ser obtidas em aços de médio a alto conteúdo de carbono e aços-liga, sendo esses os materiais mais comuns utilizados em molas, apesar do valor alto do módulo de elasticidade. Umas poucas ligas de aço inoxidável são adequadas para utilização em molas, como cobre berílio e bronze fósforo, entre as ligas de cobre.

A maior parte das molas de uso não intenso é produzida com fio circular ou retangular feito de aço repuxado, trabalhado a frio, ou a partir de tiras planas finas laminadas a frio. Molas para uso intenso, como as que compõem a suspensão de veículos, são normalmente construídas de formas laminadas a quente ou forjadas. Os materiais utilizados em molas são geralmente endurecidos para obtenção da resistência adequada. Pequenas seções são encruadas em um processo de repuxamento a frio. Seções grandes sofrem geralmente tratamento térmico. Utilizam-se tratamentos térmicos de baixa temperatura (175 a 510°C) após a conformação para aliviar tensões residuais e estabilizar dimensões,[1] até mesmo em partes de pequenas seções. Têmpera à alta temperatura seguida de revenimento é utilizada para endurecer grandes molas que devem ser conformadas na condição recozida.

Arame de mola

O arame de seção circular é de longe o material mais utilizado em molas. Encontra-se disponível em um conjunto de ligas e grande intervalo de tamanhos. O arame retangular está disponível apenas em uma classe limitada de tamanhos. Alguns arames comuns de liga com as suas descrições são mostrados na Tabela 14-1, identificados por ambas as designações ASTM e SAE. Diâmetros comuns de arame disponíveis em estoque são mostrados na Tabela 14-2, juntamente com uma indicação dos intervalos de tamanhos disponíveis para as ligas comuns de aço, identificados pelo número ASTM. O projetista deve tentar utilizar esses tamanhos para obter melhor custo e disponibilidade, embora outros tamanhos não mostrados também sejam utilizados. A Tabela 14-3 mostra os custos relativos de um conjunto de materiais usados em molas de arame redondo feitas de aço.

Resistência à tração A relação entre o tamanho do arame e a resistência à tração mostrada na Figura 14-3 identifica uma situação bem peculiar. Como discutido na Seção 2.7 e na Tabela 2-8, quando são utilizados materiais em seções transver-

Tabela 14-1 Materiais comuns para fio de mola

Fonte: Referência 2

N° ASTM	Material	N° SAE	Descrição
A227	Fio repuxado a frio (encruado)	1066	Fio de mola mais barato e de uso mais geral. Adequado para carregamento, porém inadequado para carga de fadiga ou impacto. O intervalo de temperaturas vai de 0 a 120°C (250°F).
A228	Fio musical	1085	Material mais tenaz e de uso mais generalizado para molas de pequenas espiras. Resistência mais alta de tração e fadiga de todos os fios musicais. Intervalo de temperaturas de 0 a 120 °C (250°F).
A229	Fio revenido em óleo	1065	Aço de uso geral para molas. Menos custoso e disponível em tamanhos maiores que os fios musicais. Adequados para carga estática, mas inadequados para carga de fadiga ou impacto. Intervalo de temperatura de 0°C a 180°C (350°F).
A230	Fio revenido em óleo	1070	Qualidade de mola para válvula – adequado para carga de fadiga.
A232	Cromo vanádio	6150	Liga mais popular de aço para mola. Qualidade de mola para válvula – adequada para carga de fadiga. Também boa para cargas de choque e impacto. Para temperaturas até 220°C (425°F). Disponível na forma recozido e pré-revenido.
A313(302)	Aço inoxidável	30302	Adequado para aplicações de fadiga.
A401	Cromo de silício	9254	Qualidade de mola de válvula – adequado para carregamento de fadiga. Segunda resistência mais alta para fio musical e tem resistência mais elevada à temperatura máxima de até 220°C (425°F).
B134, 260	Latão de mola	CA-260	Baixa resistência – boa resistência à corrosão.
B159	Fósforo bronze	CA-510	Resistência mais alta que a do latão – melhor resistência à fadiga – boa resistência à corrosão. Não pode ser tratado termicamente ou dobrado ao longo dos grãos.
B197	Berílio cobre	CA-172	Resistência maior que a do latão – melhor resistência à fadiga – boa resistência à corrosão. Pode ser tratado termicamente ou dobrado ao longo dos grãos.
–	Inconel X-750	–	Resistência à corrosão.

Tabela 14-2

Diâmetros preferenciais de fio

US (in)		SI (mm)
0,004		0,10
0,005		0,12
0,006		0,16
0,008		0,20
0,010		0,25
0,012		0,30
0,014		0,35
0,016	A229	0,40
0,018		0,45
0,020		0,50
0,022		0,55
0,024	A227	0,60
0,026		0,65
0,028		0,70
0,030		0,80
0,035		0,90
0,038		1,00
0,042		1,10
0,045		
0,048		1,20
0,051		
0,055	A401	1,40
0,059		
0,063		1,60
0,067		
0,072		1,80
0,076		
0,081		2,00
0,085		2,20
0,092		
0,098		2,50
0,105		
0,112		2,80
0,125		3,00
0,135		3,50
0,148		
0,162		4,00
0,177		4,50
0,192		5,00
0,207		5,50
0,225		6,00
0,250		6,50
0,281	A228	7,00
0,312		8,00
0,343		9,00
0,362		
0,375		
0,406		10,0
0,437		11,0
0,469	A232	12,0
0,500		13,0
0,531		14,0
0,562		15,0
0,625		16,0

Tabela 14-3 Custos relativos de fios comuns de molas

Fonte: Referência 1

N° ASTM	Material	Custo relativo de fio de 2 mm de diâmetro (0,08 in)	
		Usina	Armazém
A227	Fio repuxado a frio	1,0	1,0
A229	Fio revenido em óleo	1,3	1,3
A228	Fio musical	2,6	1,4
A230	Fio revenido em óleo	3,1	1,9
A401	Cromo silício	4,0	3,9
A313 (302)	Aço inoxidável 302	7,6	4,7
B159	Fósforo bronze	8,0	6,7
A313 (631)	Aço inoxidável 17-7ph	11,0	8,7
B197	Berílio cobre	27,0	17,0
–	Inconel X-750	44,0	31,0

FIGURA 14-3

Resistências mínimas sob tração de fios de mola – identificados pelo número ASTM. Ver a Tabela 14-1. (Fonte: *Design Handbook*: *Engineering Guide to Spring Design*, 1987, Associated Spring, Barnes Group, Inc., Bristol Conn.)

sais muito pequenas, a resistência teórica de suas ligações atômicas, bastante alta, é aproximada. Assim, a resistência à tração de arames de aço bem finos é bastante elevada. O mesmo aço que pode quebrar a 200000 psi em um arame de 0,3 in (7,4 mm) de diâmetro de um espécime de teste pode apresentar aproximadamente o dobro de resistência depois de repuxado a frio para atingir um diâmetro de 0,010 in (0,25 mm). O processo de estiramento a frio é responsável pelo encruamento e aumento de resistência do material à custa de grande parte da sua ductilidade.

A Figura 14-3 é um gráfico semilogarítmico da resistência de arames *versus* diâmetro resultante de grande quantidade de testes da Associated Spring, Barnes Group Inc. Os dados de cinco dos materiais mostrados na figura podem ser descritos com grande grau de aproximação com uma função exponencial da forma

$$S_{ut} \cong Ad^b \tag{14.3}$$

Tabela 14-4 Coeficientes e expoentes para a Equação 14.3
Fonte: Referência 1

		Intervalo			Coeficiente A		
N° ASTM	Material	mm	in	Expoente b	MPa	psi	Fator de correlação
A227	Repuxado a frio	0,5-16	0,020-0,625	–0,182 2	1753,3	141040	0,998
A228	Fio musical	0,3-6	0,010-0,250	–0,162 5	2153,5	184649	0,9997
A229	Revenido em óleo	0,5-16	0,020-0,625	–0,183 3	1831,2	146780	0,999
A232	Cromo-v	0,5-12	0,020-0,500	–0,145 3	1909,9	173128	0,998
A401	Cromo-s	0,8-11	0,031-0,437	–0,093 4	2059,2	220779	0,991

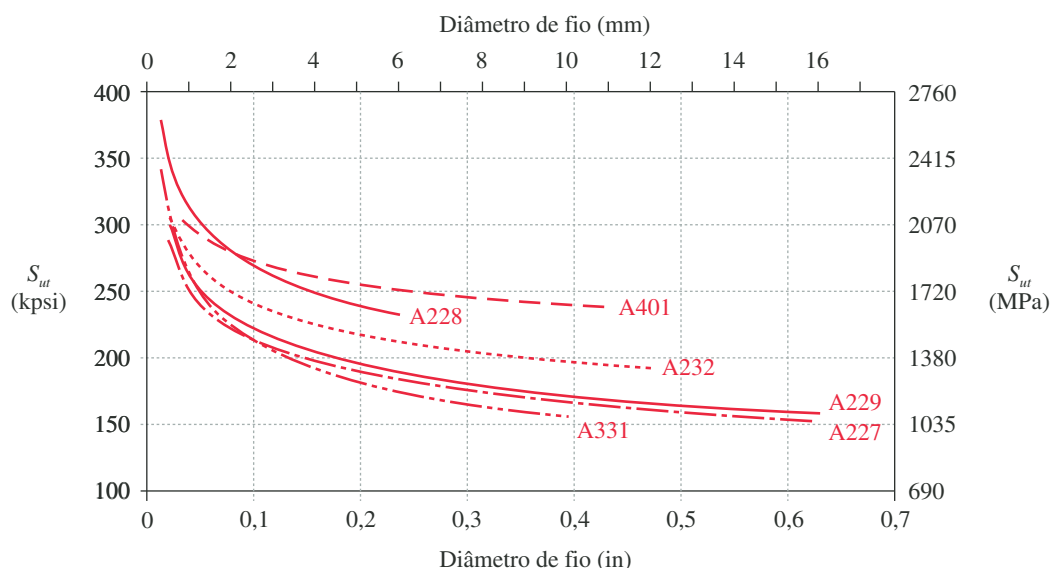



FIGURA 14-4

Resistências mínimas à tração de fios de mola de aço geradas a partir da Equação 14.3 e da Tabela 14-4.

onde *A* e *b* são definidos na Tabela 14-4 para materiais de arame nos intervalos de diâmetro especificados. Essas funções empíricas fornecem uma maneira conveniente de calcular as resistências à tração de arames de aço dentro de um programa de cálculo de molas e permitem uma iteração rápida para chegar a uma solução adequada. Na Figura 14-4, essas funções empíricas de resistência são plotadas para mostrar, em eixos lineares, a mudança em resistência com a redução do diâmetro.

Resistência ao cisalhamento Testes bastante abrangentes mostraram que uma estimativa razoável do limite§ de resistência à torção* de materiais usados comumente em molas é de 67% do limite de resistência do material.†[1]

$$S_{us} \cong 0{,}67 S_{ut} \tag{14.4}$$

Material para molas planas

Tiras de aço de médio carbono ou de alto carbono são o elemento normalmente utilizado para construir molas planas (de viga), volutas, molas de relógio e potência, molas em forma de arruelas (Belleville), etc. Quando a resistência à corrosão é necessária, ligas de aço inoxidável 301, 302 e 17-7ph, berílio cobre ou fósforo bronze também são utilizadas para molas planas.

Aços laminados a frio AISI 1050, 1065, 1074 e 1095 são as ligas de peças de estoque planas normalmente utilizadas. Estas peças estão disponíveis nas condições pré-revenida ou recozida e referidas como endurecidas a 1/4, 1/2, 3/4 e valor completo. As duas formas de revenido menos intensas podem ser prontamente conformadas (dobradas) na forma necessária, porém as mais intensas possuem menos conformabilidade. Aços de endurecimento completo podem ser conformados em contornos suaves, mas não podem ser dobrados até raios muito pequenos. A vantagem de conformar tiras de aço pré-endurecidas consiste em evitar o uso de tratamento térmico de distorção da parte conformada. Se dobras fortes são requeridas, será preciso utilizar material recozido e então endurecido após conformação.

§ N. de T.: Na literatura técnica, os termos *resistência máxima* e *limite de resistência* são sinônimos.

* Observe que isso relaciona o limite de resistência em cisalhamento ao limite de resistência em tração. É uma relação diferente daquela do critério da energia de distorção (von Mises), que relaciona as resistências de escoamento em cisalhamento e tração na forma $S_{ys} = 0{,}577\, S_y$.

† O fator da Equação 14.4 difere dos fatores sugeridos na Equação 2.5b, que fornece razões gerais do limite de resistência ao cisalhamento ao limite de resistência de tensão. O fator da Equação 14.4 baseia-se em testes extensivos de materiais de molas que foram trabalhados a frio por seu processo de desenho. Isso deve ser levado em conta para a diferença na resistência ao cisalhamento. Em qualquer evento, as diferenças nos números divulgados indicam incertezas envolvidas na estimativa das resistências de material sem teste sob condições realistas de carga. A Equação 14.4 é resultado de muitos testes de dados sobre um determinado tipo de elemento e material sob carga controlada. Como tal, deve ser lembrado como uma boa estimativa para esta situação. Não deve, no entanto, ser simplesmente aplicada a diferentes materiais ou aplicações.

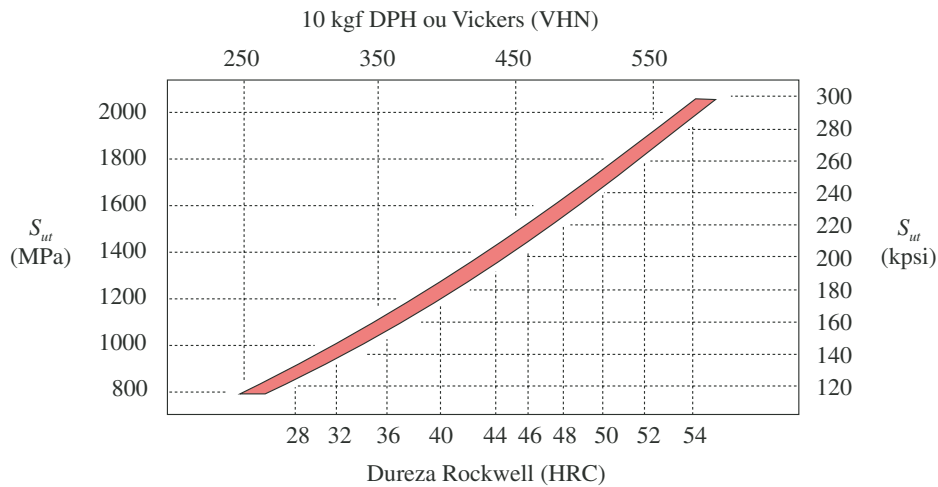



FIGURA 14-5

Resistência à tração contra dureza de tiras de aço de mola temperado e revenido. (Fonte: Referência 1.)

O processo de conformação a frio cria uma "granulação" no material de maneira análoga (porém muito menos pronunciada) que os grãos da madeira. Da mesma maneira que a madeira irá fraturar prontamente se dobrada ao longo de um grão, metais não permitirão dobras de raio pequeno ao longo de "seus grãos" sem fraturar-se. A granulação se estende na direção de laminação, a qual, para materiais de estoque com forma de tiras, localiza-se ao longo de seu eixo. Assim, componentes conformadas a partir de lâminas de metal com contornos agudos devem ser dobradas através dos grãos. Se forem necessárias dobras ortogonais, o grão deve ser orientado a 45° com as dobras. Um fator adimensional de flexão $2r / t$ (onde r é o raio de dobramento e t a espessura da peça) é definido como indicativo de conformabilidade relativa. Valores pequenos de $2r / t$ indicam maior conformabilidade. Tiras de aço endurecidas a 3/4 ou com endurecimento completo fraturarão se dobradas ao longo do grão.

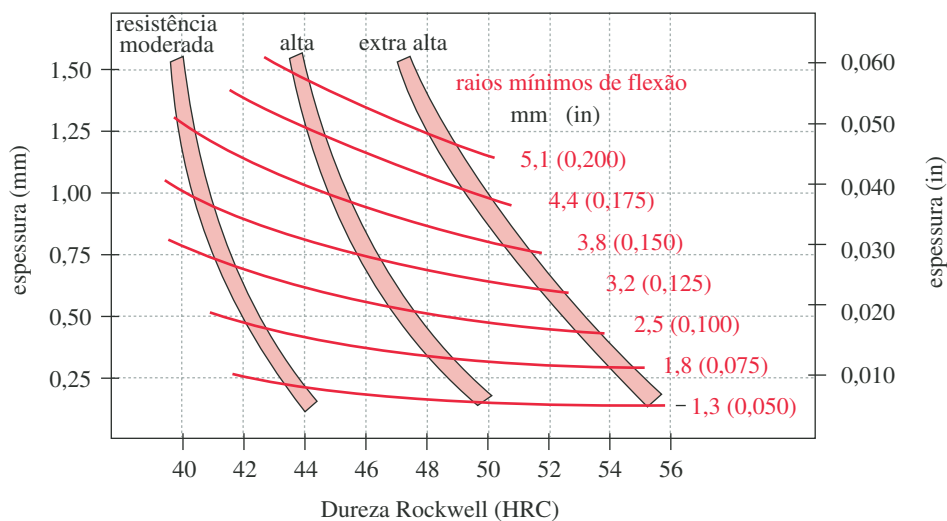



FIGURA 14-6

Raios mínimos de flexão transversal (através de grãos) para diversos revenidos e espessuras de aços de mola revenidos. (Fonte: Referência 1.)

Tabela 14-5 Propriedades típicas de tiras de liga revenida de mola
Fonte: Referência 1

Material	Sut MPa (ksi)	Dureza Rockwell	Elongação %	Fator de coeficiente	E GPa de flexão (Mpsi)	Poisson
Aço de mola	1700 (246)	C50	2	5	207 (30)	0,30
Aço inox 301	1300 (189)	C40	8	3	193 (28)	0,31
Aço inox 302	1300 (189)	C40	5	4	193 (28)	0,31
Monel 400	690 (100)	B95	2	5	179 (26)	0,32
Monel K500	1200 (174)	C34	40	5	17,9 (26)	0,29
Inconel 600	1040 (151)	C30	2	2	214 (31)	0,29
Inconel X-750	1050 (152)	C35	20	3	214 (31)	0,29
Berílio cobre	1300 (189)	C40	2	5	128 (18,5)	0,33
Ni-Span-C	1400 (203)	C42	6	2	186 (27)	–
Latão CA 260	620 (90)	B90	3	3	11 (16)	0,33
Fósforo bronze	690 (100)	B90	3	2,5	103 (15)	0,20
17-7PH RH950	1450 (210)	C44	6	plano	203 (29,5)	0,34
17-7PH Cond. C	1650 (239)	C46	1	2,5	203 (29,5)	0,34

As tiras de aço para molas são produzidas para ter uma dureza especificada que se relaciona com a sua resistência à tração. A Figura 14-5 mostra um gráfico da resistência à tração contra a dureza para aços temperados e para aços revenidos. Qualquer que seja o nível de conteúdo de carbono encontrado nos aços de mola AISI mostrados acima, estes podem ser endurecidos a valores no intervalo mostrado na Figura 14-5, o que significa que é a dureza final e não o conteúdo de carbono o fator que define a resistência à tração. A Tabela 14-5 mostra a resistência, a dureza e os fatores de flexão de alguns materiais comuns utilizados em molas planas.

A Figura 14-6 mostra os raios mínimos de flexão que molas planas de aço podem suportar na transversal ao grão. Três intervalos de resistência de aços são mostrados como bandas que dependem da espessura e dureza do material. Eles correspondem a três pontos retirados da parte superior da Figura 14-5. As linhas representam raios mínimos de dobramento dos aços que essas linhas interceptam. A interpolação pode ser feita tanto entre linhas quanto entre bandas.

14.4 MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO

A mola helicoidal de compressão mais comum é de diâmetro de espira constante, passo constante e seção de fio circular, como mostrado na Figura 14-2*a*. Chamaremos ela de mola helicoidal de compressão padrão (HCS). Outras formas de arranjo são possíveis, como o cônico, em forma de barril, de ampulheta e de passo variável, como mostrado também na Figura 14-2*a*. Todas fornecem uma força de compressão. Uma mola helicoidal pode ter espiras tanto de mão esquerda quanto direita.

Exemplos de molas, bem como parâmetros dimensionais para molas helicoidais padronizadas, são mostrados na Figura 14-7. O **diâmetro do fio** é d, o **diâmetro médio da espira** é D, e essas duas dimensões, juntamente com o **comprimento livre** L_f e o **número de espiras** N_t ou o **passo de espiras** p, são utilizadas para definir a geometria da mola para fins de cálculo e fabricação. O diâmetro externo D_o e o diâmetro interno D_i são de interesse principalmente para definir o tamanho mínimo de furo no qual se encaixa ou o tamanho máximo de pino sobre o qual pode ser colocada. Eles são encontrados adicionando ou subtraindo o diâmetro do fio de mola d ao diâmetro médio da espira D, respectivamente. As fol-

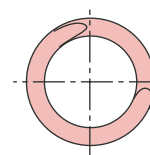
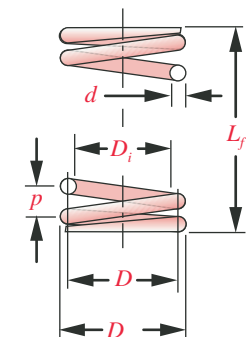
(*a*)

Número de espiras = N_t

(*b*)

FIGURA 14-7

(*a*) Exemplos de molas e (*b*) parâmetros dimensionais para molas helicoidais de compressão.

FIGURA 14-8

Vários comprimentos de uma mola helicoidal de compressão em uso.

FIGURA 14-9

Quatro estilos de tratamento de extremidades de espiras para molas helicoidais de compressão.

gas diametrais mínimas recomendadas entre D_o e um furo ou entre D_i e um pino são de 0,10 D para $D < 0{,}5$ in (13 mm) ou 0,05 D para $D > 0{,}5$ pol (13 mm).[1]

Comprimento de molas

As molas de compressão têm diversos comprimentos e deflexões de interesse, como mostrado na Figura 14-8. O **comprimento livre**, L_f, é o comprimento global da mola na condição descarregada, isto é, como fabricada. O **comprimento montado**, L_a, é o comprimento da mola depois de instalada à deflexão inicial, $y_{inicial}$. A deflexão inicial juntamente com a constante de mola determina a quantidade de força de **pré-carga** necessária à montagem da mola. A **carga de trabalho** é aplicada para comprimir adicionalmente a mola até a sua **deflexão de trabalho**, $y_{trabalho}$. O **comprimento mínimo de trabalho**, L_m, é a menor dimensão à qual se reduz a mola quando em serviço. O **comprimento fechado** ou **altura sólida**, L_s, é o seu comprimento quando comprimida ao ponto de todas as suas espiras se tocarem. O **limite de interferência**, y_{interf}, é a diferença entre o comprimento mínimo de trabalho e a altura fechada, expresso como uma porcentagem da deflexão de trabalho. Um valor mínimo de interferência de 10-15% é recomendado para evitar que se atinja a altura de fechamento em serviço com molas fora de tolerância ou com deflexões excessivas.

Detalhes de extremidade

Há quatro tipos de detalhes de extremidade disponíveis para molas helicoidais de compressão: extremidade simples, extremidade simples esmerilhada, extremidade esquadrejada e extremidade em esquadro esmerilhada, como mostrado na Figura 14-9. Extremidades simples resultam do corte simples das espiras deixando as extremidades com o mesmo passo que o resto da mola. Essa é a forma mais barata de terminação, porém fornece um alinhamento pobre com relação à superfície contra a qual a mola é pressionada. As extremidades podem ser esmerilhadas para ficarem planas e perpendiculares ao eixo da mola e, portanto, para produzir uma superfície normal para aplicação de carga. Esquadrejar as extremidades envolve levar as espiras de extremidade ao escoamento para torná-las planas e remover os seus passos. Isso melhora o alinhamento. Uma superfície plana na espira de extremidade de pelo menos 270° é recomendada para operação adequada.[1] Esquadrejar e esmerilhar (esq & esm) combinadamente produz uma superfície plana de 270-330° para aplicação de carga. É o tratamento mais custoso de extremidade, contudo é recomendado para molas de máquinas a menos que o diâmetro do fio seja muito pequeno (< 0,02 in ou 0,5 mm), caso em que elas devem ser esquadrejadas, porém sem esmerilhamento.[1]

Espiras ativas

O número total de espiras, N_t, pode ou não contribuir para a deflexão, dependendo do tratamento de extremidade. O número de espiras ativas, N_a, é necessário para se realizarem os cálculos. Extremidades esquadrejadas efetivamente removem duas espiras de participação ativa na deflexão. Esmerilhamento por si só já remove uma espira ativa. A Figura 14-9 mostra as relações entre o número total de espiras, N_t, e o número de espiras ativas, N_a, para cada umas das quatro terminações possíveis. O número calculado de espiras ativas é normalmente arredondado para o 1/4 mais próximo, uma vez que o processo de fabricação não pode sempre atingir precisão melhor que esta.*

FIGURA 14-10

Forças e torques nas espiras de uma mola helicoidal de compressão.

Índice de mola

O índice de mola, C, é a razão entre o diâmetro de espira, D, e o diâmetro de fio, d.

$$C = \frac{D}{d} \tag{14.5}$$

O intervalo preferido para C está entre 4 e 12.[1] Quando $C < 4$, a mola é de difícil fabricação; quando $C > 12$, tem propensão à flambagem e também se entrelaça facilmente quando manipulada em quantidades.

Deflexão de mola

A Figura 14-10 mostra uma porção de uma mola de espira helicoidal com cargas de compressão aplicadas. Observe que, ainda que a carga sobre a mola seja de compressão, o fio de mola está sob torção, uma vez que a carga em qualquer espira tende a torcer o fio com relação ao seu eixo. Um modelo simplificado desse carregamento, desconsiderando a curvatura do fio, é aquele de uma barra de torção como mostrado na Figura 4-28. Uma mola helicoidal de compressão é, de fato, uma barra de torção enrolada em uma forma de hélice, que a empacota melhor. A deflexão de uma mola helicoidal de compressão com fio redondo é

$$y = \frac{8FD^3N_a}{d^4G} \tag{14.6}$$

onde F é a força axial aplicada na mola, D o diâmetro médio das espiras, d o diâmetro do fio, N_a o número de espiras ativas e G o módulo de cisalhamento do material.

Constante de mola

A equação para cálculo da constante de mola é encontrada a partir do rearranjo da equação de deflexão:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \tag{14.7}$$

A mola helicoidal de compressão padrão de espira constante possui uma constante de mola k que é essencialmente linear durante a maior parte do seu intervalo de operação, como mostrado na Figura 14-11. Uns poucos percentuais no início e no fim de sua deflexão têm uma constante não linear. Quando a mola atinge o seu **comprimento fechado**, L_s, todas as espiras estão em contato e a constante de mola se torna a rigidez das espiras sólidas em compressão. A constante de mola deve ser definida no intervalo compreendido entre 15% e 85% de sua deflexão total[1] e seu intervalo de deflexão de trabalho $L_a - L_m$ mantido naquela região (ver a Figura 14-8). Observe que as molas que são enroladas com passo ou diâmetro de espira variável sobre seu comprimento,como aquelas mostradas na Figura 14-2*a*, podem ter uma constante de mola não constante com deflexão.

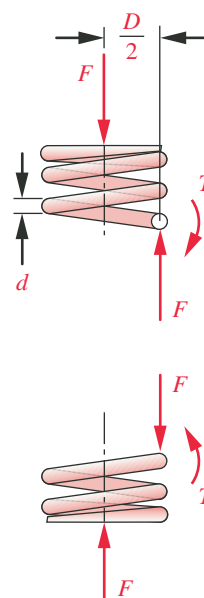
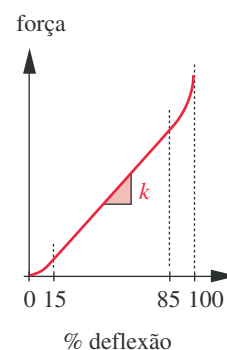



FIGURA 14-11

Curva força-deflexão de uma mola helicoidal de compressão padrão. (Adaptado da referência 1.)

* Algumas máquinas modernas de enrolar molas com servo-controle podem obter precisão de espira de 1/10.

Tensões em espiras de molas helicoidais de compressão

O diagrama de corpo-livre da Figura 14-10 mostra que existirão duas componentes de tensão em cada seção transversal de uma espira: uma tensão de cisalhamento por torção devida ao torque, T, e uma tensão de cisalhamento devido à força cortante, F. Essas duas tensões de cisalhamento possuem as distribuições, através da seção transversal, mostradas nas Figuras 14-12*a* e 14-12*b*. Essas duas tensões se adicionam diretamente e a máxima tensão de cisalhamento ocorre na fibra interior da seção transversal do fio, como mostrado na Figura 14-12*c*.

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} + \frac{F}{A} = \frac{F(D/2)(d/2)}{\pi d^4/32} + \frac{F}{\pi d^2/4} \qquad (14.8a)$$
$$= \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}$$

Podemos substituir a expressão do índice de mola, C, da Equação 14.5 na Equação 14.8*a*.

$$\tau_{max} = \frac{8FC}{\pi d^2} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FC + 4F}{\pi d^2}$$
$$= \frac{8FC}{\pi d^2}\left(1 + \frac{1}{2C}\right) = \frac{8FD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{0,5}{C}\right)$$
$$\tau_{max} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad \text{onde} \quad K_s = \left(1 + \frac{0,5}{C}\right) \qquad (14.8b)$$

Esta manipulação colocou o termo de cisalhamento direto da Equação 14.8*a* na forma de um **fator de cisalhamento direto** K_s. As duas equações são idênticas em valor, mas a segunda versão (Equação 14.8*b*) é preferida.

Se o fio fosse reto e submetido à combinação de força cortante direta, F, e torque, T, mostrados na Figura 14-10, a Equação 14.8 seria uma solução exata. Contudo, esse fio é curvado na forma de uma espira. Aprendemos na Seção 4.10 que vigas curvas têm concentração de tensão na superfície interna de curvatura. Embora a nossa mola não seja carregada como uma viga, o mesmo raciocínio se aplica e existem tensões maiores na superfície interna da espira. Wahl[3] determinou o fator de concentração de tensões para fio redondo e definiu o fator K_w, que inclui tanto o efeito das tensões diretas de cisalhamento quanto a concentração de tensões devido à curvatura, o que é valido para um fio redondo com $C \geq 1,2$.[5]

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} \qquad (14.9a)$$

$$\tau_{max} = K_w \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad (14.9b)$$

Esta tensão combinada é mostrada na Figura 14.12*d*.

Uma vez que o fator de Wahl inclui ambos os efeitos, podemos separá-los em um fator de curvatura K_c e em um fator de tensão de cisalhamento direta K_s usando

$$K_w = K_s K_c; \qquad K_c = \frac{K_w}{K_s} \qquad (14.10)$$

Se uma mola é carregada estaticamente, então o critério de falha a ser considerado é o escoamento. Se o material escoa, a concentração de tensões local que é relacionada ao fator de curvatura, K_c, será liberada e a Equação 14.8*b* pode ser utilizada para levar em conta somente as tensões diretas. Porém, se a mola for carregada dinamicamente, então a falha será por fadiga a níveis de tensão bastante menores que aqueles correspondentes à tensão de escoamento, e a Equação 14.9*b* deve ser utilizada para incorporar tanto o efeito de curvatura quanto aquele das

(*a*) Distribuição das tensões de cisalhamento direto através da seção

(*b*) Distribuição das tensões de cisalhamento torcional através da seção

(*c*) Tensões combinadas de cisalhamento direto e de torção

(*d*) Efeitos de concentração de tensão na borda interna

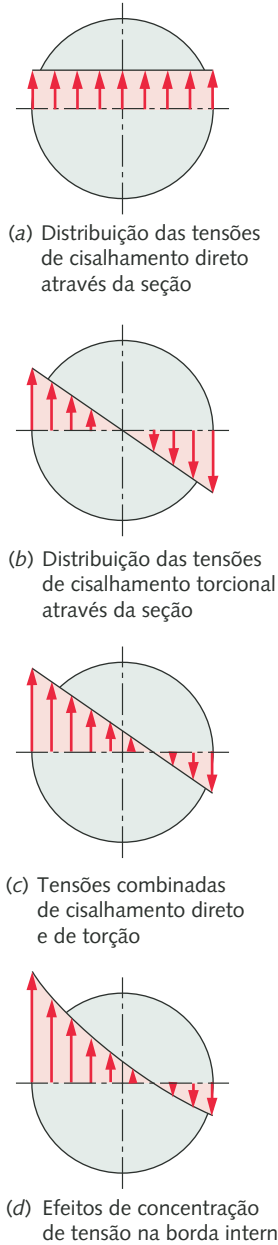



FIGURA 14-12

Distribuições de tensões através do fio em uma mola helicoidal de compressão.

tensões diretas. Em caso de carregamento de fadiga com a presença tanto de cargas médias quanto alternadas, a Equação 14.8*b* pode ser utilizada para calcular a componente de tensão média e a Equação 14.9*b* para a componente alternada de tensão.

Molas de espira helicoidal de fio não redondo

O fio redondo é, de longe, o material mais comum para molas de espira helicoidal. No entanto, o fio quadrado ou retangular é, às vezes, usado quando mais capacidade de carga é necessária e isso não pode ser obtido com fio redondo em um espaço limitado. Isso se dá porque, para uma determinada dimensão de seção transversal, uma seção transversal quadrada tem maior área de momento de inércia, permitindo que a mesma resistência de material sustente uma carga maior no mesmo nível de tensão. A desvantagem é que o fio quadrado ou retangular pode ter maior concentração de tensão a partir da curvatura da espira do que o fio redondo, e a equação de Wahl (14.9*a*) não se aplica.

O *Handbook of Spring Design*[6] informa fatores de concentração de tensão para algumas seções não redondas. Cornwell[5] desenvolveu expressões para fatores de concentração de tensão em fio retangular e em fio de seção transversal arbitrária, como um membro curvado sujeito a torção combinada e carga direta de cisalhamento. A análise por elemento finito (FEA) foi feita em formas retangulares sólidas e rasas, vigas em I, canais em C e Z e Ts com valores do índice da mola sobre o intervalo $1{,}2 \leq C \leq 10$. Fatores de concentração de tensão para formas redondas calculadas por esse método estão de acordo com a equação de Wahl, verificando o método.

Ainda que a concentração de tensão em uma seção circular seja sempre maior na borda interna da espira, isso não é sempre verdadeiro no que diz respeito a seções transversais retangulares. Se elas estão enroladas "no plano", a maior concentração de tensão estará na borda interna, mas se estiverem "enroladas na borda", a maior concentração de tensão poderá ocorrer dentro da profundidade da seção. Isso também é verdadeiro com cantos reentrantes como Ts. Os dados de concentração de tensão gerados pela análise por elemento finito para seções retangulares sólidas tinham a curva ajustada para gerar uma equação para a razão entre a tensão de máximo cisalhamento local na seção para a tensão nominal:

$$K_{rw} = e^{\left(S_0 - S_1 s + S_2 s^2 - S_3 s^3 + S_4 s^4\right)} \tag{14.11a}$$

onde $s = \ln(C)$ e os valores para Si podem ser encontrados na Tabela 14-6 na qual b e h são as dimensões da seção transversal retangular com h sendo paralelo ao eixo da espira. Essa equação reproduz e estende os resultados tabulares apresentados na Referência 6.

A tensão em uma mola helicoidal de compressão retangular pode ser encontrada a partir de

$$\tau = \frac{K_{rw} K_2 F D}{b h^2} \tag{14.11b}$$

A deflexão é

$$y = \frac{F D^3 N_a}{K_1 b h^3 G} \tag{14.11c}$$

e a constante da mola é:

$$k = \frac{F}{y} = K_1 \frac{b h^3 G}{D^3 N_a} \tag{14.11d}$$

onde F é a força da mola, D é o diâmetro médio da espira, G é o módulo do cisalhamento e K_{rw} vem da Equação 14.11*a*. K_1 e K_2 são encontrados na Tabela 14-7.

Tabela 14-6 Parâmetros de curva para concentração de tensão em seções transversais retangulares no cisalhamento[5]

b/*h*	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
1/20	1,9128	3,5104	3,1247	1,3315	0,2123
1/10	1,8908	3,4673	3,0834	1,3129	0,2093
1/8	1,8762	3,4879	3,1492	1,3592	0,2192
1/6	1,8555	3,4495	3,1234	1,3517	0,2184
1/4	1,7984	3,4031	3,1335	1,3760	0,2253
1/3,5	1,7812	3,3661	3,1067	1,3684	0,2246
1/3	1,7737	3,2849	2,9623	1,2741	0,2045
1/2,5	1,7340	3,2187	2,9178	1,2607	0,2031
1/2	1,7090	3,1197	2,8074	1,2111	0,1951
1/1,5	1,6862	2,9657	2,6014	1,1029	0,1752
1/1	1,6844	2,8219	2,4577	1,0591	0,1721
1,5/1	1,5381	2,6479	2,2312	0,9670	0,1614
2/1	1,4268	2,3349	1,7867	0,7321	0,1220
2,5/1	1,3610	2,0761	1,3481	0,4480	0,0628
3/1	1,3350	2,0087	1,2315	0,3597	0,0421
3,5/1	1,3053	1,8913	1,0961	0,2831	0,0261
4/1	1,2941	1,8802	1,1094	0,2869	0,0250
6/1	1,3089	2,2639	1,9437	0,8026	0,1240
8/1	1,2465	2,2094	2,1381	0,9873	0,1660
10/1	1,1545	1,8620	1,8344	0,8908	0,1568
20/1	0,7530	–0,2210	–0,8708	–0,4760	–0,0822

Tensões residuais

Quando um fio é dobrado na forma de uma hélice, tensões residuais de tração são desenvolvidas na superfície interior enquanto tensões residuais de compressão ocorrem na superfície externa. Nenhuma dessas tensões residuais é benéfica. Elas podem ser removidas por tratamentos de remoção de tensões (recozimento) aplicados à mola.

Ajuste Tensões residuais benéficas podem ser introduzidas por meio de um processo chamado de maneira confusa tanto de "remoção de ajuste, deformação permanente" quanto de "ajuste, encruamento de mola" pelos fabricantes. O ajuste de mola pode aumentar a sua capacidade de carga estática em 45-65% e duplicar a capacidade de armazenamento de energia por libra de material.[1] Esse processo consiste em comprimir a mola à sua altura fechada e produzir escoamento do material para introduzir tensões residuais benéficas. Lembre-se, da Seção 6.8, que a regra para introdução de tensões residuais benéficas é *a que consiste em aplicar tensões em excesso ao material (escoamento) na mesma direção em que as tensões aplicadas em serviço irão atuar*. A mola que sofreu ajuste perde uma parte de seu comprimento livre, mas ganha os benefícios descritos acima. Para obter as vantagens proporcionadas pelo ajuste, o comprimento inicial livre da mola deve ser maior que aquele desejado (pós-ajuste) e deve ser projetado para produzir uma tensão de altura fechada de cerca de 10 a 30% maior que a resistência ao escoamento do material. Uma quantidade de sobretensão menor que essa não irá criar tensão residual suficiente. Mais de 30% de sobretensão traz poucos benefícios e aumenta a distorção.[1]

Tabela 14-7
Fatores de forma para molas de fio retangular

b/*h*	K_1	K_2
1,00	0,180	2,41
1,50	0,250	2,16
1,75	0,272	2,09
2,00	0,292	2,04
2,50	0,317	1,94
3,00	0,335	1,87
4,00	0,358	1,77
6,00	0,381	1,67

A tensão permissível (isto é, a resistência) de uma mola que foi “ajustada” é significativamente maior que aquela de uma mola no estado de pós-enrolamento. Além disso, a Equação 14.8*b* com seu fator K_s menor pode ser utilizada em lugar da Equação 14.9*b* para calcular a tensão em uma mola “ajustada”, uma vez que para carregamento estático o escoamento alivia a curvatura devido à concentração de tensões. O ajuste tem mais importância em molas carregadas estaticamente, mas também é importante em molas sob carregamento cíclico.

Nem todas as molas comercializadas são ajustadas, já que isso aumenta seu custo. O projetista deve especificar ajuste se este for desejado. Não pressuponha que ele será feito automaticamente. Algumas vezes, uma operação de ajuste é especificada como parte de um processo de montagem, não como parte do processo de fabricação da mola. Se for conveniente, uma mola pode ser deliberadamente levada à sua altura de fechamento antes de ser montada em sua posição final em uma máquina, ou quando isso ocorrer.

Carga reversa Ajustadas ou não, as espiras de mola terão algum tipo de tensão residual presente. Por isso, não é aceitável que se apliquem tensões reversas a elas. Se assumirmos que as tensões residuais tenham sido arranjadas para atuar de maneira benéfica contra a direção esperada de carregamento, então tensões reversas irão obviamente exacerbar as tensões residuais e causar falha prematura. Uma mola de compressão nunca deve ser carregada em tração, nem uma mola de tração em compressão. Até mesmo molas de torção, como veremos, necessitam receber torque unidirecional para evitar falhas prematuras.

Jateamento por esferas Esta é outra forma de obter tensões residuais benéficas em molas, sendo mais efetiva para carregamentos cíclicos em fadiga. É de pouco benefício para molas sob cargas estáticas. O processo de jateamento por esferas foi discutido na Seção 6.8. Para molas de fio, são usados normalmente diâmetros de fagulha de 0,008 in (0,2 mm) a 0,055 in (1,4 mm). Molas de diâmetro de fio pequeno não receberão tantos benefícios derivados da aplicação deste procedimento quanto as de diâmetros maiores. Além disso, se o passo de espira é pequeno (por exemplo, no caso de uma mola enrolada bem apertada), o jateamento não pode efetivamente impactar as superfícies mais internas das espiras.

(*a*) Extremidades não paralelas

(*b*) Extremidades paralelas

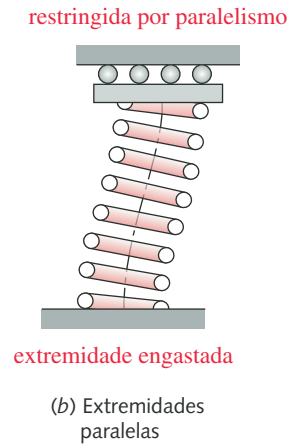
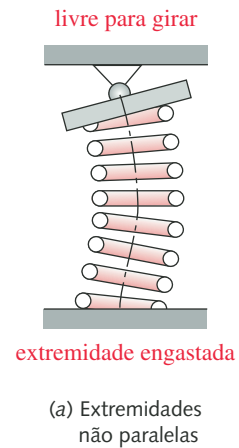



FIGURA 14-13

Condições de extremidade determinam a situação crítica de flambagem. Adaptado da Referência 1.

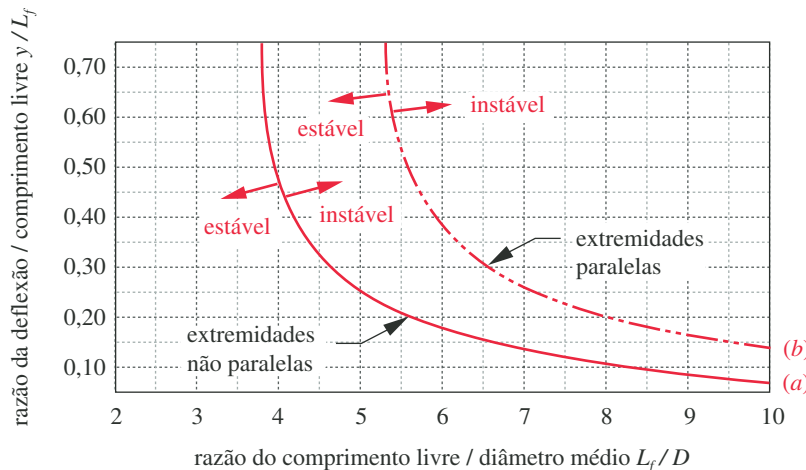



FIGURA 14-14

Curvas de condições críticas de flambagem. Adaptado da Referência 1.

Flambagem de molas de compressão

Uma mola de compressão é carregada como uma coluna e portanto pode flambar se for muito esbelta. A razão de esbeltez foi desenvolvida para colunas sólidas no Capítulo 4. Aquela medida não é diretamente aplicável a molas devido à geometria bastante diferente destas. Um fator de esbeltez similar considerando a razão entre o comprimento livre e o diâmetro da espira L_f / D pode ser criado neste caso. Se esse fator for > 4, a mola pode flambar. Uma flambagem global pode ser evitada colocando a mola em um furo ou sobre uma barra. Contudo, o roçamento das espiras nessas guias absorverá parte da força de mola através do atrito e reduzirá a carga liberada na outra extremidade da mola.

Assim como ocorre com colunas sólidas, as condições de extremidade afetam a tendência de uma mola à flambagem. Se uma das extremidades da mola for livre para inclinar-se como mostrado na Figura 14-13*a*, a mola irá flambar com uma razão de aspecto menor que aquela que ocorre se esta for mantida contra placas paralelas em cada extremidade, como mostrado na Figura 14-13*b*.

A razão entre a deflexão da mola e o seu comprimento livre também afeta sua tendência a flambar. A Figura 14-14 mostra um gráfico que contém duas linhas que representam a estabilidade para os dois casos de condição de extremidade da Figura 14-13. Molas com combinações de razões entre razão de aspecto e razão de deflexão à esquerda dessas curvas são estáveis com relação à flambagem.

Ressonância de molas de compressão

Qualquer dispositivo com massa e elasticidade terá uma ou mais frequências naturais, como discutido no Capítulo 10, no que tange à vibração de eixos. As molas não são exceções a essa regra e podem vibrar tanto lateral quanto longitudinalmente quando excitadas dinamicamente próximo às suas frequências naturais. Se lhes for permitido vibrar em ressonância, as ondas de vibração longitudinal fazem com que as espiras impactem umas às outras. As forças resultantes das deflexões excessivas de espira e dos impactos farão com que a mola falhe. A fim de evitar essa condição, a mola não deve receber carga cíclica a uma frequência próxima à sua frequência natural. Preferencialmente, a frequência natural da mola deve ser maior que cerca de 13 vezes a frequência de qualquer esforço aplicado.

A frequência natural ω_n ou f_n de uma mola helicoidal de compressão depende das suas condições de contorno. A fixação de ambas as extremidades é o arranjo mais comum e desejável, uma vez que sua frequência f_n será o dobro daquela de uma mola com uma extremidade fixa e a outra livre. No caso de extremidades engastadas:

$$\omega_n = \pi\sqrt{\frac{kg}{W_a}} \text{ rad/s} \qquad f_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W_a}} \text{ Hz} \tag{14.12a}$$

onde k é a constante de mola, W_a é o peso das espiras ativas da mola e g é a constante gravitacional. Tanto a frequência angular ω_n quanto a frequência linear f_n podem ser usadas. O peso das espiras ativas pode ser encontrado a partir de

$$W_a = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4} \tag{14.12b}$$

onde γ é a densidade em peso do material. Para obter o peso total da mola, substitua N_t em lugar de N_a.

A substituição das Equações 14.7 e 14.12*b* em 14.12*a* resulta em

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a}\frac{d}{D^2}\sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} \text{ Hz} \tag{14.12c}$$

para a frequência natural de uma mola helicoidal com ambas as extremidades engastadas. Se uma das extremidades da mola é engastada e a outra é livre, ela

Tabela 14-8 Resistência de escoamento torcional máxima S_{ys} para molas helicoidais de compressão em aplicações estáticas

Tensões de flexão ou flambagem não incluídas. Fonte: Referência 1

Material	Percentagem máxima do limite da resistência de tração	
	Antes da remoção de deformação permanente: Ajuste (use Equação 14.9*b*)	Depois da remoção de deformação permanente: Ajuste (use Equação 14.8*b*)
Aço-carbono repuxado a frio (por exemplo, A227, A228)	45%	60-70%
Aço-carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga (por exemplo, A229, A230, A232, A401)	50	65-75
Aço inoxidável austenítico (por exemplo, A313)	35	55-65
Ligas não ferrosas (por exemplo, B134, B159, B197)	35	55-65

funciona como uma mola de extremidades engastadas, porém com o dobro do seu comprimento. Sua frequência natural pode ser encontrada utilizando um número para N_a na Equação 14.12*c* que é o dobro do número real de espiras ativas presente na mola engastada livre.

Resistências permissíveis de molas de compressão

Existe uma grande quantidade de dados de testes relativos à resistência de falha de molas helicoidais de compressão feitas de fio redondo, carregadas tanto estática quanto dinamicamente. As relações entre limite de resistência à tração e diâmetro de fio foram discutidas na Seção 14.3. Para projetos de molas, são necessários dados adicionais relativos à resistência ao escoamento e fadiga.

Resistência ao escoamento sob torção A resistência ao escoamento sob torção de fios de molas varia com o tipo de material e depende do fato de a mola ter sido calibrada ou não. A Tabela 14-8 mostra fatores de resistência ao escoamento sob torção recomendados para diversos fios de mola comuns como uma porcentagem do limite de resistência à tração do fio. Esses fatores devem ser usados para estimar a resistência de molas helicoidais à compressão em condições estáticas de carregamento.*

Resistência à fadiga sob torção No intervalo $10^3 \leq N \leq 10^7$ ciclos, varia com o material e com o fato de este ter sofrido ou não jateamento de esferas. A Tabela 14-8 mostra valores recomendados para diversos materiais de fio para as condições com e sem jateamento para três pontos nos respectivos diagramas *S-N*: 10^5,

Tabela 14-9 Resistência de fadiga torcional máxima S_{fw}' para molas helicoidais de compressão de fio redondo em aplicações cíclicas (razão de tensão, $R = 0$)

Sem ressonância, temperatura ambiente e ambiente não corrosivo. Fonte: Referência 1

Vida a fadiga (ciclos)	Percentual do limite de resistência à tração			
	ASTM 228, aço inox austenítico deformação permanente:		ASTM A230 e A232 e não ferrosos deformação permanente:	
	sem jateamento	com jateamento	sem jateamento	com jateamento
10^5	36%	42%	42%	49%
10^6	33	39	40	47
10^7	30	36	38	46

* Observe na Tabela 14-8 que a Associated Spring Inc.[1] recomenda o uso do fator de Wahl (Equação 14.10) para calcular a tensão em uma mola estaticamente carregada ajustada para receber tensão residual e usar o fator menor de cisalhamento direto (Equação 14.9) se não estiver ajustada. Essa é uma contradição à regra que é geralmente expressa ignorando a concentração de tensão em situação estaticamente carregadas, já que a abordagem aplica o fator de concentração de tensão Wahl para uma mola sem ajuste estaticamente carregada. A abordagem da Associação é mais conservadora do que a regra geral e baseada em grande experiência na fabricação de molas.

10^6 e 10^7 ciclos. Observe que são resistências à fadiga com torção e que foram determinadas para molas testadas sob tensões com componentes média e alternada idênticas (razão de tensão $R = \tau_{min}/\tau_{max} = 0$). Portanto, elas não são diretamente comparáveis a nenhum dos limites de resistência à fadiga sob carregamento alternado gerados pelos corpos de prova que rodam sob flexão discutidos no Capítulo 6 por causa do carregamento torcional e da presença da componente média de tensão. Utilizaremos a designação $S_{fw'}$ para estes testes de fadiga de fios para diferenciá-los dos limites alternados de resistência à fadiga do Capítulo 6. Essas resistências à fadiga $S_{fw'}$ são muito úteis, já que representam uma situação real (e típica) de carregamento de mola à fadiga e são geradas a partir de molas, não de espécimes de teste, tendo, portanto, a geometria e o tamanho corretos. Observe que as resistências à fadiga na Tabela 14-9 diminuem à medida que o número de ciclos aumenta, mesmo acima dos 10^6 ciclos, onde os aços normalmente apresentam um limite de resistência à fadiga.

Limite de resistência à fadiga torcional Os aços podem ter um limite de resistência à fadiga para vida infinita. Materiais de alta resistência tendem a mostrar um nivelamento de seus limites de resistência à fadiga com o aumento da resistência à tração. As Figuras 6-9 e 6-11 mostram essa tendência e a Equação 6.5*a* define um limite de resistência à fadiga por tração não corrigido para aços sob carregamento de flexão alternado com $S_{ut} > 200$ kpsi e que se mantém constante para valores de resistência à tração maiores que esse valor. Observe na Figura 14-3 que a maior parte dos fios de mola com diâmetros menores que cerca de 10 mm está nessa categoria de resistência à tração. Isso implicaria que os materiais de fios de mola teriam um limite de fadiga que é independente do tamanho ou da composição da liga que os constitui. Pesquisas confirmaram esse fato. Zimmerli[4] reporta que todos os fios de aços de mola de menos de 10 mm de diâmetro apresentam um limite de resistência à fadiga torcional para vida infinita com razão de tensão $R = 0$ (a qual, para diferenciar do limite de resistência relativo às tensões alternadas, chamaremos de $S_{ew'}$).

$$\begin{aligned} S_{ew'} &\cong 45,0 \text{ kpsi} \ \ (310 \text{ MPa}) \quad \text{para molas não jateadas} \\ S_{ew'} &\cong 67,5 \text{ kpsi} \ \ (465 \text{ MPa}) \quad \text{para molas jateadas} \end{aligned} \tag{14.13}$$

Não existe necessidade neste caso de aplicar correções para a condição de superfície, tamanho ou fatores de correção de carga para S_{fw}' ou S_{ew}', uma vez que os dados de teste foram obtidos sob condições reais no que concerne a esses aspectos dos materiais de mola. A Tabela 14-9 mostra que os dados de resistência à fadiga foram obtidos à temperatura ambiente, em um ambiente não corrosivo, sem a presença de ressonância. Isso também é verdadeiro para o caso dos dados de Zimmerli. Se a mola deve operar a temperaturas altas ou em um ambiente corrosivo, a endurança ou o limite de resistência à fadiga podem ser diminuídos de acordo com o mostrado na Equação 6.8. A Figura 6-31 também inclui alguma informação concernente a ambientes corrosivos. Um fator de temperatura K_{temp} e/ou um fator de confiabilidade K_{conf} pode ser aplicado, como no caso da Equação 6.7*f* e na Tabela 6-4. Utilizaremos os valores não corrigidos de $S_{fw'}$ para S_{fw} e $S_{ew'}$ para S_{ew} na nossa discussão, assumindo temperatura ambiente, nenhuma corrosão e 50% de confiabilidade.

O diagrama *S-N* de cisalhamento torcional para fios de molas

Um diagrama *S-N* de cisalhamento por torção para um fio de material e tamanho particulares pode ser construído a partir da informação contida nas Tabelas 14-4 e 14-7 utilizando o método descrito na Seção 6.6 para criar estimativas de

diagramas *S-N*. A região de interesse para fadiga de alta ciclagem corresponde ao intervalo de $N = 1000$ até $N = 1E7$ ciclos e mais. O limite de endurança para vida infinita do fio de mola é definido na Equação 14.13. A resistência à tração S_m a 1000 ciclos é normalmente da ordem de 90% da resistência à tração S_{ut} a 1 ciclo (a resistência estática). Uma vez que esta é uma situação de carregamento torcional, as resistências à tração do fio mostradas na Figura 14-3 e definidas pela Equação 14.3 e pela Tabela 14-4 devem ser convertidas a resistências torcionais utilizando a Equação 14.4. Isso torna a resistência à torção em 1000 ciclos igual a

$$S_{ms} \cong 0{,}9 S_{us} \cong 0{,}9\left(0{,}67 S_{ut}\right) \cong 0{,}6 S_{ut} \tag{14.14}$$

EXEMPLO 14-1

Construção do diagrama *S-N* de um material de fio de mola

Solução **Crie diagramas *S-N* de cisalhamento por torção para um intervalo de tamanhos de fios de mola.**

Dados **Arame musical ASTM A228, não jateado.**

Hipóteses **Três diâmetros serão utilizados: 0,010 in (0,25 mm), 0,042 in (1,1 mm) e 0,250 in (6,5 mm).**

Solução **Ver a Figura 14-15.**

1 A resistência de tração para cada tamanho de fio é obtida a partir da Equação 14.3 em combinação com o coeficiente e expoente da Tabela 14-4 para este material.

$$\begin{aligned} S_{ut} &\cong 184649\, d^{-0{,}1625} \\ &= 184649\left(0{,}010\right)^{-0{,}1625} = 390239 \text{ psi} \\ &= 184649\left(0{,}042\right)^{-0{,}1625} = 309071 \text{ psi} \\ &= 184649\left(0{,}250\right)^{-0{,}1625} = 231301 \text{ psi} \end{aligned} \tag{a}$$

2 Estes valores são convertidos a resistências de cisalhamento a 1000 ciclos usando a Equação 14.14:

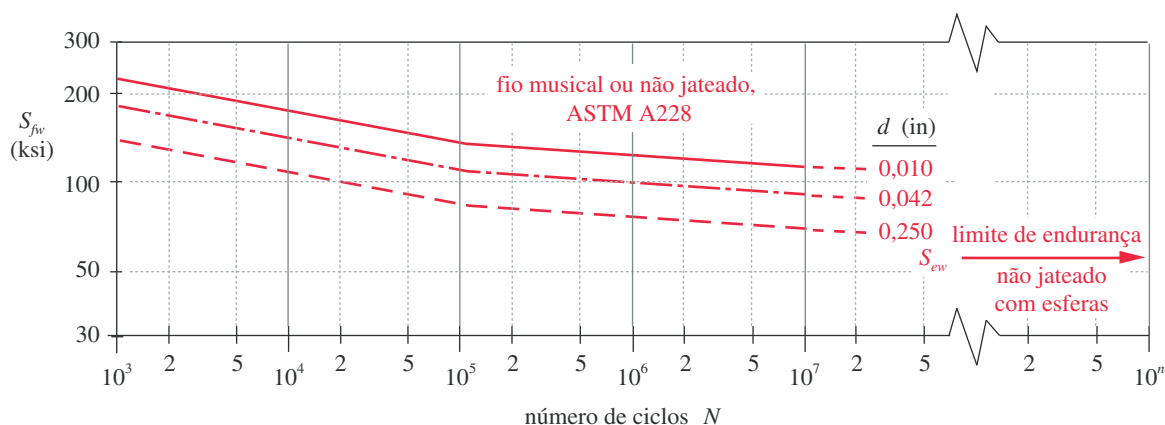



FIGURA 14-15

Diagramas *S-N* de fadiga torcional de fio musical de vários diâmetros.

$$
\begin{aligned}
& && S_{ms} \cong 0{,}6 S_{ut} \\
& d = 0{,}010: && S_{ms} \cong 0{,}6(390239) = 234143 \text{ psi} \\
& d = 0{,}042: && S_{ms} \cong 0{,}6(309071) = 185443 \text{ psi} \\
& d = 0{,}250: && S_{ms} \cong 0{,}6(231301) = 138781 \text{ psi}
\end{aligned} \tag{b}
$$

3 As resistências à fadiga torcional S_{fw} para os três valores de N são expressas como uma porcentagem da resistência à tração da Tabela 14-9 para fio de música não jateado A228.

$$
\begin{aligned}
& d = 0{,}010 \;\; @N = 1E5: \;\; S_{fw} \cong 0{,}36(390239) = 140486 \text{ psi} \\
& d = 0{,}010 \;\; @N = 1E6: \;\; S_{fw} \cong 0{,}33(390239) = 128779 \text{ psi} \\
& d = 0{,}010 \;\; @N = 1E7: \;\; S_{fw} \cong 0{,}30(390239) = 117072 \text{ psi}
\end{aligned} \tag{c}
$$

Estes valores são plotados em combinação com o resultado obtido da Equação 14.14 para gerar as curvas *S-N*.

4 A Figura 14-15 mostra as curvas *S-N*. Há duas porções separadas em cada curva *S-N:* o segmento $1E3 \leq N \leq 1E5$ e o segmento $N \geq 1E5$. O limite de resistência à fadiga (endurança) do fio não jateado para vida infinita S_{ew} também é mostrado a 45000 psi (Equação 14.13).

5 Se desejado, qualquer das curvas *S-N* pode ser ajustada a uma equação exponencial (Equações 6.10) pelo método mostrado na Seção 6-6. A avaliação dos coeficientes e expoentes separadamente para as duas partes da curva *S-N* permite estimar com facilidade a resistência à fadiga do fio S_{fw} para qualquer número de ciclos.

6 É importante lembrar que os dados de S_{fw} na Tabela 14-9 são para um estado de tensões repetidas, não uma condição de tensões alternadas, o que significa que este diagrama *S-N* é tomado em algum ponto ao longo do eixo σ_m na Figura 6-43.

O diagrama de Goodman modificado para fio de mola

Um diagrama de Goodman modificado pode ser construído para qualquer situação de carregamento de mola. Na Seção 6.13, apresentamos um procedimento geral para projeto à fadiga que envolveu a determinação das tensões efetivas de von Mises para qualquer caso de carregamento combinado, no intuito de simplificar o procedimento. Foi mencionado nessa seção que uma situação de carregamento torcional puro pode ser resolvida daquela mesma maneira também, convertendo as tensões de cisalhamento a tensões equivalentes de von Mises e comparando-as às resistências do material sob tração. Porém, no caso de dimensionamento de molas helicoidais de compressão, faz pouco sentido utilizar o procedimento de von Mises, porque as resistências à fadiga empiricamente desenvolvida para fios são expressas em termos de resistências torcionais. Portanto, será mais fácil construir um diagrama de Goodman utilizando a resistência à torção e aplicando as tensões torcionais calculadas diretamente a esse diagrama. Os resultados serão os mesmos independentemente do procedimento que se escolha.

EXEMPLO 14-2

Criação do diagrama de Goodman modificado para uma mola helicoidal

Problema **Construa a linha de Goodman para o fio de mola do Exemplo 14-1.**

Dados **O intervalo de vida requerido *é* $N = 1E6$ ciclos. O fio é de 0,042 in (1,1 mm) de diâmetro.**

Hipóteses **As resistências torcionais e as tensões torcionais de cisalhamento serão utilizadas no diagrama de Goodman.**

Solução **Ver a Figura 14-16.**

1 O limite de resistência à tração do material da Figura 14-3 ou Equação 14.3, convertido ao limite de resistência torcional pela Equação 14.4 a partir de dados da Tabela 14-4, permite a determinação de um ponto na linha de Goodman.

$$S_{ut} \cong 184649(0,042)^{-0,1625} = 309071 \text{ psi} \qquad (a)$$

$$\begin{aligned} S_{us} &\cong 0,67 S_{ut} \\ &= 0,67(309071) = 207078 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (b)$$

Esse valor é plotado como ponto *A* no diagrama da Figura 14-16.

2 Cada diagrama *S-N* fornece um ponto de dado (S_{fw} ou S_{ew}, dependendo de se tratar de vida finita ou infinita) na linha de Goodman modificada para uma combinação de material/tamanho em carregamento puramente torcional. A resistência à fadiga S_{fw} para o material e a condição em questão é obtida da linha *S-N* da Figura 14-15 ou calculado a partir dos dados na Tabela 14-9 como:

$$@N = 1E6: \qquad S_{fw} \cong 0,33(309071) = 101993 \text{ psi} \qquad (c)$$

As coordenadas de intersecção são 0,5 S_{fw} = 50996 psi. Este ponto é plotado como ponto *B* no diagrama da Figura 14-16. Observe que, para vida infinita, o valor de S_{ew} da Equação 14.13 seria plotado como *B* em lugar deste valor de S_{fw} para vida finita.

3 Observe na Figura 14-16 que a resistência à fadiga do fio S_{fw} é plotada em uma linha 45° da origem de modo a corresponder às condições de ensaio de componentes de tensões média e alternada iguais (razão de tensão $R = \tau_{min} / \tau_{max} = 0$). O ponto *B* é então conectado com o limite de resistência ao cisalhamento S_{us} no eixo das tensões médias no ponto *A* para traçar o diagrama de Goodman, que é estendido ao ponto *C*.

4 Podemos agora determinar o valor da resistência à fadiga sob condições alternadas ($R = -1$), que corresponde ao ponto *C* no diagrama. Este valor

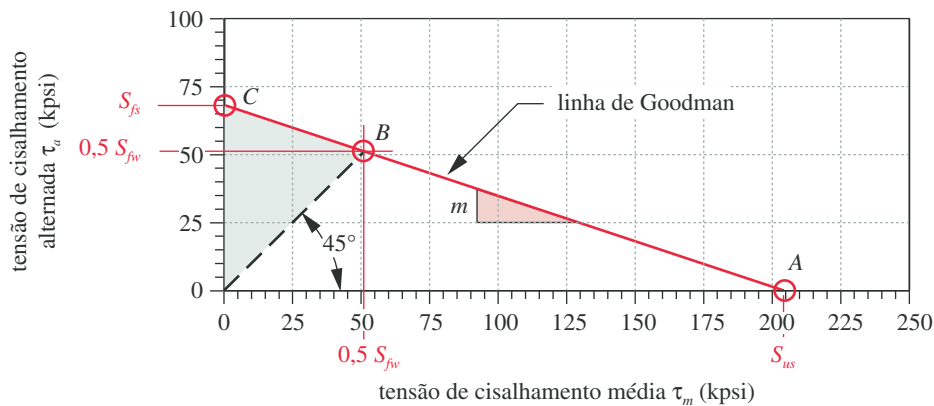



FIGURA 14-16

Diagrama de Goodman modificado de tensão torcional para fio ASTM A228 de 0,045 in de diâmetro para $N = 1E6$ ciclos.

pode ser determinado a partir da equação da linha de Goodman, definida em termos de seus dois pontos conhecidos, *A* e *B*:

$$
\begin{aligned}
m &= -\frac{0,5S_{fw}}{S_{us} - 0,5S_{fw}} \\
S_{fs} &= -mS_{us} \\
S_{fs} &= 0,5\frac{S_{fw}S_{us}}{S_{us} - 0,5S_{fw}} \qquad (d) \\
&= 0,5\frac{101993(207078)}{207078 - 0,5(101993)} = 67658 \text{ psi}
\end{aligned}
$$

5 Este uso da linha de Goodman é conservativo para razões de tensão $R \geq 0$ e é justificado neste caso porque molas devem ser carregadas sempre na mesma direção. Molas helicoidais de compressão tendem a ter razões de tensão entre 0 e 0,8, o que coloca as suas coordenadas de tensão à direita da linha de 45° na figura, onde a linha de Goodman é mais conservativa que a linha de Gerber.

6 Qualquer outra combinação de tensão média e alternada com uma razão de tensão $R \geq 0$ para este material e número de ciclos pode agora ser plotada neste diagrama a fim de obter o coeficiente de segurança.

14.5 DIMENSIONAMENTO DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO A CARGAS ESTÁTICAS

Os requerimentos funcionais para o dimensionamento de uma mola podem ser bastante variados. Pode ser requerido um valor particular de força para certo valor de deflexão ou a constante de mola pode ser definida para um intervalo de deflexões. Em alguns casos, existem limitações com relação ao diâmetro externo, o diâmetro interno ou o comprimento útil. O procedimento de dimensionamento variará de acordo com o que é requerido. De qualquer forma, o dimensionamento de molas é um problema de caráter inerentemente iterativo. Algumas hipóteses têm que ser feitas para que se possa estabelecer valores de variáveis suficientes para calcular tensões, deflexões e constantes de mola. Como o tamanho de fio aparece à potência de três ou de quatro nas equações de tensão e deflexão, e como a resistência do material depende do tamanho do fio, a segurança relativa de projeto é muito sensível a esse parâmetro.

Vários procedimentos podem ser seguidos no dimensionamento de molas e mais de uma combinação de parâmetros de mola pode satisfazer qualquer conjunto de requerimentos funcionais. É possível otimizar parâmetros como o peso da mola para um conjunto de especificações de desempenho. Para minimizar o peso e o custo, os níveis de tensão devem ser tão altos quanto possível sem causar falha estática por escoamento quando em serviço.

Um diâmetro inicial de fio *d* deve ser assumido e um valor razoável do índice de mola *C* escolhido, com o que um diâmetro de espira *D* pode ser calculado utilizando a Equação 14.5. Um material de mola é escolhido tentativamente e as resistências relevantes relativas ao diâmetro de fio *d* são calculadas. É conveniente calcular as tensões antes de calcular a deflexão porque, ainda que ambas envolvam os diâmetros *d e D,* apenas a deflexão depende de N_a. Se a força requerida *F* for definida, a tensão a esse nível de força pode ser calculada com a Equação 14.8 ou 14.9, conforme o caso. Se dois valores de força de operação forem definidos com uma deflexão especificada entre eles, então a constante de mola estará definida.

O estado de tensão é comparado à resistência ao escoamento sob carregamento estático. O coeficiente de segurança para carga estática é

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} \tag{14.15}$$

Se o valor da tensão calculada for muito alto comparado à resistência do material, o diâmetro do fio, o índice de mola ou o material podem ser alterados para melhorar o resultado. Quando a tensão calculada no nível de força de operação parece razoável em comparação à resistência do material, pode-se assumir tentativamente um valor para o número de espiras e a tolerância de contato e, a partir daí, calcular a constante de mola, deflexão e comprimento livre utilizando as Equações 14.6 e 14.7. Valores muito fora do razoável para quaisquer desses parâmetros farão com que novas iterações tenham que ser feitas com mudanças nas hipóteses.

Após várias iterações, uma combinação razoável de parâmetros pode normalmente ser encontrada. Algumas das coisas que têm de ser verificadas antes que o projeto esteja completo são a tensão na altura fechada, os diâmetros D_i, D_o, e o comprimento livre da mola para efeitos de empacotamento. Adicionalmente, a possibilidade de flambagem tem que ser verificada.

Se o processo acima parece complicado ao leitor, certamente este é o momento de valorizar o "trabalho sujo" executado pelo computador. O projeto de molas, como qualquer processo iterativo de dimensionamento, é obviamente uma tarefa para ser resolvida no computador. Solucionadores de equações que permitem iteração automática são extremamente adequados para estes tipos de tarefa uma vez que eles resolvem todos os aspectos do problema simultaneamente. Apresentaremos agora alguns exemplos de problemas de dimensionamento de molas e mostraremos como um solucionador de equações pode ser utilizado para agilizar a obtenção da solução.

EXEMPLO 14-3

Projeto de uma mola helicoidal de compressão para carregamento estático

Problema **Projete uma mola de compressão para carga estática em um intervalo conhecido de deflexão.**

Dados **A mola deve fornecer uma força mínima de 100 lb e uma força máxima de 150 lb sobre um intervalo de ajuste de 0,75 in de deflexão.**

Hipóteses **Utilize a mola de fio mais barata, não jateada e repuxada a frio (ASTM A227), uma vez que as cargas são estáticas.**

Solução **Ver a Tabela 14-10.**

1 Pressuponha um diâmetro inicial do fio de 0,162 in dentre os tamanhos disponíveis na Tabela 14-2.

2 Pressuponha um índice de mola igual a 8, que está no meio do intervalo recomendado, e calcule o diâmetro médio de espira D a partir da Equação 14.5.

$$D = Cd = 8(0{,}162) = 1{,}30 \text{ in} \tag{a}$$

3 Encontre o fator de cisalhamento direto K_s e use-o para calcular a tensão de cisalhamento na espira para o maior valor de força.

$$K_s = 1 + \frac{0{,}5}{C} = 1 + \frac{0{,}5}{8} = 1{,}06 \tag{b}$$

$$\tau = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} = 1{,}06 \frac{8(150)(1{,}30)}{\pi(0{,}162)^3} = 123714 \text{ psi} \tag{c}$$

4 Encontre o limite de resistência à tração deste material de fio a partir da Equação 14.3 e da Tabela 14-4 e utilize-o para encontrar a resistência ao escoamento sob torção da Tabela 14-8, assumindo que o ajuste tenha sido removido e utilizando a extremidade mais baixa do intervalo recomendado.

$$S_{ut} = Ad^b = 141040(0{,}162)^{-0{,}1822} = 196503 \text{ psi} \tag{d}$$

$$S_{ys} = 0{,}60 S_{ut} = 0{,}60(196503) = 117902 \text{ psi} \tag{e}$$

5 Encontre o coeficiente de segurança contra escoamento para essa deflexão de trabalho a partir da Equação 14.15.

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} = \frac{117902 \text{ psi}}{123714 \text{ psi}} = 0{,}95 \tag{f}$$

Este valor é obviamente inaceitável, de maneira que o projeto deve ser reiterado com alguns parâmetros modificados.

6 Tente aumentar o diâmetro do fio ligeiramente, talvez para 0,192 in, mantendo o mesmo índice de mola. Recalcule o diâmetro de espira, a tensão, a resistência e o coeficiente de segurança.

$$D = Cd = 8(0{,}192) = 1{,}54 \text{ in} \tag{g}$$

$$\tau = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} = 1{,}06 \frac{8(150)(1{,}54)}{\pi(0{,}192)^3} = 88074 \text{ psi} \tag{h}$$

$$S_{ut} = Ad^b = 141040(0{,}192)^{-0{,}1822} = 190513 \text{ psi} \tag{i}$$

$$S_{ys} = 0{,}60 S_{ut} = 0{,}60(190513) = 114308 \text{ psi} \tag{j}$$

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} = \frac{114308 \text{ psi}}{88074 \text{ psi}} = 1{,}30 \tag{k}$$

Esses valores parecem aceitáveis, de maneira que podemos proceder com o projeto dos outros parâmetros a partir deste ponto.

7 A constante de mola é definida neste problema por meio dos dois valores de força relativamente a um valor particular de deflexão.

$$k = \frac{\Delta F}{y} = \frac{150 - 100}{0{,}75} = 66{,}7 \text{ lb/in} \tag{l}$$

8 Para obter a constante de mola, o número de espiras ativas deve satisfazer à Equação 14.7:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \quad \text{ou} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{(0{,}192)^4\, 11{,}5E6}{8(1{,}54)^3\, 66{,}67} = 8{,}09 \cong 8 \tag{m}$$

Observe que arredondamos este valor para o valor de 1/4 de espira mais próximo, uma vez que a tolerância de manufatura não pode chegar a algo melhor que esta precisão. Isso torna a constante de mola $k = 66{,}86$ lbf/in.

9 Pressuponha extremidades esquadrejadas e esmerilhadas fazendo o número total de espiras da Figura 14-9:

$$N_t = N_a + 2 = 8 + 2 = 10 \tag{n}$$

10 A altura fechada pode agora ser determinada.

$$L_s = dN_t = 0{,}192(10) = 1{,}92 \text{ in} \qquad (o)$$

11 A deflexão inicial para alcançar a menor das duas cargas especificadas é

$$y_{inicial} = \frac{F_{inicial}}{k} = \frac{100}{66{,}86} = 1{,}48 \text{ in} \qquad (p)$$

12 Pressuponha uma tolerância de contato de 15% da deflexão de trabalho:

$$y_{interf} = 0{,}15y = 0{,}15(0{,}75) = 0{,}113 \text{ in} \qquad (q)$$

13 O comprimento livre (ver a Figura 14-8) pode ser encontrado a partir de:

$$L_f = L_s + y_{interf} + y_{trabalho} + y_{inicial} = 1{,}92 + 0{,}113 + 0{,}75 + 1{,}48 = 4{,}26 \text{ in} \qquad (r)$$

14 A deflexão para a altura fechada é

$$y_{fechada} = L_f - L_s = 4{,}26 - 1{,}92 = 2{,}34 \text{ in} \qquad (s)$$

15 A força nesta deflexão de altura fechada é

$$F_{fechada} = k\, y_{fechada} = 67{,}4(2{,}34) = 158 \text{ lb} \qquad (t)$$

16 A tensão de altura fechada e o coeficiente de segurança são

$$\tau_{fechada} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} = 1{,}06 \frac{8(158)(1{,}54)}{\pi(0{,}192)^3} = 92794 \text{ psi} \qquad (u)$$

$$N_{s_{fechada}} = \frac{S_{ys}}{\tau_{fechada}} = \frac{114308 \text{ psi}}{92794 \text{ psi}} = 1{,}2 \qquad (v)$$

o que é aceitável.

17 Para verificar a flambagem, duas razões necessitam ser calculadas, L_f / D e y_{max} / L_f.

$$\frac{L_f}{D} = \frac{4{,}26}{1{,}54} = 2{,}77$$

$$\frac{y_{max}}{L_f} = \frac{y_{inicial} + y_{trabalho}}{L_f} = \frac{1{,}48 + 0{,}75}{4{,}26} = 0{,}52 \qquad (w)$$

Leve esses dois valores à Figura 14-14 e verifique que suas coordenadas estão seguramente dentro das zonas estáveis contra flambagem (flambagem para cada caso de condição de extremidade).

18 Os diâmetros interno e externo das espiras são

$$D_o = D + d = 1{,}54 + 0{,}192 = 1{,}73 \text{ in}$$
$$D_i = D - d = 1{,}54 - 0{,}192 = 1{,}34 \text{ in} \qquad (x)$$

19 O menor furo e o maior pino que podem ser utilizados com estas molas são

$$furo_{min} = D_o + 0{,}05D = 1{,}73 + 0{,}05(1{,}54) = 1{,}81 \cong 1\tfrac{13}{16} \text{ in}$$
$$pino_{max} = D_i - 0{,}05D = 1{,}34 - 0{,}05(1{,}54) = 1{,}26 \cong 1\tfrac{1}{4} \text{ in} \qquad (y)$$

20 O peso total de mola é

$$W_t = \frac{\pi^2 d^2 D N_t \rho}{4} = \frac{\pi^2 (0{,}192)^2 (1{,}54)(10)(0{,}28)}{4} = 0{,}40 \text{ lb} \qquad (z)$$

21 Temos então uma especificação completa do projeto desta mola de fio A227:

$$d = 0{,}192 \text{ in} \qquad OD = 1{,}73 \text{ in} \qquad N_t = 10, \text{ esq \& esm} \qquad L_f = 4{,}26 \text{ in} \quad (aa)$$

Outros parâmetros de mola para este exemplo são mostrados na Tabela 14-10.

22 Os modelos deste exemplo estão no CD-ROM como EX14-03. Existem também abordagens alternativas para a solução deste exemplo em arquivos *Mathcad* e *TK Solver* no CD-ROM com uma letra acrescentada aos seus nomes.

14.6 DIMENSIONAMENTO DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO À FADIGA

Quando as cargas na mola são dinâmicas (variam com o tempo), uma situação de fadiga existe na mola. O procedimento de projeto para carga dinâmica é similar àquele para cargas estáticas, porém com algumas diferenças significativas. Uma mola carregada dinamicamente operará entre dois níveis de força: F_{min} e F_{max}. A partir desses valores, as componentes média e alternada da força podem ser calculadas a partir de

$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} \qquad F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} \tag{14.16a}$$

Uma **razão de força** R_F pode também ser definida como:

$$R_F = \frac{F_{min}}{F_{max}} \tag{14.16b}$$

Nos casos mais comuns de carregamento de molas, F_{min} e F_{max} são positivos, com a razão de força sendo aproximadamente $0 < R_F < 0{,}8$. Como descrito na discussão de tensões residuais, deve-se evitar o carregamento bidirecional das espiras de mola, já que isso causa falha prematura.

O procedimento de dimensionamento à fadiga segue essencialmente o esboçado na seção anterior para carregamento estático. Será um problema iterativo. Um diâmetro inicial d deve ser assumido e um índice de mola C razoável precisa ser escolhido, a partir do qual o diâmetro de espira D pode ser calculado utilizando a Equação 14.5. Um material de mola também deve ser escolhido, e as resistências relevantes do material, calculadas com base no diâmetro assumido para o fio. Os limites de resistência ao cisalhamento, de resistência ao escoamento sob cisalhamento e de resistência à fadiga (ou resistência à fadiga correspondente a determinado número de ciclos) são todos necessários. A definição do problema normalmente contém informação suficiente para estimar o número de ciclos de vida requeridos. Para carregamento dinâmico, as componentes alternada e média de tensão são calculadas separadamente (usando F_{min} e F_{max} a partir da Equação 14.16*a*).

O carregamento unidirecional, também chamado de carregamento variado ou de cargas repetidas no Capítulo 6, possui tensão média diferente de zero e, portanto, requer o uso do diagrama de Goodman para a análise de falha. Uma vez que todas as tensões significativas nessa mola são tensões de cisalhamento por torção e a maior parte dos dados de resistência do material são para carregamento torcional, utilizaremos um **diagrama de Goodman torcional**, como discutido anteriormente. O diagrama de Goodman modificado é construído como mostrado nas Figuras 14-16 e 14-17 com a resistência à fadiga torcional do fio S_{fw} ou o li-

Tabela 14-10 Exemplo 14-3 Projeto de mola helicoidal de compressão para carregamento estático[§]

Entrada[§]	Variável	Saída[§]	Unidade	Comentários[¶]
8	*C*			índice de mola inicial
0,192	*dia*			diâmetro de fio inicial
0,750	*y*		in	deflexão de mola
15	*comprimento de interferência*		%	% de deflexão para interferência
'hdrawn	*matl*			um entre 'music,'oiltemp,'hdrawn, 'chromev, etc.
'sqgrnd	*extremidade*			um entre, 'plain, 'pgrnd, 'square, 'sqgrnd
'unpeen	*superfície*			um entre, 'unpeen, 'peen
'set	*setflag*			um entre, 'set e 'unset
150	*Fmax*		lb	força aplicada máxima
100	*Fmin*		lb	força aplicada mínima
	Ffechada	158	lb	força à altura de fechamento
	k	67,4	lb/in	constante de mola com N_a arredondado
	Na	8		n° de espiras ativas – para o próximo 1/4 de espira
	Ntot	10		n° de espiras total
	D	1,54	in	diâmetro médio de espira
	Dout	1,73	in	diâmetro externo de espira
	Din	1,34	in	diâmetro interno de espira
	Ks	1,06		fator estático – cisalhamento direto – Equação 14.8
	Kw	1,18		fator de Wahl – Equação 14.9
	tauinit	58716	psi	tensão de cisalhamento no comprimento instalado
	taustat	88074	psi	tensão de cisalhamento a Fmax para carregamento estático
	taushut	92478	psi	tensão na altura fechada
	Sut	190513	psi	resistência à tração – Equação 14.3 e Tabela 14-4
	Sus	127644	psi	resistência máxima de cisalhamento – Equação 14.4
	Sys	114308	psi	escoamento de cisalhamento baseado na Tabela 14-6
	Ns_estát	1,30		coeficiente de segurança – carga estática em Fmax
	Ns-fechada	1,23		coeficiente de segurança – altura fechada (escoamento)
	Lf	4,26	in	comprimento livre
	Linstal	2,78	in	comprimento instalado
	Lcomp	2,03	in	comprimento, comprimida
	Lfechado	1,92	in	comprimento, fechada
	yinit	1,48	in	deflexão inicial de montagem
	ymax	2,23	in	máxima deflexão em trabalho
	yinterf	0,113	in	tolerância de interferência de espiras
	yfechada	2,34	in	deflexão na altura fechada

[§] N. de R.: No sistema americano, é usado ponto decimal em vez de vírgula.
[¶] N. de R.: Termos relativos ao tratamento dos materiais na Tabela 14-1: "hdrawn" = encruado; "oiltemp" = revenido em óleo; "chromev" = cromo vanádio. Termos relativos a detalhes das extremidades na Figura 14-9: "sqgrnd" = esquadrejada e esmerilhada; "plain" = simples; "pgrnd" = simples e esmerilhada; "square" = esquadrejada; "sqgrnd" = esquadrejada e esmerilhada. Termos relativos a tensões residuais: "unpeen"= não jateada; "peen" = jateada.

mite de resistência à fadiga do fio S_{ew} definidos ao longo de uma linha que forma 45°, a partir da origem, para representar os dados de teste que foram gerados a $R_F = 0$. A Figura 14-17 utiliza o valor do limite de resistência à fadiga sob torção do fio S_{ew} para vida infinita de fio de aço jateado em combinação com o limite de resistência à torção S_{us} para gerar a linha de Goodman torcional.

A linha de carga, que representa o estado de tensão aplicado, não é desenhada a partir da origem neste caso, mas a partir de um ponto no eixo τ_m representando a tensão inicial nas espiras τ_i resultantes da montagem, como mostrado na Figura 14-17. Isso corresponde a pressupor que alguma pré-carga é aplicada às molas, o que costuma ser o caso. Não queremos $F_{min} = 0$ em uma situação de carga dinâmica, uma vez que isso irá criar condições para a presença de cargas de impacto nas espiras (ver a Seção 3.8). Se $F_{min} = 0$, a linha de carga iria começar na origem. O coeficiente de segurança para fadiga torcional pode ser expresso como a razão entre a resistência alternada S_a na intersecção da linha de carga e a linha de Goodman (ponto *D)* e a tensão alternante aplicada τ_a no ponto *E.*

$$N_{fs} = S_a / \tau_a \tag{14.17a}$$

Essa razão pode ser deduzida a partir da geometria das duas linhas. Suponha que x seja a variável independente no eixo das tensões médias, m a inclinação da linha e b seu valor quando intercepta y. Suponha que y_{carreg} seja o valor na linha de carga para qualquer x. A equação da linha de carga é

$$y_{carreg} = m_{carreg} x + b_{carreg}$$

A partir da geometria, $\quad m_{carreg} = \dfrac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i} \quad$ e $\quad b_{carreg} = -m_{carreg}\tau_i$

$$y_{carreg} = \frac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i}(x - \tau_i) \tag{14.17b}$$

Suponha que o valor na intersecção na linha de Goodman, para qualquer valor de x, seja y_{Good}. Assim, sua equação será:

$$y_{Good} = m_{Good} x + b_{Good}$$

A partir da geometria, $\quad m_{Good} = -\dfrac{S_{es}}{S_{us}} \quad$ e $\quad b_{Good} = S_{es}$

$$y_{Good} = -\frac{S_{es}}{S_{us}} x + S_{es} = S_{es}\left(1 - \frac{x}{S_{us}}\right) \tag{14.17c}$$

No ponto de falha, $y_{carreg} = y_{Good}$. Igualando 14.16*b* e *c* e resolvendo para x, temos

$$S_{es}\left(1 - \frac{x}{S_{us}}\right) = \frac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i}(x - \tau_i)$$

$$x = \frac{S_{us}\left[S_{es}(\tau_i - \tau_m) - \tau_a \tau_i\right]}{S_{es}(\tau_i - \tau_m) - S_{us}\tau_a} \tag{14.17d}$$

Substituindo a Equação 14.17*c* em 14.16*a*:

$$N_{fs} = S_a / \tau_a = y_{Good} / \tau_a = S_{es}\left(1 - \frac{x}{S_{us}}\right) \Big/ \tau_a \tag{14.17e}$$

Substituindo a Equação 14.17*d* em 14.16*e* e simplificando, determinamos o coeficiente de segurança como

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_i)}{S_{es}(\tau_m - \tau_i) + S_{us}\tau_a} \tag{14.18a}$$

sendo que o limite de resistência à fadiga sob carregamento alternado (ponto *C*) do Exemplo 14-2 é

$$S_{es} = 0,5 \frac{S_{ew} S_{us}}{S_{us} - 0,5 S_{ew}} \tag{14.18b}$$

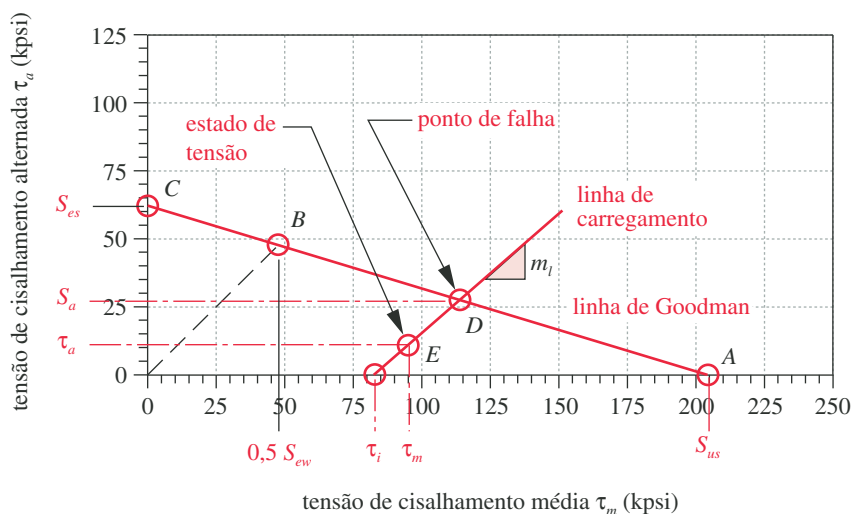



FIGURA 14-17

Diagrama de Goodman modificado mostrando a linha de carga e dados necessários para cálculo do coeficiente de segurança de uma mola de compressão carregada dinamicamente.

Este procedimento pressupõe que a pré-carga não variará de forma significativa durante a vida do componente e que também qualquer aumento no carregamento será tal que uma razão constante entre as componentes alternada e média de tensão será mantida. Isso corresponde ao Caso 3 na Figura 6-46. Se, contudo, esta não for a situação, então um dos outros casos da Seção 6.11 deve ser utilizado para determinar o coeficiente de segurança pelo método das Equações 14.16. Ainda assim, a tensão sob carregamento inicial deve ser levada em conta, e esta pode variar em condições de serviço.

Se o coeficiente de segurança é muito baixo, o diâmetro do fio, o índice de mola ou o material podem ser mudados para melhorar os resultados. Uma vez que o coeficiente de segurança à fadiga seja aceitável, um número inicial de espiras e um limite de interferência podem ser assumidos e cálculos sequenciais para a constante de mola, deflexão e comprimento livre, utilizando as Equações 14.6 e 14.7, desenvolvidos. Valores não razoáveis de quaisquer destes parâmetros requererão que novas iterações sejam feitas utilizando modificações de hipóteses.

Após várias iterações, uma combinação razoável de parâmetros pode ser encontrada normalmente. Algumas das coisas que devem ser verificadas antes que o projeto esteja completo são a tensão correspondente à condição de mola fechada *versus* a resistência ao escoamento, os diâmetros D_i, D_o, e o comprimento livre da mola para efeitos de empacotamento. Além disso, a possibilidade de flambagem deve ser verificada, e, para cargas dinâmicas, a frequência natural da mola deve ser comparada com todas as frequências aplicadas no sistema a fim de resguardar-nos contra a ressonância.

O dimensionamento de molas à fadiga melhora substancialmente com a ajuda de um computador. Solucionadores de equações que permitem iterações automatizadas são extremamente adequados para este tipo de tarefa, uma vez que resolvem todos os aspectos do problema de forma simultânea. Apresentaremos agora um exemplo de dimensionamento de mola sob carregamento que produz fadiga.

EXEMPLO 14-4

Projeto de uma mola helicoidal de compressão para carregamento cíclico

Problema **Projete uma mola de compressão para carregamento dinâmico em um intervalo de deflexão.**

Dados **A mola deve produzir uma força mínima de 60 lbf e uma força máxima de 150 lbf em um intervalo de deflexão dinâmica de 1,00 in. A frequência de excitação é de 1000 rpm. Uma vida de 10 anos baseada em único turno de trabalho é desejada.**

Hipóteses **Fio musical (ASTM A228) será utilizado, uma vez que as cargas são dinâmicas. Será utilizado o jateamento para que se obtenha uma resistência à fadiga maior.**

Solução **Ver as Figuras 14-18 e 14-19 e a Tabela 14-11.**

1 Determine o número de ciclos que a mola verá durante a sua vida.

$$N_{vida} = 1000 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \right) \left(\frac{2080 \text{ h}}{\text{turno-ano}} \right) (10 \text{ ano}) = 1,2E9 \text{ ciclos} \tag{a}$$

Este número bem alto requer que um limite de duração para vida infinita seja utilizado.

2 Determine as forças média e alternada a partir da Equação 14.16*a*:

$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = \frac{150 - 60}{2} = 45 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} = \frac{150 + 60}{2} = 105 \text{ lb} \tag{b}$$

3 Pressuponha um diâmetro de fio de 0,207 in a partir dos tamanhos disponíveis na Tabela 14-2. Pressuponha um índice de mola 9 e calcule o diâmetro médio de espira D a partir da Equação 14.5.

$$D = Cd = 9(0,207) = 1,863 \text{ in} \tag{c}$$

4 Encontre o fator de cisalhamento direto, K_s, e utilize-o para calcular a tensão inicial, τ_i, correspondente à deflexão inicial (valor mínimo de força) e a tensão média, τ_m:

$$K_s = 1 + \frac{0,5}{C} = 1 + \frac{0,5}{9} = 1,056 \tag{d}$$

$$\tau_i = K_s \frac{8F_i D}{\pi d^3} = 1,056 \frac{8(60)(1,863)}{\pi(0,207)^3} = 33875 \text{ psi} \tag{e}$$

$$\tau_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1,056 \frac{8(105)(1,863)}{\pi(0,207)^3} = 59281 \text{ psi} \tag{f}$$

5 Encontre o fator de Wahl, K_w, e use-o para calcular a tensão de cisalhamento alternada, τ_a, na espira.

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} = \frac{4(9) - 1}{4(9) - 4} + \frac{0,615}{9} = 1,162 \tag{g}$$

$$\tau_a = K_w \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1,162 \frac{8(45)(1,863)}{\pi(0,207)^3} = 27970 \text{ psi} \tag{h}$$

6 Determine o limite de resistência à tração deste fio de material musical a partir da Equação 14.3 e da Tabela 14-4 e utilize-o para calcular o limite de resistência ao cisalhamento a partir da Equação 14.4 e a resistência de escoamento por torção da Tabela 14-8, assumindo que o ajuste, a deformação permanente, tenha sido removido e utilizando a extremidade inferior do intervalo recomendado.

$$S_{ut} = Ad^{b} = 184649(0,207)^{-0,1625} = 238507 \text{ psi}$$

$$S_{us} = 0,67 S_{ut} = 159800 \text{ psi} \qquad (i)$$

$$S_{ys} = 0,60 S_{ut} = 0,60(238507) = 143104 \text{ psi} \qquad (j)$$

7 Encontre o limite de duração para molas jateadas sob carregamento repetido a partir da Equação 14.13 e converta-o para o limite de resistência à fadiga sob condições completamente reversas com a Equação 14.18*b*.

$$S_{ew} = 67500 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$S_{es} = 0,5\frac{S_{ew}S_{us}}{S_{us} - 0,5S_{ew}} = 0,5\frac{67500(159800)}{159800 - 0,5(67500)} = 42787 \text{ psi} \qquad (l)$$

8 O coeficiente de segurança é calculado com a Equação 14.18*a*.

$$N_{fs} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_i)}{S_{es}(\tau_m - \tau_i) + S_{us}\tau_a}$$

$$= \frac{42787(159800 - 33875)}{42787(59281 - 33875) + 159800(27970)} = 1,0 \qquad (m)$$

Este é obviamente um projeto que não pode ser aceito. Para ter uma ideia do que modificar para melhorá-lo, o modelo foi resolvido para uma lista de valores do índice de mola, C, de 4 a 14, mantendo todos os outros parâmetros como definido acima. Os valores resultantes de diâmetro de espira, comprimento livre, peso de mola e coeficiente de segurança à fadiga torcional são plotados na Figura 14-18. Observe que o diâmetro de mola foi mantido constante para gerar a variação dos parâmetros com o índice de mola, como mostrado na Figura 14-18. Se outro parâmetro, como o diâmetro mé-

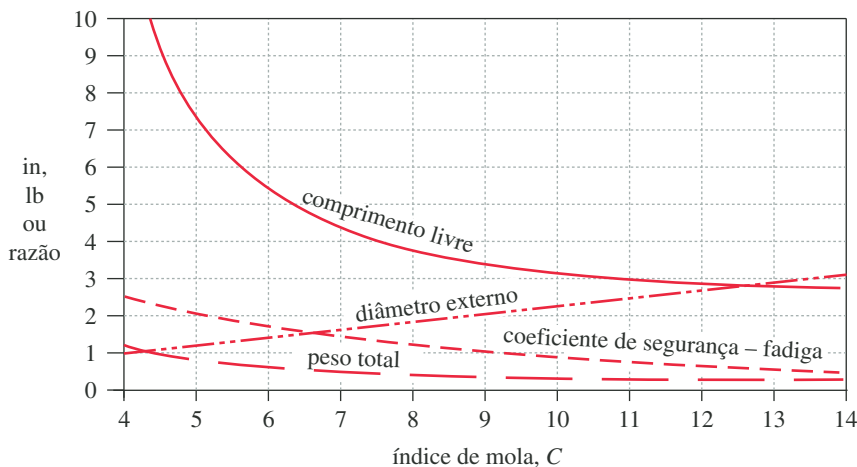



FIGURA 14-18

Variação de parâmetros de uma mola helicoidal de compressão com o índice de mola – diâmetro constante de fio.

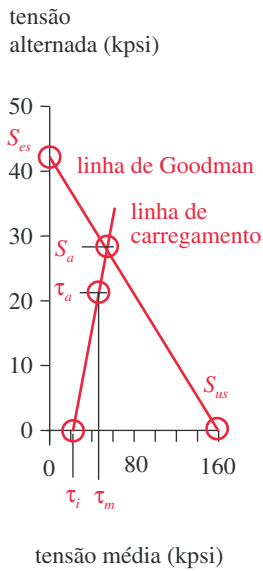



FIGURA 14-19

Diagrama de Goodman para tensão torcional do Exemplo 14-4.

dio de espira D, fosse mantido constante, um conjunto diferente de funções resultaria para o comprimento livre, peso, coeficiente de segurança, etc.

O coeficiente de segurança aumenta com o decréscimo do índice de mola, portanto uma redução no valor que se assumiu para C irá aumentar o coeficiente de segurança, ainda que não se modifique o diâmetro de fio. Observe que o comprimento livre aumenta exponencialmente com o decréscimo do índice de mola. Se o tamanho empacotado da mola é limitado, podemos não querer diminuir o índice de mola para evitar um comprimento excessivo. O diâmetro de espira aumenta linearmente com o índice de mola para um diâmetro constante de fio. O peso da mola cai vagarosamente com o aumento do índice de mola.

Se diminuirmos o índice de mola de 9 para 7, mantendo todos os outros parâmetros iguais, obteremos um projeto aceitável com $N_f = 1{,}3$. A Tabela 14-11 mostra os resultados deste novo cálculo, assim como dos cálculos delineados abaixo para completar o projeto. A Figura 14-19 mostra o diagrama de Goodman modificado para o projeto final. Um resumo das variáveis modificadas inclui

$$\begin{array}{llll} C = 7 & D = 1{,}45 \text{ in} & K_w = 1{,}21 & K_s = 1{,}07 \\ \tau_i = 26743 \text{ psi} & \tau_a = 22705 \text{ psi} & \tau_m = 46800 \text{ psi} & N_{f_s} = 1{,}3 \end{array} \tag{n}$$

9 A constante de mola é definida a partir das duas forças especificadas pela deflexão relativa.

$$k = \frac{\Delta F}{y} = \frac{150 - 60}{1{,}0} = 90 \text{ lb/in} \tag{o}$$

10 Para obter a constante de mola definida, o número de espiras ativas deve satisfazer a Equação 14.7:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \quad \text{ou} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{(0{,}207)^4 \, 11{,}5E6}{8(1{,}45)^3 (90)} = 9{,}64 \cong 9\tfrac{3}{4} \tag{p}$$

Observe que arredondamos para o 1/4 de espira mais próximo, uma vez que as tolerâncias de fabricação não podem atingir melhor precisão. Isso faz com que a constante de mola fique em $k = 89$ lbf/in.

11 Pressuponha extremidades esquadrejada e esmerilhadas, de forma que o número total de espiras seja, a partir da Figura 14-9:

$$N_t = N_a + 2 = 9{,}75 + 2 = 11{,}75 \tag{q}$$

12 O comprimento fechado agora pode ser determinado.

$$L_s = dN_t = 0{,}207(11{,}75) = 2{,}43 \text{ in} \tag{r}$$

13 A deflexão inicial para alcançar a menor das duas cargas especificadas é

$$y_{inicial} = \frac{F_{inicial}}{k} = \frac{60}{89} = 0{,}674 \text{ in} \tag{s}$$

14 Pressuponha uma tolerância de contato de 15% da deflexão de trabalho:

$$y_{interf} = 0{,}15y = 0{,}15(1{,}0) = 0{,}15 \text{ in} \tag{t}$$

15 O comprimento livre (ver a Figura 14-8) pode ser determinado agora a partir de

$$L_f = L_s + y_{interf} + y_{trabalho} + y_{inicial} = 1{,}82 + 0{,}15 + 1{,}0 + 0{,}674 = 4{,}25 \text{ in} \tag{u}$$

16 A deflexão correspondente ao comprimento fechado é

$$y_{fechada} = L_f - L_s = 4,25 - 2,43 = 1,82 \text{ in} \qquad (v)$$

17 A força relativa a essa deflexão de comprimento fechado é

$$F_{fechada} = k\, y_{fechada} = 89(1,82) = 162 \text{ lb} \qquad (w)$$

18 A tensão correspondente a este comprimento fechado e o coeficiente de segurança são

$$\tau_{fechada} = K_s \frac{8F_{fechada}D}{\pi d^3} = 1,07\frac{8(164)(1,45)}{\pi(0,207)^3} = 72875 \text{ psi} \qquad (x)$$

$$N_{s\,fechada} = \frac{S_{ys}}{\tau_{fechada}} = \frac{143104 \text{ psi}}{72875 \text{ psi}} = 2,0 \qquad (y)$$

o que é aceitável.

19 Para verificar a flambagem, duas razões necessitam ser calculadas, L_f / D e y_{max} / L_f.

$$\frac{L_f}{D} = \frac{4,25}{1,45} = 2,93$$

$$\frac{y_{max}}{L_f} = \frac{y_{inicial} + y_{trabalho}}{L_f} = \frac{0,674 + 1,0}{4,25} = 0,39 \qquad (z)$$

Leve esses dois valores à Figura 14-14 e verifique que as suas coordenadas estão seguramente dentro das regiões que são estáveis contra a flambagem para ambas as condições de extremidade.

20 O peso das espiras ativas da mola, determinado da Equação 14.12*b*, é

$$W_a = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4} = \frac{\pi^2(0,207)^2(1,45)(9,75)(0,285)}{4} = 0,426 \text{ lb} \qquad (aa)$$

21 A frequência natural desta mola é encontrada a partir da Equação 14.12*a* e é:

$$f_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{89(386)}{0,426}} = 142 \text{ Hz} = 8521 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} \qquad (ab)$$

A razão entre a frequência natural e a frequência aplicada é:

$$\frac{8520}{1000} = 8,5 \qquad (ac)$$

que é suficientemente alta.

22 A especificação de projeto para este fio de mola A228 é:

$$d = 0,207 \text{ in} \qquad D_o = 1,66 \text{ in} \qquad N_t = 11,75, \text{ esq \& esm} \qquad L_f = 4,25 \qquad (ad)$$

23 Valores detalhados são mostrados na Tabela 14-11. Os arquivos EX14-04 estão no CD-ROM. Há também abordagens alternativas para a solução deste problema mostradas separadamente em arquivos *Mathcad* e *TK Solver* no CD-ROM com uma letra acrescentada aos seus nomes.

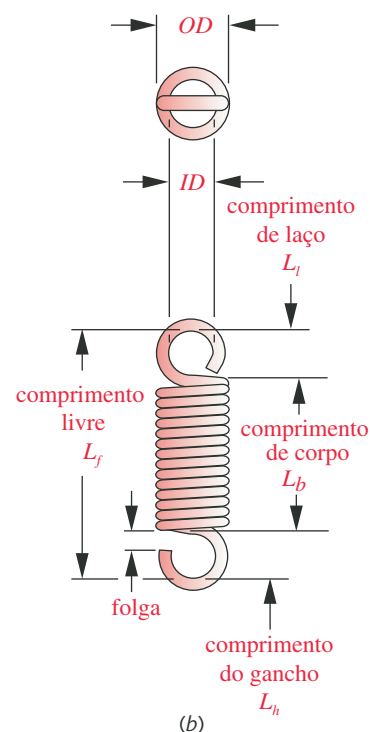
(*a*)

(*b*)

FIGURA 14-20

(*a*) Exemplos de molas e (*b*) dimensões de uma mola de extensão.

Tabela 14-11 Exemplo 14-4 Mola helicoidal de compressão para carga dinâmica

Entrada	Variável	Saída[§]	Unidade	Comentários
1000	*rpm*		rpm	frequência de excitação
7	*C*			índice de mola inicial
0,207	*d*		in	diâmetro disponível de fio (função Lista)
1	*y*		in	deflexão de mola
'music	*matl*			um entre: 'music,'oiltemp,'hdrawn,..
'sqgrnd	*extremidade*			um entre: 'plain,'pgrnd,'square,'sqgrnd
'peen	*superfície*			um entre: 'unpeen e 'peen
'set	*setflag*			ativa para mola ajustada, inativa de outra forma
150	*Fmax*		lb	máxima força aplicada
60	*Fmin*		lb	mínima força aplicada
	Falt	45	lb	força alternante
	Fmédia	105	lb	força média
	Ffechada	164	lb	força na altura fechada
	k	89	lb/in	constante de mola com N_a arredondado
	Na	9,75		n° de espiras ativas – arredondado para o próximo 1/4 de espira
	Nt	11,75		n° total de espiras
	D	1,45	in	diâmetro médio das espiras
	Dext	1,66	in	diâmetro externo das espiras
	Dint	1,24	in	diâmetro interno das espiras
	Ks	1,97		fator estático – cisalhamento direto – Equação 14.8
	Kw	1,21		fator de Wahl – Equação 14.9
	tauinic	26743	psi	tensão de cisalhamento no comprimento instalado
	taufechada	72875	psi	tensão na altura fechada
	taualt	22705	psi	tensão alternada de cisalhamento para fadiga
	taumédia	46800	psi	tensão média de cisalhamento para fadiga
	Sut	238507	psi	resistência de tração – Equação 14.3 e Tabela 14-4
	Sus	159800	psi	resistência de cisalhamento – Equação 14.4
	Sys	143104	psi	escoamento sob cisalhamento, baseado na Tabela 14-6
	Sew	67500	psi	limite de endurança do fio – Equação 14.12
	Ses	42787	psi	limite de endurança para carregamento alternado – Equação 14.16*b*
	Nf	1,3		coeficiente de segurança – fadiga – Equação 14.14
	Nfechada	2,0		coeficiente de segurança – altura fechada (escoamento)
	Lf	4,25	in	comprimento livre
	Lfechada	2,43	in	altura fechada
	yinic	0,67	in	deflexão inicial de montagem
	yfechada	1,82	in	deflexão até altura fechada
	nf	142	Hz	frequência natural em Hz
	FreqFac	8,5		razão da frequência natural para a frequência excitante

[§] N. de R.: No sistema americano, é usado ponto decimal em vez de vírgula.

14.7 MOLAS HELICOIDAIS DE EXTENSÃO

Molas helicoidais de extensão são similares às molas helicoidais de compressão, mas são carregadas à tração, como mostrado na Figura 14-2*b*. A Figura 14-20 mostra as dimensões significativas de uma mola de extensão. Ganchos ou laços acompanham as molas para permitir que a força de tração seja aplicada. Formas-

-padrão de laço e de gancho são mostradas na figura, ainda que várias modificações sejam possíveis. Ver a referência 1 para obter uma descrição de outras configurações possíveis para ganchos e laços. As formas-padrão são construídas simplesmente por flexão da última espira a 90° do seu corpo. Os laços e ganchos podem ter tensões maiores que o corpo das espiras e podem, portanto, limitar a segurança do projeto. O ajuste das espiras não é feito com molas de extensão, e o jateamento de esferas é impraticável, uma vez que espiras enroladas muito perto escondem umas às outras do jateamento.

FIGURA 14-21

Curva força-deflexão de uma mola helicoidal de extensão mostrando sua tração inicial.

Espiras ativas em molas de extensão

Todas as espiras no corpo da mola são consideradas espiras ativas, mas geralmente uma espira é adicionada ao número de espiras ativas para obter um corpo de comprimento L_b.

$$N_t = N_a + 1 \tag{14.19}$$

$$L_b = dN_t \tag{14.20}$$

O comprimento livre é medido de uma extremidade do interior de uma volta (ou gancho) ao ponto correspondente na próxima e pode ser modificado alterando a configuração de extremidade sem mudar o número de espiras.

Constante de mola para molas de extensão

Espiras de molas de extensão são enroladas de forma apertada, e o fio é torcido à medida que é enrolado, criando assim uma pré-carga nas espiras que deve ser superada quando se quer separá-las. A Figura 14.21 mostra uma curva típica de carga contra deflexão de uma mola helicoidal de extensão. A constante de mola k é linear, com a exceção da porção inicial. A pré-carga F_i é medida por extrapolação da porção linear da curva em direção ao eixo da força. A constante de mola pode ser expressa como

$$k = \frac{F - F_i}{y} = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \tag{14.21}$$

Observe que nenhuma deflexão ocorre até que a força aplicada exceda a pré-carga F_i que é imposta à mola.

Índice de mola para molas de extensão

O índice de mola é encontrado a partir da Equação 14.5 e deve ser mantido no mesmo intervalo de 4 a 12, como recomendado para o caso de molas helicoidais de compressão.

Pré-carga de espiras em molas de extensão

A pré-carga F_i pode ser controlada, até certo ponto, durante o processo de fabricação de molas e deve ser especificada de maneira a manter as tensões iniciais dentro do intervalo preferencial, como mostrado na Figura 14-22.[1] Esta mostra os intervalos desejáveis para a tensão inicial nas espiras como uma função do índice de mola. Valores fora desse intervalo são possíveis, porém conduzem a dificuldades de fabricação. As funções cúbicas foram ajustadas às curvas da Figura 14-22 para permitir que sejam utilizadas em programas de computador. As expressões da aproximação cúbica são mostradas na figura e são

$$\tau_i \cong -4,231C^3 + 181,5C^2 - 3387C + 28640 \tag{14.22a}$$

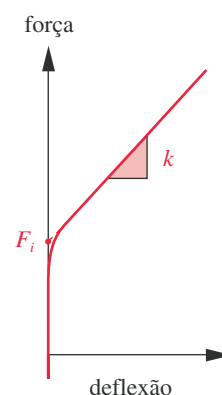
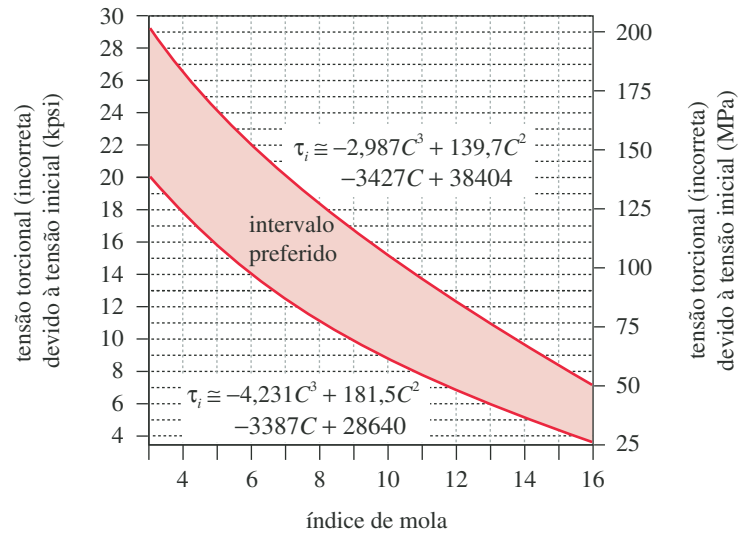



FIGURA 14-22

Intervalo preferido de tensão inicial em molas de extensão como uma função do índice de mola.

$$\tau_i \cong -2{,}987C^3 + 139{,}7C^2 - 3427C + 38404 \tag{14.22b}$$

onde τ_i é expressa em psi. A média dos dois valores calculados com o uso dessas funções pode ser considerada como um bom valor inicial para a tensão na espira.

tensão máxima de flexão

tensão máxima de torção

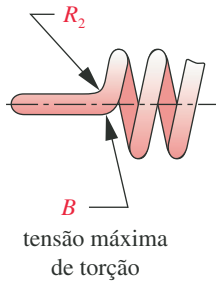
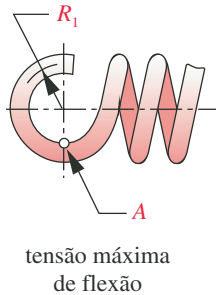



FIGURA 14-23

Pontos de máxima tensão no gancho ou laço de uma mola de extensão.

Deflexão de molas de extensão

A deflexão de espiras é calculada a partir da mesma equação utilizada no caso de molas helicoidais à compressão, com a modificação da pré-carga.

$$y = \frac{8(F - F_i)D^3 N_a}{d^4 G} \tag{14.23}$$

Tensões nas espiras de molas de extensão

As tensões nas espiras são encontradas com as mesmas fórmulas utilizadas no caso de molas helicoidais à compressão. Ver as Equações 14.8 e 14.9. Os fatores K_s e K_w são utilizados como anteriormente.

Tensões de extremidade em molas de extensão

Os ganchos e laços padrão possuem dois pontos de alta tensão, como mostrado na Figura 14-23. A máxima tensão de torção ocorre no ponto *B*, onde o raio de flexão é mínimo. Existe também uma componente de tensão devido à flexão no ponto *A* do gancho ou laço, uma vez que a extremidade é carregada como uma viga curva. Wahl também define um fator de concentração de tensão K_b para flexão em um fio curvo.

A tensão de flexão no ponto *A* é encontrada a partir de

$$\sigma_A = K_b \frac{16DF}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \tag{14.24a}$$

onde

$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} \tag{14.24b}$$

e

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} \tag{14.24c}$$

R_1 é o raio médio do laço, como mostrado na Figura 14-23. Observe que para uma extremidade-padrão, o raio médio do laço é idêntico ao raio médio de espira.

A tensão de torção no ponto B é encontrada a partir de

$$\tau_B = K_{w_2} \frac{8DF}{\pi d^3} \tag{14.25a}$$

onde

$$K_{W_2} = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} \tag{14.25b}$$

e

$$C_2 = \frac{2R_2}{d} \tag{14.25c}$$

R_2 é o raio do lado flexionado, como mostrado na Figura 14-23. C_2 deve ser maior que 4.[1]

Ressonância em molas de extensão

A frequência natural de uma mola helicoidal de extensão com ambas as extremidades fixadas de modo a evitar deflexão axial é a mesma que aquela para molas helicoidais sob compressão (ver a Equação 14.12*a*):

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a} \frac{d}{D^2} \sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} \quad \text{Hz} \tag{14.26}$$

Resistência de materiais para molas de extensão

Os mesmos materiais são utilizados para fios de molas helicoidais sob compressão e extensão. Alguns dos dados de resistência desenvolvidos para molas de compressão também são aplicáveis a molas de extensão. A Tabela 14-12 mostra valores recomendados de resistência para escoamento, sob condições estáticas, do corpo da espira e extremidades para torção e flexão. Observe que as resistências à torção de diversos materiais de fio são as mesmas que aquelas apresentadas nas Tabelas 14-8 e 14-9 para molas helicoidais sob compressão. A Tabela 14-13 mostra resistências à fadiga recomendadas para dois materiais a diferentes valores de vida, apresentando dados separados para as espiras de corpo e de extremidades. Os limites de resistência à fadiga da Equação 14.13 são válidos para molas de extensão e devem ser convertidos a valores alternados com a Equação 14.18*b* para que possam ser usados na expressão do coeficiente de segurança da linha de Goodman da Equação 14.18*a*.

Tabela 14-12 Resistências máximas de escoamento de torção S_{ys} e flexão S_y para molas helicoidais de extensão em aplicações estáticas

Sem aplicação de ajuste ou tratamento térmico de baixa temperatura. Fonte: Referência 1

	Percentual máximo do limite de resistência à tração		
	S_{ys} em torção		S_y em flexão
Material	Corpo	Extremidade	Extremidade
Aço-carbono repuxado a frio (por exemplo, A227, A228)	45%	40%	75%
Aço-carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga (por exemplo, A229, A230, A232, A401)	50	40	75
Aço inox. austenítico e ligas não ferrosas (por exemplo, A313, B134, B159, B197)	35	30	55

Dimensionamento de molas helicoidais de extensão

O procedimento de dimensionamento de molas de extensão é essencialmente o mesmo que aquele utilizado para molas de compressão com a complicação adicional introduzida pelos detalhes de extremidade. Hipóteses relativas a um número suficiente de parâmetros de projeto devem ser feitas para que se possa proceder com a iteração inicial. Os valores assumidos são ajustados com base no resultado obtido e as iterações procedem até que se chegue a um valor adequado.

Com frequência, é conveniente, em problemas de dimensionamento de molas de extensão, pressupor um índice de mola e um diâmetro de fio como feito para molas helicoidais sob compressão. O diâmetro médio pode ser encontrado a partir da Equação 14.5. O valor assumido de índice de mola pode ser utilizado com a Equação 14.21 para gerar valores iniciais aproximados das tensões no enrolamento de espiras. Utilizando este valor inicial de tensão, a pré-carga na espira F_i pode ser calculada com o uso da Equação 14.8. As tensões de espira e extremidade podem ser encontradas a seguir e é possível fazer os ajustes apropriados aos valores assumidos para que se obtenham valores aceitáveis dos coeficientes de segurança.

A deflexão ou o número de espiras podem ser encontrados a partir da Equação 14.23 com um deles assumido ou especificado. A constante de mola pode ser encontrada utilizando a máxima força de projeto e a pré-carga em combinação com as deflexões assumidas ou calculadas na Equação 14.21. A flambagem não é um problema no caso de molas helicoidais de extensão, mas a frequência natural deve ser comparada à frequência aplicada nas situações dinâmicas.

Tabela 14-13 Resistência máxima à fadiga torcional S_{fw}' e resistência de fadiga flexional S_{fwb}' para molas helicoidais de extensão de fio de aço ASTM A228 e aço inoxidável tipo 302 em aplicações cíclicas (razão de tensão, $R = 0$)

Sem ressonância, sem jateamento, à temperatura ambiente e com tratamento térmico de baixa temperatura aplicado. Fonte: Referência 1

	Percentual do limite de resistência		
	S_{fw}' em torção		S_{fwb}' em flexão
Vida (ciclos) à fadiga	Corpo	Extremidade	Extremidade
105	36%	34%	51%
106	33	30	47
107	30	28	45

Os coeficientes de segurança são calculados a partir das Equações 14.14 e 14.17, devendo-se ter cuidado na escolha da resistência à torção apropriada para as espiras e à flexão ou cisalhamento para as extremidades. Uma análise baseada na linha de Goodman é necessária para molas carregadas ciclicamente, sendo esta resumida na Equação 14.18. A aplicação de uma análise de fadiga se faz necessária tanto para as espiras quanto para as extremidades.

EXEMPLO 14-5

Projeto de uma mola helicoidal de extensão para carregamento cíclico

Problema **Projete uma mola de extensão para carregamento dinâmico em um intervalo de deflexão dado.**

Dados **A mola deve proporcionar uma força mínima de 50 lbf e uma força máxima de 85 lbf em um intervalo de deflexão dinâmica de 0,50 in. A frequência forçante é de 500 rpm. Vida infinita é desejada.**

Hipóteses **Ganchos padronizados serão utilizados em cada extremidade. Será utilizado fio musical (ASTM A228), uma vez que as cargas são dinâmicas. Ajuste e jateamento não podem ser utilizados para a obtenção de uma resistência à fadiga maior em uma mola de extensão.**

Solução **Ver a Figura 14-24 e a Tabela 14-14.**

1 Pressuponha um diâmetro inicial de fio de 0,177 in dentre os diâmetros disponíveis de fio na Tabela 14-2. Pressuponha um índice de mola $C = 9$ e use-o para calcular o diâmetro médio de espira a partir da Equação 14.5

$$D = Cd = 9(0{,}177) = 1{,}59 \text{ in} \tag{a}$$

2 Use o valor assumido de C para descobrir um valor apropriado da tensão inicial de espira, τ_i, segundo a Equação 14.21:

$$\begin{aligned}\tau_{i_1} &\cong -4{,}231C^3 + 181{,}5C^2 - 3387C + 28640 \\ &= -4{,}231(9)^3 + 181{,}5(9)^2 - 3387(9) + 28640 = 9774 \text{ psi}\end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned}\tau_{i_2} &\cong -2{,}987C^3 + 139{,}7C^2 - 3427C + 38404 \\ &= -2{,}987(9)^3 + 139{,}7(9)^2 - 3427(9) + 38404 = 16699 \text{ psi}\end{aligned} \tag{c}$$

$$\tau_i \cong \frac{\tau_{i_1} + \tau_{i_2}}{2} = \frac{9774 + 16699}{2} = 13237 \text{ psi} \tag{d}$$

3 Determine o fator de cisalhamento direto:

$$K_s = 1 + \frac{0{,}5}{C} = 1 + \frac{0{,}5}{9} = 1{,}06 \tag{e}$$

4 Substitua o valor de K_s do passo 3 e o valor de τ_i da Equação *(d)* do passo 2 para determinar τ_{max} na Equação 14.8*b* de modo a determinar a força de tração inicial, F_i, na espira:

$$F_i = \frac{\pi d^3 \tau_i}{8K_s D} = \frac{\pi(0{,}177)^3(13237)}{8(1{,}06)(1{,}59)} = 17{,}1 \text{ lb} \tag{f}$$

Verifique se essa força é menor que o valor requerido de força aplicada mínima F_{min}, o que neste caso se aplica. Qualquer força aplicada menor que F_i não defletirá a mola.

5 Determine as forças média e alternada com a Equação 14.16*a*:

$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = \frac{85 - 50}{2} = 17{,}5 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} = \frac{85 + 50}{2} = 67{,}5 \text{ lb} \qquad (g)$$

6 Utilize o fator de cisalhamento direto, K_s, e os valores previamente assumidos para determinar a tensão* média, τ_m:

$$\tau_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1{,}06 \frac{8(67{,}5)(1{,}59)}{\pi(0{,}177)^3} = 52122 \text{ psi} \qquad (h)$$

7 Encontre o fator de Wahl, K_w, e use-o para calcular a tensão de cisalhamento alternada, τ_a, na espira.

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0{,}615}{C} = \frac{4(9) - 1}{4(9) - 4} + \frac{0{,}615}{9} = 1{,}16 \qquad (i)$$

$$\tau_a = K_w \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1{,}16 \frac{8(17{,}5)(1{,}59)}{\pi(0{,}177)^3} = 14877 \text{ psi} \qquad (j)$$

8 Determine o limite de resistência à tração deste fio de material musical a partir da Equação 14.3 e da Tabela 14-4. Utilize-o para determinar o limite de resistência ao cisalhamento a partir da Equação 14.4 e a resistência ao escoamento sob torção para o corpo de espira a partir da Tabela 14-12, pressupondo que não se remova qualquer deformação permanente.

$$S_{ut} = Ad^b = 184649(0{,}177)^{-0{,}1625} = 244633 \text{ psi}$$
$$S_{us} = 0{,}667 S_{ut} = 163918 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$S_{ys} = 0{,}45 S_{ut} = 0{,}45(244633) = 110094 \text{ psi} \qquad (l)$$

9 Determine o limite de duração do fio de molas não jateadas usando a Equação 14.14 e converta-o para o limite de resistência à fadiga em condições alternadas utilizando a Equação 14.18*b*.

$$S_{ew} = 45000 \text{ psi} \qquad (m)$$

$$S_{es} = 0{,}5 \frac{S_{ew} S_{us}}{S_{us} - 0{,}5 S_{ew}} = 0{,}5 \frac{45000(163918)}{163918 - 0{,}5(45000)} = 26080 \text{ psi} \qquad (n)$$

10 O coeficiente de segurança para espiras em torção é calculado a partir da Equação 14.18*a*.

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{min})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{min}) + S_{us}\tau_a}$$
$$= \frac{26080(163918 - 38609)}{26080(52122 - 38609) + 163918(14877)} = 1{,}17 \qquad (o)$$

Observe que é usada neste cálculo a tensão mínima devido à força, F_{min}, **não** a tensão no enrolamento de espiras proveniente da Equação (*d*).

* O fator de cisalhamento direto K_s é usado em vez do fator de Wahl para o cálculo da tensão média, uma vez que o fator de concentração de tensão é considerado igual a 1,0 para a tensão média.

11 As tensões nos ganchos de extremidade também precisam ser calculadas. As tensões devidas à flexão nos ganchos são determinadas a partir da Equação 14.24:

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} = \frac{2D}{2d} = C = 9$$

$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(9)^2 - (9) - 1}{4(9)(9 - 1)} = 1{,}09 \qquad (p)$$

$$\sigma_a = K_b \frac{16DF_a}{\pi d^3} + \frac{4F_a}{\pi d^2} = 1{,}09 \frac{16(1{,}59)(17{,}5)}{\pi(0{,}177)^3} + \frac{4(17{,}5)}{\pi(0{,}177)^2} = 28626 \text{ psi}$$

$$(q)$$

$$\sigma_m = K_b \frac{16DF_m}{\pi d^3} + \frac{4F_m}{\pi d^2} = 1{,}09 \frac{16(1{,}59)(67{,}5)}{\pi(0{,}177)^3} + \frac{4(67{,}5)}{\pi(0{,}177)^2} = 110416 \text{ psi}$$

$$\sigma_{min} = K_b \frac{16DF_{min}}{\pi d^3} + \frac{4F_{min}}{\pi d^2} = 1{,}09 \frac{16(1{,}59)(50)}{\pi(0{,}177)^3} + \frac{4(50)}{\pi(0{,}177)^2} = 81790 \text{ psi} \qquad (r)$$

12 Converta a resistência de endurança torcional em uma resistência de endurança por tração utilizando a Equação 14.4 e use-a juntamente com o limite de resistência à tração do passo 8 na Equação 14.18 para determinar o coeficiente de segurança à fadiga para o gancho em flexão:

$$S_e = \frac{S_{es}}{0{,}67} = \frac{26080}{0{,}67} = 37825 \text{ psi}$$

$$N_{f_b} = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_{min})}{S_e(\sigma_{média} - \sigma_{min}) + S_{ut}\sigma_{alt}}$$

$$= \frac{38925(244633 - 81790)}{38925(110416 - 81790) + 244633(28626)} = 0{,}78 \qquad (s)$$

13 As tensões de torção no gancho são determinadas a partir da Equação 14.25 utilizando um valor suposto de $C_2 = 5$.

$$R_2 = \frac{C_2 d}{2} = \frac{5(0{,}177)}{2} = 0{,}44 \text{ in}$$

$$(t)$$

$$K_{w_2} = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(5) - 1}{4(5) - 4} = 1{,}2$$

$$\tau_{B_a} = K_{w_2} \frac{8DF_a}{\pi d^3} = 1{,}19 \frac{8(1{,}59)17{,}5}{\pi(0{,}177)^3} = 15202 \text{ psi}$$

$$\tau_{B_m} = K_{w_2} \frac{8DF_m}{\pi d^3} = 1{,}19 \frac{8(1{,}59)67{,}5}{\pi(0{,}177)^3} = 58637 \text{ psi} \qquad (u)$$

$$\tau_{B_{min}} = K_{w_2} \frac{8DF_{min}}{\pi d^3} = 1{,}19 \frac{8(1{,}59)50}{\pi(0{,}177)^3} = 43435 \text{ psi}$$

14 O coeficiente de segurança à fadiga do gancho em torção é calculado usando a Equação 14.18*a*.

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{\min})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{\min}) + S_{us}\tau_a}$$

$$= \frac{26080(163918 - 43435)}{26080(58637 - 43435) + 163918(15202)} = 1{,}1 \qquad (v)$$

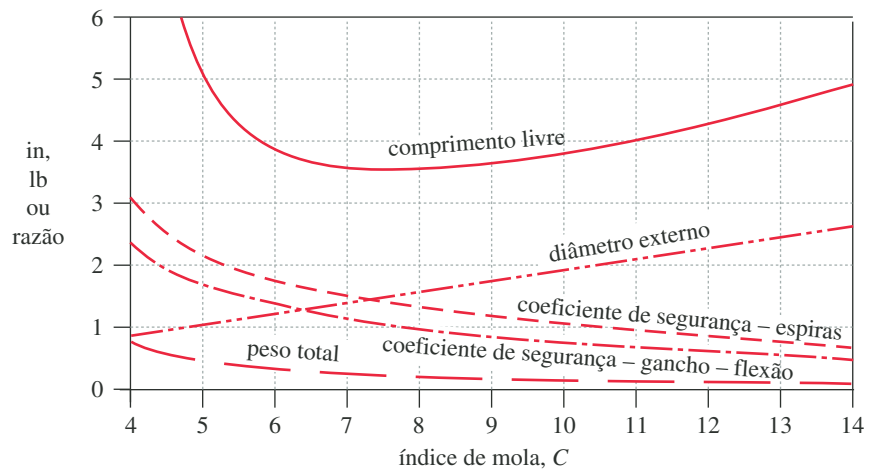



FIGURA 14-24

Variação dos parâmetros de mola helicoidal de extensão com o índice de mola – diâmetro constante de fio.

15 Um desses coeficientes é menor que 1, tornando este projeto inaceitável. Para se ter uma ideia do que mudar para melhorá-lo, o modelo foi resolvido para uma lista de valores de índice de mola de 4 a 14, mantendo todos os outros parâmetros como definido anteriormente. Os valores resultantes de diâmetro da espira, comprimento livre, peso da mola e coeficiente de segurança à fadiga são plotados na Figura 14-24.

O coeficiente de segurança diminui com o aumento do índice de mola, de maneira que uma redução no nosso valor assumido de *C* irá melhorá-lo ainda que não se modifique o diâmetro do fio. Observe, contudo, que o comprimento livre da mola mostra um valor mínimo para um índice de mola ao redor de 7,5. O diâmetro de espira aumenta linearmente com o índice de mola para um diâmetro constante de fio. O peso da mola decai com o aumento no índice de mola.

Se diminuirmos o índice de mola de 9 para 7,5 e aumentarmos o diâmetro de fio um tamanho, para 0,192 in, mantendo todos os outros parâmetros iguais, obteremos um projeto aceitável, neste caso com o mínimo $N_f = 1{,}2$ para o gancho em flexão.

16 A Tabela 14-14 mostra os resultados deste novo projeto. Um resumo dos valores mudados no projeto inclui:

$$
\begin{array}{llll}
C = 7{,}5 & D = 1{,}44 \text{ in} & K_w = 1{,}20 & K_s = 1{,}07 \\
\tau_i = 15481 \text{ psi} & \tau_{min} = 27631 \text{ psi} & \tau_a = 10856 \text{ psi} & \tau_m = 37302 \text{ psi} \\
N_{s_{espira}} = 2{,}3 & N_{f_{s espira}} = 1{,}8 & N_{f_{s_{gancho}}} = 1{,}7 & N_{f_{b_{gancho}}} = 1{,}2
\end{array}
\qquad (w)
$$

O projeto da mola pode ser agora completado com base nos novos diâmetro de fio e índice de mola obtidos no passo 15.

17 A constante de mola é definida a partir dos dois valores especificados de força correspondentes à sua deflexão relativa.

$$k = \frac{\Delta F}{y} = \frac{85 - 50}{0{,}5} = 70 \text{ lb/in} \qquad (x)$$

Tabela 14-14 Exemplo 14-5 Projeto de uma mola helicoidal de extensão para cargas cíclicas
Parte 1 de 2

Entrada§	Variável	Saída§	Unidade	Comentários
500	*fn*		rpm	frequência de excitação
7,50	*C*			índice de mola inicial
0,192	*d*		in	diâmetro inicial de fio (função lista)
0,50	*y*		in	deflexão entre Fmin e Fmax
	ymax	0,81	in	máxima deflexão a Fmax
	ymin	0,31	in	deflexão mínima a Fmin
'music	*matl*			'music,'oiltemp, 'hdrawn,..
85	*Fmax*		lb	força aplicada máxima
50	*Fmin*		lb	força aplicada mínima
	Finic	28,01	lb	força a partir da tração inicial
	Flow	50,00	lb	força mínima aplicada na mola
	Falt	15,50	lb	força alternante
	Fmédia	67,50	lb	força média
	k	70,70	lb/in	constante de mola com N_a arredondado
	N	9,35		n° de espiras ativas – exato
	Na	9,25		n° de espiras ativas – arredondado para o próximo 1/4 de espira
	Ntot	10,25		n° total de espiras
	D	1,44	in	diâmetro médio das espiras
	Dext	1,63	in	diâmetro externo das espiras
	Dint	1,25	in	diâmetro interno das espiras
	Ks	1,07		fator estático – Equação 14.8
	Kw	1,20		fator de Wahl – Equação 14.9
	Tauinic	15481	psi	tensão de cisalhamento a partir da tração inicial
	Taumin	27631	psi	tensão de cisalhamento a Fmin
	Taumax	46973	psi	tensão de cisalhamento a Fmax
	Taualt	10856	psi	tensão de cisalhamento alternada para fadiga
	Taumédia	37302	psi	tensão de cisalhamento média para fadiga
	Sut	241441	psi	resistência à tração – Equação 14.3 e Tabela 14-4
	Sus	161765	psi	limite de resistência ao cisalhamento – Equação 14.4
	Ssy	108648	psi	escoamento sob cisalhamento baseado na Tabela 14-10
	Ssyh	96576	psi	escoamento sob escoamento no gancho – Tabela 14-10
	Sew	45000	psi	limite de resistência do fio – Equação 14.12
	Ses	26135	psi	limite de endurança sob condições alternadas – Equação 14.16*b*
	Sy	181081	psi	resistência ao escoamento em flexão
	Se	39008	psi	limite de endurança sob tração

§ N. de R.: No sistema americano, é usado ponto decimal em vez de vírgula.

18 Para obter a constante de mola definida, o número de espiras ativas deve satisfazer à Equação 14.7:

$$k = \frac{d^4 G}{8 D^3 N_a} \quad \text{ou} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8 D^3 k} = \frac{(0{,}192)^4\, 11{,}5E6}{8(1{,}44)^3 (70)} = 9{,}35 \cong 9\tfrac{1}{4} \qquad (y)$$

Tabela 14-14 Exemplo 14-5 Projeto de uma mola helicoidal de extensão para cargas cíclicas
Parte 2 de 2

Entrada[§]	Variável	Saída[§]	Unidade	Comentários
	N_f	1,8		coeficiente de segurança das espiras – fadiga – Equação 14.14
	N_s	2,3		coeficiente de segurança das espiras – carga estática em Fmax
	N_{fht}	1,7		coeficiente de segurança – fadiga torcional
	N_{sht}	1,8		coeficiente de segurança do gancho – escoamento torcional
	N_{fhs}	1,2		coeficiente de segurança do gancho – fadiga flexional
	N_{shs}	1,8		coeficiente de segurança do gancho – esoamento sob flexão
	L_{corpo}	1,97	in	comprimento do corpo da espiral
	Gancho1	1,25	in	comprimento do gancho em uma extremidade
	Gancho2	1,25	in	comprimento do gancho na outra extremidade
	L_f	4,46	in	comprimento livre entre ganchos
	W_{total}	0,38	lb	peso total das espiras – Equação 14-11*b*
	N_f	140,7	Hz	frequência natural em Hz
	C_{rpm}	8440	rpm	frequência natural em rpm
	FreqFac	16,9		razão – freq. natural pela freq. de excitação
5,00	C_2			deve ser > 4
	R_2	0,48	in	raio de flexão lateral na raiz do gancho
	K_{gancho}	1,19		fator *K* para o gancho sob torção
	$t_{maxgancho}$	52294	psi	tensão máxima de torção no gancho
	$t_{mingancho}$	30761	psi	tensão mínima de torção no gancho
	$t_{altgancho}$	10766	psi	tensão alternada de torção no gancho
	$t_{medgancho}$	41528	psi	tensão média de torção no gancho
	C_1	7,50		índice de mola para o gancho

[§] N. de R.: No sistema americano, é usado ponto decimal em vez de vírgula.

Observe que arredondamos para o próximo valor de 1/4 de espira, uma vez que a tolerância de fabricação não pode alcançar precisão melhor que esta. Isso torna a constante de mola $k = 70{,}7$ lbf /in.

19 O número total de espiras no corpo e o comprimento do corpo são

$$N_t = N_a + 1 = 9{,}25 + 1 = 10{,}25$$

$$L_b = N_t d = 10{,}25(0{,}192) = 1{,}97 \text{ in} \tag{z}$$

20 O comprimento livre pode agora ser determinado. O comprimento de um gancho-padrão é igual ao diâmetro interior da espira:

$$L_f = L_b + 2L_{gancho} = 1{,}97 + 2(1{,}25) = 4{,}46 \text{ in} \tag{aa}$$

21 A deflexão para alcançar a maior das duas forças especificadas é

$$y_{max} = \frac{F_{max} - F_{inicial}}{k} = \frac{85 - 28}{70{,}7} = 0{,}81 \text{ in} \tag{ab}$$

22 A frequência natural desta mola é determinada a partir da Equação 14.26 e é

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a}\frac{d}{D^2}\sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} = \frac{2(0,192)}{\pi(9,25)(1,44)^2}\sqrt{\frac{11,5E6(386)}{32(0,285)}} = 140,6\text{ Hz} = 8436\text{ rpm} \quad (ac)$$

A razão entre a frequência natural e a frequência aplicada é

$$\frac{8440}{500} = 16,9 \quad (ad)$$

que é suficientemente alta.

23 A especificação de projeto para esta mola de fio A228 é

$$d = 0,192\text{ in} \qquad OD^{\S} = 1,63\text{ in} \qquad N_t = 10,25 \qquad L_f = 4,46 \qquad (ae)$$

24 Os resultados são mostrados na Tabela 14-14. Os arquivos EX14-05 estão no CD-ROM. Há também abordagens alternativas para a solução deste exemplo mostradas separadamente em arquivos *Mathcad* e *TK Solver* no CD-ROM com uma letra adicionada aos seus nomes.

14.8 MOLAS HELICOIDAIS DE TORÇÃO

Uma mola de espiras helicoidais pode ser carregada em torção, em vez de em compressão ou tração, e neste caso é conhecida como **mola de torção**. As espiras de extremidade são estendidas tangencialmente de modo a proporcionar braços sobre os quais o momento pode ser aplicado, como mostrado na Figura 14-25. Essas espiras de extremidade podem ter uma variedade de formas para adequar-se à aplicação. As espiras são normalmente enroladas próximas umas às outras, como no caso das molas de extensão, sem que tenham, entretanto, qualquer tração inicial. As espiras podem também ser enroladas com espaçamento como aquele encontrado nas molas à compressão, e isso evitará atrito entre as espiras. Apesar dessa possibilidade, a maior parte das molas de torção é de espiras próximas.

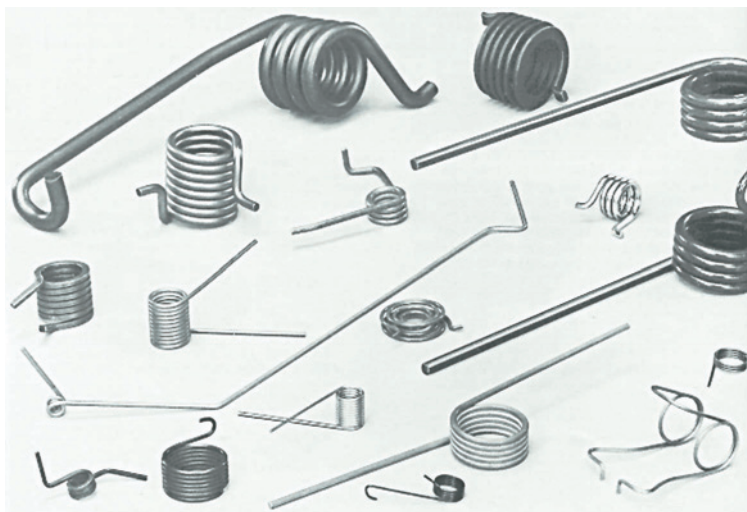



FIGURA 14-25

Variedade de detalhes de extremidade disponíveis para molas helicoidais de torção. (Cortesia de Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn.)

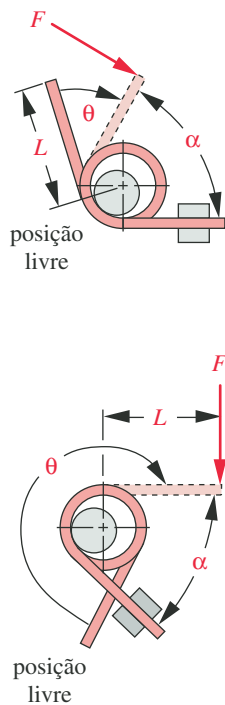
§ N. de R. T.: Diâmetro externo.

especifique:
α – ângulo entre extremidades
F – carga nas extremidades formando um ângulo α
L – braço de momento
θ – deflexão angular a partir da posição livre

FIGURA 14-26

Especificação de requisitos carga e deflexão de molas de torção. Fonte: Referência 1.

O momento aplicado às espiras coloca o fio em flexão como no caso de uma viga curva, como mostrado na Figura 14-26. O momento aplicado deve sempre ser arranjado de forma a fechar as espiras em vez de abri-las, porque as tensões residuais resultantes do enrolamento das espiras são favoráveis contra um momento de fechamento. O momento aplicado não deve nunca ser revertido em serviço. O carregamento dinâmico deve ser repetido ou variado com a razão de tensão $R \geq 0$.

Deve-se disponibilizar suporte radial em três ou mais pontos do diâmetro da espira para absorver as forças reativas. Esse suporte é geralmente construído utilizando uma barra colocada dentro da espira. A barra não deve ser maior em diâmetro que cerca de 90% do menor diâmetro interno das espiras quando enroladas sob carga a fim de evitar vinculação de espiras.

As especificações de manufatura de molas de torção definem os parâmetros indicados na Figura 14-26 bem como o diâmetro do fio, diâmetro externo da espira, número de espiras e constante de mola. A carga deve ser definida a um ângulo α com a tangente de extremidade na condição carregada em vez de em uma deflexão relativa à posição livre.

Como a carga ocorre em flexão, o fio de seção retangular é mais eficiente em termos de rigidez por unidade de volume (maior valor de I para a mesma dimensão). Contudo, a maior parte das molas helicoidais de torção é construída de fio redondo simplesmente por causa do seu menor custo e maior variedade de tamanhos e materiais.

Terminologia para molas de torção

Os seguintes parâmetros têm o mesmo significado para molas de torção que para molas helicoidais sob compressão: diâmetro médio das espiras D, diâmetro de fio d, índice de mola C, diâmetro externo D_o, diâmetro interno D_i e o número de espiras ativas N_a. A constante de mola k é expressa como momento por unidade de deflexão angular.

Número de espiras em molas de torção

O número de espiras ativas é igual ao número de voltas ao corpo N_b mais alguma contribuição das extremidades, as quais também fletem. Para extremidades retas, a contribuição pode ser expressa como um número equivalente de espiras N_e:

$$N_e = \frac{L_1 + L_2}{3\pi D} \tag{14.27a}$$

onde L_1 e L_2 são os comprimentos dos braços respectivos às tangentes de extremidade das espiras. O número de espiras ativas é então

$$N_a = N_b + N_e \tag{14.27b}$$

onde N_b é o número de espiras no corpo da mola.

Deflexão de molas de torção

A deflexão angular da espira de extremidade é normalmente expressa em radianos, porém é frequentemente convertida a revoluções. Utilizaremos revoluções. Uma vez que é essencialmente uma viga em flexão, a deflexão (angular) pode ser expressa como

$$\theta_{rev} = \frac{1}{2\pi}\theta_{rad} = \frac{1}{2\pi}\frac{ML_w}{EI} \tag{14.28a}$$

onde M é o momento aplicado, L_w é o comprimento do fio, E o módulo de elasticidade para o material utilizado na mola e I o segundo momento de área para a seção transversal com relação ao eixo neutro.

Para molas de torção de fio redondo, podemos substituir a geometria apropriada para obter

$$\begin{aligned}\theta_{rev} &= \frac{ML_w}{2\pi EI} = \frac{1}{2\pi}\frac{M\left(\pi DN_a\right)}{E(\pi d^4/64)}\\ &= \frac{64}{2\pi}\frac{MDN_a}{d^4E} \\ \theta_{rev} &\cong 10{,}2\frac{MDN_a}{d^4E}\end{aligned} \tag{14.28b}$$

O fator 10,2 é normalmente aumentado para 10,8 com base em experiência, para levar em conta o atrito entre espiras, e desse modo a equação se torna[1]

$$\theta_{rev} \cong 10{,}8\frac{MDN_a}{d^4E} \tag{14.28c}$$

Constante de mola para molas de torção

A constante de mola pode ser sempre obtida a partir da fórmula de deflexão:

$$k = \frac{M}{\theta_{rev}} \cong \frac{d^4E}{10{,}8DN_a} \tag{14.29}$$

Fechamento de espiras

Quando uma mola de torção é carregada para fechar as espiras (como deve ser), o diâmetro da espira diminui e seu comprimento aumenta à medida que a mola é "enrolada". O diâmetro mínimo à deflexão plena é

$$D_{i_{min}} = \frac{DN_b}{N_b + \theta_{rev}} - d \tag{14.30}$$

onde D é o diâmetro médio da espira não carregada. Qualquer que seja o pino sobre o qual a espira trabalhe, este deve ser limitado a cerca de 90% deste diâmetro interno mínimo.

O máximo comprimento de corpo de espira a "enrolamento completo" é:

$$L_{max} = d\left(N_b + 1 + \theta\right) \tag{14.31}$$

Tensões em espiras de molas à torção

A tensão na fibra externa de uma viga reta é Mc / I, mas neste caso temos uma viga curva, e aprendemos na Seção 4.9 que as tensões se concentram na parte interna das vigas curvas. Wahl[3] derivou o fator de concentração de tensão para a parte interna de um fio de espira redondo em flexão, obtendo

$$K_{b_i} = \frac{4C^2 - C - 1}{4C\left(C - 1\right)} \tag{14.32a}$$

e, para a parte externa da espira

$$K_{b_o} = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} \tag{14.32b}$$

sendo C o índice de mola.

A máxima tensão de compressão no diâmetro interno de uma espira de uma mola helicoidal de fio redondo carregada à torção (de forma a fechar as suas espiras) é, então,

$$\sigma_{i_{max}} = K_{b_i} \frac{M_{max} c}{I} = K_{b_i} \frac{M_{max}(d/2)}{\pi d^4/64} = K_{b_i} \frac{32 M_{max}}{\pi d^3} \tag{14.33a}$$

e as componentes de tensão de tração no diâmetro externo das espiras quando em flexão são

$$\sigma_{o_{min}} = K_{b_o} \frac{32 M_{min}}{\pi d^3}; \qquad \sigma_{o_{max}} = K_{b_o} \frac{32 M_{max}}{\pi d^3} \tag{14.33b}$$

$$\sigma_{o_{mean}} = \frac{\sigma_{o_{max}} + \sigma_{o_{min}}}{2}; \qquad \sigma_{o_{alt}} = \frac{\sigma_{o_{max}} - \sigma_{o_{min}}}{2} \tag{14.33c}$$

Observe que para falha estática (escoamento) de uma mola à torção carregada de modo a fechar suas espiras, a tensão de compressão de maior magnitude σ_{imax} na parte interna da espira é da maior importância, mas para falha por fadiga, que é um fenômeno relacionado a tensões de tração, o motivo de preocupação é a máxima tensão de tração, ligeiramente inferior, no lado externo das espiras. Assim, as componentes alternadas e média são calculadas no diâmetro externo da espira. Se a mola for carregada de modo a abrir as espiras (o que não é recomendado), deve sofrer tratamento de alívio de tensões para eliminar tensões residuais das espiras e então a tensão interna de espira deve ser utilizada para calcular as componentes necessárias à determinação do coeficiente de segurança à fadiga.

Parâmetros materiais para molas de torção

O limite de resistência ao escoamento e à fadiga são necessários neste caso. A Tabela 14-15 mostra valores sugeridos de resistência ao escoamento para diversos materiais como uma porcentagem da sua resistência à tração. Observe que tensões residuais favoráveis permitem que a resistência à tração seja utilizada como um critério de escoamento em alguns casos. A Tabela 14-16 mostra porcentagens de resistência à fadiga flexional para diversos fios de 10^5 e 10^6 ciclos para os casos em que estes foram jateados e não jateados. As mesmas limitações relativas à efetividade da aplicação de jateamento de esferas referentes ao caso das molas de extensão se aplicam neste caso, uma vez que espiras bastante fechadas evitam que as esferas impactem o diâmetro interno da espira. O jatemento de esferas pode não ser efetivo em muitas molas de torção.

Os dados de limite de resistência à fadiga por torção para molas helicoidais à compressão mostrados na Equação 14.12 podem ser adaptados para flexão utilizando a relação de von Mises entre carregamento sob torção e tração.

$$S_{ew_b}' = \frac{S_{ew}'}{0{,}577} \tag{14.34}$$

que produz

Tabela 14-15 Máxima resistência recomendada ao escoamento sob flexão para molas helicoidais à torção em aplicações estáticas

Fonte: Adaptado da Referência 1

Material	Percentual máximo do limite de resistência à tração	
	Tensões aliviadas	Tensões residuais favoráveis
Aço-carbono trabalhado a frio (por exemplo, A227, A228)	80%	100%
Aço-carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga (por exemplo, A229, A230, A232, A401)	85	100
Aço inox. austenítico e ligas não ferrosas (por exemplo, A313, B134, B159, B197)	60	80

$$S_{ew_b}' \cong \frac{45,0}{0,577} = 78 \text{ kpsi } (537 \text{ MPa}) \quad \text{para molas não jateadas}$$
$$S_{ew_b}' \cong \frac{67,5}{0,577} = 117 \text{ kpsi } (806 \text{ MPa}) \quad \text{para molas jateadas} \tag{14.34b}$$

Coeficientes de segurança para molas à torção

Antecipa-se uma falha sob escoamento na superfície interna das espiras, e o coeficiente de segurança pode ser encontrado a partir de

$$N_y = \frac{S_y}{\sigma_{i_{max}}} \tag{14.35a}$$

Observe que os dados disponíveis de fadiga e limite de resistência à fadiga são para uma situação de tensões repetidas (componentes média e alternada iguais) e, portanto, devem ser convertidos para valores referentes à situação de tensões alternadas antes de serem utilizados para calcular o coeficiente de segurança à fadiga com as Equações 14.17. Como a notação utilizada para flexão é ligeiramente diferente, repetimos as Equações 14.17 com as substituições apropriadas de variáveis para o caso de mola de torção.

$$N_{f_b} = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_{o_{min}}\right)}{S_e\left(\sigma_{o_{média}} - \sigma_{o_{min}}\right) + S_{ut}\sigma_{o_{alt}}} \tag{14.35b}$$

Tabela 14-16 Resistência máxima recomendada de fadiga por flexão S_{fw}' para molas helicoidais de torção em aplicações cíclicas (razão de tensões $R = 0$)

Tensões aliviadas, sem ressonância – jateamento pode não ser possível em todos os casos. Fonte: Referência 1

Vida em fadiga (ciclos)	Percentual do limite de resistência à tração			
	ASTM A228 ou Inox 302		ASTM A230 e A232	
	Sem jateamento	Com jateamento	Sem jateamento	Com jateamento
10^5	53%	62%	55%	64%
10^6	50	60	53	62

$$S_e = 0{,}5\frac{S_{ew_b} S_{ut}}{S_{ut} - 0{,}5 S_{ew_b}} \tag{14.35c}$$

Dimensionamento de molas helicoidais de torção

O processo de dimensionamento de molas helicoidais de torção é muito similar àquele utilizado para molas helicoidais de compressão. A melhor maneira de ilustrar isso é com um exemplo.

EXEMPLO 14-6

Projeto de uma mola helicoidal de torção para carregamento cíclico

Problema **Projete uma mola de torção para carga dinâmica dentro de um intervalo de deflexão.**

Dados **A mola deve produzir um momento mínimo de 50 lbf-in e um máximo momento de 80 lbf.in no intervalo de deflexão dinâmico de 0,25 revoluções (90°). Vida infinita é desejável.**

Hipóteses **Use fio musical não jateado (ASTM A228). Utilize extremidades tangentes retas em um corpo de 2 in de comprimento. A espira é carregada para que se feche.**

Solução **Ver a Figura 14-27.**

1 Pressuponha um diâmetro inicial de 0,192 in dentre os tamanhos disponíveis na Tabela 14-2. Pressuponha um índice de mola $C = 9$ e use-o para calcular o diâmetro médio de espira, D, na Equação 14.5.

$$D = Cd = 9(0{,}192) = 1{,}73 \text{ in} \tag{a}$$

2 Determine os momentos médio e alternado:

$$M_m = \frac{M_{max} + M_{min}}{2} = \frac{80 + 50}{2} = 65 \text{ lb}$$
$$M_a = \frac{M_{max} - M_{min}}{2} = \frac{80 - 50}{2} = 15 \text{ lb} \tag{b}$$

3 Determine o fator de flexão de Wahl para a superfície interna, K_b, e use-o para calcular a máxima tensão de compressão na superfície interior da espira.

$$K_{b_i} = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)} = \frac{4(9)^2 - 9 - 1}{4(9)(9-1)} = 1{,}090 \tag{c}$$

$$\sigma_{i_{max}} = K_{b_i}\frac{32 M_{max}}{\pi d^3} = 1{,}09\frac{32(80)}{\pi(0{,}192)^3} = 125523 \text{ psi} \tag{d}$$

4 Determine o fator de flexão de Wahl K_{b_o} para a superfície externa e calcule os valores máximo, mínimo, alternado e médio de tensões de tração na espira em sua superfície externa.

$$K_{b_o} = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} = \frac{4(9)^2 + 9 - 1}{4(9)(9+1)} = 0{,}9222 \tag{e}$$

$$\sigma_{o_{min}} = K_{b_o} \frac{32M_{min}}{\pi d^3} = 0{,}9222 \frac{32(50)}{\pi(0{,}192)^3} = 66359 \text{ psi}$$

$$\sigma_{o_{\max}} = K_{b_o} \frac{32M_{max}}{\pi d^3} = 0{,}9222 \frac{32(80)}{\pi(0{,}192)^3} = 106175 \text{ psi} \qquad (f)$$

$$\sigma_{o_{média}} = \frac{\sigma_{o_{max}} + \sigma_{o_{min}}}{2} = \frac{66359 + 106175}{2} = 86267$$

$$\sigma_{o_{alt}} = \frac{\sigma_{o_{max}} - \sigma_{o_{min}}}{2} = \frac{66359 - 106175}{2} = 19908 \qquad (g)$$

5 Determine o limite de resistência à tração do material desse fio musical a partir da Equação 14.3 e da Tabela 14-4 e use-o para determinar a resistência ao escoamento por flexão para o corpo da espira a partir da Tabela 14-15, pressupondo que não exista alívio de tensões.

$$S_{ut} = Ad^b = 184649(0{,}192)^{-0{,}1625} = 241441 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$S_y = 1{,}0S_{ut} = 241441 \text{ psi} \qquad (i)$$

6 Determine o limite de resistência à fadiga do fio para molas não jateadas usando a Equação 14.34 e converta-o para resistência à fadiga sob ciclos alternados usando a Equação 14.35*b*.

$$S_{ew_b} \cong \frac{45000}{0{,}577} = 77990 \text{ psi} \qquad (j)$$

$$S_e = 0{,}5\frac{S_{ew_b} S_{ut}}{S_{ut} - 0{,}5S_{ew_b}} = 0{,}5\frac{77990(241441)}{241441 - 0{,}5(77990)} = 46506 \text{ psi} \qquad (k)$$

7 O coeficiente de segurança à fadiga para espiras em flexão é calculado com a Equação 14.35*a*.

$$N_{f_b} = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_{o_{min}}\right)}{S_e\left(\sigma_{o_{média}} - \sigma_{o_{min}}\right) + S_{ut}\sigma_{o_{alt}}}$$

$$= \frac{46506(241441 - 66359)}{46506(86267 - 66359) + 241441(19908)} = 1{,}4 \qquad (l)$$

8 O coeficiente de segurança estático contra escoamento é

$$N_{y_b} = \frac{S_y}{\sigma_{i_{max}}} = \frac{241441}{125523} = 1{,}9 \qquad (m)$$

Ambos os fatores são aceitáveis.

9 A constante de mola é definida a partir dos dois momentos especificados a partir da deflexão relativa.

$$k = \frac{\Delta M}{\theta} = \frac{80 - 50}{0{,}25} = 120 \text{ lb-in/rev} \qquad (n)$$

10 Para obter a constante de mola definida, o número de espiras ativas deve satisfazer à Equação 14.29:

$$k = \frac{d^4 E}{10{,}8DN_a} \quad \text{ou} \quad N_a = \frac{d^4 E}{10{,}8Dk} = \frac{(0{,}192)^4\, 30E6}{10{,}8(1{,}73)(120)} = 18{,}2 \qquad (o)$$

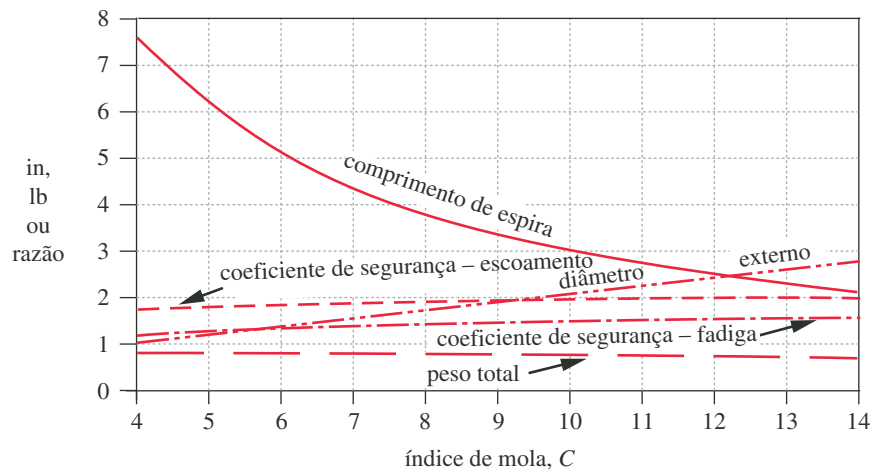



FIGURA 14-27

Variação dos parâmetros de mola helicoidal de torção com o índice de mola – diâmetro constante de fio.

As extremidades contribuem para as espiras ativas com

$$N_e = \frac{L_1 + L_2}{3\pi D} = \frac{2+2}{3\pi(1,73)} = 0,25 \qquad (p)$$

e portanto o número de espiras no corpo da mola é

$$N_b = N_a - N_e = 18,2 - 0,25 \cong 18 \qquad (q)$$

11 As deflexões angulares nas cargas especificadas, determinadas a partir da Equação 14.28*c* são:

$$\theta_{min} \cong 10,8\frac{M_{min} D N_a}{d^4 E} = 10,8\frac{50(1,73)(18,2)}{(0,192)^4(30E6)} = 0,417 \text{ rev} = 150 \text{ graus} \qquad (r)$$

$$\theta_{max} \cong 10,8\frac{M_{max} D N_a}{d^4 E} = 10,8\frac{80(1,73)(18,2)}{(0,192)^4(30E6)} = 0,667 \text{ rev} = 240 \text{ graus} \qquad (s)$$

12 Os arquivos EX14-06 encontram-se no CD-ROM.

Para não prolongar muito a discussão, somente uma solução bem-sucedida para o exemplo anterior foi mostrada. Contudo, exatamente como ocorreu no exemplo precedente, foi necessário iterar por algumas soluções malsucedidas até consegui-la. As tendências no comprimento das espiras, diâmetro externo, coeficientes de segurança de fadiga e estática, peso da mola de uma mola de torção como uma função de seu índice são mostrados na Figura 14-27. Distintos das molas de compressão e extensão, os coeficientes de segurança para torção aumentam com o índice de mola.

14.9 MOLAS BELLEVILLE*

Molas arruela Belleville (também chamadas de notas de disco), patenteadas na França por J. F. Belleville em 1867, possuem uma relação não linear entre força e deflexão que as torna muito úteis em algumas aplicações. Um conjunto de molas comerciais Belleville é mostrado na Figura 14-28. A seção transversal destas mo-

* Informações adicionais sobre projeto de molas Bellevile podem ser achadas em http://spirol.com.

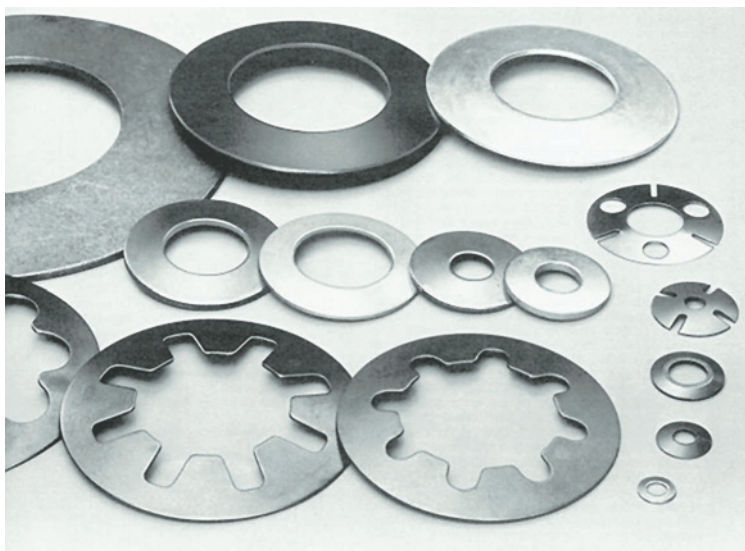



FIGURA 14-28

Arruelas Belleville disponíveis comercialmente. (Cortesia de Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn.)

las é de forma cônica com espessura de material t e altura interna de cone h, como mostrado na Figura 14-29. Elas são extremamente compactas e capazes de resistir a grandes esforços de compressão, com deflexões bastante limitadas. Se colocadas em uma superfície plana, sua deflexão máxima é h, o que as coloca na condição "plana", devendo ser operadas apenas quando entre 15% e 85% da deflexão de achatamento. Mostraremos mais adiante como estas molas podem ser defletidas além da posição plana de modo a alcançar alguns efeitos interessantes. Estas molas são utilizadas quando cargas altas ocorrem junto a pequenas deflexões e se requerem pequenos espaços, como no caso de pinos de matrizes de conformação, mecanismos de ricocheteamento de armas de fogo, etc. Na condição de constante de mola zero (força constante), são utilizadas para carregar embreagens e vedadores, que necessitam de carga uniforme em um intervalo de pequenas deflexões.

A razão entre D_o e D_i, chamada de R_d, afeta o comportamento destas molas. Ao redor de $R_d = 2$, a mola tem máxima capacidade de armazenamento de energia. Dependendo da razão h / t, a constante de mola pode ser essencialmente linear, pode aumentar ou diminuir com o aumento da deflexão, ou pode ser essencialmente constante durante parte da deflexão.

A Figura 14-30 mostra curvas força-deflexão de molas Belleville com razões h / t no intervalo 0,4 a 2,8. Estas curvas são normalizadas em ambos os eixos com relação à condição da mola quando comprimida até ficar plana. Força e deflexão nulas são assumidas na posição livre, como mostrado na Figura 14-29. Cem por cento de deflexão representa a condição plana, e 100% de força representa a força da mola na condição plana. Os valores absolutos de força e deflexão variarão com a razão h / t, espessura t e material.

Quando $h / t = 0{,}4$, a constante de mola é aproximadamente linear e se parece à curva de uma mola helicoidal. À medida que h / t é aumentado além de 0,4, a razão se torna cada vez mais não linear, e no momento em que $h / t = 1{,}414$, a curva apresenta um valor quase constante, centrado ao redor da posição plana. O valor de força apresenta desvios de ±1% do valor de força a 100% de deflexão no intervalo de 80% a 120% de deflexão relativa à condição plana, e de ±10% no intervalo 55% a 145%, como mostrado na Figura 14-31.

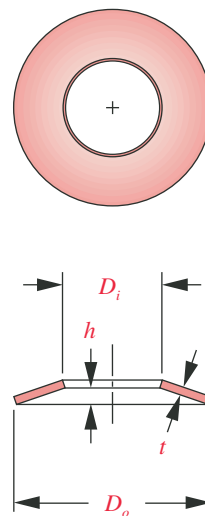



FIGURA 14-29

Uma arruela de mola Belleville.

FIGURA 14-30

Características normalizadas de força-deflexão de molas Belleville para várias razões h / t.

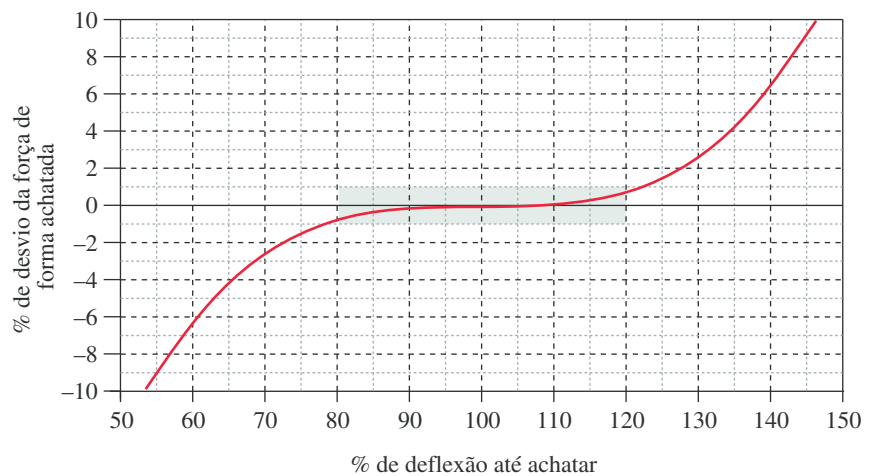



FIGURA 14-31

Erro porcentual em uma mola Belleville de força constante ao redor da sua posição plana ($R_d = 2{,}0$, $h / t = 1{,}414$).

(*a*) Arruela acima do centro

(*b*) Arruela abaixo do centro

FIGURA 14-32

Montagem de uma mola Belleville para permitir deflexões além da posição plana.

Com razões h / t maiores que 1,414, a curva se torna bimodal. Um dado valor de força aplicada corresponde a mais que um valor possível de deflexão. Se uma mola desse tipo for montada e forem permitidas deformações além da condição plana, como mostrado na Figura 14-32, esta será biestável, sendo necessária uma força em cada direção para levá-la passado o ponto de centro. A técnica de montagem mostrada na Figura 14-32 também é útil para molas com razões h / t menores, uma vez que permite o dobro da deflexão potencial além de poder usar a seção de força constante por completo no caso de uma mola de razão 1,414 h / t.

Função carga-deflexão de molas Belleville

A relação carga-deflexão é não linear, e portanto não podemos estabelecer uma constante de mola. Pode ser calculada a partir de

$$F = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[(h - y)\left(h - \frac{y}{2}\right) t + t^3 \right] \tag{14.36a}$$

onde

$$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left[\frac{\left(R_d - 1\right)^2}{R_d^2} \right] \quad \text{e} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{14.36b}$$

A carga na posição plana ($y = h$) é

$$F_{plana} = \frac{4Eht^3}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \tag{14.36c}$$

As curvas na Figura 14-30 foram geradas com essas equações.

FIGURA 14-33

Pontos de tensão máxima em uma arruela elástica de mola Belleville.

Tensões em molas Belleville

As tensões não são uniformemente distribuídas na arruela, sendo concentradas nas extremidades dos diâmetros interno e externo, como mostrado na Figura 14-33. A máxima tensão ocorre no raio interno do lado convexo e é de compressão. As extremidades no lado côncavo possuem tensões de tração, sendo a tensão na extremidade externa geralmente maior que a tensão da extremidade interna. As expressões para as tensões nas localidades definidas na Figura 14-33 são

$$\sigma_c = -\frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[K_2 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_3 t \right] \tag{14.37a}$$

$$\sigma_{t_i} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[-K_2 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_3 t \right] \tag{14.37b}$$

$$\sigma_{t_o} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[K_4 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_5 t \right] \tag{14.37c}$$

onde

$$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left(\frac{R_d - 1}{\ln R_d} - 1 \right) \quad \text{e} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{14.37d}$$

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left(\frac{R_d - 1}{2} \right) \tag{14.37e}$$

$$K_4 = \left[\frac{R_d \ln R_d - \left(R_d - 1\right)}{\ln R_d} \right] \left[\frac{R_d}{\left(R_d - 1\right)^2} \right] \tag{14.37f}$$

$$K_5 = \frac{R_d}{2\left(R_d - 1\right)} \tag{14.37g}$$

Ver a Equação 14.36*b* para K_1. A forma típica de variação dessas tensões com a deflexão é mostrada na Figura 14-34. As dimensões da mola de aço neste caso são $t = 0{,}012$ in, $h = 0{,}017$ in, $h/t = 1{,}414$, $D_0 = 1$ in, $D_i = 0{,}5$ in.

FIGURA 14-34

Tensões em uma mola Belleville de aço-carbono (com $R_d = 2{,}0$, $h / t = 1{,}414$, $t = 0{,}012$, $h = 0{,}017$ in).

Carregamento estático de molas Belleville

A tensão de compressão σ_c normalmente controla o dimensionamento sob carregamento estático, porém como as tensões são altamente concentradas nas extremidades, ocorrerá escoamento local de modo a aliviá-la, e a tensão através da mola será menor. Como a tensão é maior que a tensão média, pode ser comparada a um valor de resistência maior que o limite de resistência à compressão S_{uc}. Uma vez que materiais simétricos são utilizados em molas, $S_{uc} = S_{ut}$. A Tabela 14-15 mostra algumas porcentagens recomendadas de S_{ut} para comparação com σ_c em carregamentos estáticos. Devemos reconhecer que o material não pode suportar estes níveis de tensão. Eles são apenas meios de prever falhas baseados na tensão localizada σ_c. O ajuste (remoção de ajuste) pode ser utilizado para introduzir tensões residuais favoráveis de maneira que a tensão permitida aumente substancialmente, como mostra a Tabela 14-17.

Carregamento dinâmico

Se a mola é carregada dinamicamente, as tensões máximas e mínimas de tração σ_{t_i} e σ_{t_o} nos extremos do seu intervalo de deflexão devem ser calculadas a partir da Equação 14.36 e as componentes alternante e média determinadas a partir delas. Uma análise utilizando o diagrama de Goodman pode ser feita e o coeficiente de segurança determinado segundo a Equação 14.35*b*. O limite de resistência à fadiga do material pode ser encontrado utilizando os métodos do Capítulo 6. Pode-se utilizar o jateamento de esferas para aumentar a viga em fadiga.

Empilhamento de molas

A máxima deflexão de uma mola Belleville tende a ser pequena. Para obter maior deflexão, essas molas podem ser agrupadas em série, como mostrado na Figura 14-35*b*. A força total será a mesma do caso de uma só mola, mas as deflexões serão adicionadas. Essas molas também podem ser agrupadas em paralelo, como mostrado na Figura 14-35*a*, caso em que a deflexão total será a mesma do caso individual, mas as forças serão adicionadas. Combinações em série-paralelo também são possíveis. Observe, porém, que agrupamentos em série ou série-paralelo

Tabela 14-17 Níveis máximos de tensão de compressão recomendados para molas Bellevile em aplicações estáticas, pressupondo $S_{ut} = S_{uc}$

Fonte: Referência 1

Material	Porcentual máximo do limite de resistência à tração	
	Antes da remoção de tensões: ajuste	Depois da remoção de tensão: ajuste
Aço-carbono ou liga	120%	275%
Aço inox. austenítico e não ferroso	95	160

(*a*) Pilha em paralelo

(*b*) Pilha em série

(*c*) Pilha série-paralelo

FIGURA 14-35

Arruelas Belleville podem ser combinadas em série, paralelo ou série-paralelo.

são inerentemente instáveis e requererem o uso de um pino ou furo de guia endurecidos, caso em que o atrito irá reduzir a carga disponível. Atrito entre folhas pode ser também substancial em agrupamentos em paralelo, criando histerese. Arranjos de empilhamento e folgas diametrais recomendados podem ser encontrados em http://spirol.com.

Dimensionamento de molas Belleville

O dimensionamento de molas Belleville requer iterações. Valores iniciais da razão de diâmetro R_d e razão h / t devem ser escolhidos. O tipo de curva força de flexão desejada irá sugerir um valor apropriado para a razão h / t (ver a Figura 14-30). Se uma força ou intervalo de forças for especificado, a deflexão associada pode ser calculada a partir das Equações 14.35, uma vez que o diâmetro externo e espessura sejam assumidos. É possível estimar a espessura requerida para obter uma valor particular de força na condição plana com

$$t = \sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{19{,}2E7}\frac{D_o^2}{h/t}} \qquad (14.38us)$$

$$t = \frac{1}{10}\sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{132{,}4}\frac{D_o^2}{h/t}} \qquad (14.38si)$$

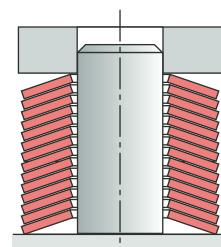
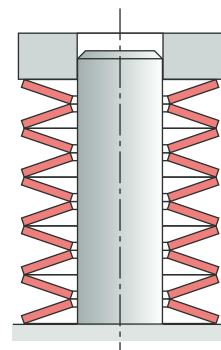
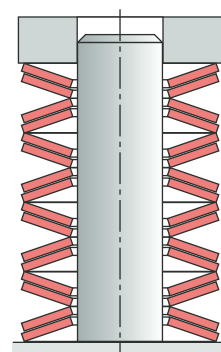
Ambos os resultados das versões *US* ou *SI** da Equação 14.38, em combinação com outros valores assumidos, podem ser utilizados nas Equações 14.35 e 14.36 para encontrar as deflexões e tensões. A melhor maneira para ilustrar esse procedimento é por meio de um exemplo.

EXEMPLO 14-7

Projeto de uma mola Belleville para carregamento estático

Problema **Projete uma mola Belleville para proporcionar uma força constante dentro de um intervalo de deflexão dado.**

Dados **Um retentor na extremidade de um eixo requer uma carga aproximadamente constante durante pequenos movimentos associados com mudanças térmicas. A mola deve aplicar uma força nominal de 10 lbf ±5% em um intervalo de ±0,006 in a qualquer valor de deflexão nominal. A mola deve encaixar em um furo de diâmetro 1,25 in.**

Hipóteses **Assuma uma razão de diâmetro R_d = 2. Utilize mola de aço-carbono 50HRC, sem ajuste.**

* As Equações 14.38*us* e 14.38*si* contêm constantes que requerem uso de unidades particulares. Na versão *US*, libras e polegadas são utilizadas. Na versão *SI*, newtons e mm são utilizados.

Solução

1 Pressuponha um diâmetro externo D_o de 1,2 in de modo a deixar alguma folga com relação ao furo.

2 Uma vez que uma mola de força constante é necessária, a razão h / t é 1,414 (ver a Figura 14-30).

3 A variação de força requerida de não mais que 5% pode ser satisfeita escolhendo um intervalo de deflexão apropriado para operação em consulta à Figura 14-31. Se a deflexão for mantida entre cerca de 65% de 135% da deflexão plana (horizontal), essa tolerância será alcançada. A força nominal ocorrerá então na posição plana e a mola deve operar em ambos os lados, de forma que deve ser montada de maneira similar àquela mostrada na Figura 14-33.

4 Utilize as hipóteses citadas e a força nominal especificada na Equação 14.38*us* para determinar uma espessura apropriada t para a mola:

$$t = \sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{19{,}2E7}\frac{D_o^2}{h/t}} = \sqrt[4]{\frac{10}{19{,}2E7}\frac{(1{,}2)^2}{1{,}414}} = 0{,}015 \text{ in} \qquad (a)$$

5 A altura h pode ser agora determinada:

$$h = 1{,}414t = 1{,}414(0{,}015) = 0{,}021 \text{ in} \qquad (b)$$

6 Baseado nas escolhas feitas no passo 3, determine as deflexões mínima e máxima:

$$\begin{aligned} y_{min} &= 0{,}65h = 0{,}65(0{,}021) = 0{,}014 \text{ in} \\ y_{max} &= 1{,}35h = 1{,}35(0{,}021) = 0{,}029 \text{ in} \end{aligned} \qquad (c)$$

A diferença entre essas distâncias é maior que o intervalo de deflexão requerido, de maneira que a tolerância de força pode ser alcançada nesse intervalo.

7 A Figura 14-34 mostra que o pior estado de tensões ocorrerá na deflexão máxima y_{max}, portanto resolva as Equações 14.36*b* e 14.37 para as tensões naquela deflexão:

$$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left[\frac{(R_d-1)^2}{R_d^2}\right] = \frac{6}{\pi \ln 2}\left[\frac{(2-1)^2}{2^2}\right] = 0{,}689 \qquad (d)$$

$$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left(\frac{R_d-1}{\ln R_d}-1\right) = \frac{6}{\pi \ln 2}\left(\frac{2-1}{\ln 2}-1\right) = 1{,}220 \qquad (e)$$

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left(\frac{R_d-1}{2}\right) = \frac{2}{\pi \ln 2}\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1{,}378 \qquad (f)$$

$$K_4 = \left[\frac{R_d \ln R_d - (R_d-1)}{\ln R_d}\right]\left[\frac{R_d}{(R_d-1)^2}\right] = \left[\frac{2\ln 2 - (2-1)}{\ln 2}\right]\left[\frac{2}{(2-1)^2}\right] = 1{,}115 \qquad (g)$$

$$K_5 = \frac{R_d}{2(R_d-1)} = \frac{2}{2(2-1)} = 1 \qquad (h)$$

$$\sigma_c = -\frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1-\nu^2\right)}\left[K_2\left(h-\frac{y}{2}\right)+K_3 t\right]$$

$$= -\frac{4(30E6)(0,029)}{0,689(1,2)^2\left(1-0,3^2\right)}\left[1,220\left(0,021-\frac{0,029}{2}\right)+1,378(0,015)\right] \qquad (i)$$

$$\sigma_c = -112227 \text{ psi}$$

$$\sigma_{t_i} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1-\nu^2\right)}\left[-K_2\left(h-\frac{y}{2}\right)+K_3 t\right]$$

$$= \frac{4(30E6)(0,029)}{0,689(1,2)^2\left(1-0,3^2\right)}\left[-1,220\left(0,021-\frac{0,029}{2}\right)+1,378(0,015)\right] \qquad (j)$$

$$\sigma_{t_i} = 46600 \text{ psi}$$

$$\sigma_{t_o} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1-\nu^2\right)}\left[K_4\left(h-\frac{y}{2}\right)+K_5 t\right]$$

$$= \frac{4(30E6)(0,029)}{0,689(1,2)^2\left(1-0,3^2\right)}\left[1,115\left(0,021-\frac{0,029}{2}\right)+(1)(0,015)\right] \qquad (k)$$

$$\sigma_{t_o} = 87628 \text{ psi}$$

8 A Tabela 14-5 dá S_{ut} = 246 kpsi para este material. A Tabela 14-17 indica que 120% desse valor pode ser utilizado para uma mola ajustada. O coeficiente de segurança para carga estática é, então,

$$N_s = \frac{1,2S_{ut}}{\sigma_c} = \frac{1,2(246000)}{112227} = 2,6 \qquad (l)$$

o que é aceitável.

9 Um resumo do projeto de mola é:

$$D_o = 1,2 \qquad D_i = 0,6 \qquad t = 0,015 \qquad h = 0,021 \qquad (m)$$

10 Os arquivos EX14-07 estão incluídos no CD-ROM.

14.10 ESTUDO DE CASO

Iremos considerar agora o dimensionamento de uma mola dentro de um dos conjuntos de Estudo de Caso que foram definidos no Capítulo 9.

Projeto de uma mola de retorno de uma máquina de teste de camos

O dimensionamento preliminar deste dispositivo é mostrado na Figura 14-36. O braço do seguidor é carregado contra o camo por meio de uma mola de extensão com ganchos em cada extremidade. Os cálculos efetuados no Estudo de Caso 10A indicam que uma constante de mola de 25 lb/in e uma pré-carga de 25 lb manterão a força do seguidor positiva entre 13 e 110 lb na velocidade de projeto de 180 rpm. O comprimento da mola deve ser adequado para que esta possa ser empacotada como mostrado na Figura 14-36, isto é, da mesma ordem

de magnitude que o diâmetro do camo, que é 8 in. O ponto de fixação da mola ao chão é ajustável.

ESTUDO DE CASO 10C

Projeto de uma mola de retorno para um braço de camo-seguidor

Problema **Projete uma mola de extensão para o braço do camo-seguidor da Figura 14-36 com base nos carregamentos definidos no Estudo de Caso 10A.**

Dados **A constante de mola é 25 lb/in com uma pré-carga de 25 lb. A deflexão dinâmica da mola é de 1,5 in.**

Hipóteses **A mola deve operar em um banho de óleo cuja temperatura está abaixo de 250°F. Vida infinita é requerida. Use fio musical ASTM A228 e ganchos padronizados em cada extremidade.**

Solução **Ver a Figura 14-36.**

1 Pressuponha um diâmetro inicial de fio de 0,177 in dentre os tamanhos disponíveis na Tabela 14-2. Pressuponha um índice de mola $C = 8$ e calcule o diâmetro médio de espira, D, a partir da Equação 14.5.

$$D = Cd = 8(0{,}177) = 1{,}42 \text{ in} \qquad (a)$$

2 Use o valor assumido de C para determinar um valor inicial de tensão nas espiras τ_i a partir das Equações 14.21 como sendo um valor médio entre as funções que margeiam o intervalo aceitável de pré-cargas de mola na Figura 14-22:

$$\begin{aligned}\tau_{i_1} &\cong -4{,}231C^3 + 181{,}5C^2 - 3387C + 28640 \\ &= -4{,}231(8)^3 + 181{,}5(8)^2 - 3387(8) + 28640 = 10994 \text{ psi}\end{aligned} \qquad (b)$$

$$\begin{aligned}\tau_{i_2} &\cong -2{,}987C^3 + 139{,}7C^2 - 3427C + 38404 \\ &= -2{,}987(8)^3 + 139{,}7(8)^2 - 3427(8) + 38404 = 18399 \text{ psi}\end{aligned} \qquad (c)$$

$$\tau_i \cong \frac{\tau_{i_1} + \tau_{i_2}}{2} = \frac{10994 + 18399}{2} = 14697 \text{ psi} \qquad (d)$$

3 Determine o fator de cisalhamento direto:

$$K_s = 1 + \frac{0{,}5}{C} = 1 + \frac{0{,}5}{8} = 1{,}0625 \qquad (e)$$

4 Substitua o valor de K_s obtido no passo 3 e use o valor de τ_i da Equação (*d*) obtido no passo 2 para τ_{max} na Equação 14.8*b* para determinar o valor correspondente de força inicial de tração na espira, F_i:

$$F_i = \frac{\pi d^3 \tau_i}{8 K_s D} = \frac{\pi (0{,}177)^3 (14697)}{8(1{,}0625)(1{,}416)} = 21{,}272 \text{ lb} \qquad (f)$$

Verifique se esse valor de força é menor que os 25 lbf de força aplicada mínima F_{min}, como é neste caso. Qualquer força menor que F_i na mola não a defletirá.

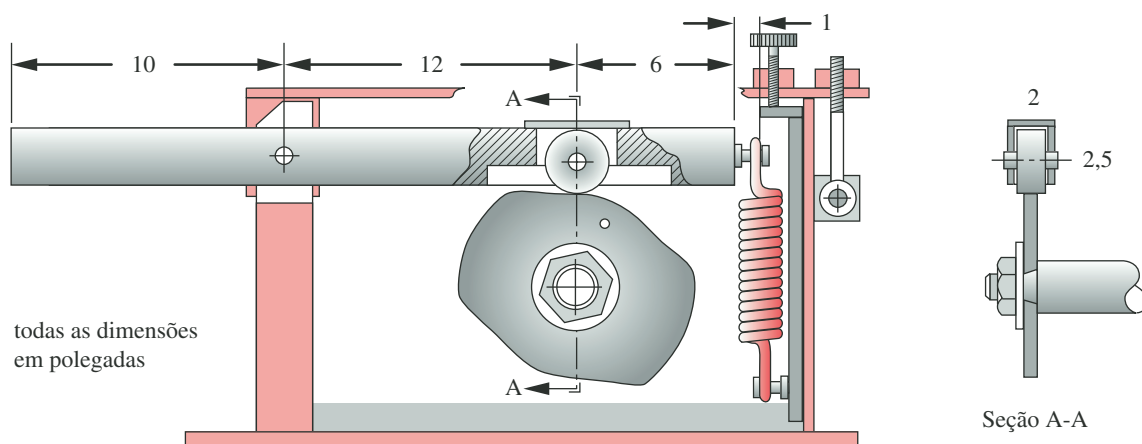



FIGURA 14-36

Braço de camo-seguidor com mola de retorno helicoidal de extensão.

5 Determine a força máxima a partir da razão e deflexão dadas e use-as para determinar as forças média e alternada com a Equação 14.16*a*:

$$F_{max} = F_{min} + ky = 25 + 25(1,5) = 62,5 \text{ lb}$$
$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = \frac{62,5 - 25}{2} = 18,75 \text{ lb} \qquad (g)$$
$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} = \frac{62,5 + 25}{2} = 43,75 \text{ lb}$$

6 Utilize o fator de cisalhamento direto, K_s, e valores previamente assumidos para determinar a tensão mínima, τ_{min}, e a tensão média, τ_m:

$$\tau_{min} = K_s \frac{8F_{min}D}{\pi d^3} = 1,0625 \frac{8(25)(1,416)}{\pi(0,177)^3} = 17272 \text{ psi}$$
$$\tau_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1,0625 \frac{8(43,75)(1,416)}{\pi(0,177)^3} = 30227 \text{ psi} \qquad (h)$$

7 Encontre o fator de Wahl, K_w, e use-o para calcular a tensão de cisalhamento alternada na espira.

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} = \frac{4(8) - 1}{4(8) - 4} + \frac{0,615}{8} = 1,184 \qquad (i)$$

$$\tau_a = K_w \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1,184 \frac{8(18,75)(1,416)}{\pi(0,177)^3} = 14436 \text{ psi} \qquad (j)$$

8 Encontre o limite de resistência à tração do material do fio musical a partir da Equação 14.3 e da Tabela 14-4 e use-o para determinar o limite de resistência ao cisalhamento usando a Equação 14.4 e a resistência ao escoamento sob torção para o corpo da espira a partir da Tabela 14-12, assumindo a não remoção de deformações permanentes.

$$S_{ut} = Ad^b = 184649(0{,}177)^{-0{,}1625} = 244653 \text{ psi}$$
$$S_{us} = 0{,}67S_{ut} = 163918 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$S_{ys} = 0{,}45S_{ut} = 0{,}45(244653) = 110094 \text{ psi} \qquad (l)$$

9 Encontre o limite de duração do fio para molas não jateadas com a Equação 14.13 e converta-o para resistência à fadiga sob carregamento alternado com a ajuda da Equação 14.18*b*.

$$S_{ew} = 45000 \text{ psi} \qquad (m)$$

$$S_{es} = 0{,}5\frac{S_{ew}S_{us}}{S_{us} - 0{,}5S_{ew}} = 0{,}5\frac{45000(163918)}{163918 - 0{,}5(45000)} = 26080 \text{ psi} \qquad (n)$$

10 O coeficiente de segurança à fadiga para espiras em torção é calculado usando a Equação 14.18*a*.

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{min})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{min}) + S_{us}\tau_a}$$
$$= \frac{26080(163918 - 17272)}{26080(30227 - 17272) + 163918(14436)} = 1{,}4 \qquad (o)$$

Observe que é utilizada a tensão mínima devida à força F_{min} neste cálculo, **não** a tensão de enrolamento de espira da Equação (*d*).

11 As tensões nos ganchos de extremidade também precisam ser determinadas. As tensões de flexão no ponto *A* do gancho na Figura 14-33 (repetida) são encontradas a partir da Equação 14.24:

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} = \frac{2D}{2d} = C = 8$$
$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(8)^2 - 8 - 1}{4(8)(8-1)} = 1{,}103 \qquad (p)$$

$$\sigma_a = K_b\frac{16DF_a}{\pi d^3} + \frac{4F_a}{\pi d^2} = 1{,}103\frac{16(1{,}416)(18{,}75)}{\pi(0{,}177)^3} + \frac{4(18{,}75)}{\pi(0{,}177)^2} = 27650 \text{ psi}$$

$$(q)$$

$$\sigma_m = K_b\frac{16DF_m}{\pi d^3} + \frac{4F_m}{\pi d^2} = 1{,}103\frac{16(1{,}416)(43{,}75)}{\pi(0{,}177)^3} + \frac{4(43{,}75)}{\pi(0{,}177)^2} = 64517 \text{ psi}$$

$$\sigma_{min} = K_b\frac{16DF_{min}}{\pi d^3} + \frac{4F_{min}}{\pi d^2} = 1{,}103\frac{16(1{,}416)(25)}{\pi(0{,}177)^3} + \frac{4(25)}{\pi(0{,}177)^2} = 36867 \text{ psi} \qquad (r)$$

12 Converta a resistência à fadiga torcional em uma resistência de fadiga sob tração com a Equação 14.4 e utilize-a juntamente com o limite de resistência à tração na Equação 14.18 para determinar um coeficiente de segurança à fadiga para o gancho em flexão:

$$S_e = \frac{S_{es}}{0{,}67} = \frac{26080}{0{,}67} = 38925 \text{ psi}$$
$$N_{f_b} = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_{min})}{S_e(\sigma_m - \sigma_{min}) + S_{ut}\sigma_a}$$
$$= \frac{38925(244\,633 - 38867)}{38925(64517 - 38867) + 244633(27650)} = 1{,}0 \qquad (s)$$

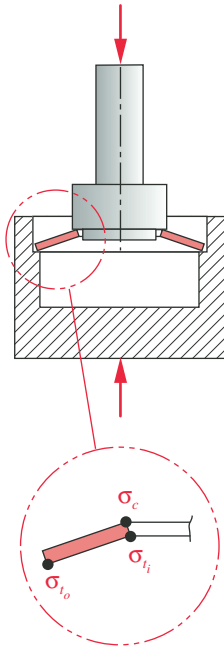



FIGURA 14-33 Repetida

Pontos de tensão máxima em uma arruela elástica de mola Belleville.

13 Encontre as tensões torcionais no ponto *B* do gancho na Figura 14-23 usando a Equação 14.25 e o valor assumido de $C_2 = 5$.

$$R_2 = \frac{C_2 d}{2} = \frac{5(0{,}177)}{2} = 0{,}443 \text{ in}$$
$$K_{w_2} = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(5) - 1}{4(5) - 4} = 1{,}188 \qquad (t)$$

$$\tau_{B_a} = K_{w_2} \frac{8DF_a}{\pi d^3} = 1{,}188 \frac{8(1{,}416)18{,}75}{\pi(0{,}177)^3} = 14478 \text{ psi}$$
$$\tau_{B_m} = K_{w_2} \frac{8DF_m}{\pi d^3} = 1{,}188 \frac{8(1{,}416)43{,}75}{\pi(0{,}177)^3} = 33783 \text{ psi} \qquad (u)$$
$$\tau_{B_{min}} = K_{w_2} \frac{8DF_{min}}{\pi d^3} = 1{,}188 \frac{8(1{,}416)25}{\pi(0{,}177)^3} = 19304 \text{ psi}$$

14 O coeficiente de segurança à fadiga para o gancho em torção é calculado usando a Equação 14.18*a*.

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{min})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{min}) + S_{us}\tau_a}$$
$$= \frac{26080(163918 - 19304)}{26080(33783 - 19304) + 163918(14478)} = 1{,}4 \qquad (v)$$

Dois desses fatores são aceitáveis. O coeficiente de segurança do gancho em flexão é baixo.

15 Para obter a constante de mola especificada, o número de espiras ativas deve satisfazer à Equação 14.7:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \quad \text{ou} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{(0{,}177)^4 11{,}5E6}{8(1{,}416)^3(25)} = 19{,}88 \cong 20 \qquad (w)$$

Observe que arredondamos este valor para o valor 1/4 mais próximo, uma vez que a tolerância de fabricação não pode alcançar precisão melhor. Isso torna o valor real de constante de mola $k = 24{,}8$ lbf/in.

16 O número total de espiras no corpo e o comprimento do corpo da mola são:

$$N_t = N_a + 1 = 20 + 1 = 21$$
$$L_b = N_t d = 21(0{,}177) = 3{,}72 \text{ in} \qquad (x)$$

17 O comprimento de um gancho padronizado é igual ao diâmetro interno da espira. O comprimento livre é

$$L_f = L_b + 2L_{gancho} = 3{,}72 + 2(1{,}24) = 6{,}2 \text{ in} \qquad (y)$$

18 A deflexão máxima e o comprimento de mola nessa deflexão são:

$$y_{max} = \frac{F_{max} - F_{inicial}}{k} = \frac{62{,}5 - 21{,}27}{25} = 1{,}65 \text{ in}$$
$$L_{max} = L_f + y_{max} = 6{,}2 + 1{,}65 = 7{,}85 \text{ in} \qquad (z)$$

Esse comprimento está dentro do diâmetro máximo de camo sendo, portanto, aceitável.

19 A frequência natural dessa mola é determinada a partir da Equação 14.26 e é

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a}\frac{d}{D^2}\sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} = \frac{2(0{,}177)}{\pi(20)(1{,}416)^2}\sqrt{\frac{11{,}5E6(386)}{32(0{,}285)}} = 62 \text{ Hz} = 3720 \text{ rpm} \qquad (aa)$$

A razão entre a frequência natural e a frequência forçante é

$$\frac{3720}{180} = 20{,}7 \qquad (ab)$$

que é suficientemente alta.

20 A especificação de projeto para esta mola A228 é então

$$d = 0{,}177 \text{ in} \qquad OD = 1{,}593 \text{ in} \qquad N_t = 21 \qquad L_f = 6{,}2 \text{ in} \qquad (ac)$$

21 Este projeto é restrito, já que se prediz que o gancho deva falhar sob fadiga flexional depois de cerca de um milhão de ciclos de operação. Se essa é uma vida muito curta, então um novo ciclo de iteração deve ser promovido para se chegar a um resultado melhor. Aumentar o diâmetro do fio para 0,192 in e o índice de mola para 8,5 aumentará todos os coeficientes de segurança, sendo o do gancho sob flexão o menor deles, valendo 1,2.

22 Os modelos CASE10C-1 e CASE10C-2 estão incluídos no CD-ROM. O modelo 1 é o mostrado neste exemplo. O modelo 2 utiliza os parâmetros modificados no passo 21 para melhorar o projeto.

14.11 RESUMO

As molas são muito utilizadas em máquinas de todos os tipos para prover compressão, tração ou forças de torção, ou ainda armazenar energia potencial. Este capítulo discutiu os usos de uma variedade de molas e o dimensionamento de uns poucos tipos de molas usadas comumente, a helicoidal de compressão, helicoidal de extensão, helicoidal de torção e Belleville. Os nomes das primeiras três definem o tipo de carga externa aplicada, não o tipo de tensão presente. É fácil confundir esses dois aspectos. Uma mola helicoidal de compressão ou extensão possui tensão de cisalhamento em suas espiras, e uma mola helicoidal de torção possui tensão de tração ou compressão nas suas espiras. Esses três tipos de molas são construídos de fio enrolado. O fio geralmente é redondo, embora o fio de seção retangular seja algumas vezes utilizado. As molas Belleville são feitas de uma peça plana conformada em forma cônica. As molas helicoidais possuem geralmente uma curva força-deflexão de característica linear (razão de mola constante). As molas Belleville possuem uma curva altamente não linear como característica, o que pode ser utilizado de forma vantajosa para obter uma constante de mola aproximadamente nula ou uma ação biestável.

Grande quantidade de dados foi gerada a respeito das características de resistência de uma mola de fio ou mola de peça plana. A maior parte dessa literatura é reproduzida neste capítulo. A resistência do material geralmente aumenta à medida que o tamanho da seção transversal do fio é reduzido, resultando portanto que um fio muito fino possui uma resistência à ruptura muito alta sob cargas estáticas. O limite de resistência à fadiga de materiais de alta resistência estática tende a saturar-se a valores razoavelmente altos em vez de continuar função da resistência estática. Estimativas da resistência à fadiga de vários materiais utilizados na construção de molas são também citados da literatura listada neste capítulo.

O projeto de molas, seja ele estático ou dinâmico, é inerentemente um exercício iterativo. Devem ser feitas hipóteses a respeito dos valores de diversos parâmetros a fim de que os cálculos possam ser executados. Geralmente, o resultado

do primeiro cálculo é um projeto malsucedido, requerendo que sejam feitas mudanças nos dados admitidos e que os dados sejam recalculados. Um computador é indispensável neste processo. Vários exemplos passo a passo de dimensionamento de molas são apresentados neste capítulo, e o leitor é estimulado a estudá-los juntamente com os arquivos, os quais fornecem mais informações que as apresentadas nas tabelas.

Equações importantes usadas neste capítulo

Constante de mola (Seção 14.1):

$$k = \frac{F}{y} \tag{14.1}$$

Combinação de molas em paralelo (Seção 14.1):

$$k_{total} = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \tag{14.2a}$$

Combinação de molas em série (Seção 14.1):

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} \tag{14.2b}$$

Índice de mola (Seção 14.4):

$$C = \frac{D}{d} \tag{14.5}$$

Deflexão de mola helicoidal de compressão (Seção 14.4):

$$y = \frac{8FD^3N_a}{d^4G} \tag{14.6}$$

Deflexão de mola helicoidal de extensão (Seção 14.7):

$$y = \frac{8\left(F - F_i\right)D^3N_a}{d^4G} \tag{14.23}$$

Deflexão de mola helicoidal de torção de fio redondo (Seção 14.8):

$$\theta_{rev} \cong 10{,}8\frac{MDN_a}{d^4E} \tag{14.28c}$$

Constante de mola de mola helicoidal de compressão (Seção 14.4):

$$k = \frac{F}{y} = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \tag{14.7}$$

Constante de mola de mola helicoidal de extensão (Seção 14.7):

$$k = \frac{F - F_i}{y} = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \tag{14.21}$$

Constante de mola de mola helicoidal de torção de fio redondo (Seção 14.8):

$$k = \frac{M}{\theta_{rev}} \cong \frac{d^4E}{10{,}8DN_a} \tag{14.29}$$

Tensão estática em mola helicoidal de compressão ou de extensão (Seção 14.7):

$$\tau_{max} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad \text{onde} \quad K_s = \left(1 + \frac{0,5}{C}\right) \tag{14.8b}$$

Tensão dinâmica em mola helicoidal de compressão ou de extensão (Seção 14.7):

$$K_w = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} \tag{14.9a}$$

$$\tau_{max} = K_w \frac{8FD}{\pi d^3} \tag{14.9b}$$

Tensão no diâmetro interno de mola helicoidal de torção (Seção 14.8):

$$K_{b_i} = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)} \tag{14.32a}$$

$$\sigma_{i_{max}} = K_{b_i} \frac{M_{max} c}{I} = K_{b_i} \frac{M_{max}(d/2)}{\pi d^4/64} = K_{b_i} \frac{32 M_{max}}{\pi d^3} \tag{14.33a}$$

Tensão no diâmetro externo de mola helicoidal de torção (Seção 14.8):

$$K_{b_o} = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} \tag{14.32b}$$

$$\sigma_{o_{min}} = K_{b_o} \frac{32 M_{min}}{\pi d^3}; \qquad \sigma_{o_{max}} = K_{b_o} \frac{32 M_{\max}}{\pi d^3} \tag{14.33b}$$

Limite de resistência à tração de fio de aço – ver a Tabela 14-4 para constantes (Seção 14.4):

$$S_{ut} \cong A d^b \tag{14.3}$$

Limite de resistência ao cisalhamento de fio (Seção 14.4):

$$S_{us} \cong 0,67 S_{ut} \tag{14.4}$$

Limites de endurança de torção para fios de aço para mola com razão de tensão *R* = 0 (Seção 14.4):

$$\begin{aligned} S_{ew}' &\cong 45,0 \text{ kpsi } (310 \text{ MPa}) \quad \text{para molas não jateadas} \\ S_{ew}' &\cong 67,5 \text{ kpsi } (465 \text{ MPa}) \quad \text{para molas jateadas} \end{aligned} \tag{14.13}$$

Limites de endurança de torção para fios de aço para mola com razão de tensão *R* = –1 (Seção 14.4):

$$S_{es} = 0,5 \frac{S_{ew} S_{us}}{S_{us} - 0,5 S_{ew}} \tag{14.18b}$$

Limites de endurança de flexão para fios de aço para mola com razão de tensão *R* = 0 (Seção 14.4):

$$S_{ew_b}' = \frac{S_{ew}'}{0,577} \tag{14.34a}$$

Limites de endurança de flexão para fios de aço para mola com razão de tensão *R* = –1 (Seção 14.4):

$$S_e = 0,5 \frac{S_{ew_b} S_{ut}}{S_{ut} - 0,5 S_{ew_b}} \tag{14.35c}$$

Coeficiente de segurança estático para mola helicoidal de compressão ou extensão (Seção 14.5):

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} \tag{14.15}$$

Coeficiente de segurança dinâmico para mola helicoidal de compressão ou extensão (Seção 14.4):

$$S_{es} = 0{,}5\frac{S_{ew}S_{us}}{S_{us} - 0{,}5S_{ew}} \tag{14.18a}$$

Coeficiente de segurança dinâmico de mola helicoidal de torção (Seção 14.8):

$$N_{f_b} = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_{o_{min}}\right)}{S_e\left(\sigma_{o_{média}} - \sigma_{o_{min}}\right) + S_{ut}\sigma_{o_{alt}}} \tag{14.35b}$$

Função carga-deflexão para uma arruela Belleville (Seção 14.9):

$$F = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2\left(1 - \nu^2\right)}\left[\left(h - y\right)\left(h - \frac{y}{2}\right)t + t^3\right] \tag{14.36a}$$

onde

$$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left[\frac{\left(R_d - 1\right)^2}{R_d^2}\right] \quad \text{e} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{14.36b}$$

Máxima tensão de compressão em mola Belleville (Seção 14.9):

$$\sigma_c = -\frac{4Ey}{K_1 D_o^2\left(1 - \nu^2\right)}\left[K_2\left(h - \frac{y}{2}\right) + K_3 t\right] \tag{14.37a}$$

onde

$$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left(\frac{R_d - 1}{\ln R_d} - 1\right) \quad \text{e} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{14.37d}$$

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left(\frac{R_d - 1}{2}\right) \tag{14.38e}$$

Espessura requerida de uma mola Belleville para a força de condição plana (Seção 14.9):

$$t = \sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{19{,}2E7}\frac{D_o^2}{h/t}} \tag{14.38us}$$

14.12 REFERÊNCIAS

1 **Associated Spring**, *Design Handbook: Engineering Guide to Spring Design*. Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn., 1987.

2 **H. C. R. Carlson**, Selection and Application of Spring Material. *Mechanical Engineering*, **78**: pp. 331-334, 1956.

3 **A. M. Wahl**, *Mechanical Springs*. McGraw-Hill: New York, 1963.

4 **F. P. Zimmerli**, "Human Failures in Spring Design." *The Mainspring, Associated Spring Corp.*, Aug.-Sept. 1957.

5 **R. E. Cornwell**, "Stress Concentration Factors for the Torsion of Curved Beams of Arbitrary Cross Section." *Proc. Inst. Mechanical Engineers — Part C — Journal of Mechanical Engineering Science*; Dec2006, Vol. 220 Issue 12, pp.1709–1726.

6 *Handbook of Spring Design*. Spring Manufacturers Institute, Oak Brook, IL, 2002.

14.13 PROBLEMAS

*14-1 Uma mola linear deve produzir 200 N quando sob sua deflexão máxima de 150 mm e 40 N quando sob sua deflexão mínima de 50 mm. Qual é a sua constante de mola?

14-2 Encontre o limite de resistência à tração, o limite de resistência ao cisalhamento e a resistência ao escoamento sob torção de um fio de aço A229 revenido em óleo e com diâmetro de 1,8 mm.

*14-3 Encontre a resistência ao escoamento sob torção e o limite de resistência ao cisalhamento de um fio de 0,105 in de diâmetro, não ajustado, feito de A229 e utilizado em uma mola helicoidal de compressão.

*14-4 Qual a resistência à fadiga por torção do fio do Problema 14-3 a $N = 5E6$ ciclos?

14-5 Desenhe o diagrama de Goodman modificado para o fio utilizado no Problema 14-3.

*14-6 Quais são os valores de constante de mola e índice de mola de uma mola de compressão com extremidades esquadrejadas e esmerilhadas de diâmetro 1 mm, $D = 10$ mm e 12 espiras?

*14-7 Encontre a frequência natural da mola do Problema 14-6.

†**14-8** Uma máquina de papel processa rolos de papel que têm uma densidade de 984 kgf/m^3. O rolo de papel possui um diâmetro externo de 1,50 m por um diâmetro interno de 0,22 m com um comprimento de 3,23 m e é suportado por um eixo vazado de aço com 22 cm de diâmetro externo por 20 cm de diâmetro interno e do mesmo comprimento que o rolo de papel. Encontre a constante de mola do eixo e a frequência natural fundamental do conjunto eixo-rolo quando montados.

14-9 Determine o raio mínimo de flexão de uma mola de tira de aço com dureza 50 HRC com 1 mm de espessura.

***14-10** Uma prancha de mergulho em balanço é mostrada na Figura P14-1*a*. Uma pessoa de 100 kgf está posicionada na extremidade livre em seu centro. Suponha dimensões para a sessão transversal de 305 mm × 32 mm e um material com E = 10,3 GPa. Qual é a constante de mola e a frequência natural fundamental da combinação mergulhador-prancha de mergulho?

*†*14-11* Projete uma mola helicoidal de compressão para uma carga estática de 45 lbf com uma deflexão de 1,25 in e um coeficiente de segurança de 2,5. Use $C = 7,5$. Especifique todos os parâmetros necessários para fabricar a mola.

14-12 Repita o Problema 14-10 usando o projeto da prancha em balanço da Figura P14-1*b*.

**14-13* Dados $d = 0,312$ in, $y_{trabalho} = 0,75$ in, 15% de tolerância de contato, fio de cromo vanádio, não jateado, extremidades em esquadro, $F_{max} = 250$ lbf e $F_{min} = 50$ lbf, determine N_a, D, L_f, $L_{fechada}$, k, $y_{inicial}$ e o diâmetro mínimo de furo para a mola. Vida infinita é desejável com um coeficiente de segurança de 1,4. Escolha um índice de mola aceitável. Ajuste deve ser utilizado.

14-14 A Figura P14-2 mostra um brinquedo de criança chamado de *pula-pula*. A criança se apoia nos pedais, aplicando metade do seu peso em cada lado. Ela então pula para cima, afastando-se do chão, enquanto mantém seus pés apoiados nos pedais, rebotanto com a ajuda da mola que amortece o impacto e armazenando assim energia que a ajudará no próximo salto. Pressuponha que a criança tenha

Tabela P14-0†
Matriz de problemas/tópicos

14.1 Constante de mola
14-1, **14-8, 14-10**, **14-12**, 14-46, 14-47, 14-53

14.3 Materiais para molas
14-9, 14-33, 14-34, 14-35, 14-36

14.4 Molas de compressão
14-2, 14-3, 14-4, 14-5, 14-6, 14-7, 14-49, 14-52

14.5 Cargas estáticas
14-11, *14-21*, *14-44*, *14-45*, 14-48, 14-54

14.6 Fadiga
14-14, **14-14**, 14-15, **14-16**, *14-19*, *14-20*, *14-28*, 14-31, 14-32

14.7 Molas de extensão
14-17, *14-18*, 14-29, *14-37*, *14-38*, 14-50

14.8 Molas de torção
Projeto estático
14-22, *14-23*, *14-39*, *14-40*
Projeto fadiga
14-24, *14-25*, *14-30*, *14-41*

14.9 Molas Belleville
Projeto estático
14-26, *14-42*, *14-43*, 14-51
Projeto fadiga
14-27

* Respostas para estes problemas são fornecidas no Apêndice D.

† Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, com o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores

(a) Plataforma de mergulho suspensa

(b) Plataforma de mergulho engastada

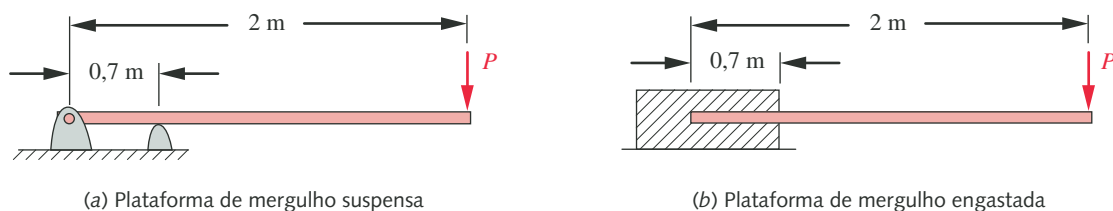



FIGURA P14-1

Problemas 14-10 e 14-12.

um peso de 60 lbf e que a constante de mola seja de 100 lbf/in. O brinquedo pesa 5 lbf. Projete uma mola helicoidal de compressão que suporte pulos de 2 in com um coeficiente de segurança dinâmico de 1 para vida finita de 5*E*4 ciclos. Determine a frequência natural fundamental do sistema.

14-15 Desenhe o diagrama de Goodman modificado para o seguinte projeto de mola e determine o seu coeficiente de segurança: $S_{fw} = 40$ kpsi, $S_{us} = 200$ kpsi, $\tau_a = 12$ kpsi, $\tau_m = 95$ kpsi, $\tau_i = 75$ kpsi.

14-16 O Problema 6-16 descreve uma pista para bolas de boliche que possuem 4,5 in de diâmetro e 2,5 lbf de peso. Projete um lançador de bolas por meio de molas, que irá permitir a paraplégicos lançar as bolas, a partir do ponto em que a pista do Problema 6-16 as deixa, simplesmente com um fechar de chaves que libera o lançador. O atuador do lançador pode ser estirado por um ajudante, sendo que a energia armazenada na mola helicoidal de compressão, que você deve projetar, terá que guiar o atuador até a bola fazendo com que esta role ao longo da pista de boliche. Você terá que determinar restrições apropriadas e fazer muitas hipóteses a respeito de coisas como o tamanho da pista, perdas por atrito e energia requerida para derrubar os pinos.

**14-17* Projete uma mola helicoidal de extensão capaz de trabalhar com cargas dinâmicas que variam entre 175 N e 225 N em 0,85 cm de deflexão de trabalho. Utilize fio musical e ganchos padronizados. A frequência forçante é de 1500 rpm. Vida infinita é desejável. Minimize o tamanho do pacote. Escolha coeficientes de segurança apropriados tanto para fadiga quanto para escoamento e ressonância.

14-18 Projete uma mola helicoidal de extensão com ganchos padronizados capaz de trabalhar com cargas dinâmicas que variam entre 300 lbf e 500 lbf em um intervalo de deflexão de trabalho de 2 in. Utilize fio de cromo vanádio. A frequência forçante é de 1000 rpm. Vida infinita é desejável. Minimize o tamanho do pacote. Escolha valores apropriados de coeficientes de segurança contra fadiga, escoamento e ressonância.

**14-19* Projete uma mola helicoidal de compressão capaz de trabalhar com cargas dinâmicas que variam entre 700 N e 1000 N em um intervalo de deflexões de trabalho de 22 mm. Utilize fio musical, sem jateamento, com 10% de tolerância de contato, interferência, com extremidades esquadrejadas e esmerilhadas. A frequência forçante é de 500 rpm. Vida infinita é desejável. Minimize o tamanho do pacote. Escolha coeficientes de segurança adequados contra falha por fadiga, escoamento e ressonância.

14-20 Projete uma mola helicoidal de compressão para suportar cargas dinâmicas que variam entre 135 N e 220 N em um intervalo de deflexão de trabalho de 32 mm. Utilize fio de mola de cromo vanádio, jateado, com extremidades esquadrejadas e com 15% de tolerância de contato. A frequência forçante é de 250 rpm. Vida infinita é desejável. Minimize o tamanho do pacote. Escolha coeficientes de segurança apropriados contra falha por fadiga, escoamento e ressonância.

**14-21* Projete uma mola helicoidal de compressão que, para uma carga estática de 400 N, apresente uma deflexão de 45 mm com um coeficiente de segurança de 2,5.

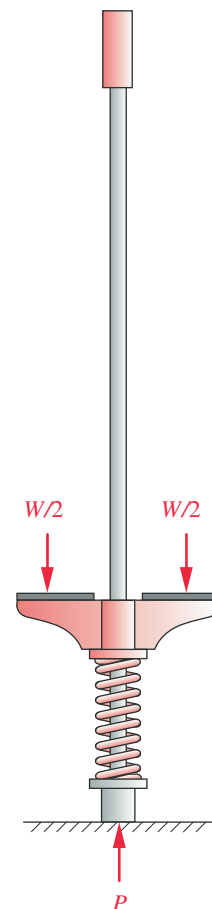



FIGURA P14-2

Problema 14-14.

* Respostas para estes problemas são fornecidas no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto. Problemas numerados em **negrito** são extensões de problemas similares, com o mesmo número após o hífen em capítulos anteriores.

Use $C = 8$. Especifique todos os parâmetros necessários à manufatura da mola. Deixe claro todas as hipóteses.

******14-22* Projete uma mola helicoidal de torção com terminação reta capaz de suportar uma carga estática de 200 N-m apresentando uma deflexão de 45°, com um coeficiente de segurança de 1,8. Especifique todos os parâmetros necessários à manufatura da mola. Deixe claro todas as hipóteses.

14-23 Projete uma mola helicoidal de torção com terminação reta capaz de suportar uma carga estática de 300 lbf-in com uma deflexão de 75° e um coeficiente de segurança de 2. Especifique todos os parâmetros necessários para a manufatura da mola. Especifique todas as hipóteses.

**14-24* Projete uma mola helicoidal de torção com terminação reta para suportar uma carga dinâmica no intervalo 50-105 N-m com uma deflexão de 80° e coeficiente de segurança de 2,5. Especifique todos os parâmetros necessários à manufatura da mola. Especifique todas as hipóteses.

14-25 Projete uma mola helicoidal de torção com terminação reta para resistir a cargas dinâmicas entre 150 e 350 lbf-in, com uma deflexão de 45° e um coeficiente de segurança de 1,4. Especifique todos os parâmetros necessários à manufatura da mola. Apresente todas as hipóteses assumidas.

**14-26* Projete uma mola Belleville para produzir uma força estática constante de 400 N ± 10%, em um intervalo de deflexão de 1 mm.

14-27 Projete uma mola Belleville para operação bimodal entre ±50 N.

14-28 Supostos os seguintes dados para uma mola helicoidal de compressão carregada à fadiga, desenvolva o projeto desta mola de modo a obter vida infinita. Apresente todas as hipóteses assumidas e as fontes de dados empíricos assumidos. $C = 8{,}5$ $d = 8$ mm, 625 rpm, deflexão de trabalho = 20 mm, 15% de tolerância de contato, fio musical sem jateamento, extremidades esquadrejadas, pré-ajustada, $F_{max} = 450$ N, $F_{min} = 225$ N.

14-29 Uma mola helicoidal de extensão, carregada em fadiga, foi projetada para vida infinita utilizando os seguintes dados: $C = 9$, $d = 8$ mm, deflexão de trabalho = 50 mm, não jateada, fio de cromo vanádio, $F_{max} = 935$ N, $F_{min} = 665$ N, $F_{inicial} = 235$ N, 13,75 espiras ativas. Determine os coeficientes de segurança à falha nos ganchos padronizados. Apresente todas as hipóteses e fontes de dados empíricos utilizados.

14-30 Assumidos os seguintes dados para uma mola helicoidal de torção carregada à fadiga, determine o índice de mola, diâmetro não carregado de espira, diâmetro mínimo das espiras carregadas e coeficiente de segurança à fadiga: deflexão de montagem = 0,25 rev, deflexão de trabalho = 0,50 rev, $k = 60$ lbf-in/rev, $N_a = 20$, diâmetro de fio musical de 0,192 in, não jateado. Apresente todas as hipóteses e fontes de dados empíricos utilizados.

14-31 Uma mola helicoidal de compressão deve fornecer uma força mínima de 150 lbf na instalação e ter uma deflexão de trabalho de 1 in. A constante de mola é de 75 lbf/in. A espira deve se encaixar em um furo de 2,1 in de diâmetro com uma tolerância de 0,1 in. Utilize um fio musical, não jateado, de 0,25 in de diâmetro, com extremidades esquadrejadas/esmerilhadas. Utilizando uma tolerância de contato de 15%, determine:

(a) As tensões e o coeficiente de segurança para vida infinita em fadiga
(b) A altura fechada
(c) A tensão e o coeficiente de segurança quando fechada
(d) O número total de espiras
(e) O comprimento livre
(f) A frequência natural em Hz
(g) Desenhe um diagrama de Goodman e identifique o coeficiente de segurança de (a)

14-32 Requer-se que uma mola helicoidal de compressão forneça uma força variável no tempo que varia entre o mínimo de 100 lbf até o máximo de 300 lbf em um intervalo de deflexão de 1 in. Ela deve trabalhar de forma livre sobre um eixo de

* Respostas para estes problemas são fornecidas no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

1,25 in de diâmetro. Utilize um fio de aço-carbono repuxado a frio e possuindo S_{ut} = 250 000 psi. Índice de mola igual a 6, tolerância de interferência, contato de 15% e extremidades esquadrejadas e esmerilhadas são desejáveis.

14-33 Determine o limite de resistência à tração e limite de resistência ao cisalhamento de um fio musical feito de ASTM A228 para os seguintes diâmetros principais: 0,5 mm, 1,0 mm, 2,0 mm, 4,0 mm e 6,0 mm.

14-34 Determine o limite de resistência sob tração e sob cisalhamento de um fio musical de ASTM A228 para os seguintes diâmetros principais: 0,020 in, 0,038 in, 0,081 in, 0,162 in e 0,250 in.

14-35 Selecione o diâmetro preferencial de um fio de ASTM A227 repuxado a frio, que possua um limite de resistência à tração tão próximo quanto, porém não menor que, 180 kpsi.

14-36 Selecione um diâmetro preferencial de um fio de aço ASTM A229, revenido em óleo, que possua um limite de resistência à tração tão próximo quanto, porém não menor que, 1430 MPa.

14-37 Projete uma mola helicoidal de extensão para suportar uma carga dinâmica que varia entre 275 N e 325 N em um intervalo de deflexão de trabalho de 10 mm. Use fio de cromo silício e ganchos padronizados. A frequência forçante vale 800 rpm. Vida infinita é desejável. Minimize o tamanho do pacote. Escolha fatores apropriados de coeficientes de segurança à fadiga, escoamento e ressonância.

14-38 Projete uma mola helicoidal de extensão capaz de suportar uma carga dinâmica que varia entre 60 lbf e 75 lbf em um intervalo de deflexão de trabalho de 0,50 in. Utilize fio musical e ganchos padronizados. A frequência forçante vale 1200 rpm. Vida infinita é desejável. Minimize o tamanho do pacote. Escolha coeficientes de segurança adequados, contra falha por fadiga, escoamento e ressonância.

14-39 Projete uma mola helicoidal de torção com terminação reta para uma carga estática de 50 N-m com deflexão de 60° e coeficiente de segurança de 2. Especifique todos os parâmetros necessários para a manufatura da mola. Apresente todas as hipóteses.

14-40 Projete uma mola helicoidal de torção com terminação reta para carga estática de 430 in-lbf, com uma deflexão de 55° e um coeficiente de segurança igual a 2. Especifique todos os parâmetros necessários à manufatura da mola. Apresente as hipóteses adotadas.

14-41 Supostos os seguintes dados para uma mola helicoidal de torção, carregada à fadiga, determine o índice de mola, diâmetro das espiras na condição não carregada, diâmetro mínimo das espiras sob carga e coeficiente de segurança à fadiga: deflexão quando montada = 0,15 rev, deflexão de trabalho = 0,35 rev, k = 10 N-m/rev, N_a = 25, diâmetro do fio de 4,50 mm, tratamento de revenimento com óleo, não jateada. Apresente todas as hipóteses e fontes de dados empíricos utilizados.

**14-42* Projete uma mola Belleville para produzir uma força constante de aproximadamente 2000 lb com uma deflexão de 0,05 in com uma constante de mola quase constante.

14-43 Projete uma mola Belleville para produzir uma força estática de 400 lb com uma deflexão de achatamento de 50% e 200 lb na condição plana.

**14-44* Projete uma mola helicoidal de compressão para uma carga constante de 60 lb em uma deflexão de 1,50 in com um fator de 2,0 para trabalhar em um furo de 1,06 in de diâmetro. Especifique todos os parâmetros para a fabricação da mola.

14-45 Projete uma mola helicoidal de compressão para uma carga constante de 200N em uma deflexão de 40 mm com um fator de 1,8 para trabalhar em um furo de 25 mm. Especifique todos os parâmetros para a fabricação da mola.

14-46 Três molas estão dispostas em séries, similarmente à configuração mostrada na Figura 3-1(*a*). Elas possuem constantes de mola k_1 = 50 N/mm, k_2 = 150 N/mm e k_3 = 500 N/mm, respectivamente. Determine a constante total da mola, a deflexão de cada mola e a deflexão global se uma carga de F = 600 N é aplicada.

* Respostas para estes problemas são fornecidas no Apêndice D. Problemas numerados em *itálico* são problemas de projeto.

14-47 Três molas estão dispostas em paralelo, similarmente à configuração mostrada na Figura 3-1(*b*). Elas possuem constantes de mola $k_1 = 50$ N/mm, $k_2 = 150$ N/mm, e $k_3 = 500$ N/mm, respectivamente. Determine a constante total da mola, a força carregada em cada mola e a deflexão global se uma carga de $F = 600$ N é aplicada.

14-48 Uma mola feita com fio ASTM A228 com bordas quadradas e baixas, diâmetro da mola $d = 3$ mm, diâmetro externo de $D_o = 27$ mm, 14 espiras totais e comprimento livre de $L_f = 80$ mm foi escolhida para uma aplicação. Determine o coeficiente de segurança constante se a mola estiver submetida a uma carga constante de 175 N.

14-49 Uma mola com bordas quadradas e baixas, diâmetro da mola de $d = 4$ mm, diâmetro externo de $D_o = 40$ mm, 18 espiras totais e comprimento livre de $L_f = 140$ mm foi escolhida para uma aplicação onde a deflexão inicial é de 15 mm e a deflexão de trabalho é de 50 mm. Determine o comprimento mínimo de trabalho, comprimento fechado, índice de mola e constante de mola para esta mola.

14-50 Uma mola de extensão possui um diâmetro de fio d = 3 mm e diâmetro externo de $D_o = 27$ mm. Determine a pré-carga definida para esta mola.

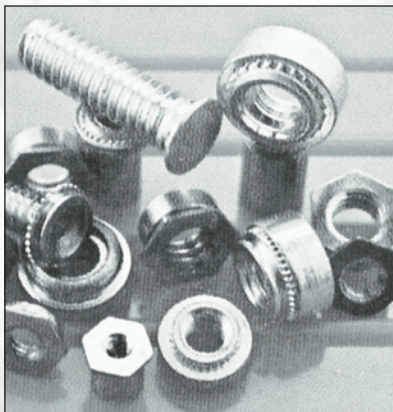
14-51 Um agrupamento em série de molas Belleville é necessário para mais deflexão em um projeto. O agrupamento será guiado por um pino interno como mostrado na Figura 14-35(*b*). O diâmetro mínimo interno das molas individuais do agrupamento é de $D_i = 25$ mm. Determine as condições de superfície recomendadas para o pino e o seu diâmetro máximo. (Dica: vá ao site www.spirol.com e procure por molas de disco, agrupamento).

14-52 A Equação 14.9a define um cisalhamento combinado direto e um fator de concentração de tensão K_w para uso com molas helicoidais de fio redondo. A Equação 14.11a define um fator similar K_{rw} para calcular tensão de cisalhamento em molas com espira de fio retangular. Encontre um gráfico K_{rw}/K_w para fio quadrado com valores de índice de mola C variando de 1,2 a 10.

14-53 Repita o Problema 14-6 um fio quadrado de 1mm em vez de um fio redondo.

14-54 Uma mola helicoidal de compressão é solicitada a fornecer uma força mínima de 650 N na instalação e possui uma deflexão de trabalho de 25 mm. A constante de mola é 13 N/mm. A espira deve caber em um furo de 53 mm de diâmetro com folga de 3 mm. Use um fio musical de 6 mm com bordas quadradas/baixas. Usando um limite de interferência de 15%, encontre:

(a) A tensão na deflexão de trabalho.
(b) O comprimento fechado.
(c) A tensão no comprimento fechado.
(d) O número total de espiras.
(e) O comprimento livre.
(f) A frequência natural em Hz.

15

PARAFUSOS E FIXADORES

Por falta de um prego, a ferradura se perde;
por falta de uma ferradura, o cavalo se perde;
e, por falta de um cavalo, o cavaleiro se perde.

GEORGE HERBERT

15.0 INTRODUÇÃO

As "porcas e parafusos" presentes em um projeto podem parecer um de seus aspectos menos interessantes, mas são, na verdade, um dos mais fascinantes. O sucesso ou falha de um projeto pode depender da seleção apropriada e uso de fixadores. Além disso, o projeto e a manufatura de juntas é um negócio grande e representa parte significativa da nossa economia. Literalmente milhares de diferentes projetos de juntas são oferecidos pelos vendedores e milhares a milhões de juntas são utilizadas em uma montagem complexa como um automóvel ou avião. O Boeing 747 utiliza aproximadamente 2,5 milhões de juntas, algumas das quais custam muitos dólares.[1]

Há uma imensa variedade de fixadores disponíveis comercialmente, desde os pares parafuso-porca comuns até dispositivos múltiplos para rápida liberação de painéis ou para aplicações envolvendo junções escondidas. A Figura 15-1 é uma amostra da variedade disponível. Não podemos cobrir todas essas variedades em um capítulo. Livros completos foram escritos sobre junções e alguns deles aparecem na bibliografia deste capítulo. Limitaremos nossa discussão ao dimensionamento e seleção de fixadores convencionais como parafusos de porca, parafusos sem porca, porcas, etc., utilizados em aplicações envolvendo projeto de máquinas nas quais cargas e tensões significativas são encontradas.

Os parafusos são utilizados tanto para manter coisas unidas, como no caso de parafusos de fixação, quanto para mover cargas, como no caso dos chamados parafusos de potência, ou parafusos de avanço. Investigaremos esses dois tipos de aplicações. Parafusos usados para fixação podem ser arranjados para resistir a cargas de tração, de cisalhamento, ou a ambas. Exploraremos a aplicação de pré-cargas em parafusos de fixação, as quais podem aumentar sensivelmente a sua capacidade de sustentar cargas. A Tabela 15-0 mostra as variáveis utilizadas neste capítulo e indica as equações ou seções nas quais elas podem ser encontradas.

Tabela 15-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	área (com vários subscritos)	in^2	m^2	várias
A_b	área total do parafuso	in^2	m^2	Eq. 15.11*a*
A_m	área efetiva de material na zona de sujeição	in^2	m^2	Eq. 15.18-22
A_t	área sob tração do parafuso	in^2	m^2	Seção 15.1
C	constante de rigidez da junta	nenhuma	nenhuma	Eq. 15.13
C_{carreg}	fator de carregamento	nenhuma	nenhuma	Ex. 15-3
C_{conf}	fator de confiabilidade	nenhuma	nenhuma	Ex. 15-3
$C_{tamanho}$	fator de tamanho	nenhuma	nenhuma	Ex. 15-3
C_{superf}	fator de superfície	nenhuma	nenhuma	Ex. 15-3
C_{temp}	fator de temperatura	nenhuma	nenhuma	Ex. 15-3
d	diâmetro (com vários subscritos)	in	m	várias
D	diâmetro (com vários subscritos)	in	m	várias
e	eficiência	nenhuma	nenhuma	Eq. 15.7
E	módulo de elasticidade	psi	Pa	várias
F	força (com vários subscritos)	lb	N	várias
f	força de atrito	lb	N	Eq. 15.4
F_b	força máxima no parafuso	lb	N	Seção 15.7
F_i	forca de pré-carregamento	lb	N	Seção 15.7
F_m	força mínima no material	lb	N	Seção 15.7
HRC	dureza Rockwell C	nenhuma	nenhuma	várias
J	segundo momento polar de área	in^4	m^4	Eq. 15.9
k	constante de mola (com vários subscritos)	lb/in	N/m	Seção 15.7
k_b	rigidez do parafuso (constante de mola)	lb/in	N/m	Seção 15.7
k_m	rigidez do material (constante de mola)	lb/in	N/m	Seção 15.7
K_f	fator de concentração de tensões à fadiga	nenhuma	nenhuma	Eq.15.15*b*
K_{fm}	fator de concentração de tensões relativo às tensões médias	nenhuma	nenhuma	Eq. 15.15*b*
l	comprimento (com vários subscritos)	in	m	várias
L	comprimento de hélice	in	mm	Seção 15.2
n	número de parafusos	nenhuma	nenhuma	Seção 15.10
N	número de filetes por unidade de comprimento	nenhuma	nenhuma	Seção 15.2
N_f	coeficiente de segurança à fadiga	nenhuma	nenhuma	Eq. 15.16
N_{vaz}	coeficiente de segurança – vazamento	nenhuma	nenhuma	Estudo de Caso 7D
N_y	coeficiente de segurança – escoamento estático	nenhuma	nenhuma	Ex. 15-2
N_{sep}	coeficiente de segurança – separação	nenhuma	nenhuma	Eq. 15.14*d*
p	passo de hélice	in	mm	várias
P	carga (com vários subscritos)	lb	N	várias
P_b	porção da carga percebida pelo parafuso pré-carregado	lb	N	Eq. 15.13
P_m	porção da carga percebida pelo material pré-carregado	lb	N	Eq. 15.13
r	raio	in	m	Seção 15.10

A epígrafe de abertura na página anterior é frequentemente atribuída de forma errônea a Benjamin Franklin, que popularizou a máxima de Herbert como um prefixo para o seu *Poor Richard's Almanac*, há mais de um século. De qualquer forma, provém de uma experiência contemporânea. O *Boston Sunday Globe* de 16 de outubro de 1994 reportou que, no verão de 1994, três arranjos de células de combustível nuclear na usina nuclear de Seabrook, N. H., foram danificados quando um parafuso de 1 pé de comprimento e 5 libras de peso foi lançado dentro do reator pela água de resfriamento depois de liberado por vibração de uma bomba à qual estava fixado. O fechamento para reparos custaria milhões de dólares gastos com eletricidade comprada de terceiros. O acidente foi atribuído a um dimensionamento inadequado dos parafusos. Por falta de um parafuso..., etc.

A fotografia na página capitular é cortesia de Fastbolt Inc., South Hackensack, N. J., 07606

Tabela 15-0 Variáveis usadas neste capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
S_e	limite de resistência à fadiga corrigido	psi	Pa	várias
$S_{e'}$	limite de resistência à fadiga não corrigido	psi	Pa	várias
S_p	resistência de prova do parafuso	psi	Pa	seção 15.6
S_{us}	máxima resistência ao cisalhamento	psi	Pa	várias
S_{ut}	máxima resistência à tração	psi	Pa	várias
S_y	resistência ao escoamento	psi	Pa	várias
S_{ys}	resistência ao escoamento sob cisalhamento	psi	Pa	Ex. 15-6
T	torque	lb-in	N-m	Eq. 15.5
w_i, w_o	fatores geométricos de rosca	nenhuma	nenhuma	Tabela 15-5
W	trabalho	in-lb	joules	Eq. 15.7
x, y	variáveis generalizadas de comprimento	in	m	
α	ângulo radial de rosca	deg	deg	Eq. 15.5
δ	deflexão	in	m	seção 15.7
λ	ângulo de hélice	deg	deg	seção 15.2
μ	coeficiente de atrito	nenhuma	nenhuma	seção 15.2
σ	tensão normal (com vários subscritos)	psi	Pa	várias
τ	tensão de cisalhamento (com vários subscritos)	psi	Pa	seção 15.3

FIGURA 15-1

Uma amostra da variedade de fixadores disponíveis no comércio. (Cortesia de Bolt Products Inc., City of Industry, Calif., 91745.)

15.1 FORMAS PADRONIZADAS DE ROSCA

O elemento comum entre os vários fixadores é a rosca. Em termos gerais, a rosca é uma hélice que faz com que o parafuso avance sobre o material ou porca quando rotacionado. As roscas podem ser externas (parafuso atarrachante) ou internas (porcas ou furo rosqueado). As formas de roscas originalmente eram diferentes para cada um dos principais países fabricantes, porém, após a Segunda Guerra Mundial, foram padronizadas na Inglaterra, no Canadá e nos Estados Unidos no que hoje se conhece como série Unified National Standard (UNS), como mostrado na Figura 15-2. O padrão europeu é definido pela ISO e tem essencialmente a mesma forma de seção transversal de rosca, usando, porém, dimensões métricas e, portanto, não é intercambiável com as roscas UNS. Ambos os sistemas, UNS e ISO, contudo, são utilizados corriqueiramente nos Estados Unidos. Ambos utilizam um ângulo incluído de 60° e definem o tamanho de rosca pelo diâmetro nominal externo (máximo) d da rosca externa. O passo de rosca p é a distância entre roscas adjacentes. Crista e raiz são tomadas como planas para reduzir a concentração de tensões que ocorre em canto vivo. As especificações permitem que se arredondem esses recortes devido ao desgaste de ferramenta. O diâmetro primitivo d_p e o diâmetro de raiz d_r são definidos em termos do passo de rosca p com razões ligeiramente diferentes encontradas nas roscas UNS e ISO.

O comprimento L da rosca é a distância que uma rosca par (porca) avançará axialmente com uma revolução da porca. Se for uma **rosca simples**, como mostrado na Figura 15-2, o avanço irá igualar o passo. Parafusos também podem ser feitos com **roscas múltiplas**, também chamadas de **roscas de múltiplas entradas**. Uma **rosca dupla** (2 entradas) possui duas ranhuras paralelas dispostas ao redor do diâmetro, como um par de “trilhos ferroviários paralelos” em hélice. Nesse caso, o avanço será o dobro do passo. Uma **rosca tríplice** (3 entradas) terá um avanço igual a três vezes o passo, etc. As roscas múltiplas têm a vantagem de possuir uma altura menor e um avanço aumentado para permitir o avanço mais rápido da porca. Alguns sistemas de direção automotiva com parafusos de potência utilizam parafusos de 5 entradas. Contudo, a maior parte dos parafusos é feita com rosca simples (1 entrada).

Três séries padrão de famílias de diâmetro primitivo são definidas para as roscas de padrão UNS: passo grosso (UNC), passo fino (UNF) e passo extrafino (UNEF). A **série grossa** é a mais comum e é recomendada para aplicações comuns, especialmente onde se requerem repetidas inserções e remoções do parafuso ou onde o parafuso é rosqueado em um material mole. Essas roscas têm menos propensão a cruzar ou cortar o material mais mole com um objeto de

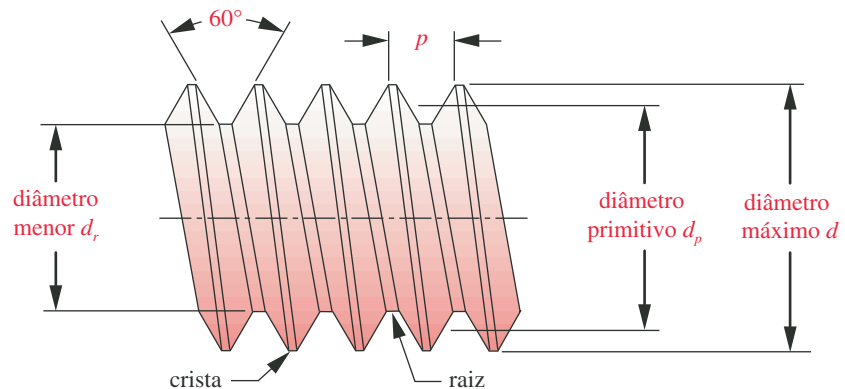



FIGURA 15-2

Formas de rosca-padrão Unified National e ISO.

inserção. **Roscas finas** são mais resistentes ao afrouxamento decorrente de vibrações que as roscas grossas por causa do seu menor ângulo de hélice e, portanto, são utilizadas em automóveis, aviões e outras aplicações submetidas a vibrações. As roscas da **série ultrafina** são utilizadas onde a espessura de parede é limitada e suas roscas pequenas são uma vantagem.

Os padrões Unified National e ISO definem intervalos de tolerância para roscas internas e externas de maneira a controlar o seu ajuste. A UNS define três tipos de classes, chamadas 1, 2 e 3. A classe 1 possui as tolerâncias mais largas e utiliza fixadores de "qualidade comercial" (pouco custosos) para uso casual em residências, etc. A classe 2 define tolerâncias mais estreitas para uma melhor qualidade de encaixe entre as roscas pares e é adequada para uso geral em projeto de máquinas. A classe 3 é a de maior precisão e pode ser especificada quando ajustes mais precisos são requeridos. O custo aumenta com classes de ajuste mais altas. Uma letra de designação diferencia roscas A (externas) e B (internas).

Uma rosca é especificada a partir de um código que define a sua série, diâmetro, passo e classe de ajuste. O passo de roscas UNS é definido reciprocamente como o número de roscas por polegada, enquanto na rosca métrica (ISO) o passo de rosca é especificado pela dimensão do passo em mm. Um exemplo de uma especificação de rosca UNS seria

1/4-20 UNC-2A

que define rosca externa de diâmetro 0,250 in com 20 filetes por polegada, série grossa, classe 2 de ajuste. Um exemplo de especificação de rosca métrica seria

$$M8 \times 1{,}25$$

que define uma rosca ISO comum de 8 mm de diâmetro por 1,25 mm de passo de hélice. Todas as roscas-padrão são de mão direita (RH) por padrão, a menos que haja especificação como de mão esquerda por adição das letras LH à especificação.* Uma rosca direita afastará a porca (ou parafuso) de você quando um ou outro componente for girado na direção dos ponteiros do relógio.

Área sob tração

Se uma barra rosqueada como mostrado na Figura 15-2 é submetida a uma carga de tração pura, é de se esperar que sua resistência seja limitada pela área do seu diâmetro menor (de raiz) d_r. Contudo, testes de barras rosqueadas sob tração mostram que a sua resistência à tração é mais bem definida pela média dos diâmetros menor e primitivo. A área sob tração A_t é definida como

$$A_t = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d_p + d_r}{2}\right)^2 \tag{15.1a}$$

onde, para roscas UNS:

$$d_p = d - 0{,}649\,519/N \qquad d_r = d - 1{,}299\,038/N \tag{15.1b}$$

e para roscas ISO:

$$d_p = d - 0{,}649\,519\,p \qquad d_r = d - 1{,}226\,869\,p \tag{15.1c}$$

com d = diâmetro externo, N = número de filetes por polegada e p = passo em milímetros.

A tensão em uma barra rosqueada devida a uma carga axial de tração F é, então,

$$\sigma_t = \frac{F}{A_t} \tag{15.2}$$

* Uma porca de rosca esquerda frequentemente possui uma fenda cortada ao redor do hexágono exterior para identificação como porca de mão esquerda (LH).

Dimensões padronizadas de roscas

A Tabela 15-1 mostra as principais dimensões de roscas UNS e a Tabela 15-2 mostra as mesmas dimensões para roscas ISO. Roscas UNS de diâmetro inferior a 0,25 in são designadas por um número de referência. Um algoritmo útil para determinar o diâmetro de roscas numeradas consiste em multiplicar esse número de referência por 13 e então adicionar 60. Esse resultado é, assim o seu diâme-

Tabela 15-1 Principais dimensões de roscas de parafusos UNS

Dados calculados a partir das Equações 15.1 – Ver a Referência 3 para mais informações

		Roscas grossas – UNC			Roscas finas – UNF		
Tamanho	Diâmetro maior d (in)	Roscas por polegada	Diâmetro menor d_r (in)	Área sob tração A_t (in^2)	Roscas por polegada	Diâmetro menor d_r (in)	Área sob tração A_t (in^2)
0	0,0600	–	–	–	80	0,0438	0,0018
1	0,0730	64	0,0527	0,0026	72	0,0550	0,0028
2	0,0860	56	0,0628	0,0037	64	0,0657	0,0039
3	0,0990	48	0,0719	0,0049	56	0,0758	0,0052
4	0,1120	40	0,0795	0,0060	48	0,0849	0,0066
5	0,1250	40	0,0925	0,0080	44	0,0955	0,0083
6	0,1380	32	0,0974	0,0091	40	0,1055	0,0101
8	0,1640	32	0,1234	0,0140	36	0,1279	0,0147
10	0,1900	24	0,1359	0,0175	32	0,1494	0,0200
12	0,2160	24	0,1619	0,0242	28	0,1696	0,0258
1/4	0,2500	20	0,1850	0,0318	28	0,2036	0,0364
5/16	0,3125	18	0,2403	0,0524	24	0,2584	0,0581
3/8	0,3750	16	0,2938	0,0775	24	0,3209	0,0878
7/16	0,4375	14	0,3447	0,1063	20	0,3725	0,1187
1/2	0,5000	13	0,4001	0,1419	20	0,4350	0,1600
9/16	0,5625	12	0,4542	0,1819	18	0,4903	0,2030
5/8	0,6250	11	0,5069	0,2260	18	0,5528	0,2560
3/4	0,7500	10	0,6201	0,3345	16	0,6688	0,3730
7/8	0,8750	9	0,7307	0,4617	14	0,7822	0,5095
1	1,0000	8	0,8376	0,6057	2	0,8917	0,6630
1 1/8	1,1250	7	0,9394	0,7633	12	1,0167	0,8557
1 1/4	1,2500	7	1,0644	0,9691	12	1,1417	1,0729
1 3/8	1,3750	6	1,1585	1,1549	12	1,2667	1,3147
1 1/2	1,5000	6	1,2835	1,4053	12	1,3917	1,5810
1 3/4	1,7500	5	1,4902	1,8995			
2	2,0000	4,5	1,7113	2,4982			
2 1/4	2,2500	4,5	1,9613	3,2477			
2 1/2	2,5000	4	2,1752	3,9988			
2 3/4	2,7500	4	2,4252	4,9340			
3	3,0000	4	2,6752	5,9674			
3 1/4	3,2500	4	2,9252	7,0989			
3 1/2	3,5000	4	3,1752	8,3286			
3 3/4	3,7500	4	3,4252	9,6565			
4	4,0000	4	3,6752	11,0826			

Tabela 15-2 Dimensões principais de roscas de parafusos métricos padrão ISO
Dados calculados a partir das Equações 15.1 – Ver a Referência 4 para mais informações

	Roscas grossas			Roscas finas		
Diâmetro maior *d* (in)	Passo *p* mm	Diâmetro menor d_r (mm)	Área sob tração A_t (mm^2)	Passo *p* mm	Diâmetro menor d_r (mm)	Área sob tração A_t (mm^2)
3,0	0,50	2,39	5,03			
3,5	0,60	2,76	6,78			
4,0	0,70	3,14	8,78			
5,0	0,80	4,02	14,18			
6,0	1,00	4,77	20,12			
7,0	1,00	5,77	28,86			
8,0	1,25	6,47	36,61	1,00	6,77	39,17
10,0	1,50	8,16	57,99	1,25	8,47	61,20
12,0	1,75	9,85	84,27	1,25	10,47	92,07
14,0	2,00	11,55	115,44	1,50	12,16	124,55
16,0	2,00	13,55	156,67	1,50	14,16	167,25
18,0	2,50	14,93	192,47	1,50	16,16	216,23
20,0	2,50	16,93	244,79	1,50	18,16	271,50
22,0	2,50	18,93	303,40	1,50	20,16	333,06
24,0	3,00	20,32	352,50	2,00	21,55	384,42
27,0	3,00	23,32	459,41	2,00	24,55	495,74
30,0	3,50	25,71	560,59	2,00	27,55	621,20
33,0	3,50	28,71	693,55	2,00	30,55	760,80
36,0	4,00	31,09	816,72	3,00	32,32	864,94
39,0	4,00	34,09	975,75	3,00	35,32	1028,39

tro maior, aproximadamente, em milésimos de polegada. O diâmetro menor = diâmetro maior – passo. Ver Referências 2, 3 e 4 para informação dimensional detalhada a respeito de roscas-padrão, incluindo tolerâncias para as diferentes classes de ajuste.

15.2 PARAFUSOS DE POTÊNCIA

Os parafusos de potência, também conhecidos como parafusos de avanço, são utilizados para converter movimento rotacional em movimento linear em atuadores, máquinas de produção e macacos, entre várias outras aplicações. Eles são capazes de produzir grande vantagem mecânica e, portanto, podem levantar e mover grandes cargas. Nesses casos, uma rosca muito forte é necessária. Embora as formas padrão descritas acima sejam adequadas para uso em fixadores, elas podem não ser fortes o suficiente para todas as aplicações relacionadas ao uso de parafusos de potência. Outros perfis de rosca foram padronizados para essas aplicações.

Roscas quadrada, Acme e de botaréu

A rosca quadrada mostrada na Figuras 15-3*a* provê máxima eficiência e rigidez e também elimina qualquer componente de força radial entre o parafuso e a porca. Contudo, é muito mais difícil de ser cortada devido à sua face perpendicular. Uma rosca quadrada modificada (não mostrada) construída com um ângulo de 10° melhora a fabricabilidade deste tipo de rosca. A rosca Acme da Figura 15-3*b*

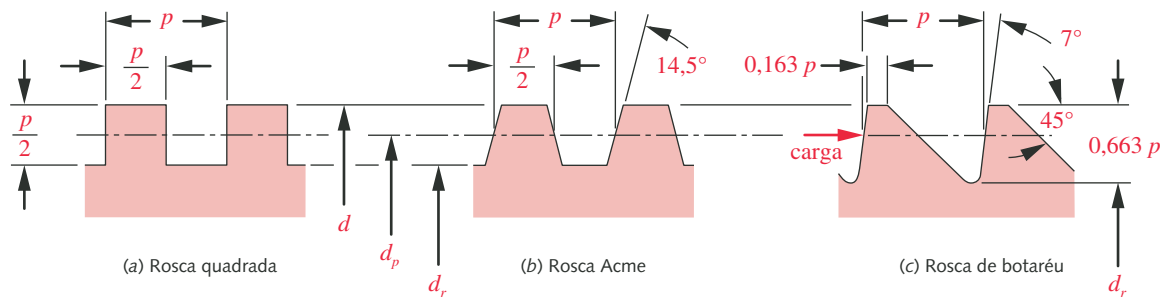



FIGURA 15-3

Roscas quadrada, Acme e de botaréu.

possui um ângulo de 29°, o que a torna mais fácil de fabricar e também permite o uso de uma porca partida, que pode ser apertada radialmente contra o parafuso para consumir qualquer desgaste existente. Uma rosca Acme curta (não mostrada) também está disponível com dentes de altura 0,3 *p* em lugar do padrão de 0,5 *p*. Tem a vantagem de poder sofrer um tratamento térmico mais uniforme. A rosca Acme é uma escolha comum para parafusos de potência que devem carregar cargas em ambas as direções. Se a carga axial na rosca for unidirecional, a rosca de botaréu (Figura 15-3*c*) pode ser utilizada para obter maior resistência na raiz que a presente nas outras roscas mostradas. A Tabela 15-3 mostra algumas das principais dimensões para roscas Acme padronizadas.

Aplicação de parafusos de potência

A Figura 15-4 mostra uma forma de aplicação de parafuso de potência como macaco para levantar carga. A porca é girada pela aplicação de um torque *T* e o parafuso se move para cima para levantar a carga *P* ou para baixo para abaixá-la. Deve haver algum atrito na superfície de carga para evitar que o parafuso rode com a carga. Uma vez que a carga esteja fixada, isto não é problema. Alternativamente, o parafuso poderia ser girado contra uma porca fixa para levantar a carga. Em ambos os casos, existirá um atrito significativo entre o parafuso e a porca, bem como entre a porca e a base, sendo portanto necessária a utilização de um mancal axial como o mostrado. Se um mancal axial simples (isto é, que não roda) for utilizado, é possível gerar na interface com o mancal um torque de atrito maior do que aquele presente nas roscas. Mancais axiais de esferas são utilizados frequentemente neste tipo de aplicação para reduzir essas perdas.

Outra forma de aplicação de parafusos de potência está em atuadores lineares, os quais operam com o mesmo princípio, como mostrado na Figura 15-4, porém motorizam a rotação da porca para transladar o parafuso ou motorizam a rotação do parafuso para transladar a porca, como mostrado na Figura 15-5. Esses dispositivos são utilizados em máquinas de montagem para posicionar peças, e em aviões para mover as superfícies de controle, bem como em muitas outras aplicações. Se a rotação de entrada for fornecida por um servomotor ou motor de passo em combinação com um parafuso de avanço preciso, pode-se obter um posicionamento bastante preciso.

FIGURA 15-4

Um macaco de parafuso de potência com rosca Acme.

Análise de força e torque em parafusos de potência

Roscas quadradas Uma rosca de parafuso é essencialmente um plano inclinado enrolado ao redor de um cilindro de forma a criar uma hélice. Se desenrolássemos uma volta da hélice, esta pareceria como se vê na Figura 15-6*a*, que mostra um bloco representando a porca enquanto escorrega pelo plano inclinado acima,

Tabela 15-3 Dimensões principais de roscas padrão Acme americano
Ver a Referência 2 para informações mais completas sobre dimensões e tolerância

Diâmetro maior (in)	Roscas por polegada	Passo de rosca (in)	Diâmetro primitivo (in)	Diâmetro menor (in)	Área sob tração (in²)
0,250	16	0,063	0,219	0,188	0,032
0,313	14	0,071	0,277	0,241	0,053
0,375	12	0,083	0,333	0,292	0,077
0,438	12	0,083	0,396	0,354	0,110
0,500	10	0,100	0,450	0,400	0,142
0,625	8	0,125	0,563	0,500	0,222
0,750	6	0,167	0,667	0,583	0,307
0,875	6	0,167	0,792	0,708	0,442
1,000	5	0,200	0,900	0,800	0,568
1,125	5	0,200	1,025	0,925	0,747
1,250	5	0,200	1,150	1,050	0,950
1,375	4	0,250	1,250	1,125	1,108
1,500	4	0,250	1,375	1,250	1,353
1,750	4	0,250	1,625	1,500	1,918
2,000	4	0,250	1,875	1,750	2,580
2,250	3	0,333	2,083	1,917	3,142
2,500	3	0,333	2,333	2,167	3,976
2,750	3	0,333	2,583	2,417	4,909
3,000	2	0,500	2,750	2,500	5,412
3,500	2	0,500	3,250	3,000	7,670
4,000	2	0,500	3,750	3,500	10,321
4,500	2	0,500	4,250	4,000	13,364
5,000	2	0,500	4,750	4,500	16,800

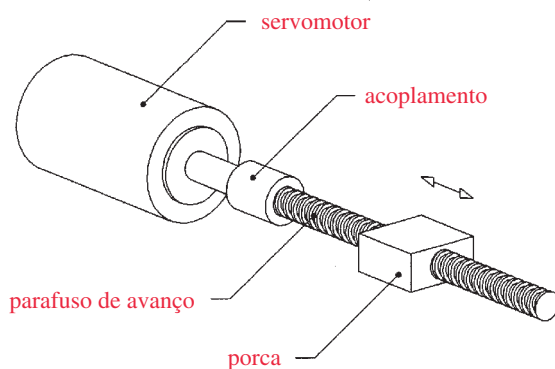



FIGURA 15-5

Parafuso de avanço movido por servomotor para dispositivo de posicionamento. (Cortesia de J. Karsberg, Gillette Co., Inc.)

no caso de uma rosca quadrada. As forças atuantes na porca, mostrada como um diagrama de corpo livre, são também mostradas. A Figura 15-6*b* mostra o diagrama de corpo livre da mesma porca quando esta desliza plano abaixo. A força de atrito, é claro, sempre se opõe ao movimento. A inclinação do plano é chamada de ângulo de avanço λ.

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{L}{\pi d_p} \tag{15.3}$$

No caso do levantamento da carga da Figura 15-6*a*, a soma das forças nas direções x e y é:

$$\sum F_x = 0 = F - f \cos \lambda - N \operatorname{sen} \lambda = F - \mu N \cos \lambda - N \operatorname{sen} \lambda$$

$$F = N(\mu \cos \lambda + \operatorname{sen} \lambda) \tag{15.4a}$$

$$\sum F_y = 0 = N \cos \lambda - f \operatorname{sen} \lambda - P = N \cos \lambda - \mu N \operatorname{sen} \lambda - P$$

$$N = \frac{P}{(\cos \lambda - \mu \operatorname{sen} \lambda)} \tag{15.4b}$$

onde μ é o coeficiente de atrito entre o parafuso e a rosca e as outras variáveis são definidas na Figura 15-6. A combinação dessas equações produz uma expressão para a força F:

$$F = P \frac{(\mu \cos \lambda + \operatorname{sen} \lambda)}{(\cos \lambda - \mu \operatorname{sen} \lambda)} \tag{15.4c}$$

O torque de parafuso T_{su} necessário para levantar a carga é

$$T_{s_u} = F \frac{d_p}{2} = \frac{P d_p}{2} \frac{(\mu \cos \lambda + \operatorname{sen} \lambda)}{(\cos \lambda - \mu \operatorname{sen} \lambda)} \tag{15.4d}$$

Algumas vezes, é mais conveniente expressar esse torque como uma função do avanço L em vez do ângulo de avanço λ. Portanto, dividindo o numerador e o denominador da Equação 15.4*d* por cos λ e substituindo o lado direito da Equação 15.3 por tg λ:

$$T_{s_u} = \frac{P d_p}{2} \frac{(\mu \pi d_p + L)}{(\pi d_p - \mu L)} \tag{15.4e}$$

Esta expressão considera apenas a interface parafuso-porca de uma rosca quadrada, porém o colar também contribui para o torque de atrito e também deve ser adicionado. O torque requerido para girar o colar de empuxo é

$$T_c = \mu_c P \frac{d_c}{2} \tag{15.4f}$$

onde d_c é o diâmetro médio do colar axial e μ_c é o coeficiente de atrito no rolamento axial. Observe que o torque necessário para vencer o atrito de colar pode igualar ou exceder o torque do parafuso, a menos que mancais de rolamento sejam utilizados no colar de empuxo. Diâmetros menores de colar também reduzem o torque de colar.

O **torque total** T_u para **levantar a carga** com uma rosca quadrada é, então,

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{P d_p}{2} \frac{(\mu \pi d_p + L)}{(\pi d_p - \mu L)} + \mu_c P \frac{d_c}{2} \tag{15.4g}$$

(*a*) Levantamento da carga (*b*) Abaixamento da carga

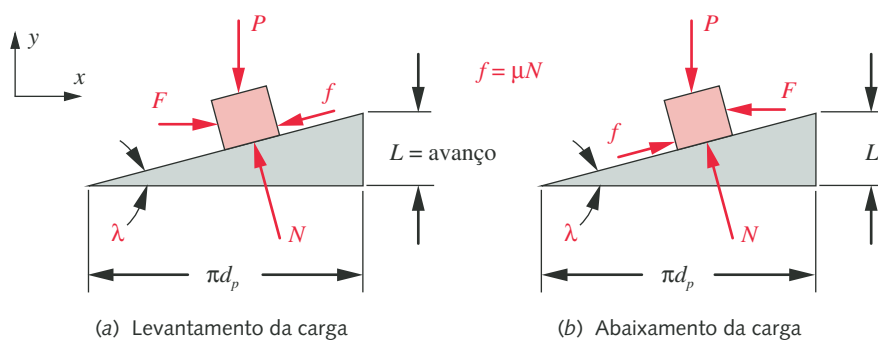



FIGURA 15-6

Análise de força na interface porca-parafuso.

A mesma análise pode ser feita para o caso de abaixar a carga, como mostrado na Figura 15-6*b*. Os sinais das forças aplicada e de atrito mudam e o **torque** T_d para **abaixar a carga** é

$$T_d = T_{s_d} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\pi d_p - L)}{(\pi d_p + \mu L)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{15.4h}$$

Roscas Acme O ângulo radial de uma rosca Acme (ou outra rosca) introduz um fator adicional nas equações de torque. A força normal entre o parafuso e a porca envolve dois ângulos com relação a dois planos, o ângulo de avanço λ como mostrado na Figura 15-6, e o ângulo $\alpha = 14{,}5°$ da rosca Acme, como mostrado na Figura 15-7. Uma derivação similar àquela feita para o caso da rosca quadrada produzirá as seguintes expressões para os torques de levantamento e abaixamento da carga:

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\pi d_p + L\cos\alpha)}{(\pi d_p\cos\alpha - \mu L)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{15.5a}$$

$$T_d = T_{s_d} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\pi d_p - L\cos\alpha)}{(\pi d_p\cos\alpha + \mu L)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{15.5b}$$

Essas equações se reduzem àquelas da rosca quadrada quando o ângulo $\alpha = 0$.

Coeficientes de atrito

Experimentos indicam que o coeficiente de atrito em uma combinação parafuso--porca lubrificada por óleo vale cerca de 0,15 ± 0,05.[5] O coeficiente de atrito em um mancal axial simples (que não roda) é aproximadamente o mesmo que aquele em roscas. Aço sobre bronze ou aço sobre ferro fundido são combinações comuns para este tipo de mancal. Se um mancal de elemento rolante for usado como arruela axial, seu coeficiente de atrito será de cerca de 1/10 daquele de mancais simples (isto é, 0,01 a 0,02).

Autotravamento e retroacionamento de parafusos de potência

O termo autotravamento se refere à condição na qual um parafuso não pode ser girado pela aplicação de uma força axial (não como um torque) à porca, seja qual for a sua magnitude. Em outras palavras, um parafuso autotravante suportará a

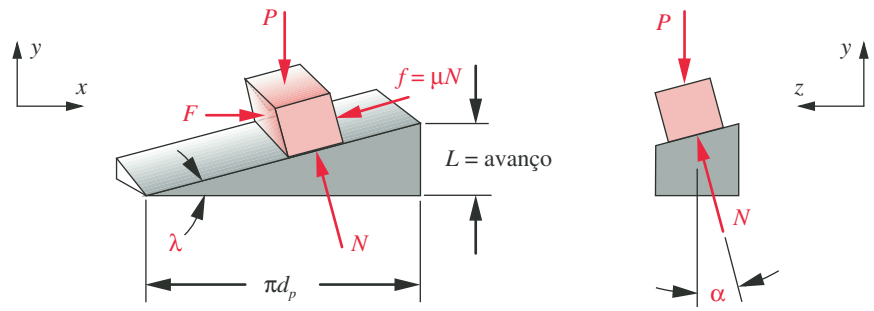



FIGURA 15-7

Análise de força em uma interface parafuso-porca de rosca Acme.

carga no lugar sem aplicação de qualquer torque. Ele não necessita um freio para manter a carga. Esta é uma condição bastante útil. Por exemplo, se você erguesse o seu carro com um macaco que não fosse autotravante, tão logo você deixasse a alavanca do macaco livre, o carro iria descer o macaco sozinho. Você teria que ser muito rápido com a alavanca de rodas para mudar um pneu neste caso.

A situação oposta à de autotravamento é aquela de um parafuso que pode ser acionado por trás, o que significa que, empurrada axialmente, a porca faz com que o parafuso gire. Embora seja de valor nulo para aplicações em macacos, esta é uma qualidade desejável em outras aplicações. Um exemplo é a chave de fenda conhecida como *Yankee*, que tem uma rosca de alto avanço em seu corpo que é ligada a uma lâmina. A alavanca é a porca. À medida que você empurra esse cabo para baixo, o corpo da chave roda, guiando o parafuso para madeiras a sua posição. Qualquer aplicação em que se queira converter movimento linear em movimento circular é candidata a ter este tipo de parafuso de avanço como solução.

A condição de autotravamento de um parafuso de potência ou avanço é facilmente prevista se o coeficiente de atrito de uma junta parafuso-porca for conhecido. A relação entre o coeficiente de atrito e o ângulo de avanço do parafuso determina a condição de autotravamento. Um parafuso funcionará com autotravamento se

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p}\cos\alpha \qquad \text{ou} \qquad \mu \geq \operatorname{tg}\lambda\cos\alpha \tag{15.6a}$$

Se a rosca for do tipo quadrada, $\cos\alpha = 1$, e esta expressão se reduz a

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p} \qquad \text{ou} \qquad \mu \geq \operatorname{tg}\lambda \tag{15.6b}$$

Observe que essas relações supõem uma condição estática de carregamento. A presença de qualquer vibração resultante de carregamento dinâmico ou de outras fontes pode fazer com que um parafuso autotravante desça. Qualquer vibração que cause movimento entre o parafuso e a porca causará inevitavelmente escorregamento para baixo no plano de rosca.

Eficiência de parafusos

A eficiência de qualquer sistema é definida como a relação entre trabalho de saída/trabalho de entrada. O trabalho feito sobre um parafuso de potência é o produto do torque e do deslocamento angular (em radianos), o qual para uma volta do parafuso iguala

$$W_{ent} = 2\pi T \tag{15.7a}$$

O trabalho produzido em uma volta é o produto da força pelo avanço:

$$W_{saída} = PL \tag{15.7b}$$

A eficiência é, então,

$$e = \frac{W_{saída}}{W_{ent}} = \frac{PL}{2\pi T} \tag{15.7c}$$

A substituição da Equação 15.5*a* (desconsiderando o termo de atrito de colar) dá

$$e = \frac{L}{\pi d_p} \frac{\pi d_p \cos\alpha - \mu L}{\pi \mu d_p + L\cos\alpha} \tag{15.7d}$$

Esta expressão pode ser simplificada pela substituição da Equação 15.3:

$$e = \frac{\cos\alpha - \mu \operatorname{tg}\lambda}{\cos\alpha + \mu\cot\lambda} \tag{15.7e}$$

Observe que a eficiência é uma função apenas da geometria do parafuso e do coeficiente de atrito. Para uma rosca quadrada, $\alpha = 0$ e

$$e = \frac{1 - \mu \operatorname{tg}\lambda}{1 + \mu\cot\lambda} \tag{15.7f}$$

A Figura 15-8 mostra curvas da função de eficiência para uma rosca Acme em um intervalo de coeficientes de atrito, desconsiderando o efeito do atrito de colar. Quanto maior o coeficiente de atrito, menor a eficiência esperada. Observe que a eficiência é zero quando o ângulo de avanço $\lambda = 0$, porque nenhum trabalho útil é realizado para erguer a carga nessas circunstâncias, mesmo que o atrito esteja presente. A eficiência também se aproxima de zero quando os ângulos de avanço são altos porque o torque está simplesmente aumentando a força normal (e portanto o atrito) sem que nenhuma componente útil rode a porca. A eficiência total incluindo o atrito de colar será menor que a mostrada na Figura 15-8.

A Figura 15-8 aponta o maior problema dos parafusos de potência convencionais que é a sua potencial baixa eficiência. Roscas Acme padronizadas têm ângulos de avanço que variam entre 2 e 5°, como mostrado na Tabela 15-4. Isso as coloca na parte extrema esquerda do conjunto de curvas na Figura 15-8. A eficiência dos parafusos Acme padrão para um coeficiente de atrito de 0,15 varia entre 18 e 36%, segundo a Tabela 15-4. Se o atrito de rosca puder ser reduzido, aumentos significativos de eficiência podem ser obtidos.

Parafusos de esferas

Uma redução significativa no atrito de rosca pode ser obtida com o uso de parafusos de esferas, os quais utilizam um trem de esferas de rolamento na porca para criar condições aproximadas de contato de rolamento com os filetes de rosca do parafuso, como mostrado na Figura 15-9. A forma da rosca é moldada para encaixar as esferas e é usualmente endurecida e retificada para ter uma vida longa. O coeficiente de atrito é similar àquele das esferas de rolamentos convencionais, colocando-as na região das duas curvas de topo na Figura 15-8, com eficiência correspondente mais alta.

O pequeno atrito dos parafusos de esferas faz com que se possa acioná-los por trás e, portanto, estes **não** são autotravantes. Assim, um freio deve ser utilizado para sustentar uma carga movida por um parafuso de esferas. Desse modo, parafusos de esferas podem ser utilizados para converter movimento linear em movimento rotativo. Eles possuem uma capacidade de carga bastante alta, em geral maior que aquela de um parafuso convencional do mesmo diâmetro, e não padecem das condições de aderência-escorregamento características de juntas deslizantes.

Tabela 15-4
Ângulo de avanço e eficiência de roscas-padrão ACME com coeficiente de atrito $\mu = 0,15$

Tamanho	Ângulo de avanço (graus)	Eficiência (%)
1/4 - 16	5,2	36
5/16 - 14	4,7	34
3/8 - 12	4,5	34
7/16 - 12	3,8	30
1/2 - 10	4,0	31
5/8 - 8	4,0	31
3/4 - 6	4,5	34
7/8 - 6	3,8	30
1 - 5	4,0	31
1 1/8 - 5	3,6	28
1 1/4 - 5	3,2	26
1 3/8 - 4	3,6	29
1 1/2 - 4	3,3	27
1 3/4 - 4	2,8	24
2 - 4	2,4	21
2 1/4 - 3	2,9	25
2 1/2 - 3	2,6	23
2 3/4 - 3	2,4	21
3 - 2	3,3	27
3 1/2 - 2	2,8	24
4 - 2	2,4	21
4 1/2 - 2	2,1	19
5 - 2	1,9	18

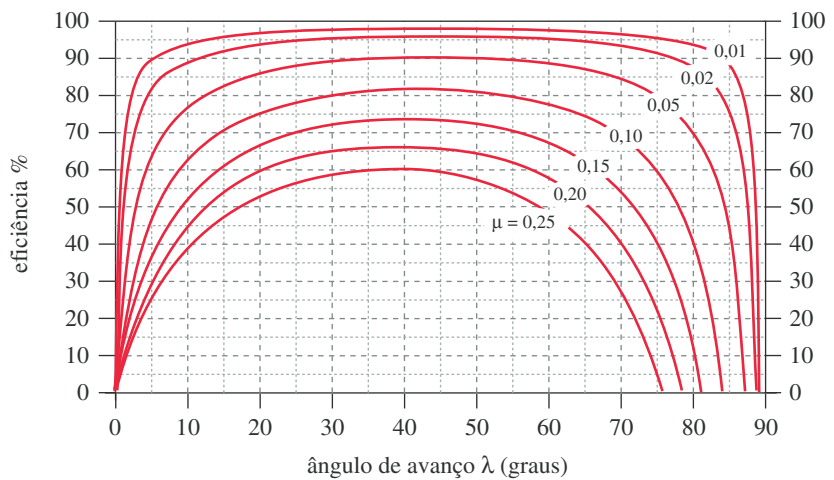



FIGURA 15-8

Eficiência de um parafuso de potência de rosca Acme (desconsiderando o atrito de colar).

Parafusos de esferas são utilizados em muitas aplicações, desde controle de superfície e atuadores de trem de pouso em aviões a controladores de máquinas-ferramentas, mecanismos de direção de automóveis e mecanismos de camas hospitalares. Vários fabricantes fornecem conjuntos de parafusos de esferas e devem ser consultados com relação à informação técnica relativa à sua adequada aplicação.

EXEMPLO 15-1

Torque e eficiência de um parafuso de potência

Problema **Determine os torques de levantamento e abaixamento, bem como a eficiência do parafuso de potência mostrado na Figura 15-4 utilizando um parafuso e porca de rosca Acme. Há autotravamento? Qual é a contribuição do atrito de colar**

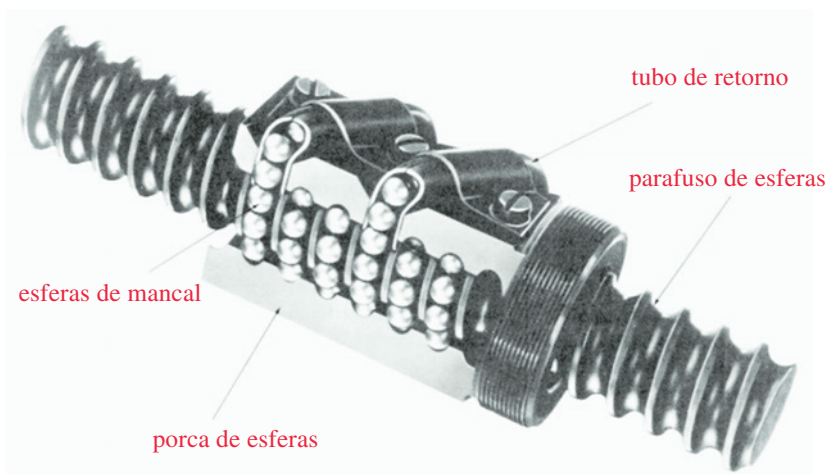



FIGURA 15-9

Um par parafuso-porca de esferas. (Cortesia de Thompson-Saginaw Ball Screw Co., Saginaw, Mich.)

comparativamente ao de rosca se o colar possui (a) atrito de deslizamento, (b) atrito de rolamento?

Dados **O parafuso é Acme de entrada simples 1,25 – 5. A carga axial vale 1000 lb. O diâmetro médio do colar é 1,75 in.**

Hipóteses **O parafuso e a porca são lubrificados com óleo. Atrito de deslizamento: $\mu = 0{,}15$. Atrito de rolamento: $\mu = 0{,}02$.**

Solução

1 Há várias partes neste problema. Necessitamos calcular os torques de levantamento e abaixamento para dois casos, um com atrito de deslizamento no colar e outro com um colar de esferas. Em ambos os casos iremos calcular as contribuições referentes ao parafuso e ao colar para o torque e eficiência separadamente para fins de comparação e combiná-los. Primeiro façamos o caso do colar de deslizamento.

2 Uma vez que temos uma rosca de uma única entrada, o comprimento L iguala o passo p, que é 1 / N = 0,2. O diâmetro primitivo da rosca d_p é encontrado na Tabela 15-3. O torque para elevar a carga é determinado a partir da Equação 15.5*a*:

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p + L\cos\alpha\right)}{\left(\pi d_p\cos\alpha - \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2}$$

$$= \frac{1\,000(1{,}15)}{2}\frac{\left(0{,}15\pi(1{,}15) + 0{,}2\cos 14{,}5\right)}{\left(\pi(1{,}15)\cos 14{,}5 - 0{,}15(0{,}2)\right)} + 0{,}15(1000)\frac{1{,}75}{2} \qquad (a)$$

$$T_u = 122{,}0 + 131{,}2 = 253{,}2 \text{ lb-in}$$

Observe que o atrito no colar excede o atrito no parafuso.

3 O torque para abaixar a carga é determinado a partir da Equação 15.5*b*:

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p + L\cos\alpha\right)}{\left(\pi d_p\cos\alpha - \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2}$$

$$= \frac{1\,000(1{,}15)}{2}\frac{\left(0{,}15\pi(1{,}15) + 0{,}2\cos 14{,}5\right)}{\left(\pi(1{,}15)\cos 14{,}5 - 0{,}15(0{,}2)\right)} + 0{,}15(1000)\frac{1{,}75}{2} \qquad (b)$$

$$T_u = 122{,}0 + 131{,}2 = 253{,}2 \text{ lb-in}$$

4 A eficiência no modo de levantamento será menor que aquela no modo de abaixamento e é determinada a partir da Equação 15.7. Escolhemos a versão escrita como Equação 15.7*c* para levar em conta as componentes do parafuso e do colar.

$$e = \frac{PL}{2\pi T}$$

Para o parafuso
$$e_{parafuso} = \frac{1000(0{,}2)}{2\pi(122{,}0)} = 0{,}26 \qquad (c)$$

Para a combinação
$$e = \frac{1000(0{,}2)}{2\pi(253{,}2)} = 0{,}13$$

5 Agora recalculemos o torque de colar e o total para levantar a carga com um rolamento de esferas axial, utilizando Equação 15.4*f*.

$$T_c = \mu_c P\frac{d_c}{2} = 0{,}02(1000)\frac{1{,}75}{2} = 17{,}5 \quad \text{lb-in} \qquad (d)$$

$$T_u = T_{s_u} + T_c = 122{,}0 + 17{,}5 = 139{,}5 \text{ lb-in} \quad (e)$$

6 A eficiência considerando o rolamento de esferas axial agora é:

$$e = \frac{PL}{2\pi T} = \frac{1000(0,2)}{2\pi(139{,}5)} = 0{,}23 \quad (f)$$

A melhoria na eficiência é significativa e mostra por que é prática incorreta o uso de qualquer coisa que não seja um rolamento de esferas como arruela axial em parafusos de potência.

7 A questão de autotravamento de um parafuso é independente da questão de atrito de colar e pode ser obtida da Equação 15.6*a*.

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p}\cos\alpha$$
$$0{,}15 \geq \frac{0{,}2}{\pi(1{,}15)}\cos(14{,}5°) \quad (g)$$
$$0{,}15 \geq 0{,}06 \qquad \text{assim, tem auto travamento}$$

Observe que o torque de abaixamento da carga no passo 3 também indica que o parafuso é autotravante. Um torque negativo no descenso indica que um torque de frenagem oposto ao torque de levantamento deve ser aplicado para manter a carga. Os arquivos EX15-01A e EX15-01B estão no CD-ROM.

15.3 TENSÕES EM ROSCAS

Uma situação similar àquela de engajamento de dentes de engrenagens existe no que tange ao engajamento de filetes de roscas. Na Seção 12.4 é discutida a conveniência de ter vários dentes de engrenagens em contato em um engrenamento (razão de contato > 1), e a Figura 12-19 mostra um engrenamento em que um par de dentes está carregando toda a carga devido a imprecisões no espaçamento de dentes apesar da aparente grande razão de contato. Quando uma porca engaja um parafuso, teoricamente todos os filetes de rosca devem compartir a carga. Na realidade, imprecisões no espaçamento dos filetes fazem com que praticamente toda a carga seja carregada pelo primeiro par de filetes. Assim, o procedimento conservativo utilizado no cálculo de tensões em filetes de rosca assume o pior caso em que um par de filetes suporta toda a carga. O outro extremo seria assumir que todos os filetes em contato compartem a carga igualmente. Ambas as hipóteses podem ser utilizadas para estimar as tensões em filetes de rosca. A tensão verdadeira estará entre esses extremos, mas muito mais provavelmente próxima ao caso da carga compartida por um par de filetes apenas. Parafusos de potência e fixação utilizados em casos envolvendo cargas altas são normalmente construídos de aço de alta resistência e geralmente são endurecidos. As porcas utilizadas nesses casos podem também ser feitas de material endurecido para modificar a resistência à tração e ao desgaste. Porcas de parafusos de fixação, por outro lado, são frequentemente feitas de material mole e, portanto, normalmente mais fraco que aquele do parafuso. Isso causa escoamento local dos filetes de rosca da porca quando o parafuso é apertado, o que pode melhorar o ajuste de rosca e fazer com que os filetes de rosca compartam a carga. Porcas endurecidas são utilizadas com parafusos endurecidos de alta resistência.

Tensão axial

Um parafuso de potência pode ser submetido a cargas axiais de tração ou compressão. Um parafuso de fixação normalmente vê apenas carga axial de tração. A área

sob tensão de tração de um parafuso foi discutida anteriormente e é definida na Equação 15.1 e nas Tabelas 15-1, 15-2 e 15-3 para vários tipos de roscas. A Equação 15.2 pode ser utilizada para calcular a tensão de tração axial em um parafuso. Para parafusos de potência carregados em compressão, a possibilidade de flambagem em coluna deve ser investigada utilizando os métodos expostos na Seção 4.16. Utilize o diâmetro menor do parafuso para calcular a sua razão de esbeltez.

Tensão de cisalhamento

Um possível modo de falha por cisalhamento envolve o rasgamento de filetes de rosca tanto da porca quanto do parafuso. O que, se um ou outro desses cenários ocorrer, depende das resistências relativas dos materiais da porca e parafuso. Se o material da porca for mais fraco (como quase sempre ocorre), os seus filetes de rosca podem ser cortados ao longo do seu diâmetro maior. Se o parafuso é mais fraco, pode ter os seus filetes de rosca rasgados ao longo do seu diâmetro menor. Se ambos os materiais possuem resistência idêntica, o conjunto pode ser rasgado ao longo do diâmetro primitivo. Em todo caso, devemos supor algum grau de compartilhamento da carga entre os filetes de rosca a fim de calcular as tensões. Um modo de proceder consiste em considerar que, uma vez que uma falha completa requer que todos os filetes de rosca sejam rasgados, estas podem ser consideradas como compartilhando a carga igualmente. Essa hipótese é provavelmente válida desde que a porca ou parafuso (ou ambos) seja dúctil de modo a permitir que cada rosca escoe à medida que o conjunto começa a falhar. Contudo, se ambas as partes são frágeis (por exemplo, aços de alta resistência ou ferro fundido) e o ajuste dos filetes de rosca é pobre, podemos imaginar cada filete assumindo toda a carga por turnos até que haja fratura e o trabalho seja repassado para o próximo filete. A realidade está novamente inserida entre esses extremos. Se expressarmos a área sob cisalhamento em termos do número de filetes de rosca engajados, um julgamento deve ser feito em cada caso para determinar o grau de compartilhamento de carga apropriado.

A área sob cisalhamento de rasgamento A_s para um filete de rosca é a área do cilindro de seu diâmetro menor d_r:

$$A_s = \pi d_r w_i p \tag{15.8a}$$

onde p é o passo de rosca e w_i é o fator que define a porcentagem do passo ocupado pelo metal no diâmetro menor. Valores de w_i para diversas formas comuns de rosca são mostrados na Tabela 15-5. A área para um passo de rosca, obtida a partir da Equação 15.8*a*, pode ser multiplicada por todos, um, ou alguma fração do número total de filetes de rosca engajados de acordo ao que julgar correto o projetista, sempre levando em conta os fatores discutidos acima para cada caso em particular.

Para o rasgamento da porca no seu diâmetro maior, a área sob cisalhamento para um filete de rosca é

$$A_s = \pi d w_o p \tag{15.8b}$$

onde o valor de w_o com base no diâmetro maior é encontrado na Tabela 15-5.

A tensão de cisalhamento para rasgamento de rosca é então calculada a partir de:

$$\tau_s = \frac{F}{A_s} \tag{15.8c}$$

Comprimento mínimo de porca Se uma porca for suficientemente longa, a carga necessária para rasgar os filetes de rosca excederá o valor da carga requerida para falhar sob tração. As equações para ambos os modos de falha podem ser combinadas e um comprimento mínimo de porca calculado para qualquer tama-

Tabela 15-5
Fatores de área para área de cisalhamento por rasgamento de roscas

Tipo de rosca	w_i (menor)	w_o (maior)
UNS/ISO	0,80	0,88
Quadrada	0,50	0,50
Acme	0,77	0,63
Botaréu	0,90	0,83

nho de parafuso. Para quaisquer roscas UNS/ISO ou Acme de $d \leq 1$ in, uma porca de comprimento de rosca de pelo menos 0,5 *d* terá uma resistência ao rasgamento maior que a resistência à tração do parafuso. Para roscas Acme de diâmetro maior, o comprimento de rasgamento de porcas com comprimento $\geq$ 0,6 *d* excederá a resistência à tração do parafuso. Esses valores são válidos somente se o parafuso e a porca forem do mesmo material, o que costuma ser o caso.

Engajamento mínimo em furos Quando um parafuso é rosqueado a um furo em vez de a uma porca, um comprimento maior de engajamento é necessário. Para algumas combinações de material, um comprimento de engajamento no mínimo igual ao diâmetro nominal de rosca *d* é recomendado. Para um parafuso de aço em ferro fundido, latão ou bronze, utilize 1,5 *d*. Para parafusos de aço em alumínio, utilize 2 *d* como comprimento mínimo de engajamento de rosca.

Tensões torcionais

Quando uma porca é apertada em um parafuso, ou quando um torque é transmitido através de uma porca de um parafuso de potência, uma tensão de torção pode ser desenvolvida no parafuso. O torque que torce o parafuso depende do atrito na interface parafuso-porca. Se o parafuso e porca estão bem lubrificados, uma porção menor do torque aplicado é transmitida ao parafuso e uma maior é absorvida entre a porca e a superfície engastada. Se a porca estiver agarrada ao parafuso por causa de ferrugem, todo o torque aplicado irá torcer o parafuso, o que explica por que parafusos enferrujados normalmente cisalham mesmo quando se tenta afrouxar a porca. Em um parafuso de potência, se o colar de empuxo possuir um atrito baixo, todo o torque aplicado à porca criará tensões torcionais no parafuso (uma vez que pouco torque é levado ao chão por meio do pequeno atrito no colar). Assim, para acomodar o pior caso de alto atrito nas roscas, utilize o torque total aplicado na Equação de cômputo das tensões de torção em uma seção circular (ver a Seção 4.12):

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d_r^3} \tag{15.9}$$

O diâmetro menor d_r da rosca deve ser utilizado neste cálculo.

15.4 TIPOS DE PARAFUSOS DE FIXAÇÃO*

Existe uma grande variedade de estilos de parafusos disponíveis, alguns dos quais para aplicações específicas. Parafusos convencionais e porcas normalmente utilizam roscas-padrão, como definido na Seção 15.1. Variações nas formas padrão de roscas ocorrem em certas variedades de parafusos, especialmente aqueles utilizados em aplicações envolvendo parafusos autoatarrachantes. Parafusos de fixação podem ser classificados de diferentes maneiras: por meio do uso pretendido, pelo tipo de rosca, pelo tipo de cabeça e por sua resistência. Parafusos de fixação de todos os tipos estão disponíveis em grande variedade de materiais, incluindo aço, aço inoxidável, alumínio, latão, bronze e plásticos.

Classificação pelo uso pretendido

Parafusos e parafusos de máquinas O mesmo parafuso pode receber um nome diferente quando utilizado de uma maneira particular. Por exemplo, um **parafuso de porca**[§] é um fixador com uma cabeça e um corpo reto, com filetes de rosca cujo uso pretendido prevê a utilização de uma **porca** para sujeitar e manter as partes de um conjunto de juntas. Contudo, o mesmo parafuso é chamado de um **parafuso de máquina** ou **parafuso de cabeça** quando é rosqueado a um furo em vez de ser engajado a uma porca. Essa é apenas uma distinção semântica, mas à qual alguns

* Descrições completas e informação sobre tamanho para uma grande variedade de fixadores padronizados podem ser encontradas na Referência 2.

§ N. de T.: Em português, a distinção entre *bolt* (parafuso de porca) e *screw* (parafuso sem porca) não é observada, sendo ambos os termos traduzidos simplesmente como parafuso.

puristas dão muito valor. O padrão ANSI distingue um parafuso com porca de um parafuso sem porca estabelecendo que um parafuso de porca se supõe fixo e parado enquanto uma porca é torqueada ao mesmo para montar uma junta rosqueada, ao passo que um parafuso sem porca deve ser girado em seu receptáculo, seja este um furo com rosca ou não, por meio da aplicação de um torque à sua cabeça. (Entretanto, apesar de ainda não ser ilegal na maior parte dos estados colocar uma porca em um parafuso de máquina, fique desde já avisado de que, nesse caso, você o terá transformado instantaneamente em um parafuso de porca ao fazê-lo!)

Prisioneiros Um parafuso prisioneiro é um parafuso sem cabeça, com roscas em ambas as extremidades e que se pretende utilizar de maneira semipermanente como metade de uma junta. Um furo na região de engajamento desce então para a parte que se estende passado o prisioneiro e é mantido por meio de uma porca. Cada extremidade do prisioneiro pode tanto ter um passo igual quanto diferente. A extremidade permanente possui algumas vezes uma rosca de alta classe ajustada para se agarrar ao furo rosqueado e resistir ao afrouxamento quando a porca é removida da metade superior.

A Figura 15-10 mostra um parafuso (com uma porca e arruela), um parafuso de máquina e um prisioneiro. Uma outra distinção entre parafusos com e sem porca é que um parafuso de porca possui apenas filetes de rosca retos, uniformes, enquanto um parafuso de máquina pode ter qualquer forma de filete de rosca, inclusive do tipo que se estreita ou se interrompe como mostrado na Figura 15-11. Assim, há **parafusos sem porca para madeira** mas não há "parafusos de porca" (embora sejam usados *parafusos com porca* em carroças para sujeitar madeira).

(*a*) Parafuso, porca e arruela

(*b*) Parafuso de máquina

(*c*) Prisioneiro

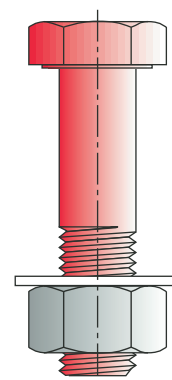
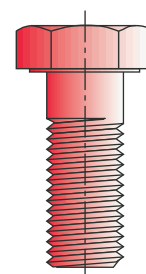
FIGURA 15-10

Parafuso de porca, porca, parafuso de máquina e prisioneiro.

Classificação pelo tipo de rosca

Parafusos de atarrachar Todos os fixadores que fazem o próprio furo, abrindo caminho, ou fazem as próprias roscas, são chamados de **parafusos atarrachantes**, como é o caso dos *autoatarrachantes*, *conformadores de rosca*, *cortadores de rosca* e *autofurantes*. A Figura 15-11 mostra um conjunto dos muitos tipos disponíveis de parafusos atarrachantes. As roscas de parafusos atarrachantes são similares às muitas formas padronizadas, mas são frequentemente mais espaçadas (isto é, passo maior) para utilização com lâminas metálicas ou plástico, no intuito de prover espaço para que o material deslocado tenha um lugar para ir à medida que o parafuso força seu caminho além do pequeno furo piloto de começo e vai formando a rosca. Parafusos cortadores de rosca têm uma forma de rosca padrão, mas possuem ranhuras axiais de alívio e são endurecidos para prover uma face de corte para atarrachar a parte enquanto o parafuso avança. Os parafusos autofurantes (não mostrados) possuem uma forma de broca de furação na sua ponta para fazer o furo piloto. Eles também formam roscas à medida que eles avançam.

Classificação pelo estilo de cabeça

Parafusos de cabeça Vários estilos diferentes de cabeça são fabricados incluindo os de fenda reta, fenda em cruz (Phillips), hexagonal, hexagonal de encaixe e outras. As formas de cabeça podem ser redondas, planas (que recedem), cilíndrica abaulada, de panela, etc., como mostrado na Figura 15-12. Estes estilos de cabeça em combinação com fendas ou sulcos Phillips são normalmente utilizados apenas em pequenas máquinas ou parafusos de atarrachar, uma vez que o máximo torque que se pode transmitir com essas fendas é limitado. Os torques necessários no caso de parafusos maiores são mais facilmente transmissíveis com cabeças hexagonais, ou cabeças hexagonais com encaixe, como mostrado nas Figuras 15-10 e 15-13. Cabeças hexagonais ou sextavadas são o estilo mais popular para grandes parafusos de porca e de máquinas que requerem torque substancial,

(*a*) Parafuso com cavidade

(*b*) Parafuso com cabeça plana e cavidade

(*c*) Parafuso com cabeça em forma de botão com cavidade

(*d*) Parafuso de ombro

(*e*) Parafuso sem cabeça com cavidade

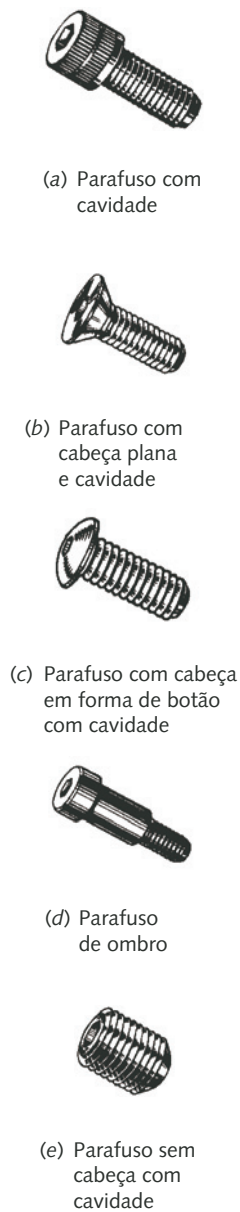



FIGURA 15-13

Vários estilos de parafusos de cabeça com encaixe para chaves. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif.)

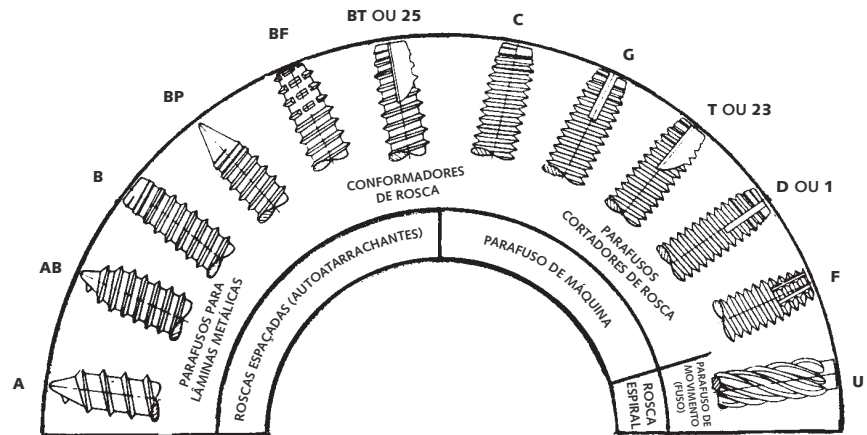



FIGURA 15-11

Vários estilos de roscas utilizadas em parafusos de fixação. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif., 90621.)

a menos que o espaço disponível seja limitado, caso em que o uso de um parafuso de cabeça com encaixe representa a melhor escolha.

Parafusos de cabeça com encaixe Como mostrado na Figura 15-13, são fabricados em geral de aço de alta resistência, aço endurecido, aço inoxidável ou outros metais e são utilizados de maneira intensa em máquinas. O encaixe, ou cavidade, hexagonal permite que se aplique suficiente torque com chaves hexagonais especiais Allen. O estilo padrão de cabeça com encaixe (Figura 15-13*a*) é projetado para ser colocado em um furo no qual sua cabeça é impelida para dentro da superfície. O parafuso de cabeça plana (Figura15-13*b*) é puxado de forma contrária. O parafuso de ombro (Figura 15-13*d*) possui uma protuberância de tolerância pequena, com acabamento de retífica, que pode ser utilizada como um pivô, ou como meio de localização precisa. O parafuso bem apertado contra o ombro ainda assim pode acomodar uma parte de tamanho adequado que pode ser usada como pivô entre a cabeça e a superfície na qual está aparafusado. Parafusos sem cabeça (Figura 15-13*e*) são utilizados para trancar colares e cubos a eixos, como mostrado no Capítulo 10.

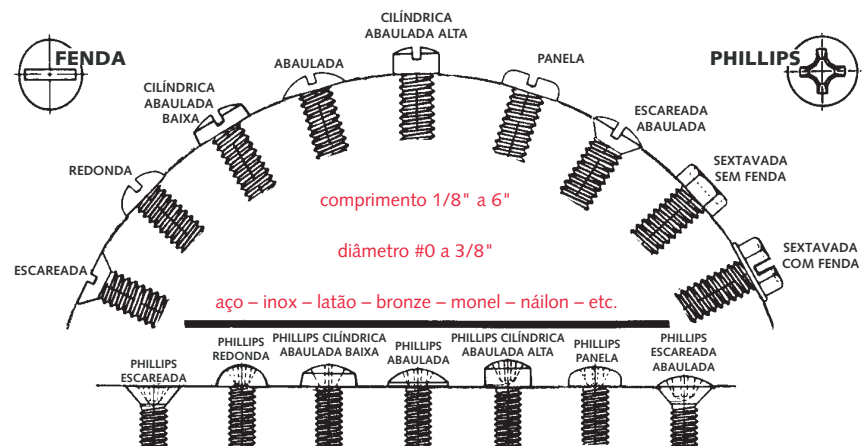



FIGURA 15-12

Vários estilos de cabeças utilizadas em pequenos parafusos de máquinas. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif.)

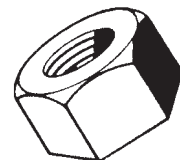
Porcas e arruelas

Porcas A Figura 15-14 é uma amostra da grande quantidade de porcas disponível. A porca de aperto é uma versão estreita da porca hexagonal padrão e é utilizada em combinação com a porca-padrão para travar esta ao parafuso. A porca de castelo tem sulcos para inserção de um pino através de um furo passante ao parafuso e que evita que a porca trabalhe frouxa. Uma porca cega é utilizada com propósitos decorativos e a porca de borboleta permite remoção sem a necessidade de utilização de ferramentas.

Porcas de travamento Uma preocupação universal é a prevenção do afrouxamento espontâneo de porcas devido a vibração. Duas porcas apertadas conjuntamente no parafuso ou uma porca de castelo com um pino, em ambos os casos, conseguem alcançar esse objetivo. Muitos outros projetos de porcas de aperto com direitos especiais de propriedade são oferecidos por fabricantes. Alguns deles são mostrados na Figura 15-15. A porca de travamento elíptica possui seus últimos fios de rosca dispostos em uma forma elíptica depois que a porca é feita. Essas roscas produzem interferência com as correspondentes no parafuso e, quando forçadas, agarram as roscas e resistem o afrouxamento. Porcas também são fabricadas com insertos de náilon nas roscas, os quais se deformam quando forçados contra o parafuso. O náilon flui nas folgas de rosca e agarra o parafuso. Uma porca de pino de travamento possui um pino de aço que permite o aperto, mas que adentra as roscas do parafuso evitando o afrouxamento. Porcas também são feitas com denteamentos em uma das faces que atuam de forma a cavar a parte sujeitada e resistem ao afrouxamento.

Arruelas Uma arruela simples é uma parte plana, com forma de anel, que serve para aumentar a área de contato entre a cabeça do parafuso ou porca e a parte sujeitada (ver a Figura 15-10). Arruelas de aço endurecido são utilizadas quando a força de compressão da cabeça de parafuso sobre a parte sujeitada necessita ser distribuída sobre uma área maior que a área da cabeça do parafuso ou da porca. Uma arruela mais mole irá escoar em flexão em vez de efetivamente distribuir a carga. Qualquer arruela simples também evita afundamento da superfície da parte quando a porca é apertada. Arruelas não metálicas são usadas quando é necessário isolamento elétrico do parafuso com relação à parte. As arruelas planas têm seus tamanhos idênticos aos padronizados de parafuso (ver a referência 2). Se forem necessárias arruelas maiores que o tamanho-padrão, **arruelas para-choques** (que possuem um diâmetro externo maior) podem ser utilizadas. **Arruelas Belleville** (ver a Seção 14.9) são utilizadas em alguns casos sob porcas ou cabeças de parafusos para fornecer um controle das mudanças de força axial ao longo do comprimento do parafuso.

Arruelas de travamento Para evitar o afrouxamento espontâneo de porcas padronizadas (em oposição a porcas de travamento), arruelas de travamento podem ser utilizadas sob a porca de um parafuso ou sob a cabeça de um parafuso de máquina. A Figura 15-16 mostra vários dos muitos estilos de arruelas de travamento disponíveis. A arruela partida, ou de pressão, é de aço endurecido e atua como uma mola sob a porca. Seus cantos vivos também tendem a cavar as superfícies sujeitadas. Vários estilos de arruelas dentadas são também oferecidos. Seus dentes dispostos para cima são comprimidos quando sujeitados e cavam, adentrando a porca e as superfícies das partes. As arruelas de travamento são consideradas menos efetivas em evitar o afrouxamento que as porcas de travamento, que são, portanto, preferidas.

Porca-arruela combinados (SEMS) são combinações de porcas e arruelas de travamento prisioneiras que permanecem com a porca. Muitos estilos estão disponíveis, um dos quais é mostrado na Figura 15-17. A vantagem principal reside no fato de assegurarem que a arruela de travamento não será deixada fora da montagem ou remontagem.

(*a*) Porca hexagonal padronizada ou sextavada

(*b*) Porca hexagonal de pressão

(*c*) Porca hexagonal de castelo

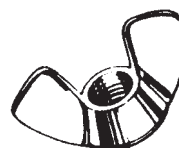
(*d*) Porca hexagonal de cúpula ou cega

(*e*) Porca de borboleta

FIGURA 15-14

Vários estilos de porcas padronizadas. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif., 90621.)

(*a*) Porca de travamento elíptica

(*b*) Porca de travamento com inserto de náilon

(*c*) Porca de travamento por pino

(*d*) Porca de travamento com flange

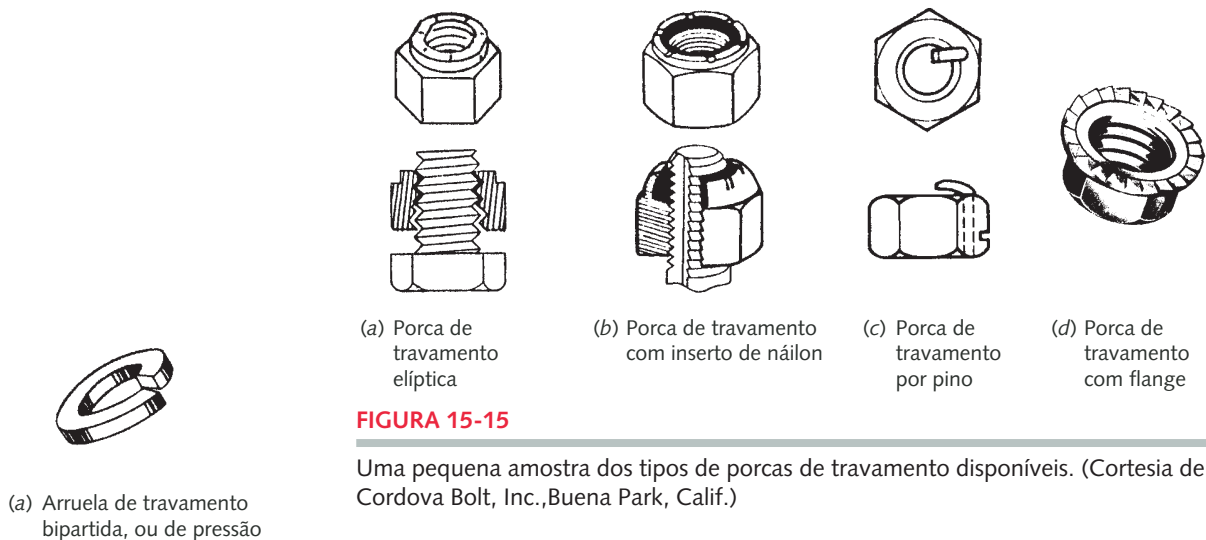



FIGURA 15-15

Uma pequena amostra dos tipos de porcas de travamento disponíveis. (Cortesia de Cordova Bolt, Inc.,Buena Park, Calif.)

(*a*) Arruela de travamento bipartida, ou de pressão

(*b*) Arruela de dentes internos

(*c*) Arruela de dentes externos

(*d*) Arruela de dentes internos e externos, ou denteado duplo

(*e*) Arruela de dentes em cone

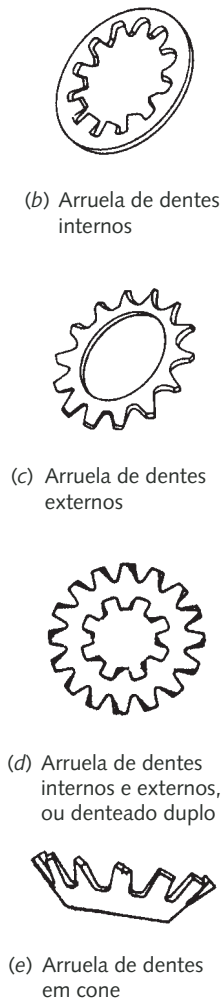
FIGURA 15-16

Tipos de arruelas de travamento. (Cortesia de Cordova Bolt, Inc., Buena Park, Calif.)

15.5 FABRICAÇÃO DE FIXADORES

CORTE DE ROSCAS Existem várias maneiras de fabricar roscas. As roscas internas são geralmente cortadas com uma ferramenta especial chamada **tarracha** que possui a forma dos filetes de rosca desejados e se parece a um parafuso. Essas ferramentas são feitas de aço ferramenta endurecido e possuem ranhuras axiais que interrompem suas roscas de modo a fornecer extremidades cortantes com a forma das roscas. Um furo piloto é cortado com uma broca de tamanho adequado e então a tarracha lubrificada é girada lentamente no furo enquanto avança a uma razão adequada. Porcas muito grandes têm roscas feitas em uma castanha de torno com uma ferramenta com forma de rosca, de ponta única, que se faz avançar axialmente através do furo por meio de um fuso de avanço que controla avanço e passo. Roscas externas podem ser também cortadas com uma ferramenta de ponto único em um torno ou alternativamente em uma **matriz**, que possui rosqueamento externo da mesma forma que uma tarracha. A barra a ser rosqueada tem o mesmo tamanho que o diâmetro externo da rosca que se pretende fazer. Máquinas especializadas, conhecidas como *máquinas de fazer roscas*, são utilizadas para produzir parafusos de porca, parafusos sem porca e porcas (assim como outras peças de revolução) em altas quantidades e a baixo custo. Todas as roscas construídas pelos métodos descritos acima são conhecidas como **roscas cortadas**.

LAMINAÇÃO DE ROSCAS Um outro método, inclusive melhor, de fabricar roscas externas é o de **laminação de roscas**, também conhecido como **conformação de roscas**. Matrizes de aço endurecido na forma de roscas são forçadas contra a superfície da barra que se pretende fazer rosca. As matrizes fazem escoar a frio o material da barra para adquirir a forma de rosca. O diâmetro final externo da rosca é maior que o diâmetro inicial da barra porque o material é forçado para fora das raízes e para dentro das cristas das roscas.

O processo de laminação tem várias vantagens sobre o processo de corte de roscas. A conformação a frio encrua e aumenta a resistência do material de rosca, cria raios de raiz e crista e introduz tensões residuais de compressão benéficas nas raízes das roscas. A alteração de forma do material na forma de roscas causa uma reorientação dos grãos do material para a forma de rosca. Em contraste, o corte de roscas interrompe os grãos. Todos esses fatores contribuem para um aumento significativo da resistência de roscas laminadas quando comparadas àquela de roscas cortadas. Além de mais resistência, roscas laminadas apresentam menor perda de material que roscas cortadas, uma vez que nenhum material é removido, e a peça inicial é, portanto, de menor tamanho. Fixadores de alta resistência são

geralmente de aço endurecido. A laminação de roscas deve ser feita após o endurecimento do parafuso, se possível, uma vez que o processo de endurecimento térmico irá aliviar as tensões residuais introduzidas pela laminação.

A Figura 15-18 mostra os perfis e a estrutura de grãos de roscas cortadas e laminadas. Em qualquer aplicação em que a carga nos fixadores seja alta e onde cargas que causam fadiga estiverem presentes, roscas laminadas devem ser sempre utilizadas. Em aplicações não críticas ou onde a carga seja leve, as roscas cortadas, mais fracas e mais baratas, podem ser usadas.

FIGURA 15-17

Porca com arruela prisioneira de travamento. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif., 90621.)

Conformação da cabeça As cabeças de parafusos de porca são geralmente fabricadas por conformação a frio em um procedimento conhecido como *recalque*. Para se ter uma imagem desse processo, imagine tomar uma barra de argila de modelagem em suas mãos, deixando um pequeno pedaço extendendo-se além do seu punho. Golpeie o topo da barra de argila axialmente com a outra mão ao mesmo tempo em que aperta firmemente a barra no seu punho de modo a esmagar a extremidade da barra em uma forma achatada menor, mas de diâmetro de cabeça maior. De maneira similar, o pedaço de material que irá formar o parafuso na máquina de trabalho a frio é preso firmemente com o pedaço de material que sobra, deixado em tamanho adequado. Uma matriz com o diâmetro de cabeça desejado rodeia essa extremidade exposta. Quando o martelo desce, faz com o que o material flua a frio para gerar uma cabeça redonda. Melhorias similares na orientação de grãos na cabeça são obtidas como descrito no relativo a laminação de roscas. Parafusos de diâmetro maiores que cerca de 3/4 in devem ser tratados termicamente antes de sua cabeça ser fabricada. Recortes hexagonais ou fendas Phillips são produzidos no processo de conformação a frio (ou a quente) de fabricação de cabeças. Superfícies hexagonais ou fendas de parafusos são usinadas mais tarde na cabeça do parafuso.

15.6 RESISTÊNCIA DE PARAFUSOS PADRONIZADOS E PARAFUSOS DE MÁQUINA

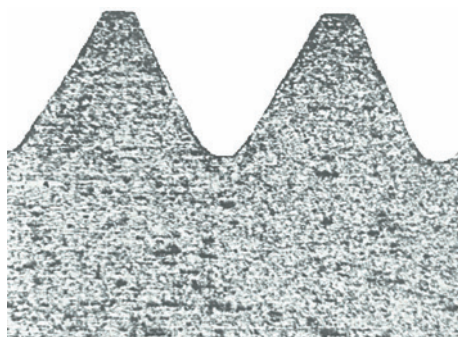
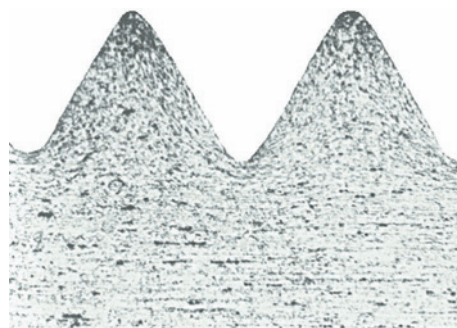
Parafusos de porca e parafusos de máquinas para aplicações estruturais ou casos de cargas pesadas devem ser escolhidos com base na sua resistência de prova S_p como definido nas especificações SAE, ASTM e ISO. Estas organizações definem graus ou classes para parafusos que especificam material, tratamento térmico e uma **resistência mínima de prova** para o parafuso. A **resistência de prova** S_p é *a tensão sob a qual o parafuso começa a apresentar deformação permanente*, e é próxima, porém inferior, à resistência de escoamento do material.

(*a*) Roscas cortadas

(*b*) Roscas laminadas

FIGURA 15-18

Estruturas de grãos de roscas cortadas e laminadas. (Fonte: R. D. Barer e B. F. Peters, *Why Metals Fail*, p.23, Gordon e Breach, New York, 1970.)

Tabela 15-6 Especificações SAE e resistências de parafusos de aço

Número de grau SAE	Intervalo de diâmetro externo (in)	Resistência mínima de prova (kpsi)	Resistência mínima de escoamento (kpsi)	Resistência mínima à tração (kpsi)	Material
1	0,25–1,5	33	36	60	carbono baixo ou médio
2	0,25–0,75	55	57	74	carbono baixo ou médio
2	0,875–1,5	33	36	60	carbono baixo ou médio
4	0,25–1,5	65	100	115	carbono médio repuxado a frio
5	0,25–1,0	85	92	120	carbono médio, Q&T*
5	1,125–1,5	74	81	105	carbono médio, Q&T
5,2	0,25–1,0	85	92	120	baixo carbono martensítico, Q&T
7	0,25–1,5	105	115	133	aço-liga médio, Q&T
8	0,25–1,5	120	130	150	aço-liga médio, Q&T
8,2	0,25–1,0	120	130	150	baixo carbono martensítico, Q&T

* Temperado e revenido.

O grau ou a classe de cada parafuso é indicado por marcas (ou pela sua ausência) na sua cabeça. A Tabela 15-6 mostra informações concernentes à resistência para diversos graus de parafusos SAE e a Tabela 15-7 mostra informação similar para parafusos métricos. As marcas de cabeça de cada grau ou classe são mostradas nas Figuras 15-19 e 15-20.

FIGURA 15-19

Marcas de cabeça em parafusos SAE.

15.7 PRÉ-CARGA DE JUNÇÕES EM TRAÇÃO

Uma das aplicações primárias de parafusos e porcas é a de juntar peças em situações tais que as cargas aplicadas colocam o parafuso ou os parafusos em tração, como mostrado na Figura 15-21. É prática comum pré-carregar a junta apertando os parafusos com suficiente torque para criar cargas de tração que se aproximam às respectivas resistências de prova. Para montagens carregadas de forma estática, uma pré-carga que gera uma tensão no parafuso de até 90% da resistência de prova é utilizada alguma vezes. Para juntas carregadas dinamicamente (carga de fadiga), uma pré-carga de 75% ou mais da resistência de prova é comumente utilizada. Assumindo que os parafusos sejam adequadamente dimensionados para

Tabela 15-7 Especificações métricas e resistências de parafusos de aço

Número de classe	Intervalo de diâmetro externo (mm)	Resistência mínima de prova (MPa)	Resistência mínima de escoamento (MPa)	Resistência mínima à tração (MPa)	Material
4,6	M5–M36	225	240	400	aço-carbono, médio ou baixo
4,8	M1,6–M16	310	340	420	aço-carbono, médio ou baixo
5,8	M5–M24	380	420	520	aço-carbono, médio ou baixo
8,8	M3–M36	600	660	830	carbono médio, Q&T
9,8	M1,6–M16	650	720	900	carbono médio, Q&T
10,9	M5–M36	830	940	1040	baixo carbono, martensítico,Q&T
12,9	M1,6–M36	970	1100	1220	liga, Q&T

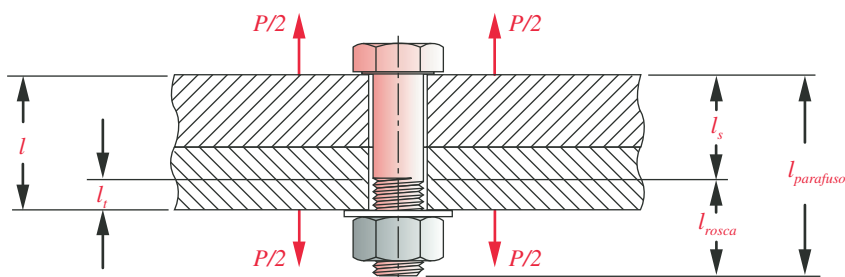



FIGURA 15-21

Uma montagem parafusada em tração.

FIGURA 15-20

Marcas de cabeça – parafusos métricos

resistir às cargas aplicadas, essas altas pré-cargas tornam pouco provável que os parafusos rompam em serviço se eles não quebrarem enquanto estão sendo tracionados (apertados). As razões para isso são sutis e requerem entendimento de como as elasticidades do parafuso e membros sendo unidos interagem quando o parafuso é apertado e quando a carga externa é aplicada mais tarde.

A Figura 15-22 mostra um parafuso sujeitando uma mola, o que é análogo ao material sujeitado na Figura 15-21. Qualquer que seja o material sujeitado, este terá uma constante de mola e irá comprimir-se quando o parafuso for apertado. (O parafuso, também sendo elástico, irá se estender quando apertado.) Mostramos a mola como o material sujeitado na Figura 15-22*a* com a finalidade de exibir de forma exagerada seu encurtamento. Pela mesma razão, também postulamos um método incomum de tracionar o parafuso em questão. Parece como se tivéssemos colocado nossa chave de roda em lugar ignorado e, portanto, tido que recorrer ao Crusher Casey para que aguentasse a porca e a puxasse para baixo com uma força de 100 lbf, enquanto nos ocupávamos de interpor um pedaço de aço entre a porca e o plano de chão para servir como uma trava, como mostrado em (*b*). O parafuso agora possui uma pré-carga de tração de 100 lbf e a mola (isto é, o material) possui 100 lbf de pré-carga compressiva. Essa pré-carga permanece na montagem mesmo depois que o Crusher é retirado em (*c*). A situação mostrada em (*c*) é idêntica àquela que resultaria se a porca tivesse sido apertada convencionalmente para comprimir a mola na mesma quantidade.

A Figura 15-22*d* mostra uma nova carga de 90 lbf aplicada ao parafuso. Observe que a tração no parafuso é ainda 100 lbf, e assim o será, independentemente da carga externa aplicada, até que aquela carga exceda a pré-carga de prova de

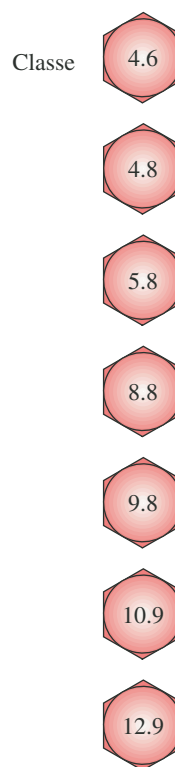
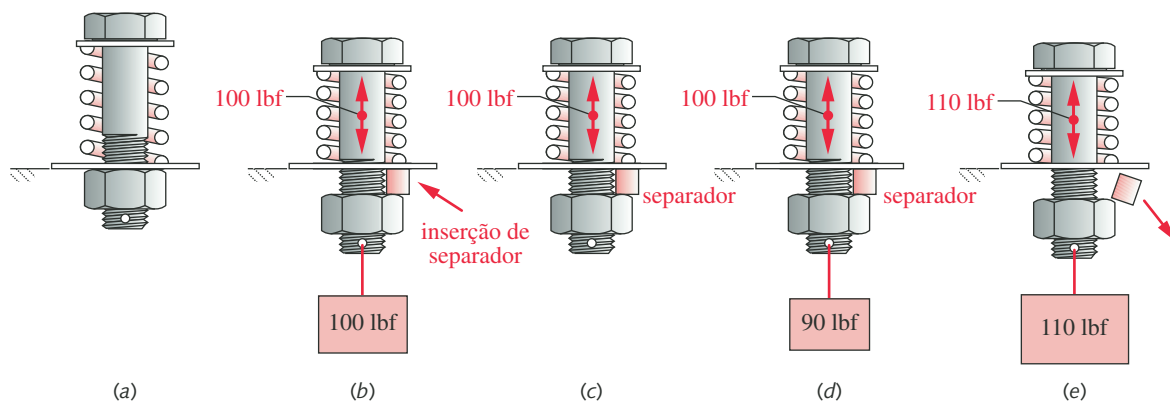



FIGURA 15-22

Pré-carregamento de uma união parafusada.

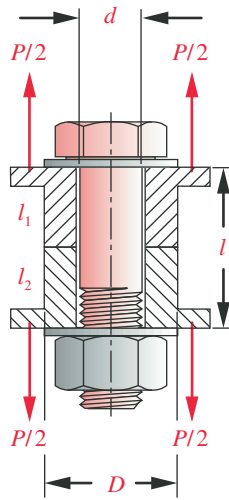



FIGURA 15-23

Um parafuso pré-carregado comprimindo um cilindro ao qual cargas externas são aplicadas.

100 lb deste caso. A Figura 15-22*e* mostra que uma carga maior que a pré-carga comprime a mola ainda mais, quebrando o contato entre a porca e o plano de base, e a tração no parafuso agora é igual à nova carga aplicada de 110 lb. Quando o parafuso e o material de junção são separados, como em (*e*), o parafuso assume toda a carga aplicada. Esse diagrama dá uma dica de por que a presença de uma pré-carga é vantajosa, especialmente quando a carga aplicada é variável com o tempo. Para compreender completamente o porquê, é preciso examinar mais a fundo o comportamento elástico da junta sob carga.

A Figura 15-23 mostra um parafuso sujeitando um cilindro de seção transversal e comprimento conhecidos. Desejamos examinar as cargas, deflexões e tensões em ambos sob pré-carga e depois, quando uma carga externa é aplicada. A constante de mola de uma barra em tração é encontrada a partir da Equação de deflexão de uma barra de tração:

$$\delta = \frac{Fl}{AE} \tag{15.10a}$$

e

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{l} \tag{15.10b}$$

O material sujeitado contém, de modo geral, duas ou mais peças, e estas podem ser de diferentes materiais. Além disso, um parafuso extenso terá roscas sobre uma porção apenas de seu comprimento e, portanto, apresentará duas áreas de seção transversal. Essas seções de diferente rigidez atuam como molas que se combinam de acordo com a Equação 14.2*b*, repetida aqui:

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} \tag{15.2b}$$

Para um parafuso redondo de diâmetro d e comprimento de rosca carregada axialmente l_t, dentro do comprimento de zona sujeitada l, como mostrado na Figura 15-21, a constante de mola é

$$\frac{1}{k_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l - l_t}{A_b E_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l_s}{A_b E_b} \quad \therefore \quad k_b = \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b \tag{15.11a}$$

onde A_b é a área total de seção transversal, A_t é a área sob tensão de tração do parafuso e $l_s = (l - l_t)$ é o comprimento do pedaço sem rosca. O comprimento da porção rosqueada é padronizado como o dobro do diâmetro do parafuso mais 1/4 in para parafusos de até 6 in de comprimento. Um adicional de 1/4 in de rosca é fornecido para parafusos mais longos. Parafusos mais curtos do que os comprimentos padronizados de rosca são rosqueados tão próximo à cabeça quanto possível.

Para o material de geometria cilíndrica da Figura 15-23 (ignorando as flanges), a constante de mola do material se torna

$$\frac{1}{k_m} = \frac{l_1}{A_{m_1} E_1} + \frac{l_2}{A_{m_2} E_2} = \frac{4 l_1}{\pi D_{ef_1}^2 E_1} + \frac{4 l_2}{\pi D_{ef_2}^2 E_2} \tag{15.11b}$$

onde A_m são as áreas efetivas dos materiais sujeitados e D_{ef} são os diâmetros efetivos daquelas áreas.

Se os materiais sendo sujeitados forem idênticos,

$$k_m = \frac{A_m E_m}{l} \tag{15.11c}$$

onde A_m é a área efetiva do material sujeitado (ver também a Seção 15.8). Se A_m puder ser definido como um cilindro sólido com diâmetro efetivo D_{ef}, a Equação 15.11*c* se torna

$$k_m = \frac{\pi D_{ef}^2}{4}\frac{E_m}{l} \tag{15.11d}$$

Parafusos pré-carregados sob carga estática

A Figura 15-24*a* mostra um gráfico do comportamento carga-deflexão de ambos o parafuso e o material sujeitado em eixos comuns com o comprimento inicial tomado como deflexão δ zero. Observe que a inclinação da linha correspondente ao parafuso é positiva porque seu comprimento aumenta com o aumento da força. A inclinação da linha correspondente ao material é negativa, uma vez que o seu comprimento diminui com o aumento da força. O material é mostrado mais rígido que o parafuso, uma vez que a sua área é, em geral, maior e estamos assumindo que o parafuso tem o mesmo material. A força agente no parafuso e material é a mesma enquanto ambos estiverem em contato. Uma vez que uma pré-carga F_i é introduzida por aperto do parafuso, as deflexões do parafuso δ_b e do material δ_m são controladas pelas suas constantes de mola e atingem os pontos *A* e *B* nas suas respectivas curvas força-deflexão, como mostrado na Figura 15-24*a*. Com nossa hipótese de magnitudes relativas para k_b e k_m, o parafuso se estende mais (δ_b) que o encurtamento do material (δ_m).

Quando uma força externa *P* é aplicada à junta da Figura 15-23, aparece uma deflexão adicional Δδ introduzida tanto pelo parafuso quanto pelo material, como mostrado na Figura 15-24*b*. Essa deflexão deve ser a mesma em ambos, parafuso e material, a menos que a carga aplicada seja grande o suficiente para separar a junta (isto é, $P_m > F_i$, como mostrado na Figura 15.22*e*). A deflexão adicional Δδ cria uma nova situação de carga para o parafuso e o material, como mostrado na Figura 15.24*b*. A carga no material é reduzida da quantidade P_m e se move para baixo na linha de rigidez do material até atingir o ponto *D*, com um novo valor F_m. A carga no parafuso é aumentada da quantidade P_b e se move para cima ao longo da linha de rigidez do parafuso até chegar no ponto *C*, com um novo valor F_b. Observe que a carga aplicada *P* é dividida em duas componentes, uma (P_m) absorvida pelo material e outra (P_b) absorvida pelo parafuso.

$$P = P_m + P_b \tag{15.12a}$$

(*a*) Força de pré-carregamento e deflexões Iniciais

(*b*) Carga-deflexão e forças resultantes

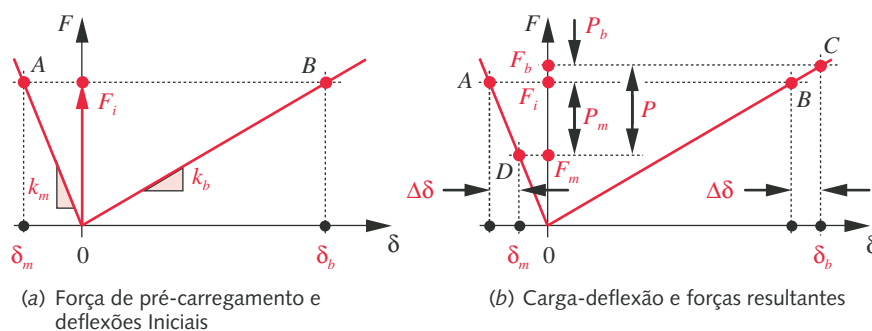



FIGURA 15-24

Efeitos causados pela pré-carga sobre o parafuso e material: (*a*) pré-carga e (*b*) carga aplicada.

A carga compressiva F_m no material passa a ser

$$F_m = F_i - P_m : \qquad F_m \geq 0^* \tag{15.12b}$$

e a carga de tração F_b no parafuso se torna

$$F_b = F_i + P_b \tag{15.12c}$$

Observe o que ocorreu como resultado da presença da pré-carga, F_i. A "mola" do material foi "enrolada para cima" sob pré-carregamento. Quaisquer cargas aplicadas são parcialmente suportadas pelo "desenrolar" dessa mola. Se a rigidez relativa do parafuso e do material forem as mostradas na Figura 15-24 (ou seja, material mais rígido que o parafuso), então o material suporta a maior parte da carga aplicada e o parafuso sente pouca carga mais que a carga de pré--carregamento inicial. Este é um aspecto que justifica a declaração feita anteriormente de que "se o parafuso não falha em pré-carga, então provavelmente não falhará em serviço". Existe uma outra razão para fazer disso uma verdade, e ela será discutida em uma seção adiante.

Observe, contudo, que se a carga aplicada, P, é grande o suficiente para fazer com que a componente P_m exceda a pré-carga, F_i, então a junta irá se separar e o parafuso irá suportar o valor integral da carga aplicada, P. O material não poderá mais contribuir no suporte da carga se a junta for separada. Esta é uma razão pela qual as pré-cargas constituem uma porcentagem tão elevada da resistência de prova do parafuso. A fim de obter benefício completo da capacidade de compartilhamento de carga do material, a pré-carga deve ser alta.

Podemos resumir a informação na Figura 15-24 da seguinte maneira: a mudança comum de deflexão $\Delta\delta$ devida à carga aplicada, P, é

$$\Delta\delta = \frac{P_b}{k_b} = \frac{P_m}{k_m} \tag{15.13a}$$

ou

$$P_b = \frac{k_b}{k_m} P_m \tag{15.13b}$$

Substituindo na Equação 15.12*a*, obtemos

$$P_b = \frac{k_b}{k_m + k_b} P$$

ou

$$P_b = CP \qquad \text{onde} \quad C = \frac{k_b}{k_m + k_b} \tag{15.13c}$$

O termo C é chamado de constante de rigidez da junta ou simplesmente de **constante da junta**. Observe que C é em geral < 1, e se k_b for pequeno quando comparado a k_m, C será uma pequena fração. Isso confirma o fato de que o parafuso verá apenas uma parte da carga aplicada.

De maneira semelhante,

$$P_m = \frac{k_m}{k_b + k_m} P = (1 - C)P \tag{15.13d}$$

Essas expressões para P_b e P_m podem ser substituídas nas Equações 15.12*b* e 15.12*c* para obter as expressões das cargas no parafuso e material em termos da carga aplicada, P:

$$F_m = F_i - (1 - C)P \tag{15.14a}$$

* Se F_m possui valor negativo, coloque F_m = 0, porque o material não pode suportar força de tração – irá separar-se.

$$F_b = F_i + CP \tag{15.14b}$$

A Equação 15.14*b* pode ser resolvida para a pré-carga F_i, necessária para qualquer combinação de carga aplicada P e máxima carga permissível (prova) do parafuso, desde que a constante de junta C seja conhecida.

A carga P_0 requerida para separar a junta pode ser encontrada a partir da Equação 15.14*a* colocando F_m igual a zero.

$$P_0 = \frac{F_i}{(1 - C)} \tag{15.14c}$$

O coeficiente de segurança à falha por separação de junta pode ser encontrado a partir de

$$N_{separação} = \frac{P_0}{P} = \frac{F_i}{P(1 - C)} \tag{15.14d}$$

EXEMPLO 15-2

Fixadores pré-carregados sob carga estática

Problema **Determine um tamanho adequado e um valor de pré-carga para a junta mostrada na Figura 15-23. Encontre seu coeficiente de segurança à falha por escoamento e separação. Determine o valor ótimo de pré-carga como uma porcentagem da resistência de prova de maneira a maximizar os fatores de segurança.**

Dados **As dimensões da junta são D = 1 in e l = 2 in. A carga aplicada é P = 2000 lb.**

Hipóteses **Ambas as partes sujeitadas são de aço. Os efeitos das flanges na rigidez da junta serão ignorados. Uma pré-carga de 90% da resistência de prova do parafuso será aplicada em uma primeira tentativa.**

Solução **Ver a Figura 15-25.**

1 Como ocorre com a maior parte dos problemas de dimensionamento, há variáveis desconhecidas demais para que se possa resolver o número de equações necessárias em um passo. É preciso escolher valores iniciais para vários parâmetros e utilizar iterações para encontrar uma solução adequada. Tivemos, na verdade, que fazer várias iterações para resolver este problema, mas iremos apresentar somente duas no intuito de ser breves. Assim, os valores utilizados aqui foram já aproximados a valores razoáveis.

2 O diâmetro do parafuso é o valor principal a ser escolhido juntamente com a série de rosca e a classe de parafuso para definir a resistência de prova. Escolhemos parafusos de aço 5/16-18 UNC-2A de classe SAE 5.2. (Esta, na verdade, foi nossa terceira escolha). Para um comprimento sujeitado de 2 in, assumimos um comprimento de parafuso de 2,5 in, de maneira a prover um tamanho de protuberância suficiente. A pré-carga é tomada como 90% da resistência de prova, como assumido acima.

3 A Tabela 15-6 mostra que a resistência de prova deste parafuso é de 85 kpsi. A área sob tração obtida a partir da Equação 15.1*a* vale 0,052 in^2. A pré-carga é, então,

$$F_i = 0{,}9 S_p A_t = 0{,}9(85000)(0{,}052431) = 4011 \text{ lb} \tag{a}$$

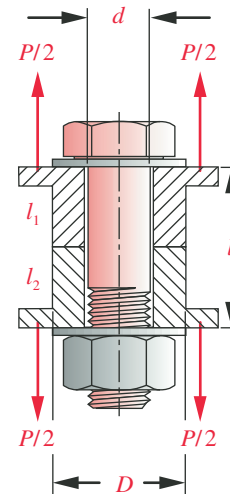



FIGURA 15-23 Repetida

Um parafuso pré-carregado comprimindo um cilindro ao qual cargas externas são aplicadas.

4 Detemine os comprimentos de rosca l_{rosca} e comprimento sem rosca l_s do parafuso como mostrado na Figura 15-21:

$$l_{rosca} = 2d + 0,25 = 2(0,3125) + 0,25 = 0,875 \text{ in}$$
$$l_s = l_{parafuso} - l_{rosca} = 2,5 - 0,875 = 1,625 \text{ in} \qquad (b)$$

a partir do qual podemos determinar o comprimento de rosca l_t dentro da zona de sujeição:

$$l_t = l - l_s = 2,0 - 1,625 = 0,375 \text{ in} \qquad (c)$$

5 Determine a rigidez do parafuso a partir da Equação 15.11*a*.

$$\frac{1}{k_b} = \frac{l_t}{A_t E} + \frac{l_s}{A_b E} = \frac{0,375}{0,05243(30E6)} + \frac{1,625(4)}{\pi(0,3125)^2(30E6)}$$
$$k_b = 1,059E6 \text{ lb/in} \qquad (d)$$

6 O cálculo da rigidez do material sujeitado é simplificado neste exemplo pelo fato de termos um diâmetro relativamente pequeno. Podemos assumir, neste caso, que o cilindro inteiro de material é comprimido pela força do parafuso. (Iremos em breve analisar o problema da determinação da área sujeitada no contínuo.) A rigidez do material, a partir da Equação 15.11*d*, é

$$k_m = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}\frac{E_m}{l} = \frac{\pi(1,0^2 - 0,312^2)}{4}\frac{(30E6)}{2,0} = 1,063E7 \text{ lb/in} \qquad (e)$$

7 O fator de rigidez da junta, calculado a partir da Equação 15.13*c*, é

$$C = \frac{k_b}{k_m + k_b} = \frac{1,059E6}{1,063E7 + 1,059E6} = 0,09056 \qquad (f)$$

8 As porções da força aplicada, P, sentidas pelo parafuso e material sujeitado podem ser encontradas agora a partir da Equação 15.13.

$$P_b = CP = 0,09056(2000) = 181 \text{ lb}$$
$$P_m = (1 - C)P = (1 - 0,09056)(2000) = 1819 \text{ lb} \qquad (g)$$

9 Determine as forças agentes no parafuso e material após a aplicação da força P.

$$F_b = F_i + P_b = 4011 + 181 = 4192 \text{ lb}$$
$$F_m = F_i - P_m = 4011 - 1819 = 2192 \text{ lb} \qquad (h)$$

Observe quão pouco da carga aplicada se adiciona à pré-carga no parafuso.

10 A máxima tensão de tração no parafuso é

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_t} = \frac{4192}{0,052431} = 79953 \text{ psi} \qquad (i)$$

Observe que nenhum fator de concentração de tensão é aplicado, porque temos carregamento estático.

11 Esta é uma situação unidimensional, portanto a tensão principal e a tensão equivalente de von Mises são idênticas à tensão de tração aplicada. O coeficiente de segurança contra escoamento é então

$$N_y = \frac{S_y}{\sigma_b} = \frac{92000}{79953} = 1,15 \qquad (j)$$

A resistência ao escoamento é encontrada a partir das Tabela 15-6 e 15-7.

12 A carga necessária para separar a junta e o coeficiente de segurança contra a separação da junta são encontrados a partir das Equações 15.14*c* e 15.14*d*.

$$P_0 = \frac{F_i}{(1 - C)} = \frac{4011}{(1 - 0{,}09056)} = 4410 \text{ lb} \qquad (k)$$

$$N_{separação} = \frac{P_0}{P} = \frac{4410}{2000} = 2{,}2 \qquad (l)$$

13 O coeficiente de segurança contra separação é aceitável. O coeficiente de segurança ao escoamento é baixo, mas isso deve ser esperado, uma vez que o parafuso é deliberadamente pré-carregado a um nível próximo a sua resistência ao escoamento.

14 O modelo foi resolvido para todo o intervalo de possíveis pré-cargas desde zero até 100% da resistência de prova e ambos os coeficientes de segurança foram plotados contra a porcentagem de pré-carga. Os resultados são mostrados na Figura 15-25. O coeficiente de segurança à separação aumenta de maneira linear com o aumento da pré-carga, porém é < que 1 até que a pré-carga exceda cerca de 40% da resistência de prova. No mínimo, essa quantidade de pré-carga é necessária para manter a junta fechada sob a carga aplicada. O coeficiente de segurança ao escoamento é alto para valores baixos de pré-carga e decresce de forma não linear com o aumento da pré-carga. As duas linhas se cruzam a um valor de pré-carga de cerca de 65% da resistência de prova, no ponto *A*. Essa pré-carga dá uma solução para o problema em questão uma vez que equilibra os coeficientes de segurança contra ambos os modos de falha em um valor de 1,6. Contudo, se o objetivo é proteger a junta contra possíveis sobrecargas, então uma pré-carga é melhor. No ponto *B,* o coeficiente de segurança contra sobrecarga é de 2,2, e há ainda 15% de reserva contra escoamento durante a pré-carga, como mostrado pelas equações anteriores.

15 O projeto recomendado é, portanto, de um parafuso 5/16-18 UNC-2A, grau 5.2, de comprimento 2,5 in, pré-carregado a 65% da resistência de prova com uma força inicial de

$$F_i = 0{,}90 S_p A_t = 0{,}90(85000)(0{,}052431) \cong 4011 \text{ lb} \qquad (m)$$

16 Os arquivos EX15-02 estão no CD-ROM.

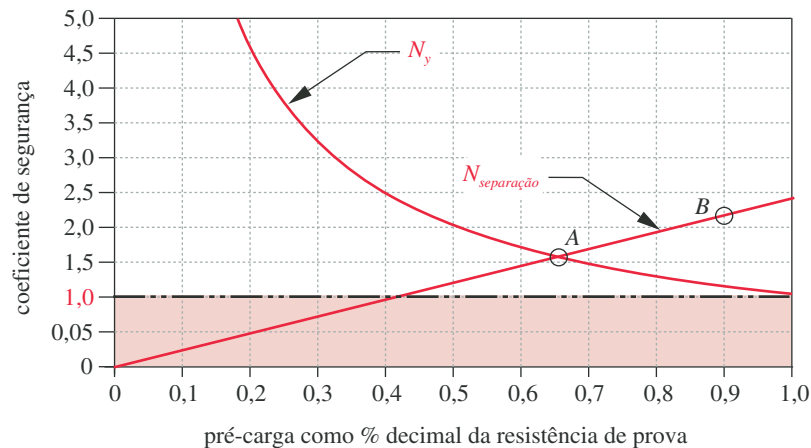



FIGURA 15-25

Coeficientes de segurança contra pré-carga para parafuso carregado estaticamente no Exemplo 15-2.

Parafusos pré-carregados sob carga dinâmica

A importância da pré-carga é ainda maior em uniões carregadas dinamicamente que em juntas carregadas estaticamente. Considere novamente a junta mostrada na Figura 15-23, sendo que a força aplicada, P, é uma função do tempo, variando entre um mínimo P_{min} e um máximo P_{max}, ambos positivos. Uma situação bastante comum é aquela de uma força flutuante ($P_{min} = 0$), como no caso de um vaso de pressão cuja carga varia de zero a um máximo.

A Figura 15-26 mostra o diagrama carga-deflexão de uma união parafusada submetida a uma carga variada. Quando a força variada desce a zero, o diagrama se parece com a Figura 15-26*a*, isto é, somente com a pré-carga estática presente. Quando a carga aumenta até o máximo, o diagrama se parece com o da Figura 15-26*b*. P_{max} é dividida entre parafuso e material da mesma maneira que no caso do carregamento estático da Figura 15-24. O parafuso percebe apenas uma parte da carga variada devido à presença da pré-carga, *o que faz com que o material absorva o grosso das oscilações de carga*. Isso reduz drasticamente as tensões alternantes de tração no parafuso em relação ao que seriam se não fosse a presença da pré-carga. As oscilações de carga compressiva no material não são importantes no que tange à falha por fadiga, que se deve sempre a tensões de tração.

As forças média e alternada sentidas pelo parafuso são

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2}, \qquad F_{média} = \frac{F_b + F_i}{2} \tag{15.15a}$$

sendo F_b calculado a partir da Equação 15.14*b* com $P = P_{max}$.

As tensões média e alternada no parafuso são

$$\sigma_a = K_f \frac{F_{alt}}{A_t}, \qquad \sigma_m = K_{fm} \frac{F_{média}}{A_t} \tag{15.15b}$$

onde A_t é a área sob tensão de tração do parafuso, obtida da Tabela 15-1 ou 15-2, K_f é o fator de concentração de tensões à fadiga para o parafuso:*

$$K_f = 5{,}7 + 0{,}6812d \qquad d \text{ em polegadas}$$

ou

$$K_f = 5{,}7 + 0{,}02682d \qquad d \text{ em mm} \tag{15.15c}$$

onde d é o diâmetro nominal da rosca. Esta relação se baseia nos dados do teste de fadiga tanto de roscas cortadas quanto laminadas, que demonstram que a concentração de tensão nas roscas varia com o diâmetro do parafuso de cerca de 5,7, para uma rosca de 0,25 polegada de diâmetro, até 9 para uma rosca de 5 polegadas de diâmetro[16]. K_{fm} é o fator de concentração para as tensões médias,

* A equação 15.15c foi ajustada ao dado de concentração de tensão referido pela regressão linear [16]. O coeficiente de correlação é $r^2 = 0{,}91$.

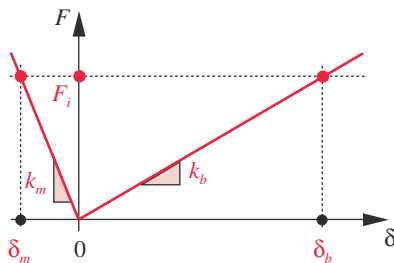
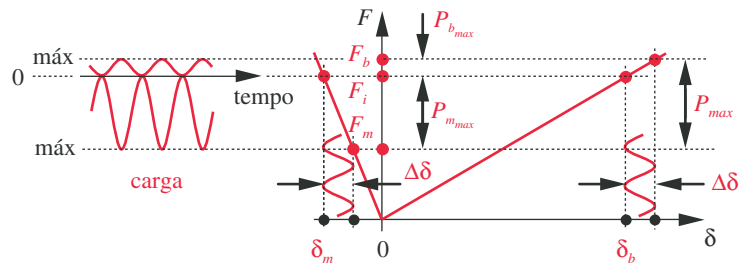



FIGURA 15-26

Efeitos no parafuso e material causados por carga variada entre zero e P_{max}.

obtido da Equação 6.17. Observe que K_{fm} será em geral 1,0 para parafusos pré-carregados.

A tensão resultante da pré-carga, F_i, é

$$\sigma_i = K_{fm} \frac{F_i}{A_t} \tag{15.15d}$$

Peterson[6] relata que cerca de 15% das falhas de parafusos ocorre nos filetes sob a cabeça, 20% no final das roscas no corpo do parafuso e cerca de 65% na rosca de face da porca. A Tabela 15-8 mostra alguns valores sugeridos de fatores de concentração de tensões à fadiga nessas localidades para parafusos de roscas cortadas ou laminadas. Roscas laminadas têm menores fatores de concentração de tensão devido à orientação favorável dos grãos [16, 17]. Parafusos com alta resistência geralmente têm roscas laminadas.

As tensões calculadas a partir da Equação 15.15 necessitam ser comparadas a um conjunto de parâmetros de resistência do material em um diagrama de Goodman modificado, como discutido na Seção 6.11. O limite de resistência à fadiga pode ser calculado pelos métodos da Seção 6.6 usando um fator de acabamento de usinagem para os casos de roscas laminadas ou usinadas. Isso será demonstrado em um exemplo. O coeficiente de segurança à falha por fadiga pode ser calculado sem desenhar o diagrama de Goodman, simplesmente utilizando a Equação 13.34*b*, repetida aqui com um novo número.

$$N_f = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_i\right)}{S_e\left(\sigma_m - \sigma_i\right) + S_{ut}\sigma_a} \tag{15.16}$$

A importância das altas pré-cargas para a redução dos efeitos dos carregamentos de fadiga deve ficar clara a partir da discussão anterior. Se nenhuma pré-carga fosse aplicada à junta, as cargas média e alternada e as tensões sentidas pelo parafuso aumentariam por um fator $1/C$, que é potencialmente um número grande, já que C é geralmente pequeno e sempre menos do que 1.

EXEMPLO 15-3

Fixadores pré-carregados em carregamento dinâmico

Problema **Repita o Exemplo 15-2 com uma carga variada aplicada à junta. Determine um tamanho adequado para o parafuso e pré-carga para a junta da Figura 15-23. Encontre os coeficientes de segurança contra fadiga, escoamento e separação. Determine a pré-carga ótima como uma porcentagem da resistência de prova de modo a maximizar os coeficientes de segurança à fadiga, escoamento e separação.**

Dados **As dimensões da junta são $D = 1$ in e $l = 2$ in. A carga aplicada varia entre $P = 0$ e $P = 1000$ lb.**

Hipóteses **O parafuso possui roscas laminadas. As duas partes sujeitadas são de aço. Os efeitos das flanges na rigidez da junta serão ignorados. Uma pré-carga de 90% da resistência de prova será aplicada como primeira tentativa. Use 99% de confiabilidade e temperatura de operação de 300°F.**

Solução **Ver as Figuras 15-27 a 15-29.**

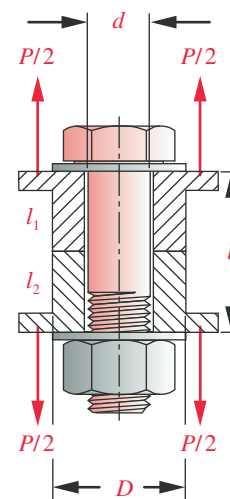



FIGURA 15-23 Repetida

Um parafuso pré-carregado comprimindo um cilindro ao qual cargas externas são aplicadas.

1 Novamente, há variáveis desconhecidas demais para que se resolvam as equações necessárias de uma única vez. É precio escolher valores tentativamente para vários parâmetros e utilizar iterações para determinar uma solução adequada. De fato, fizemos várias iterações para resolver este problema, mas apresentaremos somente uma dessas iterações dado nosso interesse em abreviar a solução. Os valores tentativos apresentados aqui já foram, portanto, ajustados a valores razoáveis.

2 O diâmetro do parafuso é o principal valor a ser escolhido juntamente com a série de rosca e a classe do parafuso, para que se possa definir a resistência de prova. Escolhemos um parafuso de aço 5/16-18 UNC-2A de classe SAE 5.2 baseado na sua adequabilidade para carregamento estático demonstrada no Exemplo 15-2, similar a este. Para um comprimento de sujeição de 2 in, pressuponha um comprimento de parafuso de 2,5 in para permitir suficiente protuberância para inserção da porca. Supomos que a pré-carga seja 90% da resistência de prova.

3 A resistência de prova, área sob tensão de tração, pré-carga, rigidez do parafuso, rigidez do material e constante da junta são todos iguais aos calculados no Exemplo 15-2 para um fator de 90% de pré-carga. Ver esse exemplo para detalhes. Em resumo:

$$\begin{aligned} S_p &= 85 \text{ kpsi} & A_t &= 0{,}052431 \text{ in}^2 & F_i &= 4011 \text{ lb} \\ k_b &= 1{,}059E6 \text{ lb/in} & k_m &= 1{,}063E7 \text{ lb/in} & C &= 0{,}09056 \end{aligned} \qquad (a)$$

4 As porções do valor de pico da carga variada P sentidas pelo parafuso e material sujeitado, bem como as cargas resultantes no parafuso e material após a aplicação da carga, são encontradas da mesma forma que no exemplo anterior, mas o pico de carga aqui é menor:

$$\begin{aligned} P_b &= 91 \text{ lb} & P_m &= 909 \text{ lb} \\ F_b &= 4102 \text{ lb} & F_m &= 3102 \text{ lb} \end{aligned} \qquad (b)$$

5 Como essas cargas são variadas, precisamos calcular as componentes média e alternante da força sentida pelo parafuso. A Figura 15-27 mostra o diagrama

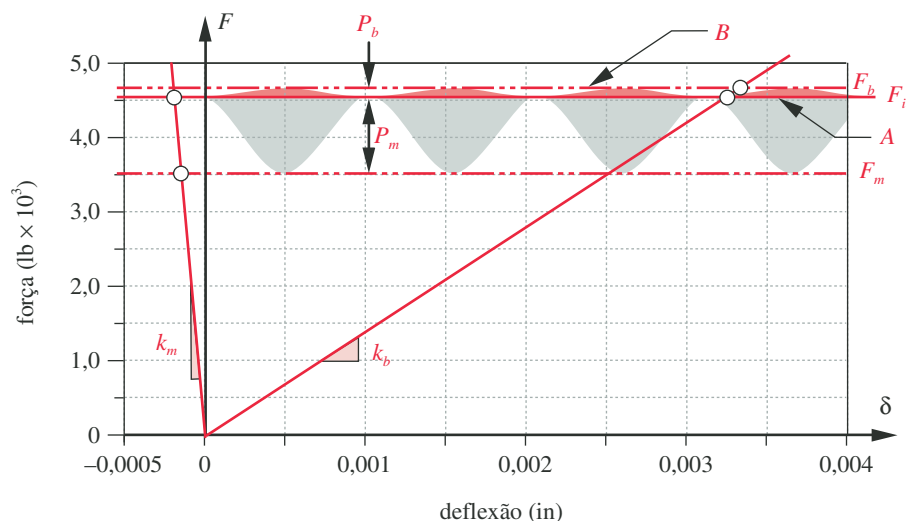



FIGURA 15-27

Forças dinâmicas no parafuso e material do Exemplo 15-3: desenhado em escala.

de carga-deflexão para este problema, desenhado em escala, com as forças aplicadas indicadas anteriormente. A onda senoidal rasa entre a linha *A* de força inicial e a linha *B* de máxima força no parafuso é a única carga variada sentida pelo parafuso. As forças média e alternante são, portanto,

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2} = \frac{4102 - 4011}{2} = 45{,}3 \text{ lb}$$
$$F_{média} = \frac{F_b + F_i}{2} = \frac{4102 + 4011}{2} = 4056{,}2 \text{ lb} \qquad (c)$$

Observe quão pouco da força, que varia entre 0 e 1000 lb, é sentida pelo parafuso.

6 As tensões média e alternada no parafuso são:

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{F_{alt}}{A_t} = \frac{45{,}3}{0{,}052431} = 864 \text{ psi}$$
$$\sigma_{m_{nom}} = \frac{F_{média}}{A_t} = \frac{4056{,}2}{0{,}052431} = 77364 \text{ psi} \qquad (d)$$

7 O fator de concentração de tensões à fadiga para uma rosca deste diâmetro é determinado na Equação 15.5*c*, e o fator de concentração para as componentes médias de tensão, K_{fm}, na Equação 6.17.

$$K_f = 5{,}7 + 0{,}6812d = 5{,}7 + 0{,}6812(0{,}3125) = 5{,}9$$
$$\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| > S_y \text{ então:} \qquad K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|}$$
$$K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| = K_f\left|\sigma_{a_{nom}} + \sigma_{m_{nom}}\right| = 5{,}9\left|864 + 77364\right| = 462548 \text{ psi}$$
$$462548 \text{ psi} > S_y = 92000 \text{ psi}$$
$$K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} = \frac{92000 - 5{,}9(864)}{77364} = 1{,}12 \qquad (e)$$

8 As tensões locais média e alternada no parafuso são, portanto:

$$\sigma_a = K_f\sigma_{a_{nom}} = 5{,}9(864) = 5107 \text{ psi}$$
$$\sigma_m = K_{fm}\sigma_{m_{nom}} = 1{,}12(77364) = 86893 \text{ psi} \qquad (f)$$

9 A tensão correspondente à pré-carga inicial é

$$\sigma_i = K_{fm}\frac{F_i}{A_t} = 1{,}12\frac{4011}{0{,}052431} = 85923 \text{ psi} \qquad (g)$$

10 Um limite de resistência à fadiga deve ser encontrado para este material. Utilizando os métodos da Seção 6.6, encontramos

$$S_{e'} = 0{,}5S_{ut} = 0{,}5(120000) = 60000 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$S_e = C_{carreg}\,C_{tamanho}\,C_{superf}\,C_{temp}\,C_{conf}\,S_{e'}$$
$$= 0{,}70(0{,}995)(0{,}76)(1)(0{,}81)(60000) = 25726 \text{ psi} \qquad (i)$$

sendo que os fatores de redução de resistência são obtidos de tabelas e fórmulas na Seção 6.6 para, respectivamente, carregamento axial, tamanho de parafuso, acabamento de usinagem, temperatura ambiente e 99% de confiabilidade.

11 A resistência à fadiga corrigida e a resistência à tração são usadas na Equação 15.16 para determinar o coeficiente de segurança para a linha de Goodman.

$$N_f = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_i\right)}{S_e\left(\sigma_m - \sigma_i\right) + S_{ut}\sigma_a} = \frac{25837\left(120000 - 85923\right)}{25726\left(86893 - 85923\right) + 120000\left(5107\right)} = 1,38 \qquad (j)$$

O diagrama de Goodman modificado para este estado de tensão é mostrado na Figura 15-28.

12 A tensão estática no parafuso após o escoamento local inicial e o coeficiente de segurança contra o escoamento são:

$$\sigma_s = \frac{F_{bolt}}{A_t} = \frac{4102}{0,045\,36} = 78227 \text{ psi} \qquad N_y = \frac{S_y}{\sigma_b} = \frac{92000}{78227} = 1,18 \qquad (k)$$

13 A pré-carga requerida para obtenção desses coeficientes de segurança é

$$F_i = 0,90 S_p A_t = 0,90\left(85000\right)\left(0,052431\right) \cong 4011 \text{ lb} \qquad (l)$$

14 O coeficiente de segurança contra a separação da junta é encontrado a partir da Equação 15.14*d*.

$$N_{separação} = \frac{F_i}{P\left(1 - C\right)} = \frac{4011}{1000\left(1 - 0,090\,56\right)} = 4,4 \qquad (m)$$

15 Os coeficientes de segurança à fadiga e separação são aceitáveis. O coeficiente de segurança ao escoamento é baixo, mas ainda é aceitável, uma vez que o parafuso da porca está sendo deliberadamente pré-carregado a um nível próximo à sua resistência de escoamento.

16 O modelo foi resolvido para o intervalo completo de pré-cargas desde 0 a 100% da resistência de prova e os coeficientes de segurança foram plotados contra a porcentagem de pré-carga. Os resultados são mostrados na Figura 15-29. Observe que os coeficientes de segurança à fadiga e abertura da junta são < 1 a menos de 40% de pré-carga, ponto no qual a pré-carga se torna efetiva em manter a junta fechada. O coeficiente de segurança à fadiga permanece essencialmente constante quando a pré-carga é aumentada acima dos 40%, porém o coeficiente de segurança refe-

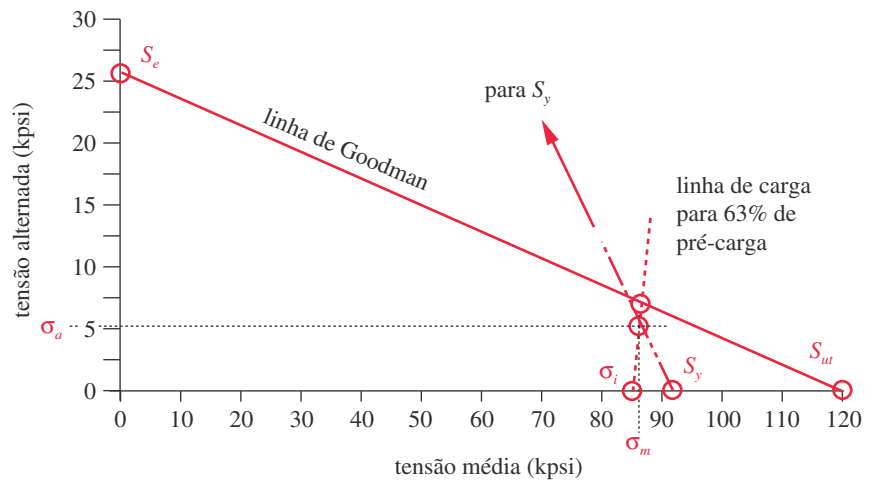



FIGURA 15-28

Diagrama de Goodman modificado para o Exemplo 15-3.

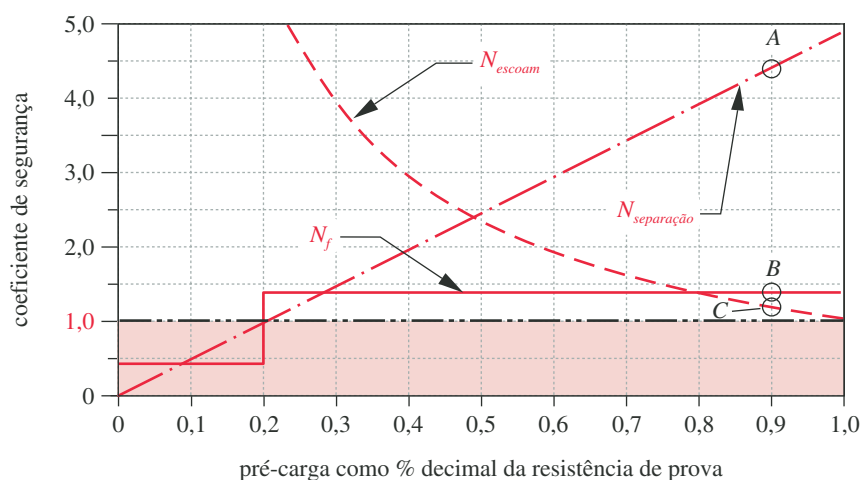



FIGURA 15-29

Coeficiente de segurança *versus* pré-carga para parafuso carregado dinamicamente no Exemplo 15-3.

rente à separação da junta aumenta linearmente com o aumento da pré-carga. Para proteger a junta parafusada contra possíveis sobrecargas, é desejável que se utilize a máxima pré-carga não causadora de escoamento no parafuso, quando este é apertado. Neste exemplo, o pré-carregamento a 90% da carga de prova do parafuso produz uma margem de sobrecarga de $N_{separação} = 4{,}4$ em *A*, com uma reserva de 18% contra o escoamento durante a pré-carga ($N_y = 1{,}18$ em *C*), juntamente com um coeficiente de segurança contra falha por fadiga $N_f = 1{,}38$ em *B*.

17 O projeto recomendado é, então, de um parafuso 5/16-18 UNC-2A, de grau 5.2 e comprimento 2,5 in, carregado a 90% da resistência de prova com uma força de 4011 lb. Observe que este pequeno parafuso pré-carregado suportará meia tonelada de carga variada! Os arquivos EX15-03 estão incluídos no CD-ROM.

15.8 DETERMINAÇÃO DO FATOR DE RIGIDEZ DE JUNTA

Na discussão prévia, por simplicidade, a seção transversal do material sendo sujeitado foi assumida como sendo um cilindro de pequeno diâmetro, como mostrado na Figura 15-23. Uma situação mais realista é mostrada na Figura 15-21, na qual os materiais sendo unidos constituem um meio contínuo que se estende bastante além da região de influência do parafuso. De fato, a maior parte das junções terá certo número de parafusos distribuídos sobre a superfície sujeitada. (Quando o padrão de parafuso é circular, *a circunferência na qual as linhas de centro dos parafusos se localizam* é chamada de **círculo de parafusos**). A questão então a responder é: que quantidade de material sujeitado deve ser incluída no cálculo da rigidez do material k_m, valor este requerido para determinar o fator de rigidez de junta *C*?

A distribuição de tensão dentro do material sob o parafuso possui uma geometria complexa. O problema foi estudado por muitos pesquisadores[7, 8, 9] e o cálculo preciso da distribuição de volume sob tensão é bastante complicado e mais bem feito com FEA. A tensão de compressão no material é (como esperado) mais alta diretamente sob o parafuso e cai à medida que nos afastamos lateralmente da linha de centro do parafuso (*CL*). A certa distância lateral da linha *CL*, a tensão compressiva na interface da junta cai a zero e, a partir desse ponto, a junta tende a se separar, uma vez que não pode suportar tensões de tração.

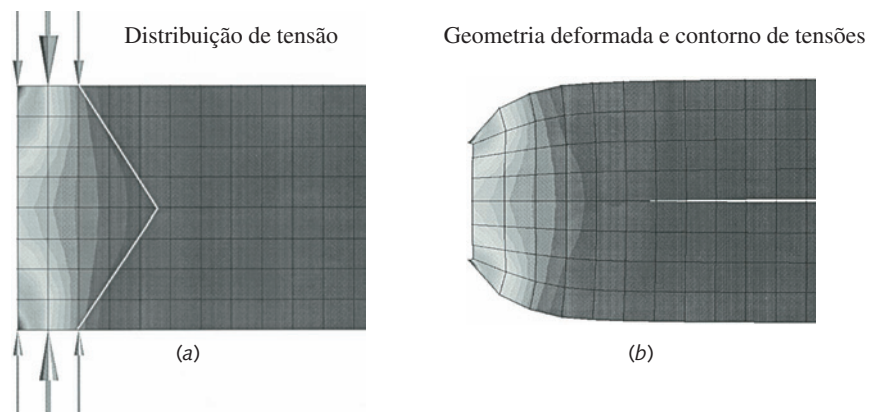



FIGURA 15-30

Análise por elementos finitos da distribuição de tensões e deformação dentro da zona de sujeição de uma conexão por parafuso.[10]

A Figura 15-30 mostra os resultados de um estudo de análise por elementos finitos (FEA) da distribuição de tensões em uma junta sanduíche de duas partes sujeitadas com um único parafuso pré-carregado.[10, 11] Apenas uma metade do sanduíche é analisada devido à sua simetria axial. A linha de centro vertical do parafuso está à esquerda da borda esquerda de cada diagrama. A distribuição de tensões ao redor do parafuso às vezes é modelada com a forma de um cone truncado em forma de barril[12], *cone-frusta*, como visto na Figura 15-30*a*. A Figura 15-30*b* mostra a geometria deformada e exagera de forma deliberada a dimensão vertical para exibir as pequenas deflexões na zona de sujeição e de separação, claramente visível na metade direita da junção. Alguns estudos indicaram que um cone com ângulo $\phi = 30°$ produz uma aproximação razoável do volume tensionado.[12,13] A constante de mola do material para um parafuso de máquina ou parafuso de cabeça pode ser estimada de maneira similar. Essas abordagens fornecem apenas resultados aproximados e não serão usadas. Outros [13,14,15] fizeram análises por elemento finito da junta parafusada que fornecem melhores estimativas desse comportamento. Apresentamos um deles.

Cornwell[15] fez um extenso estudo de FEA da rigidez de parafuso e junta de 4.424 combinações diferentes para quatro parâmetros de junta: diâmetro do parafuso, espessura da junta, espessuras de placas individuais e várias combinações de materiais de placas. Esse estudo também incluía os efeitos de deflexão da cabeça do parafuso, que pode ser muito maior que a rigidez teórica do parafuso prevista pela equação 15.11a. A deflexão da cabeça pode ser incluída pelo uso da seguinte equação para rigidez do parafuso, em vez da equação 15.11a.

$$k_{b'} = \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} k_b \cong \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} \frac{A_t A_b}{A_t l_t + A_t l_s} E_b \tag{15.17}$$

Cornwell adequou equações empíricas aos dados da análise por elemento finito, que, tomados juntos, calculam a constante C da rigidez da junta como uma função de diâmetro do parafuso d, comprimento sujeitado l, espessura relativa da placa das duas partes sujeitadas e os dois módulos de elasticidade E dos materiais sujeitados. As equações empíricas estão de acordo com os dados de FEA de todos os modelos com um erro médio de 0,6% e possuem um coeficiente de correlação com os dados de 0,9998. Essa abordagem evita a necessidade de estimar a rigidez do material k_m na zona de engate para determinar C, como foi feito nos dois exemplos anteriores e em todos os outros métodos referidos aqui. O valor de C pode ser usado diretamente nas Equações 15.14 para determinar as cargas

no parafuso e no material e o fator de segurança da junta contra separação. Suas equações são válidas para quaisquer combinações de materiais cujos módulos de Young estejam em meio àqueles de aço e alumínio.

Cornwell define uma razão de aspecto de junta j como o diâmetro do parafuso d sobre o comprimento sujeitado l.

$$j = \frac{d}{l} \tag{15.18a}$$

uma chapa para a razão do módulo do parafuso r como:

$$r = \frac{E_{material}}{E_{bolt}} \tag{15.18b}$$

e a razão de espessura da chapa t

$$t = \frac{T_L}{T_L + T_H} \tag{15.18c}$$

onde T_L é a espessura da chapa do módulo de Young mais baixo e T_H é a espessura da chapa do módulo de Young mais alto.

Juntas com duas chapas do mesmo material

O estudo de Cornwell investigou juntas com razões de aspecto da junta j variando de 0,1 para 2,0 e razões de módulo de chapa para parafuso r variando de 0,35 para chapas de alumínio e parafusos de aço para 1,0 se ambos forem de aço. O efeito da variação na razão de módulo de chapa para parafuso r no fator C da junta foi analisado. Os dados da FEA resultante foram curvados para produzir uma expressão para C versus r sobre as variações apontadas acima para o caso de materiais na junta.

$$C_r = p_3 r^3 + p_2 r^2 + p_1 r + p_0 \tag{15.19}$$

onde os coeficientes p_i são dados na Tabela 15-8 como uma função de j.

Para uma junta com os mesmos materiais, $C = C_r$. Para uma junta de dois materiais diferentes, o fator C_r deve ser calculado separadamente para cada material. C_H e C_L representam fatores de junta para a mesma conexão feitos inteiramente do material do alto ou do baixo módulos, respectivamente.

Tabela 15-8 Parâmetros de rigidez para a Equação 15.19[15]

j	p_0	p_1	p_2	p_3
0,10	0,4389	–0,9197	0,8901	–0,3187
0,20	0,6118	–1,1715	1,0875	–0,3806
0,30	0,6932	–1,2426	1,1177	–0,3845
0,40	0,7351	–1,2612	1,1111	–0,3779
0,50	0,7580	–1,2632	1,0979	–0,3708
0,60	0,7709	–1,2600	1,0851	–0,3647
0,70	0,7773	–1,2543	1,0735	–0,3595
0,80	0,7800	–1,2503	1,0672	–0,3571
0,90	0,7797	–1,2458	1,0620	–0,3552
1,00	0,7774	–1,2413	1,0577	–0,3537
1,25	0,7667	–1,2333	1,0548	–0,3535
1,50	0,7518	–1,2264	1,0554	–0,3550
1,75	0,7350	–1,2202	1,0581	–0,3574
2,00	0,7175	–1,2133	1,0604	–0,3596

Juntas com duas chapas de diferentes materiais

A Figura 15-31 resulta de uma amostra representativa de dados de cálculos de FEA da relação entre a constante C da junta e a razão de espessura da chapa t. Uma família de curvas polinomiais é ajustada aos dados para cada um dos inúmeros valores da razão de aspecto da junta j. Essas curvas são definidas pelas expressões:

$$C_t = q_5t^5 + q_4t^4 + q_3t^3 + q_2t^2 + q_1t + q_0 \tag{15.20a}$$

$$C_t = q_3t^3 + q_2t^2 + q_1t + q_0 \tag{15.20b}$$

onde a Equação 15.20a é usada apenas para o caso da razão de aspecto da junta $j = 0{,}1$, e a Equação 15.20b se aplica a todos os outros valores de j. Os valores para os coeficientes q_i para várias razões de aspecto de junta são mostrados na Tabela 15-9.

Estas são funções não lineares, mas a relação com j entre os membros da família de curvas na Figura 15-31 é também não linear, como evidenciado pelas diferentes formas das curvas de C versus t para diferentes j. Para simplificar o uso desses dados em um cálculo de C para vários valores de j, Cornwell cria um fator de correção que conta tanto para a forma quanto para a magnitude do desvio do real fator de rigidez da junta a partir da linha reta entre C_H e C_L na Figura 15-31. A forma do fator de correção é dada pelas Equações 15.20, e a amplitude, pela Equação 15.21.

$$a = e^{(0{,}0598(\ln j)^3 + 0{,}1385(\ln j)^2 - 0{,}4350(\ln j) - 2{,}3516} \tag{15.21}$$

As funções linearizadas são mostradas apenas para duas curvas ($j = 0{,}1$ e $j = 0{,}5$) para reduzir a aglomeração na figura. O parâmetro a é mostrado em cada uma dessas duas curvas e representa o desvio máximo entre a curva real e a linha reta entre suas extremidades. Essas extremidades são denominadas C_H e C_L e representam, respectivamente, o caso de 100% de material de alto módulo e de 100% de material de baixo módulo na junta. Esses valores são necessários para o cálculo final de forma que definem a inclinação e o intercepto de cada curva

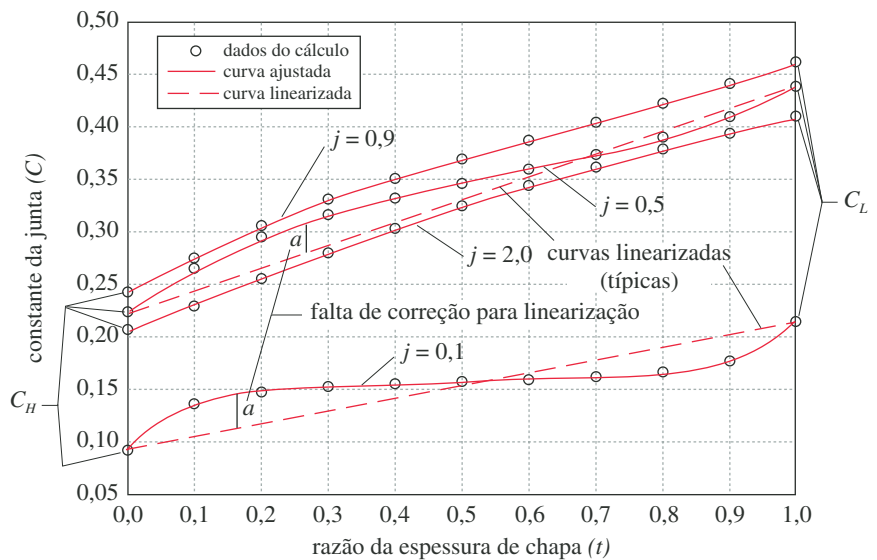



FIGURA 15-31

Família de curvas da constante da junta C versus razão da espessura da chapa t e razão de aspecto da junta j [15]

Tabela 15-9 Parâmetros de rigidez para a Equação 15.20[15]

j	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0,10	0,0079	17,040	–92,832	202,44	–209,38	82,726
0,20	0,1010	8,5465	–24,166	15,497		
0,30	0,0861	8,2344	–22,274	13,963		
0,40	0,0695	8,0297	–20,727	12,646		
0,50	0,0533	7,8676	–19,357	11,457		
0,60	0,0372	7,6705	–17,951	10,262		
0,70	0,0197	7,3030	–16,235	8,9273		
0,80	0,0029	6,9893	–14,737	7,7545		
0,90	–0,0123	6,7006	–13,363	6,6784		
1,00	–0,0265	6,4643	–12,188	5,7481		
1,00	–0,0524	5,7363	–9,3326	3,6348		
1,50	–0,0678	5,0674	–7,0322	2,0107		
1,75	–0,0763	4,5187	–5,1590	0,6861		
2,00	–0,0784	3,9617	–3,5248	–0,3956		

linearizada. Os valores de C_H e C_L são calculados com a Equação 15.19, usando a chapa para as razões de módulo do parafuso da Equação 15.18*b* para os materiais de alto e baixo módulos da chapa, respectivamente.

Uma vez que os valores de C_H, C_L, C_t e a são encontrados, a constante C da junta é encontrada como uma função desses parâmetros e a razão de espessura da chapa t de:

$$C = C_H + (t + aC_t)(C_L - C_H) \tag{15.22}$$

O valor de C pode então ser usado nas Equações 15.14. A rigidez de material k_m pode ser encontrada a partir da Equação 15.13*c*, conhecendo C e usando k_b da Equação 15.17.

Juntas com retentores

As gaxetas são utilizadas em juntas onde são necessários retentores de pressão. Há diferentes estilos de gaxetas, que podem ser divididas em duas classes gerais: **confinadas e não confinadas**. As Figuras 15-32*a* e 15-32*b* mostram duas variações de gaxetas confinadas, uma delas sendo um anel O. Todas as gaxetas confinadas permitem que as faces duras das partes engajadas fiquem em contato, e isso faz com que a junta se comporte como uma junta sem gaxeta em termos da sua constante de mola k_m. Os procedimentos mostrados anteriormente podem ser utilizados para estimar k_m de gaxetas confinadas.

Juntas de gaxetas não confinadas, como mostrado na Figura 15-32*c*, se caracterizam por possuir a gaxeta relativamente mole separando por completo as superfícies de engajamento. A gaxeta, então, contribui para a constante de mola da junta. A constante de mola da gaxeta k_g pode ser combinada com as constantes das partes engajadas na Equação 13.2*b* para determinar uma constante de mola efetiva k_m para o conjunto. Os módulos de elasticidade de diversos materiais de gaxetas são mostrados na Tabela 15-11.

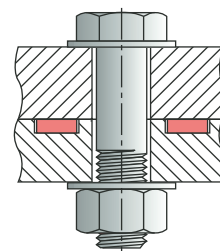
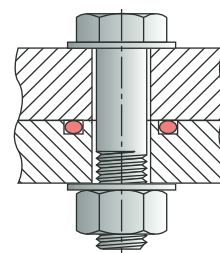
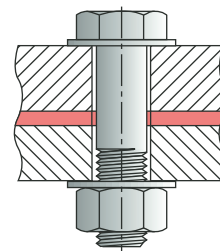
À exceção das gaxetas feitas de cobre e de cobre asbesto na Tabela 15-11, os módulos típicos de gaxetas são tão baixos que dominam a Equação 13.2*b* e essencialmente determinam a rigidez da junta. Nesses casos, não é necessário resolver a Equação 13.2*b*, e k_m pode ser posto igual a k_g. Com gaxetas de cobre

(*a*) Gaxeta confinada

(*b*) Anel O confinado

(*c*) Gaxeta não confinada

FIGURA 15-32

Gaxetas confinadas e não confinadas.

Tabela 15-10 Módulo de elasticidade de alguns materiais de gaxeta
Fonte: Referência 7 com permissão de McGraw-Hill, Inc., New York

Material	Módulo de elasticidade psi	Módulo de elasticidade Mpa
Cortiça	12,5*E*3	86
Asbesto comprimido	70*E*3	480
Cobre asbesto	13,5*E*6	93*E*3
Cobre (puro)	17,5*E*6	121*E*3
Borracha pura	10*E*3	69
Enrolamento em espiral	41*E*3	280
Teflon	35*E*3	240
Fibra vegetal	17*E*3	120

asbesto ou cobre (ou qualquer outra gaxeta de material rígido, não confinado), a rigidez da gaxeta pode ser suficientemente alta para requerer que se calcule k_m utilizando a Equação 13.2*b*. Utilize uma área para o material de gaxeta consistente com a zona de sujeição completa, no nível da gaxeta, para estimar k_g.

EXEMPLO 15-4

Determinação da rigidez do material e da constante de junta

Problema **Uma câmara de pressão é selada por uma gaxeta sujeitada por meio de oito parafusos pré-carregados. Determine a rigidez do material e a constante de junta para os dois projetos do conjunto mostrados na Figura 15-33, um com uma gaxeta confinada e outro com uma não confinada. Também determine as cargas sentidas pelos parafusos e material.**

Dados **O diâmetro do cilindro D_p = 4 in. O diâmetro do cilindro de parafusos é D_{bc} = 5,5 in. Diâmetro externo da flange D_f = 7,25 in. Os oito parafusos tipo 3/8-16 UNC são igualmente espaçados no círculo de parafusos. O comprimento sujeitado l da junta é 1,5 in. A espessura da gaxeta é 0,125 in. A pressão no cilindro é de 1500 psi. Todas as partes são de aço.**

Hipóteses **O material da gaxeta é borracha.**

Solução **Ver a Figura 15-33.**

1 A Figura 15-33 mostra dois projetos alternativos de gaxeta para a junta, na mesma vista para economizar espaço. Qualquer que seja o projeto utilizado, sua configuração de gaxeta está presente em ambos os lados da linha de centro. Não se confunda com o desenho de duas gaxetas diferentes, para topo e fundo; apenas uma delas será utilizada na montagem final. Lidaremos primeiro com a configuração de gaxeta confinada.

2 As forças nos parafusos individuais podem ser encontradas a partir do valor conhecido de pressão e das dimensões do cilindro, assumindo que todos parafusos compartilhem a carga igualmente. A força total na tampa de extremidade é

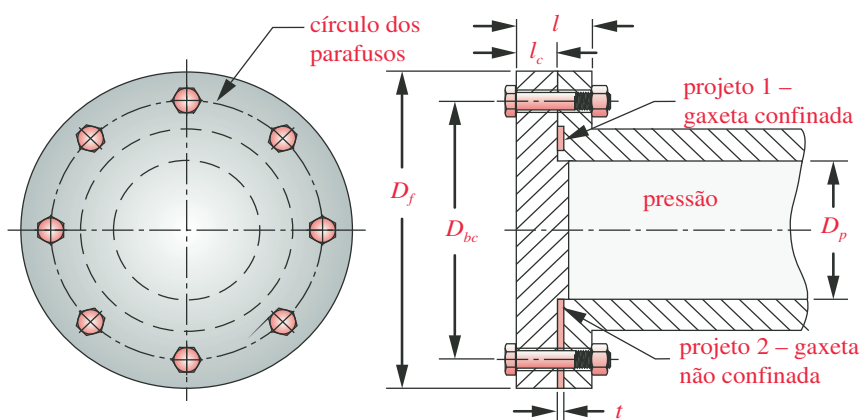



FIGURA 15- 33

Placa de extremidade de vaso de pressão com parafusos pré-carregados dispostos em círculo.

$$P_{total} = pA = p\frac{\pi D_p^2}{4} = 1500\frac{\pi(4)^2}{4} = 18850 \text{ lb} \qquad (a)$$

e a força aplicada a cada um dos parafusos será, então,

$$P = \frac{P_{total}}{N_{parafuso}} = \frac{18850}{8} = 2356 \text{ lb} \qquad (b)$$

3 Primeiro analise o caso da gaxeta confinada. Uma gaxeta confinada permite que as superfícies de metal entrem em contato como se não houvesse gaxeta. Dessa forma, a análise da rigidez do material pode ignorar a gaxeta confinada.

4 Determine as razões relevantes para essa junta a partir das equações 15-17. A razão de aspecto da junta é:

$$j = \frac{d}{l} = \frac{0{,}375}{1{,}875} = 0{,}200 \qquad (c)$$

5 Há dois módulos de parafuso para chapa que interessam aqui, uma vez que temos diferentes materiais na junta. Nós os chamaremos de r_H o material de alto módulo (a flange do cilindro de aço) e r_L a chapa de cobertura de alumínio de baixo módulo.

$$r_H = \frac{E_{material}}{E_{parafuso}} = \frac{30E6}{30E6} = 1{,}0$$

$$r_L = \frac{E_{material}}{E_{parafuso}} = \frac{10{,}4E6}{30E6} = 0{,}347 \qquad (d)$$

6 A razão de espessura da chapa relaciona as espessuras dos materiais de alto e baixo módulos na junta.

$$t = \frac{T_L}{T_L + T_L} = \frac{1{,}125}{1{,}125 + 0{,}750} = 0{,}600 \qquad (e)$$

7 Calcule os termos C_H e C_L do C_r para r_H e r_L, respectivamente, usando a Equação 15.19 e os coeficientes p_i da Tabela 15-8. Para $j = 0{,}20$, elas são: $p_0 = 0{,}6118$, $p_1 = -1{,}1715$, $p_2 = 1{,}0875$ e $p_3 = -0{,}3806$.

$$C_L = C_r = p_3 r_L^3 + p_2 r_L^2 + p_1 r_L + p_0$$
$$= -0{,}381(0{,}347)^3 + 1{,}088(0{,}347)^2 - 1{,}172(0{,}347) + 0{,}612 = 0{,}321 \qquad (f)$$

Note que $r_H = 1$ então C_H é:

$$C_H = C_r = p_3 r_H^3 + p_2 r_H^2 + p_1 r_H + p_0$$
$$= -0{,}381 + 1{,}088 - 1{,}172 + 0{,}612 = 0{,}147 \qquad (g)$$

8 Uma vez que $j > 0{,}1$ neste exemplo, nós precisamos usar a Equação 15.20*b* para calcular C_t. Os coeficientes q_i são retirados da Tabela 15-9 e para $j = 0{,}20$, elas são: $q_0 = 0{,}101$, $q_1 = 8{,}547$, $q_2 = -24{,}166$ e $q_3 = 15{,}497$.

$$C_t = q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0$$
$$C_t = 15{,}497(0{,}60)^3 - 24{,}166(0{,}60)^2 + 8{,}547(0{,}60) + 0{,}101 = -0{,}124 \qquad (h)$$

9 Calcule a amplitude do fator de correção para a estimativa linearizada usando a Equação 15.21.

$$a = e^{(0{,}0598(\ln j)^3 + 0{,}1385(\ln j)^2 - 0{,}4350(\ln j) + 2{,}3516} = 0{,}214 \qquad (i)$$

10 O fator de rigidez da junta para o projeto de gaxeta confinada é calculado com a Equação 15.22.

$$C = C_H + (t + aC_t)(C_L - C_H)$$
$$= 0{,}321 + [0{,}60 + 0{,}214(-0{,}124)](0{,}321 - 0{,}147) = 0{,}247 \qquad (j)$$

11 As porções da carga aplicada P sentida pelo parafuso e pelo material podem agora ser encontradas a partir das Equações 15.13.

$$P_b = CP = 0{,}247(2356) \cong 581{,}1 \text{ lb}$$
$$P_m = (1 - C)P = (1 - 0{,}247)(2356) = 1775{,}1 \text{ lb} \qquad (k)$$

12 Nós podemos estimar a rigidez do parafuso $k_{b'}$ a partir da Equação 15.17 usando sua área de haste = 0,110 in^2 e a área de tensão de tração = 0,077 in^2 (Tabela 15-1) e então estimar a rigidez de material k_{m_1} para o caso da gaxeta confinada usando a Equação 15.13*c*, dados $k_{b'}$ e C.

comprimento da rosca: $l_{rosca} = 2d + 0{,}25 = 2(0{,}375) + 0{,}25 = 1{,}0 \text{ in}$

comprimento da haste: $l_r = l_{parafuso} - l_{rosca} = 2{,}25 - 1{,}0 = 1{,}25 \text{ in}$

comprimento da rosca engatada: $l_e = l - l_r = 1{,}875 - 1{,}25 = 0{,}625 \text{ in}$

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_l} E_b$$

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{0{,}375}{1{,}875}\right)^{-1} \frac{0{,}077(0{,}110)}{0{,}110(0{,}625) + 0{,}077(1{,}25)} 30E6 = 1{,}290E6 \text{ lb/in}$$

$$C = \frac{k_{b'}}{k_{m_1} + k_{b'}} \quad \Rightarrow \quad k_{m_1} = k_{b'} \frac{1 - C}{C} = 1{,}29E6\left(\frac{1 - 0{,}247}{0{,}247}\right) = 3{,}940E6 \text{ lb/in} \qquad (l)$$

13 Agora vamos abordar o caso da gaxeta não confinada. A rigidez do parafuso não é afetada pela gaxeta, mas a rigidez de material sim. Nós agora temos duas molas em séries, o metal cuja rigidez k_m é definida na Equação (*l*) e a gaxeta que é calcula na Equação (*n*) abaixo. Essas se combinam de acordo com a Equação 15.2*b*. Pode-se supor que a porção da gaxeta não confinada sujeita à força de

engate seja do diâmetro externo da flange mostrada na Figura 15-33 para o diâmetro interno do vaso. O furo do parafuso pode ser subtraído da área da gaxeta. A área da gaxeta engatada ao redor de um parafuso é:

$$A_g = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(D_f^2 - D_p^2\right)}{N_{parafuso}} - d^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(7,25^2 - 4^2\right)}{8} - 0,375^2\right] = 3,479 \text{ in}^2 \qquad (m)$$

14 A rigidez desse pedaço de gaxeta é encontrada a partir da Equação 15.11*c*.

$$k_{m_2} = k_g = \frac{A_g E_g}{t} = \frac{3,479(10E3)}{0,125} \cong 2,783E5 \text{ lb/in} \qquad (n)$$

O módulo de elasticidade E_g do material de gaxeta é encontrado na Tabela 15-10.

15 A rigidez combinada da junta de gaxeta (a partir da Equação 14.2*b*) é

$$k_m = \frac{1}{\dfrac{1}{k_{m_1}} + \dfrac{1}{k_{m_2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{3,94E6} + \dfrac{1}{2,783E5}} \cong 2,600E5 \text{ lb/in} \qquad (o)$$

Observe que a rigidez combinada é essencialmente a mesma que aquela da gaxeta sozinha, uma vez que esta domina a equação. Poderíamos ter utilizado a rigidez da gaxeta k_g para representar a rigidez da junta k_m com pequeno erro.

16 A constante da junta com a gaxeta não confinada seria agora:

$$C = \frac{k_b}{k_m + k_b} = \frac{1,290E6}{2,600E5 + 1,290E6} = 0,832$$

e $\qquad (p)$

$$(1 - C) = 0,168$$

17 As porções da carga aplicada, *P*, recebidas pelo parafuso e material sujeitado com uma gaxeta mole não confinada podem ser encontradas agora com o uso da Equação 15.13.

$$P_b = CP = 0,832(2356) \cong 1961 \text{ lb}$$
$$P_m = (1 - C)P = (1 - 0,832)(2356) \cong 395 \text{ lb} \qquad (q)$$

18 Veja o que ocorreu como resultado da introdução de uma gaxeta mole não confinada. Compare o valor de *C* na Equação (*j*) e na Equação (*p*). O parafuso passou da situação em que recebia 25% da carga aplicada quando não havia gaxeta (ou gaxeta confinada) à situação em que recebe 83% dessa carga quando temos uma gaxeta mole não confinada. Efetivamente, os papéis do parafuso e material sujeitado foram revertidos pela introdução dessa gaxeta mole. Uma gaxeta não confinada e mole limita severamente a capacidade de o parafuso acomodar as cargas de fadiga, como foi conseguido no exemplo anterior. Os arquivos EX15-04 estão incluídos no CD-ROM.

Observe que para obter os benefícios das altas pré-cargas em termos de proteção dos parafusos à fadiga, é necessário ter um material com rigidez maior que aquela do parafuso. Gaxetas moles, não confinadas, reduzem a rigidez do material tão severamente que limitam a efetividade do pré-carregamento. Para

Tabela 15-11
Coeficiente de torque K_i para roscas-padrão UNS com coeficiente de atrito $\mu = \mu_c = 0{,}15$

Tamanho de parafuso	K_i UNC	K_i UNF
0		0,22
1	0,22	0,22
2	0,22	0,22
3	0,22	0,22
4	0,22	0,22
5	0,22	0,22
6	0,22	0,22
8	0,22	0,22
10	0,22	0,21
12	0,22	0,22
1/4	0,22	0,21
5/16	0,22	0,21
3/8	0,22	0,21
7/16	0,21	0,21
1/2	0,21	0,21
9/16	0,21	0,21
5/8	0,21	0,21
3/4	0,21	0,21
7/8	0,21	0,21
1	0,21	0,21
1 1/8	0,21	0,21
1 1/4	0,21	0,21
1 3/8	0,21	0,21
1 1/2	0,21	0,20
1 3/4	0,21	
2	0,21	
2 1/4	0,21	
2 1/2	0,21	
2 3/4	0,21	
3	0,21	
3 1/4	0,21	
3 1/2	0,21	
3 3/4	0,21	
4	0,21	

juntas sob carga intensa, gaxetas não confinadas devem ser constituídas de um material de alta rigidez como cobre ou cobre asbesto, ou trocadas por duas gaxetas confinadas.

Algumas regras concernentes a parafusos-padrão como aqueles utilizados no Exemplo 15-4 são:

1 O espaçamento de parafusos em um círculo ou em outro padrão não deve exceder cerca de 6 diâmetros de parafuso entre parafusos adjacentes para uma boa distribuição de força.

2 Parafusos não devem ser posicionados próximo a uma borda mais que 1,5 a 2 diâmetros de parafuso.

15.9 CONTROLE DE PRÉ-CARGA

A quantidade de pré-carga é obviamente um fator importante no projeto do parafuso. Dessa forma, necessitamos algum meio de controlar a pré-carga aplicada a um parafuso. Os métodos mais precisos requerem que ambas as extremidades do parafuso sejam acessíveis. Assim, a quantidade de elongação do parafuso pode ser diretamente medida com um micrômetro, ou um medidor eletrônico de comprimento, e o parafuso pode ser estendido até um comprimento consistente com a pré-carga desejada, com base na Equação 15.10*a*. Algumas vezes, são utilizados transdutores ultrassônicos para medir a mudança de comprimento do parafuso quando apertado, sendo que estes apenas requerem acesso à extremidade de cabeça do parafuso. Esses métodos não são tão úteis em alta produção ou situações de serviço de campo, uma vez que requerem tempo, cuidado, instrumentos precisos e pessoal especializado.

Um método mais conveniente, porém menos preciso, mede ou controla o torque aplicado à porca ou à cabeça de um parafuso de cabeça. Um torquímetro dá uma leitura em visor da quantidade de torque aplicado. Considera-se que os torquímetros dão em geral um erro de até ± 30% na pré-carga. Se for tomado bastante cuidado, e se as roscas forem lubrificadas (o que é sempre desejável), esse erro pode talvez ser diminuído à metade, mas ainda assim é alto. Chaves de torque pneumáticas de impacto podem ser calibradas para um nível particular de torque no qual elas param de girar. Elas dão resultados mais consistentes que chaves de torque manuais e são, portanto, preferíveis.

O torque necessário para desenvolver uma pré-carga particular pode ser calculado com a Equação 15-5*a*, desenvolvida para parafusos de potência. A substituição da Equação 15.3 na 15.5*a* para resolvê-la em termos do ângulo de avanço λ resulta em:

$$T_i = F_i \frac{d_p}{2} \frac{(\mu + \operatorname{tg} \lambda \cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu \operatorname{tg} \lambda)} + F_i \frac{d_c}{2} \mu_c \tag{15.23a}$$

O diâmetro primitivo, d_p, pode ser aproximado de forma grosseira pelo diâmetro do parafuso, d, e o diâmetro médio do colar pode também ser aproximado pela média entre o diâmetro do parafuso e o tamanho-padrão de cabeça ou de porca de 1,5 d:

$$T_i \cong F_i \frac{d}{2} \frac{(\mu + \operatorname{tg} \lambda \cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu \operatorname{tg} \lambda)} + F_i \frac{(1 + 1{,}5)d}{4} \mu_c \tag{15.23b}$$

A fatorização da força e do diâmetro do parafuso produz

$$T_i \cong K_i F_i d$$

onde

$$K_i \cong \left[0{,}50 \frac{(\mu + \operatorname{tg} \lambda \cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu \operatorname{tg} \lambda)} + 0{,}625\mu_c \right] \tag{15.23c}$$

K_i é chamado de *coeficiente de torque*.

Observe que o coeficiente de atrito, μ_c, entre a cabeça do parafuso ou porca e as superfícies, bem como o coeficiente de atrito nas roscas, μ, contribuem para o coeficiente de torque, K_i. Se assumirmos um coeficiente de atrito de 0,15 para ambos os casos e calcularmos os coeficientes de torque, K_i, para todas as roscas-padrão UNC e UNF (utilizando o diâmetro primitivo correto d_p em vez da aproximação considerada na Equação 15.23*b*), o valor de K_i varia pouco ao longo dos diversos tamanhos de rosca, como mostrado na Tabela 15-11. Assim, o torque de aperto T_i requerido para a obtenção de determinada pré-carga, F_i, em **roscas lubrificadas** pode ser aproximado (desde que objeto das hipóteses de atrito listadas acima) como

$$T_i \cong 0{,}21 F_i d \qquad (15.23d)$$

Método do aperto de porca

Uma outra técnica frequentemente utilizada para controlar a pré-carga é conhecida como *método do aperto de porca*. Como o avanço do sujeitador é conhecido, girar a porca um determinado número de vezes irá tensionar o parafuso de uma quantidade conhecida, desde que o ponto de início seja tal que toda a volta da porca contribua para a extensão do parafuso. A porca é levada primeiramente a esse ponto inicial, chamado de *ajuste-apertado*, definido como o aperto obtido a partir de uns quantos golpes de uma chave de impacto, ou, se feito manualmente, tão apertado quanto uma pessoa possa apertar uma porca com uma chave-padrão. A porca é então girada (com uma chave mais comprida) um número adicional de voltas, ou frações, calculadas de modo a estender o parafuso a quantidade desejada com base na Equação 15.10*a*.

Parafusos de torque limitado

A necessidade de pré-cargas precisas em parafusos de alta resistência fez com que fabricantes de parafusos construíssem parafusos especiais "com liberação controlada por controle de tração", como mostrado na Figura 15-34. Esses parafusos são fornecidos com uma extensão estriada na extremidade. Essa extensão é projetada com uma área de cisalhamento calculada para fraturar quando o torque apropriado é conseguido. Existem ferramentas especiais disponíveis para engajar as estrias como mostrado na Figura 15-35, que também detalha como estas são utilizadas. Esses fixadores são utilizados em construções metálicas, quando a sua uniformidade de pré-carga comparada ao torque manual de uma chave de torque ou impacto é de grande vantagem em termos de minimizar erros de operação, quando dezenas de milhares de parafusos devem ser instalados adequadamente para assegurar que um arranha-céus ou uma ponte permaneçam em pé.

FIGURA 15-34

Parafuso de rompimento por controle de tração. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, CA 90621.)

Arruelas com indicação de carga

Um outro meio auxiliar para tracionar parafusos adequadamente envolve o uso de arruelas especiais sob a cabeça do parafuso que controlam a carga de tração ou indicam quando esta é correta. Arruelas de mola Belleville são utilizadas algumas vezes sob cabeças de parafusos. A mola de Belleville é projetada para produzir a força desejada no parafuso quando esta é comprimida até chegar à condição plana (ver Seção 14.9). O parafuso é simplesmente apertado até que a mola de Belleville fique plana.

Arruelas de indicadores de carga (também chamadas de indicadores diretos de tração) são produzidas com protuberâncias que se esmagam sob a pré-carga requerida como mostrado na Figura 15-36. O parafuso é apertado até que a altura da arruela seja reduzida à dimensão apropriada, como mostrado na figura.

(*a*) Coloque o parafuso no furo com a arruela sob a porca e aperte com os dedos a porca

(*b*) Ajuste a chave interior sobre as estrias e acople a chave exterior à porca

(*c*) Ligue a chave. A chave exterior roda apertando a porca até que estrias seja cisalhadas

(*d*) Remova a chave da porca e separe a extensão cisalhada da chave interior

FIGURA 15-35

Instruções para uso de parafusos de que se liberam. (Cortesia de Cordova Inc., Buena Park, Calif., 90621.)

(*a*) Arruela indicadora de carga

(*b*) Antes de apertar

(*c*) Após aperto

FIGURA 15-36

Arruelas de indicação de tração direta. (Cortesia de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif., 90621.)

Tensão torcional devida à torção dos parafusos

Quando uma porca é torcida até a pré-carga, uma carga torcional é aplicada ao parafuso por meio das suas roscas. Se o atrito nos filetes de rosca é alto, a torção no parafuso pode ser apreciável. Esta é a principal razão para uso de lubrificação nas roscas antes da montagem de parafusos. Se não existisse atrito nas roscas, a carga de torção no parafuso seria próxima a zero. Um lubrificante seco como pó de grafite com dissulfato de molibdênio adicionado também funciona bem, da mesma forma que um óleo derivado de petróleo.

Uma tensão de torção é gerada no corpo do parafuso durante o aperto, como definido pela Equação 15.9. Essa tensão de torção se combina com a tensão axial de tração no corpo do parafuso para criar uma tensão principal maior que a tensão de tração aplicada, como mostrado no diagrama de círculo de Mohr da Figura 15-37*a*. Se um torque reverso é aplicado à porca depois que esta é apertada por completo, sem que esta chegue a se afrouxar, a componente de tensão devido à torção pode ser aliviada. Mesmo quando nada é feito deliberadamente para aliviar a componente de tensão torcional depois do aperto, esta tenderá a relaxar com o tempo, especialmente se existir qualquer forma de vibração presente. Quando a tensão torcional é aliviada ou desaparece com o tempo, a tensão principal será reduzida de uma parcela $\Delta\sigma_1$, como mostrado na Figura 15-37*b*. Esta é a outra razão, à qual aludimos anteriormente, pela qual um parafuso que não quebra quando torcido à pré-carga (próximo de sua resistência de prova) não irá provavelmente falhar sob as cargas aplicadas para as quais foi dimensionado.

EXEMPLO 15-5

Determinação do torque necessário para gerar uma pré-carga no parafuso

Problema **Encontre o torque requerido para pré-carregar o parafuso do Exemplo 15-3.**

Dados **Um parafuso 5/16-18 UNC-2A, de grau 5.2, comprimento 2,5 in, pré-carregado a 90% da resistência de prova com uma força axial de 4011 lbf.**

Hipóteses **As roscas serão lubrificadas. Pressuponha um coeficiente de atrito de 0,15.**

Solução

1 O torque de aperto requerido pode ser estimado com a Equação 15.23*d*:

$$T_i \cong 0{,}21 F_i d = 0{,}21(4011)(0{,}3125) = 263 \text{ lb-in} \qquad (a)$$

2 Os arquivos EX15-05 estão incluídos no CD-ROM.

15.10 FIXADORES EM CISALHAMENTO

Os parafusos também são usados para resistir a cargas de cisalhamento, como mostrado na Figura 15-38, embora esse tipo de aplicação seja mais comum em projetos estruturais que em projetos de máquinas. Pórticos de edifícios de aço estrutural e pontes são frequentemente fixados por parafusos de alta resistência, pré-carregados. (Alternativamente, eles podem ser soldados ou rebitados.) A pré-carga de tração nesse caso serve para criar grandes forças de atrito entre elementos parafusados, que então podem resistir à carga de cisalhamento. Dessa forma, os parafusos permanecem ainda carregados em tração com altas pré-cargas. Se o atrito na junta não for suficiente para suportar as cargas de cisalhamento, então o(s) parafuso(s) será(ão) colocado(s) sob cisalhamento direto.

Em projetos de máquinas, onde as relações dimensionais entre as partes requerem em geral tolerâncias muito menores que no trabalho estrutural, não é considerada boa prática utilizar parafusos de porca e sem porca em cisalhamento para posicionar ou suportar partes de máquinas de precisão sob cargas de cisalhamento. Em vez disso, uma combinação de parafusos e **pinos passantes** deve ser utilizada com os parafusos servindo como sujeitadores da junta em compressão e os pinos proporcionando posicionamento transversal adequado e resistência ao cisalhamento. Deve-se esperar que o atrito de junta desenvolvido a partir da força de sujeição do parafuso equilibre as tensões de cisalhamento em combinação com os pinos passantes carregados em cisalhamento direto. De fato, a tarefa é dividida entre esses dois tipos diferentes de sujeitadores. *Pinos passantes suportam cargas decisalhamento, mas não cargas de tração, e parafusos de porca/sem porca suportam cargas de tração, mas não cargas de cisalhamento diretas.*

Há várias razões para a utilização desse procedimento, todas centradas ao redor da necessidade de localização posicional precisa de partes funcionais de máquinas (por exemplo, com ± 0,005 in {0,13 mm} ou menos na maior parte da máquinas). Há, claro, exceções a isso, como no caso de uma estrutura de máquina que, à parte de suas superfícies de montagem, pode ser construída de maneira menos precisa e pode ser um produto de soldagem inerentemente grosseiro.

Analise uma montagem de duas peças, carregada em cisalhamento como mostrado na Figura 15-38. Existe um padrão de parafusos múltiplos sujeitando essas duas peças. Parafusos de porca e sem porca não são construídos com pequena tolerância. Os furos para parafusos devem ter tamanho maior que o necessário de maneira a fornecer alguma folga para a inserção destes. Furos rosqueados para parafusos de máquinas terão folga radial com relação ao parafuso insertado, sig-

FIGURA 15-37

Círculos de Mohr para um parafuso pré-carregado, antes e depois do aperto.

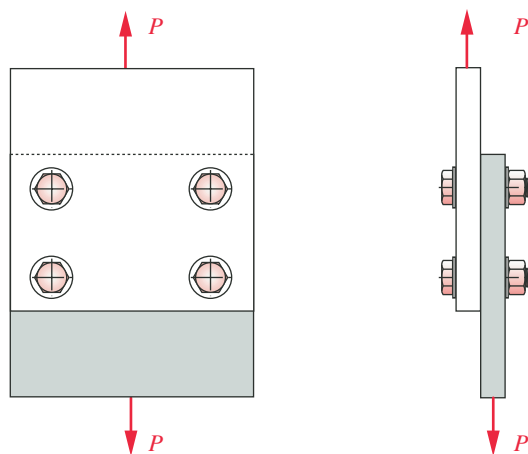



FIGURA 15-38

Uma junta parafusada sob carga de cisalhamento.

nificando que a concentricidade de um parafuso em um furo rosqueado ou de um parafuso de porca em um furo sem rosca não é garantida. Eles serão excêntricos.

Essas observações são verdadeiras para qualquer parafuso, de porca ou não, em qualquer furo. Quando um padrão de sujeitadores é utilizado como na Figura 15-38, as folgas requeridas entre parafusos e furos se torna significativamente maior que aquela relativa a um furo, por causa das tolerâncias dimensionais entre as linhas de centro dos furos entre as duas partes da junta. Para uma montagem confiável e intercambiável, os furos deverão ser significativamente maiores que os sujeitadores removíveis a fim de acomodar toda a variação possível entre tolerâncias costumeiras de fabricação. A Figura 15-39 mostra um desencontro grosseiro entre um par de furos em partes engajadas e indica por que os furos precisam ter diâmetros maiores que os sujeitadores para permitir a montagem.

Agora considere o que ocorrerá se confiarmos nos quatro parafusos da Figura 15-38 para localizar as peças e suportar as cargas de cisalhamento sem pré-carregamento de tração. A localização posicional de uma peça com relação a outra é severamente comprometida pela necessidade de tolerâncias nos furos e pela variação em diâmetro de parafusos comerciais. A habilidade dos quatro parafusos em distribuir as cargas em cisalhamento direto também é comprometida pelas tolerâncias. Na melhor das hipóteses, dois parafusos irão provavelmente tomar toda a carga de cisalhamento com os outros dois nem sequer contatando os lados correspondentes dos seus furos em ambas as peças, para que assim possam compartilhar a carga.

Assim, qual é a solução deste problema? Um projeto melhor é mostrado na Figura 15-40, que adiciona dois pinos passantes de aço endurecido ao padrão de quatro parafusos. Mais pinos passantes poderiam ser adicionados, mas dois é o número mínimo requerido para suportar um momento naquele plano e geralmente são suficientes. Um breve estudo a respeito da aplicação apropriada de pinos passantes se faz necessário neste momento.

Pinos passantes

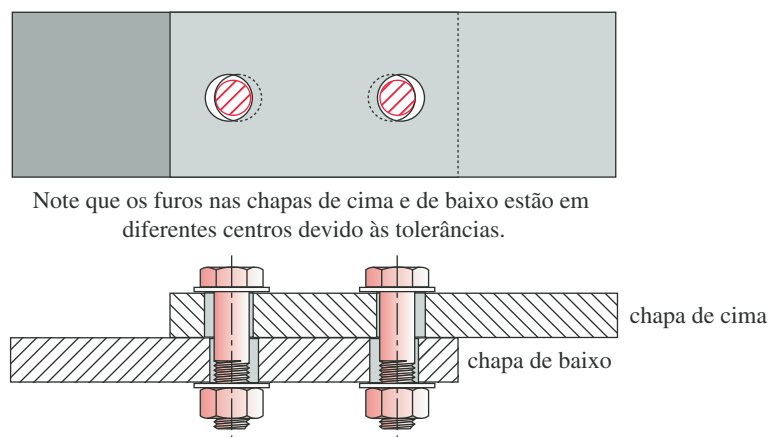
Pinos padronizados retos* são produzidos com pequenas tolerâncias (tipicamente ± 0,0001 in de variação no diâmetro), são endurecidos e retificados para se chegar a um acabamento fino e são realmente redondos. Estão disponíveis em aço de baixo carbono, aço resistente à corrosão (cromo), latão e aços-liga endurecidos até 40-48 HRC, e devem ser comprados no comprimento requerido. Eles são rela-

Note que os furos nas chapas de cima e de baixo estão em diferentes centros devido às tolerâncias.

FIGURA 15-39

É necessária uma folga em furos de fixadores para acomodar tolerâncias de fabricação.

* Padrão ANSI B18.8.2-1978 (R1989), American National Standards Institute, New York, 1989.

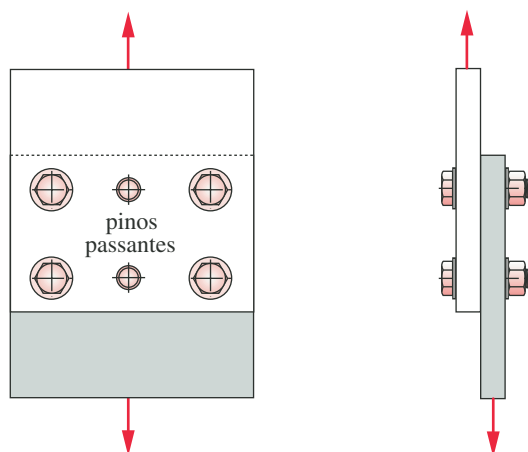



FIGURA 15-40

Uma junta parafusada com pinos passantes sob carregamento de cisalhamento.

tivamente baratos. Pinos passantes de rosca também estão disponíveis. Outras variedades de pinos, incluindo com ranhuras, com protuberâncias e pinos de molas de torção, estão disponíveis e não requerem furos de tolerância tão estreita para ajuste por pressão. Limitaremos nossa discussão a pinos passantes sólidos e retos.

Os pinos passantes são geralmente ajustados por pressão a uma parte (parte de "fundo") e construídos para constituir um ajuste próximo do escorregamento na outra parte (a parte de "topo"). Embora furos rosqueados ou de folga para parafusos sem porca, ou com porca, sejam usinados nas partes separadamente antes da montagem, os furos de pinos passantes não são furados até que a montagem tenha sido parafusada e alinhada à configuração adequada. Então, furos pilotos para pinos passantes, menores que o diâmetro dos pinos, são furados através das partes sujeitadas, nas localizações especificadas. Em alguns casos, a parte superior pode já ter furos piloto feitos, e será utilizada como um guia para que se façam os furos na parte inferior, quando montada.

Uma vez que furos pilotos (de concentricidade exata) tenham sido feitos em ambas as partes, eles podem ser alargados na "boca" para chegar ao diâmetro apropriado para um ajuste por pressão com o pino, enquanto ainda sujeitados. A montagem é então desfeita e os furos pilotos na parte do "topo" são alargados ligeiramente para proporcionar um ajuste com deslizamento do pino. O alargamento irá seguir o furo, mantendo de forma precisa o seu centro. Os pinos passantes são, então, pressionados à parte inferior, e a parte superior é cuidadosamente ajustada através dos pinos salientes. Os sujeitadores de parafuso são repostos a seguir e o torque é aplicado até o valor adequado de pré-carga.

Temos então uma montagem que é **relocalizável de maneira precisa** quando desfeita e remontada, onde temos **essencialmente zero folga radial** entre alguns pinos endurecidos, os quais podem, se necessário, resistir a cargas de cisalhamento de uma maneira compartida. O carregamento excêntrico não é um problema, já que dois pinos passantes podem resistir momentos no plano de cisalhamento. Sem os pinos (ou suficiente quantidade de pré-carga para gerar atrito entre as placas), momentos aplicados nos parafusos irão inclinar os parafusos nos seus furos de folga, permitindo movimento relativo entre as placas de topo e base.

Centroide de grupos de fixadores

Quando um grupo de fixadores é arranjado em um padrão geométrico, a localização do centroide de áreas dos fixadores é necessária para que se possa fazer uma

análise de forças. Com relação a qualquer sistema de coordenadas conveniente, as coordenadas do centroide são

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{1}^{n} A_i x_i}{\sum_{1}^{n} A_i}, \qquad \tilde{y} = \frac{\sum_{1}^{n} A_i y_i}{\sum_{1}^{n} A_i} \tag{15.24}$$

onde n é o número de sujeitadores, i representa um fixador em particular, A_i as áreas de seção transversal dos fixadores e x_i, y_i as coordenadas dos fixadores no sistema de coordenadas selecionado.

Determinação de cargas de cisalhamento em fixadores

A Figura 15-41*a* mostra uma junta de cisalhamento com uma carga excêntrica aplicada. Quatro parafusos e quatro pinos passantes são utilizados para conectar as partes. Pressupomos que os quatro pinos irão tomar toda a carga de cisalhamento e compartir a carga igualmente. A carga excêntrica pode ser trocada por uma combinação de carga P, agente através do centroide do padrão de pinos, e um momento M com relação ao centroide, como mostrado na Figura 15-41*b*. A força através do centroide gerará forças reativas iguais e opostas F_1 em cada pino. Adicionalmente, existirá uma segunda força F_2 em cada pino, agindo perpendicularmente ao raio do centroide ao pino, devido ao momento M.

A magnitude da componente de força F_1 em cada pino devida à força P agente ao longo do centroide será

$$\left|F_{1_i}\right| = \frac{P}{n} \tag{15.25a}$$

onde n é o número de pinos.

Para determinar quanto de força cada pino sente devido ao momento M, pressupomos que uma parte possa rodar ligeiramente em torno do centroide com relação à outra parte. O deslocamento em cada furo será proporcional ao seu raio, medido a partir do centroide. A deformação desenvolvida no pino será proporcional àquele deslocamento. As tensões são proporcionais às deformações na região elástica, e a força é proporcional à tensão para a área de cisalhamento constante. A magnitude da componente de força sentida por qualquer pino e devida ao momento M é:

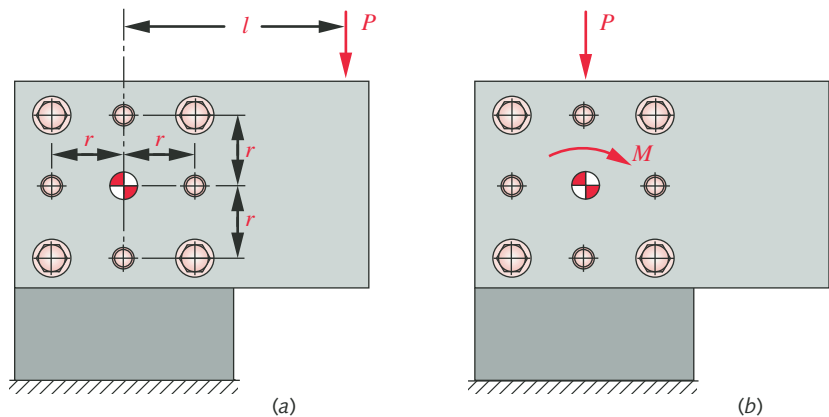



FIGURA 15-41

Uma junta com parafuso e pinos passantes carregada excentricamente em cisalhamento.

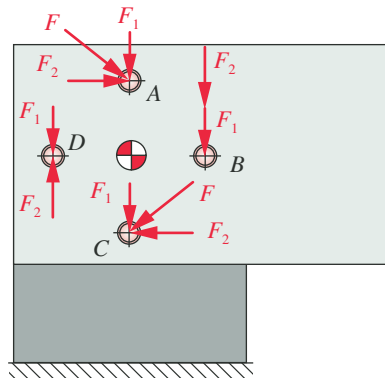



FIGURA 15-42

Forças nos pinos de uma união carregada excentricamente em cisalhamento.

$$\left|F_{2_i}\right| = \frac{Mr_i}{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} = \frac{Plr_i}{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} \tag{15.25b}$$

A força total F_i em cada pino é, então uma soma vetorial de duas componentes F_{1i} e F_{2i} para esse pino, como mostrado na Figura 15-42. A força total é máxima no pino B no caso mostrado.

A tensão no pino é encontrada a partir da Equação 15.8*c* para tensão de cisalhamento direta. A resistência ao escoamento por cisalhamento pode ser estimada a partir da relação incluída na Equação 5.9*b*, repetida aqui:

$$S_{ys} = 0{,}577\,S_y \tag{5.9b}$$

A resistência ao escoamento mínima S_{ys} para diversos materiais utilizados na construção de pinos passantes pode ser encontrada na Tabela 15-12. Os dados se referem a pinos de 0,5 in de diâmetro ou menos. É importante lembrar da Seção 14.3 que fios de pequeno diâmetro repuxados possuem alta resistência devido ao trabalho a frio (encruamento). Esses valores correspondem essencialmente a resistências de prova de acordo com o Padrão ANSI.* Pinos construídos de acordo com esse padrão terão pelo menos as resistências indicadas quando carregados em cisalhamento.

Tabela 15-12
Mínima resistência de cisalhamento para pinos passantes Fonte: Drive-Lok, Inc., Sycamore, Ill

Material	Sys (kpsi)
Aço baixo carbono	50
Aço-liga 40-48 HRC	117
Aço com resistência à corrosão	83
Latão	40

EXEMPLO 15-6

Fixadores em cisalhamento excêntrico

Problema **Determine o tamanho dos pinos passantes no suporte da Figura 15-41.**

Dados **A força estática $P = 1200$ lbf é aplicada a $l = 5$ in. O raio de posição dos pinos passantes é $r = 1{,}5$ in.**

Hipóteses **Todos os pinos compartem a carga igualmente. Use aço-liga de dureza 40-48 HRC para o material dos pinos.**

Solução **Ver as Figuras 15-41 e 15-42.**

1 Calcule o momento da força aplicada.

$$M = Pl = 1200(5) = 6000 \text{ lb-in} \tag{a}$$

* Padrão ANSI B18.8.2-1995, American National Standards Institute, New York, 1995.

2 Calcule a magnitude da força resultante desse momento em cada pino.

$$F_M = \frac{M}{r} = \frac{6000}{4(1{,}5)} = 1000 \text{ lb} \qquad (b)$$

3 Determine a quantidade de força direta P sentida em cada pino.

$$F_P = \frac{P}{n} = \frac{1200}{4} = 300 \text{ lb} \qquad (c)$$

4 Baseado no diagrama vetorial da Figura 15-42, o pino B é o que recebe a maior carga e sua força resultante é

$$F_B = F_P + F_M = 300 + 1000 = 1300 \text{ lb} \qquad (d)$$

5 Pressuponha um valor inicial de 0,375 in para o diâmetro do pino e calcule a força de cisalhamento direta no pino B.

$$\tau = \frac{F_B}{A_B} = \frac{1300(4)}{\pi(0{,}375)^2} = 11770 \text{ psi} \qquad (e)$$

6 Encontre a resistência ao escoamento por cisalhamento a partir da Tabela 15-12 e calcule o coeficiente de segurança contra falha por cisalhamento estático.

$$S_{ut} = 146\,780\, d^{-0.1833} = 175\,690 \text{ psi} \qquad (f)$$

7 Os arquivos EX15-06 estão incluídos no CD-ROM.

15.11 ESTUDO DE CASO

Dimensionamento de parafusos de cabeça para um compressor de ar

O projeto preliminar deste dispositivo é mostrado na Figura 9-1, repetida aqui. O cilindro e a cabeça são de alumínio fundido. A cabeça é fixada ao bloco do cilindro por meio de alguns parafusos de cabeça que são inseridos em furos rosqueados arranjados em um círculo de parafusos. A pressão gerada no cilindro cria uma função força-tempo na cabeça, como mostrado na Figura 9-2, repetida aqui.

ESTUDO DE CASO 8D

Projeto de parafusos de cabeça para um compressor de ar

Problema — **Projete um conjunto de parafusos para unir a cabeça ao cilindro na Figura 9-1 baseado nas cargas definidas no Estudo de Caso 8A.**

Dados — **A abertura do compressor tem um diâmetro de 3,125 in. A força dinâmica agente na cabeça varia entre 0 e 1000 lbf a cada ciclo a partir da pressão de 130 psi do cilindro. Uma gaxeta de 0,06 in de espessura feita de cobre asbesto, não confinada cobre inteiramente a interface cabeça-cilindro do compressor. A espessura de cabeça nos pontos de junção (excluindo as aletas de refrigeração) é de 0,4 in.**

Hipóteses — **Vida infinita. Utilize parafusos de cabeça hexagonal padronizados, sem arruelas. A temperatura de operação é menor que 350°F. Use uma confiabilidade de 99,9%.**

Solução — **Ver as Figuras 9-1 e 9-2.**

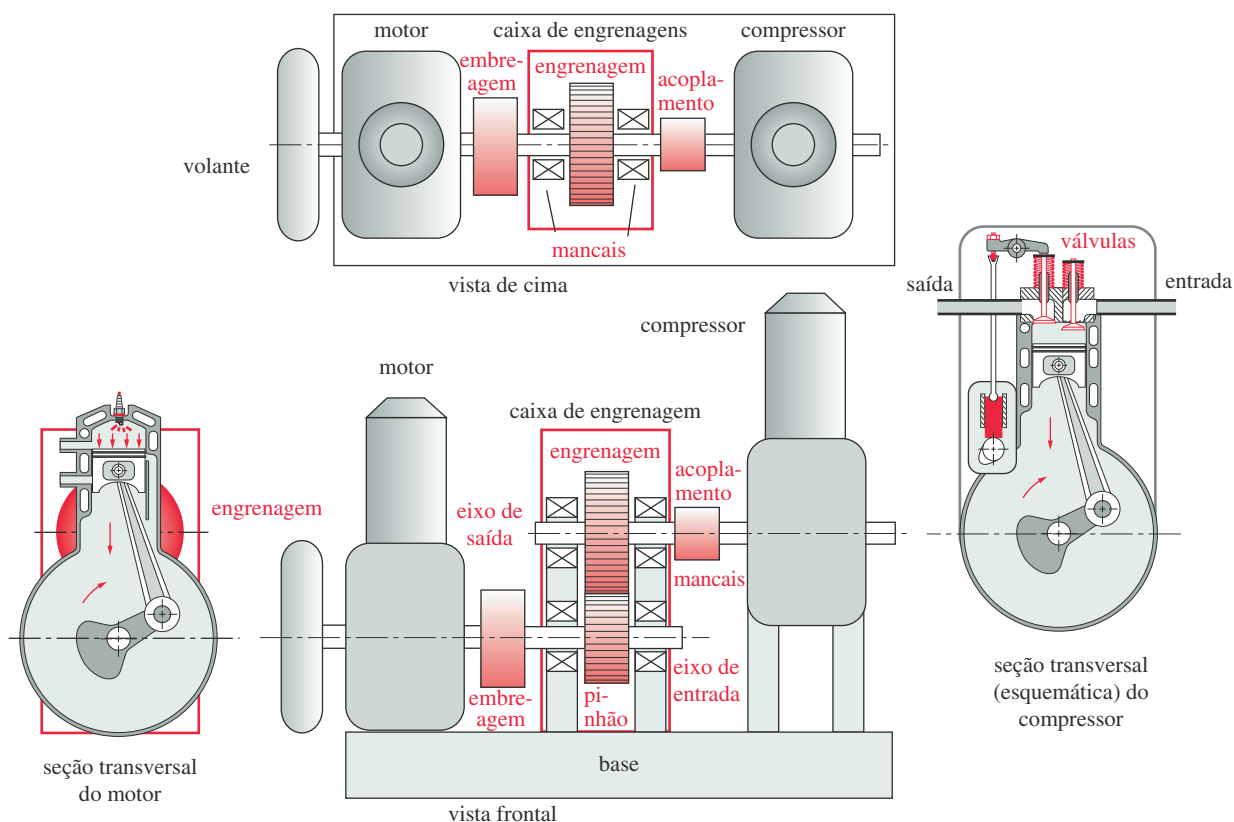



FIGURA 9-1 Repetida

Desenho esquemático preliminar de compressor de ar portátil movido por motor à gasolina, caixa de engrenagens, acoplamentos, eixos e mancais.

1 Escolha um diâmetro inicial *d* para os fusos de 0,25 in. Utilize roscas UNC para evitar problemas de corte de roscas no cilindro de alumínio fundido. O parafuso é, então, um 5/16-18 UNC-2A com roscas laminadas para resistir à fadiga.

2 Escolha um círculo de parafusos e diâmetro externo baseado na abertura de cilindro e a regra prática de pelo menos 1,5*d* até 2*d* como distância entre qualquer parafuso e borda. Utilizaremos 2*d* porque necessitamos prover alguma área para garantir hermeticidade contra a pressão do cilindro.

$$
\begin{aligned}
d_{bc} &= 3{,}125 + 2(2)(0{,}313) = 4{,}375 \text{ in} \\
d_o &= 4{,}125 + 2(2)(0{,}313) = 5{,}625 \text{ in}
\end{aligned}
\qquad (a)
$$

3 Para chegar aos 6 diâmetros de espaçamento recomendado entre parafusos, necessitaremos cerca de 8 parafusos igualmente espaçados ao redor do círculo de parafusos. Calcule o espaçamento entre parafusos em unidades de diâmetros de parafuso.

$$
\Delta b = \frac{\pi D_p}{n_b d} = \frac{\pi(4{,}375)}{8(0{,}313)} = 5{,}5 \text{ diâmetros de parafuso} \qquad (b)
$$

Isso é menos que o máximo de 6 diâmetros de parafuso, portanto é aceitável. Mais adiante calcularemos a pressão na gaxeta para verificar a possibilidade de vazamentos.

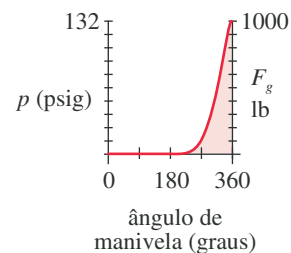



FIGURA 8-2 Repetida

Pressão e força dentro do cilindro durante um ciclo.

4 Suponhamos um comprimento de 1,25 in para o parafuso. A espessura de cabeça de 0,40 in nas posições de furos de parafuso adicionada aos 0,10 in de espessura da gaxeta resulta em 0,75 in de penetração de rosca no furo rosqueado do cilindro. Esse valor é 2× o diâmetro do parafuso (10 roscas), que é o comprimento mínimo recomendado para parafusos de aço em roscas de alumínio. Para o sistema americano, em parafusos de até 6 in, o comprimento da rosca é $2d + 0{,}25 =$ 0,875 in do comprimento do parafuso[2], o que permite a penetração desejada. O comprimento inicial para o cálculo da rigidez deve ser de 1,25 in, uma vez que o parafuso inteiro está engajado.

5 Tente um parafuso de grau SAE 7, pré-carregado a 70% de sua resistência de prova. A Tabela 15-6 mostra que a resistência de prova deste parafuso é de 105 kpsi. A área sob tração obtida pela Equação 15-1 é 0,052431 in^2. A pré-carga requerida é então

$$F_i = 0{,}7 S_p A_t = 0{,}7(105000)(0{,}052431) = 3853{,}66 \text{ lb} \qquad (c)$$

6 Encontre a razão de aspecto de junta e a chapa para a razão do módulo do parafuso das Equações 15.18*a* e *b*:

$$j = \frac{d}{l} = \frac{0{,}313}{1{,}25} = 0{,}25$$
$$r = \frac{E_{material}}{E_{parafuso}} = \frac{10{,}4E6}{30E6} = 0{,}347 \qquad (d)$$

7 Uma vez que esta junta possui o mesmo material (alumínio) em toda a sua superfície, a equação 15.19 é o que necessitamos para calcular a constante C_{ng} da junta para o metal sem a gaxeta. Os parâmetros necessários para a equação são encontrados por interpolação para $j = 0{,}25$ na Tabela 15-8. Elas são: $p_0 = 0{,}653$, $p_1 = -1{,}207$, $p_2 = 1{,}103$ e $p_3 = -0{,}383$.

$$C_{ng} = p_3 r^3 + p_2 r^2 + p_1 r + p_0$$
$$= -0{,}383(0{,}347)^3 + 1{,}103(0{,}347)^2 - 1{,}207(0{,}347) + 0{,}653 = 0{,}351 \qquad (e)$$

8 Nós podemos aproximar a rigidez do parafuso $k_{b'}$ com a Equação 15.17 e então estimar a rigidez de material k_m sem gaxeta usando a Equação 15.13*c*, dado, $k_{b'}$ e C_{ng}.

comprimento da rosca: $l_{roscca} = 2d + 0{,}25 = 2(0{,}313) + 0{,}25 = 0{,}875$ in

comprimento da haste: $l_r = l_{parafuso} - l_{rosca} = 1{,}25 - 0{,}875 = 0{,}375$ in

comprimento da rosca engatada: $l_e = l - l_r = 1{,}25 - 0{,}375 = 0{,}875$ in

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b$$

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{0{,}313}{1{,}25}\right)^{-1} \frac{0{,}052(0{,}077)}{0{,}077(0{,}875) + 0{,}052(0{,}375)} 30E6 = 1{,}112E6 \text{ lb/in}$$

$$C_{ng} = \frac{k_{b'}}{k_{m_1} + k_{b'}} \quad \Rightarrow \quad k_{m_1} = k_{b'} \frac{1 - C_{ng}}{C_{ng}} = 1{,}112E6\left(\frac{1 - 0{,}351}{0{,}351}\right) = 2{,}060E6 \text{ lb/in} \qquad (f)$$

9 Agora considere a gaxeta. A área da gaxeta não confinada sob a força de sujeição pode ser suposta como aquela "relativa a um parafuso" de área total sujeitada, que se estende do diâmetro externo da cabeça de cilindro até a abertura:

$$A_{total} = \frac{\pi}{4}\left(D_o^2 - D_1^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(5{,}625^2 - 3{,}125^2\right) \cong 17{,}18 \text{ in}^2 \qquad (g)$$

Dividindo pelo número de parafusos e subtraindo a área do furo de parafuso, temos a área sujeitada de gaxeta ao redor de cada parafuso expressa como:

$$A_g = \frac{A_{total}}{n_b} - \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{17{,}18}{8} - \frac{\pi}{4}0{,}313^2 = 2{,}071 \text{ in}^2 \qquad (h)$$

10 A rigidez desse pedaço de gaxeta é, então,

$$k_{m_2} = \frac{A_g E_g}{l_g} = \frac{2{,}071(13{,}5E6)}{0{,}06} \cong 4{,}659E8 \text{ lb/in} \qquad (i)$$

O módulo de elasticidade do material de gaxeta é encontrado na Tabela 15-10.

11 A rigidez do material sujeitado e da gaxeta combinam de acordo com a Equação 14.2*b*. A rigidez combinada da junta com gaxeta é, então,

$$k_m = \frac{1}{\dfrac{1}{k_{m_1}} + \dfrac{1}{k_{m_2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2{,}060E6} + \dfrac{1}{4{,}659E8}}$$

$$k_m = 2{,}051E6 \text{ lb/in} \qquad (j)$$

Observe que a rigidez combinada neste caso é dominada pelo alumínio porque o cobre asbesto é mais rígido.

12 A constante de junta com gaxeta não confinada é

$$C = \frac{k_b}{k_m + k_b} = \frac{1{,}112E6}{2{,}051E6 + 1{,}112E6} \cong 0{,}352 \qquad (k)$$

e

$$(1 - C) = 0{,}648$$

13 Pressupõe-se que a carga de 1000 lbf seja dividida igualmente entre os 8 parafusos, 125 lbf para cada parafuso. As porções de carga aplicada sentida por cada parafuso e material (Equações 15.13) são:

$$P_b = CP = 0{,}352(125) \cong 43{,}95 \text{ lb}$$

$$P_m = (1 - C)P = 0{,}614(125) \cong 81{,}05 \text{ lb} \qquad (l)$$

14 As cargas de pico resultantes no parafuso e material são

$$F_b = F_i + P_b = 3853{,}66 + 43{,}95 = 3897{,}61 \text{ lb}$$

$$F_m = F_i - P_m = 3853{,}66 - 81{,}05 = 3772{,}61 \text{ lb} \qquad (m)$$

15 As componentes alternada e média de força no parafuso são

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2} = \frac{3897{,}61 - 3853{,}66}{2} \cong 21{,}98 \text{ lb}$$

$$F_{média} = \frac{F_b + F_i}{2} = \frac{3897{,}61 + 3853{,}66}{2} \cong 3875{,}63 \text{ lb} \qquad (n)$$

16 As tensões nominais média e alternada no parafuso são

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{F_{alt}}{A_t} = \frac{21{,}98}{0{,}052431} \cong 419{,}2 \text{ psi}$$

$$\sigma_{m_{nom}} = \frac{F_{média}}{A_t} = \frac{3875{,}63}{0{,}052431} \cong 73919 \text{ psi} \qquad (o)$$

17 O fator de concentração de tensões à fadiga para uma rosca com este diâmetro é encontrado a partir da Equação 15.15*c*, e o fator de concentração para as componentes médias, K_{fm}, da Equação 6.17:

$$K_f = 5{,}7 + 0{,}6812d = 5{,}7 + 0{,}6812(0{,}313) = 5{,}9$$

$$\text{se } K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| > S_y \text{ então:} \qquad K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|}$$

$$K_f\left|\sigma_{max_{nom}}\right| = K_f\left|\sigma_{a_{nom}} + \sigma_{m_{nom}}\right| = 5{,}9\left|460{,}2 + 73960\right| = 440039 \text{ psi}$$

$$440039 \text{ psi} > S_y = 115000 \text{ psi}$$

$$K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} = \frac{115000 - 5{,}9(460{,}2)}{73960} = 1{,}52 \qquad (p)$$

18 As tensões locais média e alternada no parafuso são

$$\sigma_a = K_f\frac{F_{alt}}{A_t} = 5{,}9\frac{21{,}98}{0{,}052431} \cong 2478 \text{ psi}$$

$$\sigma_m = K_{fm}\frac{F_{média}}{A_t} = 1{,}52\frac{3875{,}63}{0{,}052431} \cong 112522 \text{ psi} \qquad (q)$$

19 As tensões correspondentes à pré-carga inicial e máxima força nos parafusos são

$$\sigma_i = K_{fm}\frac{F_i}{A_t} = 1{,}52\frac{3853{,}66}{0{,}052431} \cong 111883 \text{ psi}$$

$$\sigma_b = K_{fm}\frac{F_b}{A_t} = 1{,}52\frac{3897{,}61}{0{,}052431} = 113160 \text{ psi} \qquad (r)$$

20 O limite de resistência à fadiga para este material é encontrado utilizando os métodos da Seção 6.6:

$$S_{e'} = 0{,}5S_{ut} = 0{,}5(133000) = 66500 \text{ psi} \qquad (s)$$

$$S_e = C_{carreg}\,C_{tamanho}\,C_{superf}\,C_{temp}\,C_{conf}\,S_{e'}$$
$$= 0{,}70(0{,}995)(0{,}739)(1)(0{,}753)(66500) = 25778 \text{ psi} \qquad (t)$$

onde os fatores de redução da resistência são tomados das tabelas e fórmulas na Seção 6.6 para, respectivamente, carga axial, tamanho de parafuso, acabamento por usinagem, temperatura ambiente e 99,9% de confiabilidade.

21 O limite de resistência à fadiga corrigido e a resistência à tração são usados na Equação 15.16 para determinar o coeficiente de segurança relacionado à linha de Goodman.

$$N_f = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_i)}{S_e(\sigma_m - \sigma_i) + S_{ut}\sigma_a}$$
$$= \frac{25778(133000 - 111883)}{25778(112522 - 111883) + 133000(2478)} \cong 1{,}6 \qquad (u)$$

22 A tensão estática no parafuso após o escoamento local inicial e o coeficiente de segurança contra o escoamento são:

$$\sigma_s = \frac{F_{bolt}}{A_t} = \frac{3\,897{,}61}{0{,}052\,431} = 74\,338 \text{ psi} \qquad N_y = \frac{S_y}{\sigma_b} = \frac{115\,000}{74\,338} \cong 1{,}5 \qquad (v)$$

23 O coeficiente de segurança contra separação da junta é determinado a partir da Equação 15.14*d*.

$$N_{separação} = \frac{F_i}{P(1-C)} = \frac{3853,66}{125(1-0,352)} \cong 47 \qquad (w)$$

24 A junta apresentará vazamento, a menos que as forças de sujeição sejam suficientes para criar mais pressão na gaxeta que aquela que existe no cilindro. O valor mínimo da pressão de sujeição pode ser determinado a partir da área total da junta de gaxeta e o mínimo de força de sujeição F_m.

$$p_{média} = \frac{F_m}{A_j} = \frac{4F_m}{\pi\left(D_o^2 - D_i^2\right) - n_b A_b} = \frac{4(3772,6)}{\pi\left(5,625^2 - 3,125^2\right) - 8(0,077)} \cong 228 \text{ psi}$$

$$N_{vaz} = \frac{p_{média}}{p_{cil}} = \frac{228}{130} \cong 1,7 \qquad (z)$$

Essa razão da pressão de sujeição contra a pressão no cilindro torna o espaçamento dos parafusos aceitável.

25 O torque requerido para obter a pré-carga de 3853,66 lbf, encontrada no passo 5, é:

$$T_i \cong 0,21 F_i d = 0,21(3853,66)(0,313) \cong 253 \text{ lb-in} \qquad (y)$$

26 Esses coeficientes de segurança são aceitáveis. Este projeto utiliza 8 parafusos 1/4-20 UNC-2A, de grau SAE 7 com cabeça hexagonal, de 1,25 in de comprimento, pré-carregados a 70% da resistência de carga e igualmente espaçados em um círculo de parafusos de diâmetro 4,375 in. Este projeto aumenta o coeficiente de segurança contra vazamento de 1,7, um coeficiente de segurança à fadiga de 1,6 e pode suportar uma sobrepressão 47 vezes a pressão de operação antes que a separação da junta possa ocorrer. Esses fatores de segurança são aceitáveis. Os arquivos CASE8D estão no CD-ROM.

15.12 RESUMO

Este capítulo lidou apenas com uma amostra de fixadores disponíveis comercialmente. Uma coleção extremamente variada de fixadores é produzida pelos vendedores. O fixador "adequado" pode ser encontrado para cada aplicação; se não (e se a quantidade necessária for suficientemente elevada), alguns vendedores fabricarão um para você. Existem vários padrões que definem configurações, tamanhos, resistências e tolerâncias de fixadores. Fixadores são construídos de acordo a um ou outro desses padrões, o que proporciona grande intercambialidade. Infelizmente, roscas métrica e de padrão inglês não são intercambiáveis e ambas são de grande uso nos Estados Unidos.

Os parafusos de potência são dispositivos de rosca utilizados principalmente para mover cargas ou posicionar objetos de forma precisa. Eles possuem pequena eficiência devido às grandes perdas por atrito, a menos que sejam utilizados fusos de esferas, que diminuem o atrito consideravelmente. Contudo, parafusos de potência de baixo atrito perdem uma de suas vantagens, que é a de autotravamento ou a capacidade de manter a carga em posição sem qualquer uso de energia (como em um macaco). Parafusos de movimentos retroacionados são o oposto de parafusos autotravantes e podem ser utilizados para converter movimento linear em rotatório.

Fixadores de rosca (parafusos de porca, sem porca, porcas) são meios padronizados de fixação de elementos de máquinas. Esses fixadores são capazes de suportar cargas bastante grandes, especialmente se forem pré-carregados. O pré-carregamento aperta o fixador a um nível mais alto de tração axial antes que quaisquer cargas de trabalho sejam aplicadas. A tração no sujeitador causa compressão nas partes sujeitadas. Essa compressão tem diversos efeitos salutares. Ela mantém a junta unida de forma apertada, e portanto é capaz de conter pressão de fluidos e resistir a cargas de cisalhamento com seu atrito interfacial. As forças compressivas no material sujeitado também servem para proteger o sujeitador de cargas variáveis que causam fadiga absorvendo a maior parte das oscilações da carga aplicada. As altas forças de sujeição também evitam o afrouxamento causado por vibração do fixador, criando forças de atrito suficientemente altas nas roscas.

Fixadores rosqueados são também capazes de resistir a cargas de cisalhamento e são utilizados extensivamente dessa forma em aplicações estruturais. No projeto de máquinas, é mais comum confiar a pinos passantes de ajuste estreito a tarefa de resistir a cargas de cisalhamento e deixar aos fixadores rosqueados a tarefa de prover a tração que mantém as partes juntas. O leitor interessado deve se referir às publicações listadas na bibliografia deste capítulo para mais informações relativas ao mundo diverso e fascinante dos fixadores.

Equações importantes utilizadas neste capítulo

Veja as seções referidas para informação pertinente ao uso adequado destas equações.

Torque requerido para elevar carga em um parafuso de potência (Seção 15.2):

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p + L\cos\alpha\right)}{\left(\pi d_p \cos\alpha - \mu L\right)} + \mu_c P \frac{d_c}{2} \qquad (15.5a)$$

Autotravamento de um parafuso de potência ocorrerá se (Seção 15.2):

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p}\cos\alpha \qquad \text{ou} \qquad \mu \geq \text{tg}\,\lambda\cos\alpha \qquad (15.6a)$$

Eficiência de um parafuso de potência (Seção 15.2):

$$e = \frac{W_{saída}}{W_{ent}} = \frac{PL}{2\pi T} \qquad (15.7c)$$

Constante de mola de um fixador de rosca (Seção 15.7):

$$\frac{1}{k_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l - l_t}{A_b E_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l_s}{A_b E_b} \quad \therefore \quad k_b = \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b \qquad (15.11a)$$

$$k_{b'} = \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} k_b \qquad (15.17alt)$$

Constante de mola do material sujeitado se A_m é conhecido (Seção 15.7):

$$k_m = \frac{A_m E_m}{l} \qquad (15.11c)$$

Carga tomada pelo material pré-carregado (Seção 15.7):

$$P_m = \frac{k_m}{k_b + k_m} P = \left(1 - C\right)P \qquad (15.13d)$$

Carga absorvida por um parafuso pré-carregado e constante de mola *C* (Seção 15.7):

$$P_b = \frac{k_b}{k_m + k_b} P$$

ou (15.13*c*)

$$P_b = CP \qquad \text{onde} \quad C = \frac{k_b}{k_m + k_b}$$

Carga mínima no material sujeitado e carga máxima no parafuso (Seção 15.7):

$$F_m = F_i - (1 - C)P \tag{15.14a}$$

$$F_b = F_i + CP \tag{15.14b}$$

Carga necessária para separar uma junta pré-carregada (Seção 15.7):

$$P_0 = \frac{F_i}{(1 - C)} \tag{15.14c}$$

Cargas média e alternada sentidas por um parafuso pré-carregado (Seção 15.7):

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2}, \qquad F_{média} = \frac{F_b + F_i}{2} \tag{15.15a}$$

Tensões média e alternada em um parafuso pré-carregado (Seção 15.7):

$$\sigma_a = K_f \frac{F_{alt}}{A_t}, \qquad \sigma_m = K_{fm} \frac{F_{média}}{A_t} \tag{15.15b}$$

Fator de concentração de tensão em fadiga em roscas:

$$K_f = 5{,}7 + 0{,}6812d \qquad d \text{ em polegadas}$$

ou (15.15*c*)

$$K_f = 5{,}7 + 0{,}02682d \qquad d \text{ em mm}$$

Tensão de pré-carga em um parafuso (Seção 15.7):

$$\sigma_i = K_{fm} \frac{F_i}{A_t} \tag{15.15d}$$

Tensão devida à pré-carga em um parafuso (Seção 15.7):

$$N_f = \frac{S_e (S_{ut} - \sigma_i)}{S_e (\sigma_m - \sigma_i) + S_{ut} \sigma_a} \tag{15.16}$$

Torque aproximado requerido para pré-carregar um parafuso (Seção 15.9):

$$T_i \cong 0{,}21 F_i d \tag{15.23d}$$

Centroide de um grupo de fixadores (Seção 15.10):

$$\tilde{x} = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i}, \qquad \tilde{y} = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \tag{15.24}$$

Forças em fixadores carregados excentricamente em cisalhamento (Seção 15.10):

$$\left| F_{1_i} \right| = \frac{P}{n} \tag{15.25a}$$

$$\left| F_{2_i} \right| = \frac{M r_i}{\sum_{j=1}^n r_j^2} = \frac{P l r_i}{\sum_{j=1}^n r_j^2} \tag{15.25b}$$

15.13 REFERÊNCIAS

1 *Product Engineering*, vol. 41, p. 9, Apr. 13, 1970.

2 **H. L. Horton**, ed. *Machinery's Handbook*, 21st ed. Industrial Press, Inc.: New York. p. 1256, 1974.

3 **ANSI/ASME Standard B1.1-1989**, American National Standards Institute, New York, 1989.

4 **ANSI/ASME Standard B1.13-1983 (R1989)**, American National Standards Institute, New York, 1989.

5 **T. H. Lambert**, Effects of Variations in the Screw Thread Coefficient of Friction on Clamping Force of Bolted Connections, *J. Mech Eng. Sci.*, **4**: p. 401, 1962.

6 **R. E. Peterson**, *Stress-concentration factors*. John Wiley & Sons: New York, p. 253, 1974.

7 **H. H. Gould and B. B. Mikic**, Areas of Contact and Pressure Distribution in Bolted Joints, *Trans ASME, J. Eng. for Industry*, **94**: pp. 864-869, 1972.

8 **N. Nabil**, Determination of Joint Stiffness in Bolted Connections, *Trans. ASME, J. Eng. for Industry*, **98**: pp. 858-861, 1976.

9 **Y. Ito, J. Toyoda and S. Nagata**, Interface Pressure Distribution in a Bolt-Flange Assembly, *Trans. ASME, J. Mech. Design*, **101**: pp. 330-337, 1979.

10 **J. F. Macklin and J. B. Raymond**, *Determination of Joint Stiffness in Bolted Connections using FEA*, Major Qualifying Project, Worcester Polytechnic Institute, Worcester Mass., Dec. 31, 1994.

11 **B. Houle**, *An Axisymmetric FEA Model Using Gap Elements to Determine Joint Stiffness*, Major Qualifying Project, Worcester Polytechnic Institute, Worcester Mass., Dec. 31, 1995.

12 **J. E. Shigley and C. H. Mischke**, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed. McGraw-Hill: New York, p. 354, 1989.

13 **J. Wileman, M. Choudhury, and I. Green**, "Computation of Member Stiffness in Bolted Connections," *Trans. ASME, J. Mech. Design*, **113**, pp. 432-437, 1991.

14 **T. F. Lehnhoff, K. I. Ko, and M. L. McKay**, "Member Stiffness and Contact Pressure Distribution of Bolted Joints," *Trans. ASME, J. Mech. Design*, **116**, pp. 550-557, 1994.

15 **R. E. Cornwell**, "Computation of Load Factors in Bolted Connections," *Proc. IMechE, J. Mech. Eng.* Sci., **223c**, pp. 795-808, 2009.

16 **A. R. Kephart**, "Fatigue Acceptance Test Limit Criterion for Larger Diameter Rolled Thread Fasteners," *ASTM Workshop on Fatigue and Fracture of Fasteners*, May 6, 1997, St. Louis, MO.

17 **C. Crispell**, "New Data on Fastener Fatigue," *Machine Design*, pp. 71-74, April 22, 1982.

15.14 BIBLIOGRAFIA

American Institute of Steel Construction Handbook. AISI: New York.

Helpful Hints for Fastener Design and Application. Russell, Burdsall & Ward Corp.: Mentor, Ohio, 1976.

SAE Handbook. Soc. of Automotive Engineers: Warrendale PA., 1982.

"Fastening and Joining Reference Issue," *Machine Design*, vol. 55, Nov. 17, 1983.

J. H. Bickford, *An Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints*, 2nd ed. Marcel Dekker, New York, 1990.

H. L. Horton, ed., *Machinery's Handbook*, 21st ed. Industrial Press: New York, 1974.

R. O. Parmley, ed. *Standard Handbook of Fastening and Joining*. McGraw--Hill: New York. 1977.

H. A. Rothbart, ed., *Mechanical Design and Systems Handbook*. McGraw--Hill: New York, Sections 20, 21, 26, 1964.

15.15 PROBLEMAS

15-1 Compare as capacidades de carga à tração de um parafuso 5/16-18 UNC à de um parafuso 5/16-24 UNF feitos do mesmo material. Qual é mais forte? Faça a mesma comparação entre um M8 × 1,25 ISO e um M8 × 1 ISO. Compare a resistência de todos esses parafusos à resistência de um parafuso 5/16-14 de rosca Acme.

*15-2 Um parafuso 3/4-6 Acme é utilizado para levantar uma carga de 2 kN. O diâmetro médio do colar é 4 cm. Encontre o torque necessário para levantar e abaixar a carga utilizando uma arruela de rolamento de esferas axial. Quais são as eficiências? É autotravante?

15-3 Um parafuso 1 3/8-4 Acme é utilizado para erguer uma carga de 1 tonf. O diâmetro de colar médio é de 2 in. Determine o torque para levantar e abaixar a carga utilizando arruelas de rolamento de esferas axiais. Quais são as eficiências? É autotravante?

*†***15-4** O engate de carro a reboque (trailer) da Figura 1-1 possui as cargas aplicadas mostradas na Figura P15-1. O peso da língua de 100 kg atua na vertical para baixo e a força de reboque de 4095 N atua horizontalmente. Utilizando as dimensões do suporte de esfera da Figura 1-5, desenhe um diagrama de corpo livre do suporte e encontre as cargas de tração e cisalhamento aplicadas aos dois parafusos que fixam o suporte à viga de canal da Figura 1-1. Dimensione e especifique os parafusos, sua pré-carga e o torque de aperto para um coeficiente de segurança de pelo menos 1,7.

15-5 Para o engate do carro a reboque do Problema 3-4, determine a força horizontal que aparecerá na esfera resultante do acelerar de um carro a reboque de 2000 kg a 60 m/s em 20 segundos. Pressuponha uma aceleração constante. Dimensione e especifique os parafusos, sua pré-carga e o torque de aperto para um coeficiente de segurança de pelo menos 1,7.‡

****15-6*** Para o engate do carro a reboque do Problema 3-4, determine a força horizontal que aparecerá na esfera por causa do impacto entre a esfera e a língua do *trailer* de 2000 kg se o *trailer* deflete 1 mm no impacto. O trator pesa 1000 kg. A velocidade no impacto é de 0,3 m/s. Dimensione e especifique parafusos, pré-carga e torque de aperto para um fator de segurança de pelo menos 1,7.‡

*15-7 Um parafuso de classe 7, de diâmetro 1/2 in UNC, com roscas laminadas é pré--carregado a 80% da sua resistência de prova quando sujeito uma junta de 3 in de espessura, em sanduíche, feita de aço sólido. Encontre os coeficientes de segurança contra escoamento estático e separação da junta quando uma carga externa estática de 1000 lbf é aplicada.‡

15-8 Um parafuso M14 × 2, de classe 8,8 com roscas laminadas é pré-carregado a 75% da sua resistência de prova quando sujeito uma junta de 3 cm de espessura em sanduíche constituída de alumínio sólido. Determine os fatores de segurança contra escoamento estático e separação de junta quando uma carga externa de 5 kN é aplicada.‡

*15-9 Um parafuso de diâmetro 7/16 in UNC, classe 7 com roscas laminadas é pré--carregado a 70% da sua resistência de prova quando sujeitando uma junta de 2,75 in de espessura em sanduíche constituída de aço sólido. Determine os coeficientes de segurança contra falha por fadiga, escoamento e separação de junta quando uma carga variada externa de 5000 lbf (valor de pico) é aplicada.‡

Tabela P15-0
Matriz de problemas/tópicos

15.2 Parafusos de potência
15-1, 15-2, 15-3, 15-37, 15-38

15.3 Tensões nas roscas
15-15, *15-16*, *15-39*, 15-47

15.6 Resistências de parafusos
15-28, 15-29, 15-40, 15-41, 15-48

15.8 Rigidez de juntas

Apenas material
15-17, 15-18, 15-19, 15-31, 15-32, 15-33, 15-42, 15-43

Sem gaxeta – carga estática
15-7, 15-8, *15-23*, 15-30, 15-49

Sem gaxeta – carga dinâmica
15-9, 15-10, ***15-24***, ***15-25***, ***15-27***

Gaxeta não confinada
15-26, 15-42, 15-43, 15-44, 15-45, 15-46

Materiais diferentes em junta
15-42, 15-43, 15-44, 15-45, 15-46

15.9 Controle de pré-carga

Somente torque
15-11, 15-12, 15-13, 15-14

Sem gaxeta – carga estática
15-4, **15-5**, **15-6**, 15-50

Sem gaxeta – carga dinâmica
15-22, *15-51*, *15-52*

Gaxeta não confinada
15-20, 15-21

15.10 Fixadores em cisalhamento
15-34, 15-35, 15-36

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

† Problemas com números em *itálico* são problemas de projeto. Problemas com números em **negrito** são extensões de problemas similares com o mesmo número depois do hífen em capítulos anteriores.

‡ Para estes problemas, pressuponha que a porca e a arruela, juntas, possuem a mesma espessura que o diâmetro do parafuso e que existem parafusos disponíveis em incrementos de comprimento de 0,25 in ou 5 mm.

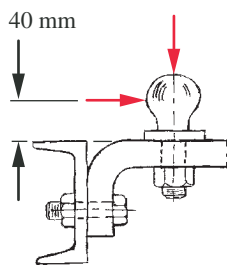



FIGURA P15-1

Problemas 15-4 a 15-6.

15-10 Um parafuso M12 × 1,25, de classe 9,8 com roscas laminadas é pré-carregado a 85% da sua resistência de prova quando sujeito a uma junta de 5 cm de espessura em sanduíche feita de alumínio. Determine os coeficientes de segurança contra a falha por fadiga, escoamento e separação de junta quando uma carga externa variada de 20 kN (valor de pico) é aplicada.‡

*15-11 Encontre o torque de aperto requerido pelo parafuso do Problema 15-7.

15-12 Encontre o torque de aperto requerido pelo parafuso do Problema 15-8.

*15-13 Encontre o torque de aperto requerido pelo parafuso do Problema 15-9.

15-14 Encontre o torque de aperto requerido pelo parafuso do Problema 15-10.

15-15 Um fabricante de automóveis gostaria de obter um estudo de viabilidade de um conceito de macaco de parafuso incorporado ao veículo em cada uma das suas extremidades e acionado por motor elétrico que automaticamente eleva as rodas do carro acima do chão para serviço. Supondo um veículo de 2 tonf com uma distribuição 60/40 entre peso diânteiro/traseiro, projete um macaco de parafuso autotravante capaz de levantar o carro por qualquer extremidade. O corpo do macaco será fixado à estrutura do carro e o parafuso deve se estender para baixo de maneira a tocar o chão. Suponha um espaçamento mínimo de 8 in sob o macaco na posição retraída, na condição superior. Ele deve subir o carro em pelo menos 8 in adicionais. Utilize rolamenos axiais de roletes. Determine o tamanho mínimo da rosca para que ofereça segurança com relação à falha por flambagem. Determine o seu torque de levantamento, sua eficiência e potência requeridos para levantá-lo até a altura completa em 45 segundos. Quais são as suas recomendações quanto à viabilidade desta ideia?

15-16 Projete um macaco mecânico manual similar àquele mostrado na Figura 15-4 com capacidade de levantamento de 20 tonf e com um altura de levantamento de 10 cm. Assuma que o operador pode aplicar uma força de 400 N na extremidade da barra de alavanca para rodar tanto o parafuso quanto a porca, conforme o projeto especificar. Projete a barra cilíndrica para falhar em flexão na carga de projeto antes que o parafuso do macaco falhe, de maneira que não se possa levantar uma sobrecarga, e assim fazer o parafuso falhar. Utilize rolamentos axiais de roletes. Procure um coeficiente de segurança de 3 para a falha da rosca ou flambagem de coluna. Declare todas as hipóteses.

*15-17 Determine a constante de mola efetiva dos seguintes sanduíches constituídos de materiais sob compressão. Todos são uniformemente carregados sobre a área de 10 cm^2. O primeiro e o terceiro dos materiais listados possuem cada um 10 mm de espessura, enquanto o do meio possui uma espessura de 1 mm, totalizando, portanto, um sanduíche de 21 mm de espessura.

(a) alumínio, cobre asbesto, aço
(b) aço, cobre, aço
(c) aço, borracha, aço
(d) aço, borracha, alumínio
(e) aço, alumínio, aço

Em cada caso, determine qual material domina o cálculo.

*15-18 Determine a constante efetiva de mola dos seguintes sanduíches de materiais sob compressão. Todos estão uniformemente carregados sob a área de 1,5 in^2. O primeiro e o terceiro material da lista possuem 0,4 in de espessura, enquanto o material do meio possui uma espessura de 0,04 in, totalizando 0,94 in a espessura do sanduíche.

(a) alumínio, cobre-asbesto, aço
(b) aço, cobre, aço
(c) aço, borracha, aço
(d) aço, borracha, alumínio
(e) aço, alumínio, aço

Em cada caso, determine qual material domina o cálculo.

15-19 Um parafuso de aço pré-carregado, similar àquele mostrado na Figura 15-31*a* sujeita duas flanges de espessura total l. Usando os dados apresentados nas linhas da Tabela P15-1, determine a constante de rigidez da junta.‡

---

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Problemas com números em *itálico* são problemas de projeto.

‡ Para estes problemas, pressuponha que a porca e a arruela, juntas, possuem a mesma espessura que o diâmetro do parafuso e que existem parafusos disponíveis em incrementos de comprimento de 0,25 in ou 5 mm.

*15-20 Uma cabeça de compressor de ar de cilindro único vê uma força que varia entre 0 e 18,5 kN em cada ciclo. A cabeça é feita de alumínio de 80 mm de espessura, com gaxeta de teflon não confinada de 1 mm de espessura e o bloco é de alumínio. O comprimento efetivo de sujeição do parafuso é de 120 mm. O diâmetro do pistão é 75 mm e o cilindro possui um diâmetro externo de 140 mm. Especifique um número adequado, classe, pré-carga, torque de aperto e diâmetro do círculo de parafusos da cabeça do cilindro de maneira a obter um coeficiente de segurança mínimo de 1,2 para qualquer modo de falha possível.‡

15-21 Uma cabeça de motor de combustão interna de cilindro único vê forças explosivas que variam entre 0 e 4000 lbf a cada ciclo. A cabeça é feita de ferro fundido de 2,5 in de espessura, a gaxeta, não confinada, de cobre asbestos possui espessura de 0,125 in e o bloco é de ferro fundido. O comprimento efetivo de sujeição proporcionado pelo parafuso é de 3,125 in. O pistão possui 3 in de diâmetro e o cilindro possui diâmetro externo de 5,5 in. Especifique um número adequado, classe, pré-carga, torque de aperto e diâmetro do círculo de parafusos da cabeça do cilindro de maneira a obter um coeficiente de segurança mínimo de 1,2 para qualquer modo de falha possível.‡

†*15-22* A manivela de conexão feita de aço forjado do motor de combustão interna do Problema 15-21 é dividida ao redor do pino de manivelas de 38 mm e sujeitada através de dois parafusos e porcas que mantêm as suas duas metades juntas. A carga total nos parafusos varia entre 0 e 8,5 kN em cada ciclo. Projete esses parafusos para vida infinita. Especifique seus tamanhos, classe e pré-carga.‡

****15-23*** (Ver também o Problema 4-33.) O suporte da Figura P15-2 é fixado à parede por meio de 4 parafusos equidistantes em um círculo de parafusos de 10 cm de diâmetro, sendo arranjados como mostrado. Os materiais da parede e do suporte são os mesmos. O suporte é submetido a uma força estática F, onde F e os outros dados da viga são dados na linha assinalada na Tabela P15-1. Encontre as forças agentes em cada um dos 4 parafusos devido a esse carregamento e escolha um diâmetro adequado de parafuso, comprimento e pré-carga de forma a obter um coeficiente de segurança mínimo de 2 para todos os modos possíveis de falha.‡

****15-24*** (Ver também o Problema 6-33.) O suporte mostrado na Figura P15-2 é fixado à parede por meio de 4 parafusos de cabeça, equidistantes, em um círculo de parafusos de 10 cm de diâmetro e arranjados como mostrado. Os materiais da parede e do suporte são os mesmos. O suporte é sujeito a uma força função do tempo, em forma senoidal, com $F_{max} = F$ e $F_{min} = -F$, onde F e os outros dados da viga são dados na linha assinalada na Tabela P15-1. Encontre as forças agentes em cada um dos 4 parafusos devido a esse carregamento completamente reverso e escolha um diâmetro adequado de parafuso, comprimento e pré-carga de modo a obter um coeficiente de segurança mínimo de 1,5 para qualquer modo possível de falha quando $N = 5E8$ ciclos.‡

****15-25*** (Ver também o Problema 6-34.) O suporte da Figura P15-2 é fixado à parede por meio de 4 parafusos de cabeça equidistantes em um círculo de parafusos de 10 cm de diâmetro arranjados como mostrado. O suporte é submetido a uma força dependente do tempo de forma senoidal com $F_{max} = F$ e $F_{min} = 0$, sendo F e os outros dados da viga dados na linha assinalada na Tabela P15-1. Encontre as forças atuando em cada um dos 4 parafusos devido a esse carregamento variado e escolha um diâmetro adequado para os parafusos, comprimento e pré-carga para obter um coeficiente de segurança mínimo de 1,5 para qualquer modo possível de falha quando $N = 5E8$ ciclos.‡

†***15-26*** (Ver também o Problema 6-42.) Um tanque de aço cilíndrico com extremidades hemisféricas é necessário para manter ar pressurizado a 425 kPa, temperatura ambiente. A pressão varia entre 0 e um máximo. O diâmetro do tanque é de 0,5 m e seu comprimento, 1 m. As extremidades hemisféricas são fixadas por certo número de parafusos passantes por flanges em cada uma das extremidades do tanque. Uma gaxeta comprimida de 0,5 mm de espessura, feita de asbestos e não confinada, é utilizada entre as flanges de aço de 10 mm de espessura. Determine um número adequado, classe, pré-carga e tamanho de parafusos para sujeitar as extremidades do tanque. Especifique o círculo de parafusos e diâmetro externo da flange necessários para evitar vazamento. Um coeficiente de segurança contra

Tabela P15-1
Dados para o Problema 15-19

Fila	Rosca do parafuso	Material do membro	l (mm)
a	m8 × 1	aço	30
b	m8 × 1	alumínio	40
c	m14 × 2	aço	38
d	m14 × 2	alumínio	45
e	m24 × 3	aço	75
f	m24 × 3	alumínio	90

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

† Problemas com números em *itálico* são problemas de projeto. Problemas com números em **negrito** são extensões de problemas similares com o mesmo número depois do hífen em capítulos anteriores.

‡ Para estes problemas, pressuponha que a porca e a arruela, juntas, possuem a mesma espessura que o diâmetro do parafuso e que existem parafusos disponíveis em incrementos de comprimento de 0,25 in ou 5 mm.

Tabela P15-2 Dados para os Problemas 15-23 a 15-25

Use somente os dados relevantes ao problema em questão – comprimentos em mm, forças em N

Linha	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*Diâm. ext.*	*Diâm. int.*	*E*
a	100	400	10	20	50	10	4	aço
b	70	200	6	80	85	12	6	aço
c	300	100	4	50	95	15	7	aço
d	800	500	6	65	250	25	15	alumínio
e	85	350	5	96	900	40	30	alumínio
f	50	180	4	45	950	30	25	alumínio
g	160	280	5	25	850	45	40	aço
h	200	100	2	10	800	40	35	aço
i	400	150	3	50	950	45	38	aço
j	200	100	3	10	600	30	20	alumínio
k	120	180	3	70	880	60	55	alumínio
l	150	250	8	90	750	45	30	alumínio
m	70	100	6	80	500	20	12	aço
n	85	150	7	60	820	25	15	aço

o vazamento de 2, no mínimo, é desejável, e um coeficiente de segurança de 1,5, em relação à vida infinita, contra falha do parafuso por fadiga.‡

†***15-27*** Repita o Problema 15-26 utilizando uma gaxeta confinada de anel O.‡

15-28 Calcule a carga de prova (carga que produz uma tensão de tração igual à resistência de prova) de parafusos 1/2-13 UNC, para cada grau SAE listado na Tabela 15-6.

15-29 Calcule a carga de prova (carga que produz uma tensão de tração igual à resistência de prova) de parafusos M20 × 2,5, para cada classe listada na Tabela 15-7.

15-30 Determine a constante de rigidez de junta do parafuso e membros no Problema 15-7.‡

15-31 Determine a constante de rigidez de junta do parafuso e membros no Problema 15-8.‡

15-32 Determine a constante de rigidez de junta do parafuso e membros no Problema 15-9.‡

15-33 Determine a constante de rigidez de junta do parafuso e membros no Problema 15-10.‡

15-34 A Figura P15-3 mostra uma junta composta de parafusos e pinos carregada em cisalhamento de forma excêntrica. As cargas de cisalhamento são tomadas pelos

FIGURA P15-2

Problemas 15-23 a 15-25.

† Problemas com números em *itálico* são problemas de projeto. Problemas com números em **negrito** são extensões de problemas similares com o mesmo número depois do hífen em capítulos anteriores.

‡ Para estes problemas, pressuponha que a porca e a arruela, juntas, possuem a mesma espessura que o diâmetro do parafuso e que existem parafusos disponíveis em incrementos de comprimento de 0,25 in ou 5 mm.

pinos, por seu tamanho e número sendo listado na Tabela P15-3. Embora a figura mostre 5 pinos, esse não é o caso geral para cada uma das linhas da tabela. Para $a = 4$ in, $b = 4$ in, $l = 10$ in, $P = 2500$ lbf, além dos dados apresentados nas linhas assinaladas da Tabela P15-3, encontre a magnitude e direção da força total de cisalhamento agente em cada pino.

15-35 A Figura P15-3 mostra uma junta composta de parafusos e pinos carregada em cisalhamento de forma excêntrica. As cargas de cisalhamento são tomadas pelos pinos, cujo tamanho e número são listados na Tabela P15-3. Embora a figura mostre 5 pinos, esse não é o caso geral para cada uma das linhas da tabela. Para $a = 4$ in, $b = 4$ in, $l = 10$ in, $P = 2500$ lbf, além dos dados apresentados nas linhas assinaladas da Tabela P15-3, encontre a tensão de cisalhamento total em cada pino.

15-36 A Figura P15-3 mostra uma junta composta de parafusos e pinos carregada em cisalhamento de forma excêntrica. As cargas de cisalhamento são tomadas pelos pinos de aço inox, cujo número e tamanho aparecem listados na Tabela P15-3. Embora a figura mostre 5 pinos, esse não é o caso geral para cada uma das linhas da tabela. Para $a = 4$ in, $b = 4$ in, $l = 10$ in, $P = 2500$ lbf, além dos dados apresentados nas linhas assinaldas na Tabela P15-3, encontre o coeficiente de segurança contra a falha por escoamento sob cisalhamento para cada pino. Ver a Tabela 15-12 no que se refere aos dados de resistência.

15-37 O coeficiente de atrito para uma combinação parafuso de potência-porca lubrificada por óleo, de entrada única, é 0,10. Qual das roscas de padrão Acme americano na Tabela P15-3 será autobloqueável para esta combinação de parafuso-porca? Qual será a menos provável a recuar na presença do carregamento dinâmico? Qual será a mais provável a recuar na presença do carregamento dinâmico?

15-38 O coeficiente de atrito para uma combinação parafuso de potência-porca lubrificada por óleo, de entrada única, é 0,20. Qual das roscas de padrão Acme americano na Tabela P15-3 terá a maior eficiência (desprezando o atrito do colar de empuxo)?

**15-39* Determine o número necessário de roscas de parafuso em contato para fazer a área de cisalhamento por rasgamento total das roscas em contato igual a duas vezes a área de tensão de tração para cada uma das roscas de parafuso de referência na Tabela 15-2.

15-40 Calcule as máximas cargas à tração (carga que causa uma tensão de tração igual à resistência à tração) para parafusos 1/2 -13 UNC em cada grau de parafuso SAE listado na Tabela 15-6.

*15-41 Calcule as máximas cargas à tração (carga que causa uma tensão de tração igual à resistência à tração) para parafusos M20 × 2,50 nas classes listadas na Tabela 15-7.

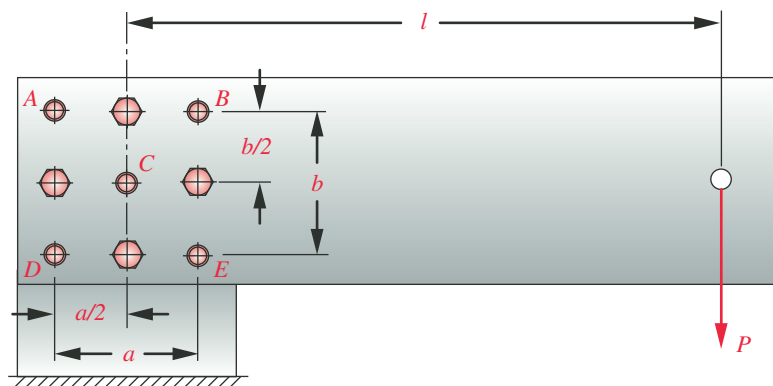



FIGURA P15-3

Problemas 15-34 a 15-36.

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

Tabela P15-3 Dados para os Problemas 15-34 a 15-36
Pinos com diâmetros zero não estão presentes

Fila	Número de pinos, n	d_A (in)	d_B (in)	d_C (in)	d_D (in)	d_E (in)
a	5	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
b	4	0,250	0,250	0	0,250	0,250
c	5	0,375	0,250	0,250	0,375	0,250
d	5	0,375	0,375	0,250	0,250	0,250
e	3	0,375	0,375	0	0,375	0
f	3	0,375	0	0	0,375	0,375

15-42 Parafusos e porcas 3/8-16 UNC sujeitam uma chapa de alumínio de 0,75 polegada de espessura a uma flange de aço de 0,50 polegada de espessura. Determine o fator de rigidez da junta em cada parafuso.

15-43 Parafusos e porcas M14 × 2,0 sujeitam uma chapa de alumínio de 16 mm de espessura a uma flange de aço de 12 mm de espessura. Determine o fator de rigidez da junta em cada parafuso.

15-44 Parafusos e porcas M16 × 2,0 sujeitam uma chapa de alumínio de 50 mm de espessura a uma flange de aço de 30 mm de espessura. Determine o fator de rigidez da junta em cada parafuso.

15-45 Parafusos e porcas 5/16-18 UNC sujeitam uma chapa de alumínio de 1,625 polegada de espessura a uma flange de aço de 1,5 polegada de espessura. Determine o fator de rigidez da junta em cada parafuso.

15-46 Parafusos e porcas M16 × 1,5 sujeitam uma chapa de alumínio de 8 mm de espessura a uma flange de aço de 8 mm de espessura. Determine o fator de rigidez da junta em cada parafuso.

15-47 Uma porca de aço macio M12 × 1,25 é agregada a um parafuso de aço endurecido. A porca tem espessura de 11 mm e resistência ao escoamento em cisalhamento de 120 MPa. Determine a força axial que causará o rasgamento da porca se as roscas da porca falharem antes de o parafuso falhar.

15-48 Compare as cargas de escoamento (cargas que causam uma tensão de tração igual à resistência ao escoamento) às cargas de prova (cargas que causam uma tensão de tração igual à resistência de prova) para parafusos M12 × 1,25 em cada classe listada na Tabela 14-7.

15-49 Um parafuso M16 × 1,50, classe 4,8 com roscas cortadas é pré-carregado a 85% da sua resistência de prova quando unindo um sanduíche de 20 mm de espessura de aço sólido. Encontre os fatores de segurança contra escoamento estático e separação de juntas quando uma carga externa estática de 3 kN é aplicada.

15-50 Uma cabeça de parafuso de aço com 15 mm de espessura pode ser unido a uma flange de aço de 15 mm de espessura com seis parafusos e porcas. A carga externa na cabeça é de 30 kN. Dimensione e especifique os parafusos para um fator de segurança de pelo menos 1,5 e especifique o torque necessário em cada parafuso para obter a pré-carga se as roscas estiverem lubrificadas.

15-51 Repita o Problema 14-50 com uma carga externa total nos seis parafusos que varie de 0 a 30 kN por ciclo. Projete esses parafusos para vida infinita com um fator de segurança de pelo menos 1,5. Especifique tamanho, classe, pré-carga e torque de aperto.

15-52 Uma cabeça de parafuso de alumínio com 20 mm de espessura pode ser unida a uma flange de aço de 20 mm de espessura com oito parafusos e porcas. A carga externa na cabeça varia de 0 a 40 kN por ciclo. Dimensione e especifique os parafusos para vida infinita e um fator de segurança de pelo menos 1,5 e especifique o torque necessário em cada parafuso para obter a pré-carga se as roscas estiverem lubrificadas.

16

SOLDAGEM

Para inventar, você precisa de uma boa imaginação e de um monte de lixo.
THOMAS A. EDISON

16.0 INTRODUÇÃO

Soldagens (ou conjuntos soldados) são utilizadas em muitas aplicações, como estruturas e componentes de máquinas, edifícios, pontes, navios, veículos, equipamentos de construção (motoniveladoras, pás carregadeiras, etc.) e muitos outros sistemas. Nosso foco será no seu uso como projeto de máquinas, não em elementos estruturais como edifícios e pontes, embora os princípios do projeto de uniões soldadas sejam similares entre essas aplicações. Também não abordaremos os vasos de pressão soldados operando a altas temperaturas e que sofram corrosão. A ASME publica normas detalhadas para essas aplicações.

Meio século atrás, as estruturas de máquinas eram comumente construídas com ferro fundido cinzento, que apresenta um bom amortecimento. Atualmente é muito comum ver máquinas com estruturas de aço soldadas. Uma razão para esta mudança é a rigidez superior do aço sobre o ferro fundido (30E6 psi contra 16E6 psi). Uma estrutura de aço pode ser mais leve e ter a mesma rigidez do que outra em ferro fundido ou ter o mesmo peso e ser muito mais rígida.

De maneira diferente das estruturas em aço, como edifícios, que têm tolerâncias relativamente mais amplas em suas dimensões, estruturas de máquinas e componentes comumente são construídos com tolerâncias mais apertadas quando soldados em um conjunto. Mas isto é difícil de conseguir quando se solda uma estrutura. Isso exige, do mesmo modo como acontece com os fundidos, que sejam usinadas como um conjunto após os componentes terem sido soldados nas posições corretas e nas superfícies cujas dimensões são críticas. Superfícies menos importantes podem ser deixadas na condição como soldadas.

A maioria dos metais pode ser soldada, embora alguns sejam mais fáceis de soldar do que outros. O aço de baixo carbono é um dos mais fáceis de soldar. Aços de alto carbono e aços ligados são mais difíceis de soldar, e se, para conferir aumento de resistência, os componentes forem endurecidos ou conformados a frio antes da soldagem, o alto aquecimento localizado da solda tenderá a reveni-los localmente, reduzindo a sua resistência. Por estas razões, é geralmente recomendado que apenas aços de baixo carbono ou de baixa liga sejam usados em soldagens. O alumínio pode ser soldado, mas requer a devida atenção na

Tabela 16-0 Variáveis utilizadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
A	amplitude relativa	nenhum(a)	nenhum(a)	Eq. 6.1*d*
A_{cis}	área de cisalhamento da solda	in^2	mm^2	Eq. 16.4
A_w	área de cisalhamento da solda por unidade de comprimento	in	mm	Eq. 16.4
C_f	coeficiente para a equação S_{fr}	nenhum(a)	nenhum(a)	Tabela 16-4
Exx	resistência mínima à tração do eletrodo	kpsi	—	Tabela 16-4
f_b	carga de flexão por unidade de comprimento	lb/in	N/mm	Eq. 16-4
f_n	carga normal por unidade comprimento	lb/in	N/mm	Eq. 16-4
f_s	carga de cisalhamento por unidade de comprimento	lb/in	N/mm	Eq. 16-4
f_t	carga de torção por unidade de comprimento	lb/in	N/mm	Eq. 16-4
F_r	carga de torção por unidade de comprimento	lb/in	N/mm	Eq. 16-4
J_w	momento polar de inércia por unidade de comprimento da solda	in^3	mm^3	Eq. 16.4
N	número de ciclos	nenhum(a)	nenhum(a)	Ex. 16-2
N_f	coeficiente de segurança na fadiga	nenhum(a)	nenhum(a)	Ex. 16-4
N_{fr}	coeficiente de segurança na fadiga (variação da tensão)	nenhum(a)	nenhum(a)	Eq. 16.3
N_{esc}	fator de segurança estático em escoamento	nenhum(a)	nenhum(a)	Eq. 16.3
R	razão de tensão	nenhum(a)	nenhum(a)	Eq. 6.1d
S_{er}	limite de fadiga em tração	psi	MPa	Tabela 16-4
S_{ers}	limite de fadiga em cisalhamento	psi	MPa	Ex. 16-2
S_{fr}	resistência à de fadiga em tração (variação da tensão)	psi	MPa	Eqs. 16.2
S_{frs}	resistência à fadiga em cisalhamento (variação da tensão)	psi	MPa	Ex. 16-4
S_w	momento de inércia por unidade de comprimento	in^2	mm^2	Eq. 16.4
t	dimensão da garganta da solda	in	mm	Fig. 16-4
w	dimensão da perna da solda	in	mm	Fig. 16-4
Z	módulo de resistência	in^3	mm^3	Eq. 4.11*d*
$\Delta\sigma$	variação da tensão normal	psi	MPa	Eq. 6.1*a*
σ_x	tensão normal	psi	MPa	Eq. 4.7
$\sigma_{1,2,3}$	tensão principal	psi	MPa	Ex. 16-4
σ_a	tensão normal alternada	psi	MPa	Eq. 6.1*b*
σ_m	tensão normal média	psi	MPa	Eq. 6.1*c*
σ'	tensão equivalente de com Mises	psi	MPa	Ex. 16-4
σ_{max}	máxima tensão normal aplicda	psi	MPa	Eq. 6.1*a*
σ_{min}	mínima tensão normal aplicada	psi	MPa	Eq. 6.1*a*
$\Delta\tau$	variação de tensão de cislhamento	psi	MPa	Ex. 16-2
τ_{xy}	tensão de cisalhamento	psi	MPa	Eq. 4.9
τ_{adm}	tensão de cisalhamento admissível	psi	MPa	Ex. 16-1, -2

escolha do processo e da técnica de soldagem. Estruturas de máquinas são feitas comumente de aço por causa da rigidez e resistência. A sua grande massa não é uma preocupação, uma vez que são estáticas. Partes móveis de máquinas, como bielas, podem ser construídas de alumínio se elas sofrerem grandes acelerações. Por outro lado, muitas bielas devem ser feitas de aço por questões de resistência, rigidez ou desgaste.

O leitor deve considerar este capítulo uma breve introdução sobre o que é realmente uma fascinante e complexa tecnologia. Este tratamento breve não o fará, de forma alguma, um especialista em projetos de soldagens. Mas irá iniciá-

Fotografia na página capitular é *A man gas metal arc welding*, por William M. Plate Jr., USAF (fotografia em domínio público).

-lo e indicará uma extensa literatura técnica e de normas sobre o tema.* Muitas organizações fazem pesquisa na área de soldagem e publicam recomendações e requisitos. Algumas delas são:

American Association of State Highway and Trasnportation Officials (AASHTO) – http://www.transportation.org/

American Institute of Steel Construction (AISC) – http://www.aisc.org/

American Petroleum Institute (API) – http://www.api.org/

American Society of Mechanical Engineers (ASME) – http://www.asme.org/

American Welding Society (AWS) – http://www.aws.org/

James F. Lincoln Arc Welding Foundation – http://www.jflf.org/

Welding Research Council – http://www.forengineers.org

Veja outras referências ao final deste capítulo para algumas de suas publicações relevantes.

16.1 PROCESSOS DE SOLDAGEM

A soldagem de metais a arco requer a aplicação localizada de calor suficiente para fundir o material-base ao mesmo tempo em que o material de adição compatível é adicionado para unir as duas partes. Uma solda corretamente aplicada pode ser tão resistente quanto o material-base, mas se feita de maneira inadequada pode deixar a montagem severamente enfraquecida. O calor é normalmente fornecido pela interposição de um eletrodo na proximidade ou em contato com a superfície, causando a abertura do arco entre o eletrodo e a peça. As máquinas de solda a arco elétrico fornecem corrente CA ou CC em uma tensão suficiente para criar o arco a uma temperatura de 6000-8000 °F, muito acima do ponto de fusão do aço.† O material de adição é fornecido como parte do eletrodo ou como uma vareta separada que é alimentada diretamente no arco e é consumida pelo processo.

Uma boa solda requer a **fusão** do metal em ambos os lados da junta com o material de adição, e a fusão necessita de uma **limpeza atômica**. O oxigênio do ar irá contaminar rapidamente a superfície com óxidos metálicos a elevadas temperaturas. O nitrogênio presente no ar também pode comprometer a qualidade da solda, e as bolhas aprisionadas no metal fundido causam porosidades à medida que o metal resfria. Umidade no ar ou no metal causará fragilidade por hidrogênio e enfraquecerá a solda. Para prevenir a contaminação do metal aquecido, é fornecido um fluxo de material para recobrir com **escória** a poça de fusão enquanto resfria, ou então uma corrente de gás inerte (argônio ou hélio) é usada para deslocar o ar. Se a escória estiver presente, ela é retirada quando a solda esfria. Uma boa solda necessita que uma grande massa de metal fundido **penetre** no metal-base, tornando o **cordão de solda** *uma combinação entre o material de adição e o material-base*. Também existirá a **zona termicamente afetada** (**ZTA**) formada pela região marcada na Figura 16-1. A ZTA pode ser mais fraca que o material-base em aços de alta resistência (acima de 50 kpsi de resistência à tração), ou mais forte e dura que o material-base em aços de baixa resistência, o que provoca a formação de trincas. A resistência do alumínio é reduzida de até 50% na ZTA.

A Figura 16-1 mostra a terminologia típica da solda. As margens caracterizam a interface entre a solda e o material-base, na face da solda, e a raiz é a base da solda. A preparação das peças para a soldagem pode exigir a usinagem dos chanfros para deixar uma raiz que permita que o calor e o metal de adição a preencham completamente. A abertura da raiz pode exigir o uso de um cobre-junta que tem a finalidade de manter o metal fundente no local até que ele se solidifique. O cobre-junta pode ser do mesmo material da união ou diferente. Se for do

* A companhia americana The Lincoln Eletric Company (www.lincolnelectric.com) oferece um curso introdutório chamado "Blodgett's Welding Design", uma excelente introdução aos processos de soldagem e projetos de soldagens para qualquer engenheiro.

† A solda oxiacetilênica não é utilizada quando se exige solda de alta resistência. Ela é lenta e a chama a gás causa muita oxidação, o que contamina e fragiliza o aço. Algumas vezes é utilizada em reparos no campo, mas não na construção.

(*a*) Terminologia geral da solda (*b*) Corte transversal de um cordão de solda mostrando a ZTA e uma falha

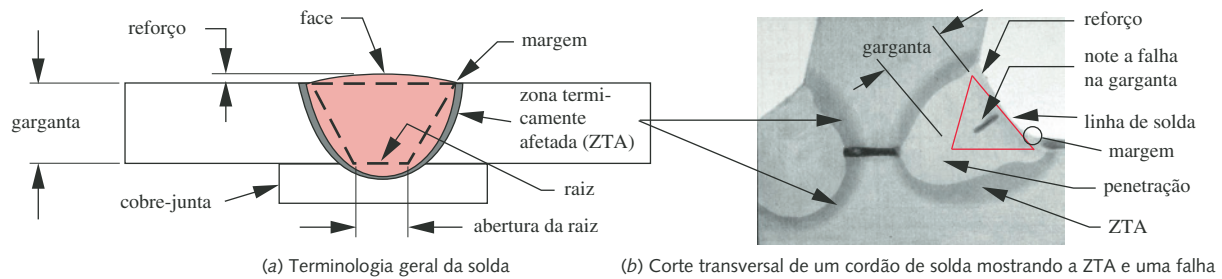



FIGURA 16-1

Seção transversal da solda e sua terminologia. (Cortesia da Lincoln Electric Company, Cleveland, OH.)

mesmo material, será soldado à união, podendo ser deixado ali ou retirado por esmerilhamento. Quando as juntas são carregadas dinamicamente, recomenda-se o uso de cobre-juntas de material diferente, pois as concentrações de tensão se localizarão nele. O reforço é a quantidade de material de solda que se sobressai acima da superfície do material-base. Ele pode ser deixado no local quando a junta é submetida a carregamentos estáticos, mas deve ser removido (retirado por esmerilhamento para remover as concentrações de tensão nas margens) se o carregamento for dinâmico. O material do reforço não contribui para a resistência da solda, independentemente do tipo de carga. A dimensão da garganta, usada para determinar a área sob tensão, exclui qualquer material além da espessura do componente ou da linha de solda.

Tipos de soldas de uso comum

Soldagem com eletrodos revestidos (SMAW – *shielded metal arc welding*), também chamada de "solda com eletrodo", utiliza eletrodos ou varetas de tamanhos definidos, que têm um recobrimento externo com um fluxo. À medida que o arco voltaico funde o eletrodo, o fluxo, no estado líquido, alimenta a poça de fusão cobrindo-a e protegendo-a do contato com o ar. Por não haver um fluxo de proteção gasoso que possa ser espalhado pelo vento, esse método é normalmente empregado para reparos em ambientes externos ou no campo.

Soldagem com arame tubular (FCAW – *flux cored arc welding*) utiliza um eletrodo na forma tubular (oco) com o fluxo preenchendo o seu interior. Essa disposição permite que longos comprimentos do arame sejam armazenados em carretéis. A máquina de solda tem um alimentador que leva o arame através da tocha a uma velocidade controlada pelo operador, tornando esse processo contínuo e mais eficiente. A soldagem com arame tubular pode ser aplicada com ou sem gás de proteção. O uso do gás de proteção a torna de fácil uso em ambientes internos, mas com o eletrodo correto ela também pode ser usada sem proteção gasosa.

Soldagem a arco gás-metal (GMAW – *gas metal arc welding*) também conhecida pelo nome de solda **MIG** (***metal inert gas***), utiliza um eletrodo de arame sem fluxo. Um gás inerte é dirigido à solda para deslocar o ar. Isso torna a solda limpa devido à ausência de escória, que não precisa ser removida, mas não pode ser usada externamente se a velocidade do vento é superior a 8 km/h.

Soldagem a arco gás-tungstênio (GTAW – *gas tungsten arc welding*), chamada de solda **TIG** (***tungsten inert gas***), utiliza um eletrodo de tungstênio não consumível. Pode ser usado metal de adição na forma de vareta ou arame. O gás de proteção originalmente utilizado era o hélio, o que tornou este processo conhecido como Heliarc. Esse processo é frequentemente aplicado na solda de

alumínio, titânio e magnésio, e também para reparos de precisão. É uma solda limpa, mas padece do mesmo problema com o vento do processo de solda MIG.

A **soldagem ao arco submerso (SAW – *submerged arc welding*)** emprega o fluxo na forma de granulado em tal quantidade que a solda fica submersa (enterrada) por uma cobertura tão espessa que o arco não pode ser visto. O operador não precisa utilizar proteção visual especial. O fluxo é direcionado para a região da solda através de um tubo adjacente ou concêntrico ao eletrodo. Após o resfriamento da solda, o fluxo não fundido pode ser varrido ou aspirado para ser reutilizado. A escória é retirada para expor a solda. Esse processo é limitado para soldas executadas em uma superfície de topo e é mais adequado para a produção de soldas em uma oficina onde o movimento do eletrodo possa ser controlado por robô ou de forma semiautomática por meio de guias. Essa solda tem boa aparência e é livre de respingos.

A **soldagem por resistência** é feita em chapas finas de metal por um processo elétrico convencional. Eletrodos pressionam a junta sobreposta de metal e uma alta corrente passa através das chapas, fundindo os dois materiais juntos em um ponto. Se os eletrodos forem movidos ao longo da junta, com a corrente fluindo, criará uma solda de costura. Em vez de eletrodos, o laser pode ser usado para fornecer o calor necessário. Nenhum material de adição é necessário nesse processo. Seu uso mais comum é a solda de carrocerias automotivas, caixas de chapa metálicas e outras estruturas de parede fina, não sendo indicado para uso em seções mais espessas.

Por que um projetista deve preocupar-se com processos de soldagem?

É útil para um engenheiro projetista ter um conhecimento básico dos processos de soldagem e de suas limitações, da mesma forma que ele necessita da compreensão de como uma peça pode ser (ou não) usinada em um torno ou fresadora. Mas a maior parte dos projetistas não é de torneiros ou fresadores, tampouco de soldadores certificados. Assim como um engenheiro não procura ensinar um experiente operador como fazer uma peça, ele deve deixar as decisões mais detalhadas para um soldador experiente. No entanto, estar familiarizados com as suas limitações. A tarefa do projetista é definir a soldagem de acordo com as boas práticas da engenharia, que serão explicadas aqui (e nas referências deste capítulo), de maneira que as soldas sejam seguras contra falhas no uso desejado, escolher a resistência necessária do material de solda e especificar esta informação nos desenhos.

16.2 TIPOS DE JUNTAS E SOLDAS

Existem cinco tipos de juntas, como mostra a Figura 16-2: topo, tê, canto, sobreposta e aresta. A escolha do tipo de junta será, até certo ponto, ditada pela geometria desejada da soldagem, e uma dada soldagem pode ter vários tipos dentro dela.

Em geral, além dos cinco tipos de chanfros, outros três tipos de solda podem ser usados: solda de chanfro, de filete e de tampão ou ponto, como mostrado na Figura 16-3. A solda de chanfro divide-se em duas subcategorias, tendo cada uma delas penetração completa ou parcial. Recomenda-se, geralmente, que a solda de tampão ou de ponto seja evitada por ser mais fraca que as outras. Vamos nos concentrar nos dois tipos de solda de chanfro e nas soldas de filete. Soldas de chanfro são mais aplicáveis para juntas de topo, de canto externas e de aresta em juntas com materiais de suficiente espessura. Soldas de filete são indicadas para juntas de ângulo, sobrepostas e de ângulo interno.

FIGURA 16-3

Tipos de soldas.

FIGURA 16-2

Tipos de juntas soldadas. (Cortesia de Lincoln Eletric Company, Cleveland, OH.)

A **solda de chanfro** pode ter **junta de penetração completa (JPC)** ou **junta de penetração parcial (JPP)**, como mostrado nas Figuras 16-3 e 16-4. Uma JPC de topo carregada em tração será tão resistente quanto o elemento menos espesso da união de dois materiais. A resistência de uma JPP depende da profundidade da **garganta**, como definido na Figura 16-4. Soldas do tipo JPC são, geralmente, utilizadas em ambos os lados de seções espessas, onde uma solda JPC seria maior que o necessário. Observe que o **reforço** do cordão, que sobressai acima do material-base, não é incluído na medida da garganta. Em carregamentos de fadiga, a menos que a variação de tensão seja suficientemente baixa, pode ser necessário remover o reforço para eliminar concentrações de tensão entre o cordão e a margem. A área total da garganta é a dimensão da garganta vezes o comprimento do cordão. A área de fusão é a área da união entre a solda e o material-base, como mostra a Figura 16-4.

Soldas de filete são definidas pelo comprimento de sua perna, w, mas a resistência da solda é limitada pela dimensão da garganta, t, como mostrado na Figura 16-4. Soldas de filete são orientadas, geralmente, a 45° entre duas chapas ortogonais, mas podem unir peças a qualquer ângulo. Se as peças unidas são ortogonais e o filete está a 45°, então a garganta, t, é 0,707 vez a dimensão, w, da

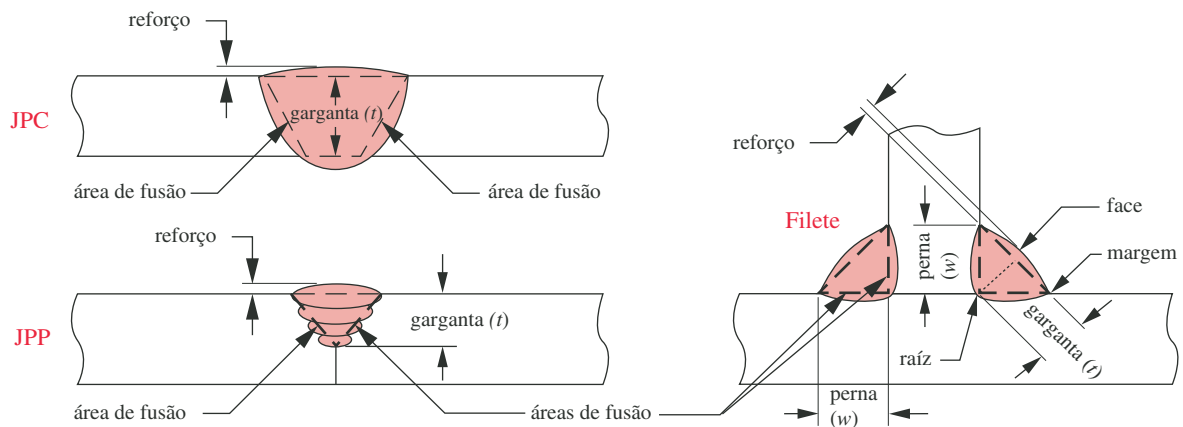



FIGURA 16-4

Dimensão da garganta em juntas de solda. (Cortesia da Lincoln Electric Company, Cleveland, OH.)

perna. Qualquer reforço é ignorado. A **área total de solda** é a *altura da garganta, t, vezes o comprimento do cordão,* mas a **área de fusão**, que determina onde o cordão se separa do material-base, é *a largura, w, vezes o comprimento do cordão* em cada lado do filete de solda. A tensão em cada lado da área de fusão pode ser a mesma ou diferente, dependendo do carregamento na peça.

Preparação da junta

A solda será melhor se a junta for preparada adequadamente para que o calor e o material de adição possam alcançar e fundir todas as porções da zona de união. A menos que as seções sejam finas, a junta deve ser preparada pela remoção de material de um ou de ambos os lados. Vários tipos de formatos de chanfro são recomendados: U, J e V, como podem ser visto na Figura 16-5. O chanfro em J ou U deixa uma pequena porção de material na parte inferior do material-base para prevenir que metal fundente escorra, mas deve ser fino o suficiente para permitir uma boa penetração. Um chanfro em V é mais fácil de usinar, mas precisa de uma folga na sua face inferior para ter uma boa penetração. Essa folga pode ser fechada com um cobre-junta metálico ou cerâmico para conter o material de solda até que ele esfrie. Se o cobre-junta for do mesmo material da união, ele ficará soldado a ela. Ele poderá ser removido, mas, se deixado no local, deve ser contínuo ao longo do comprimento da junta. Caso existam emendas no cobre-junta, e se essas não forem completamente soldadas, serão criadas altas concentrações de tensão que poderão causar a falha da junta. Da mesma forma, pode-se escolher soldar uma longa união de forma intermitente, em vez de usar um cordão contínuo ao longo do seu comprimento. Porém, é frequentemente preferível utilizar um cordão contínuo, pois cada interrupção do cordão causa o aparecimento de concentração de tensão, especialmente indesejada com carregamentos dinâmicos, algo comum em componentes de máquinas. Além disso, para a mesma resistência, um cordão que só cobre metade do comprimento da solda deve ter uma garganta duas vezes maior, o que quadruplica sua área transversal. Um cordão longo, com menor seção transversal, usará menos material de solda e será mais econômico.

O projetista deve selecionar e especificar o tamanho do chanfro usinado nos componentes antes de serem soldados. Os tamanhos recomendados, baseado nas espessuras, podem ser encontrados em manuais de solda, referências [1-4]. É altamente recomendado o uso desses manuais e normas ao se projetar soldas. Se alguém está projetando edifícios e pontes, então as normas das AISC e AWS deverão ser respeitadas. Elas contêm regras muito específicas e procedimentos que devem ser seguidos quando se projeta estruturas, cuja falha pode colocar em risco a vida humana. O projetista de máquinas geralmente não precisa seguir essas normas, mas seria sensato fazê-lo, para se ter a certeza de bons resultados.

FIGURA 16-5

Preparação da junta. (Cortesia da Lincoln Electric Company, Cleveland, OH.)

Especificação da solda

As soldas e a preparação das juntas são especificadas em desenhos usando um conjunto padronizado de símbolos de solda, como mostrado na Figura 16-6*a*. De maneira bem minimalista, deve conter uma linha de referência e uma seta. Também pode haver uma cauda opcional na extremidade oposta à seta. A seta aponta para a junta e o símbolo de solda define o tipo de solda (filete, chanfro parcial ou completo, etc.). Símbolos de solda acima da linha de referência referem-se ao lado oposto à seta e aqueles abaixo da linha se referem ao lado que aponta a seta. A seta pode apontar para cima ou para baixo. Os símbolos são lidos da direita para a esquerda, independentemente de para onde esteja apontando a seta. A Figura 16-6*b* mostra alguns dos símbolos de solda possíveis. Ver AWS A2.4 para mais detalhes.[3]

(*a*)

(*b*)

Símbolos básicos para solda*								
Contras-solda	Filete	Tampão (furo ou ranhura)	Chanfro ou topo					
			V	Bisel	U	J	Superfície convexa contígua	Superfície convexa plana

Símbolos de solda sumplementares*					
Cobre-junta	Espaçador	Soldar todo o contorno	Campo de solda	Acabamento	
				Plano	Convexo

*Veja as publicações da AWS para uma lista completa

FIGURA 16-6

Símbolos de solda AWS.[3]

16.3 PRINCÍPIOS DO PROJETO DE SOLDAS

Tão importante quanto prestar atenção à geometria da solda é considerar o tamanho do cordão quando se deseja ter sucesso no projeto. É também muito importante arranjar as soldas de modo que um caminho de carga seguro e sensível exista para levar as cargas aplicadas aos seus pontos de reação. O conceito de "fluxo de força", introduzido no Capítulo 4, aplica-se aqui. As regras a seguir têm sido desenvolvidas por experientes projetistas de solda ao longo de muitos anos. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [1].

1 Proporcione um caminho para que as forças aplicadas entrem na seção em uma direção paralela à direção da força aplicada.

2 As forças seguirão o caminho mais rígido para percorrer; assim, é melhor ter rigidez relativamente uniforme para distribuir as cargas de reação uniformemente na soldagem.

3 Não existem membros secundários na soldagem. Ela é essencialmente uma única peça. Mas as soldas podem ser primárias ou secundárias. Uma solda **primária** carrega toda a carga diretamente, e sua falha faz com que toda a solda falhe. Uma solda **secundária** apenas segura as peças juntas e suporta apenas forças de pequena intensidade.

4 Se possível, não coloque soldas em flexão. Se existirem momentos fletores, tente colocar os cordões em posições de momento zero ou de valor baixo, ou distribua as soldas para receber tensões de cisalhamento ou axial (tração/compressão).
5 Sempre que possível, não aplique cargas de tração através de uma espessura do material de origem (isto é, "através dos grãos"). Materiais laminados têm grãos na direção da laminação e são ligeiramente mais fracos transversalmente do que longitudinalmente. (Veja a Seção 14.3 para uma discussão da granulação nos metais.) Soldas carregadas em tração em uma seção transversal (veja a Figura 16-10) podem causar trinca interlamelar do material sob a solda. Cargas de cisalhamento aplicadas à superfície através da solda são preferíveis.
6 Onde ocorrem mudanças de tamanho ao longo da seção, faça uma transição cônica para melhorar o fluxo de força e reduzir a concentração de tensão.

A Figura 16-7 mostra projetos alternativos para um olhal soldado a uma viga. A parte *a* mostra uma concepção pobre na qual o olhal foi girado 90° e a carga é transmitida diretamente à aba da viga. Uma vez que o caminho mais rígido vai carregar a maior parte da força, o pequeno comprimento da solda, que se estende pela alma da viga, irá receber a maior parte da força. Se todo o comprimento da solda é dimensionado para níveis de tensão aceitáveis, o cordão poderá falhar por causa da distribuição não uniforme das tensões através da aba que sobrecarrega a alma da viga. A flexibilidade da aba próxima às suas extremidades reduz a capacidade de transferir carga à alma. Observe a direção do fluxo de força em cada configuração. A parte *b* mostra uma configuração aceitável, na qual a carga no olhal é transferida diretamente à alma da viga através da solda.

A Figura 16-8 mostra um conjunto soldado similar, que usa uma viga de seção retangular. Na parte *a*, a solução que funcionou na Figura 16-7 é agora uma solução deficiente, pois a carga aplicada no centro da face inferior deve percorrê-la para alcançar as almas laterais da viga. Este cordão de solda sofre flexão. Um arranjo melhor é mostrado na parte *b*, onde o olhal é reprojetado para ser soldado diretamente nas almas laterais, deixando a solda sofrer apenas cisalhamento e levando as forças para as seções que se encontram em paralelo com o carregamento no olhal, mais rígido em flexão que a seção da alma. Observe a direção do fluxo de força em cada arranjo.

A Figura 16-9 mostra componentes com diferentes larguras ou espessuras soldados de topo. A norma AWS D1.1 indica que uma conicidade de pelo menos 2,5:1 (≤ 22°) deve ser dada em todas junções deste tipo quando o carregamento é dinâmico.

(*a*) Projeto insatisfatório – o carregamento é transmitido à alma por uma pequena região da aba, e o centro da solda suporta grande parte da carga

(*b*) Projeto satisfatório – a carga é transmitida diretamente à alma, e toda a solda compartilha a carga

FIGURA 16-7

Exemplos de bons e maus projetos de juntas soldadas. (Cortesia da Lincoln Electric Company, Cleveland, OH.)

(*a*) Projeto insatisfatório – o carregamento é levado até as almas laterais a partir da posição inferior

(*b*) Projeto satisfatório – o carregamento é levado diretamente às almas laterais

FIGURA 16-8

Exemplos de bons e maus projetos de juntas soldadas. (Cortesia da Lincoln Electric Company, Cleveland, OH.)

(*a*) Largura com estreitamento cônico (*b*) Espessura com estreitamento cônico

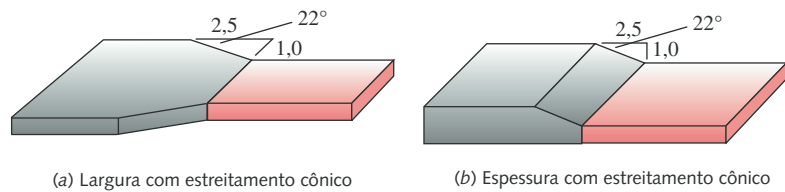



FIGURA 16-9

Juntas com diferentes espessuras e ou larguras devem ter uma transição gradual. (Cortesia da Lincoln Electric Company, Cleveland, OH.)

16.4 CARREGAMENTO ESTÁTICO DE SOLDAS

Comparado com o cálculo de tensões em componentes de máquinas com geometria complexa, o cálculo das tensões em um cordão de solda é bastante simples. Se pudermos evitar o carregamento em flexão nas soldas, o carregamento será normalmente de tração/compressão ou cisalhamento direto. Em qualquer um dos casos, a Equação para o cálculo da tensão é simples. A tensão normal de tração ou compressão foi definida na Equação 4.7 como:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{4.7}$$

Cisalhamento direto é comum em soldas, sendo definido pela Equação 4.9:

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{cis}} \tag{4.9}$$

Em ambos os casos, P é a carga aplicada e A ou A_{cis} é a área do cordão de solda. Para uma junta de topo com JPC em tração ou compressão, a área da garganta é igual à menor seção transversal da união. Para uma junta JPP, ou filete, em tração/compressão ou em cisalhamento, a área é simplesmente a dimensão t da garganta vezes o comprimento do cordão. A Figura 16-4 define a dimensão da garganta para uma variedade de juntas. Observe que, se uma junta em ângulo é carregada em tração ou cisalhamento, a solda irá sofrer tensão de cisalhamento e poderá desenvolver tensão de flexão. As áreas de fusão entre a solda e o material-base podem ter um ou ambos os tipos de tensões aplicadas, dependendo da carga.

Resistência estática de soldas

No Capítulo 5 foram discutidas as teorias de falha em profundidade e concluiu-se que as falhas estáticas devem-se às tensões de cisalhamento e que a teoria da energia de distorção é a que melhor define um nível seguro de tensão para um material dúctil, utilizando um fator de segurança conveniente. Os materiais usados em soldagem, bem como o material de adição, são dúcteis, assim essa teoria se aplica perfeitamente. No entanto, exaustivos testes, feitos em uniões soldadas ao longo do último meio século pela indústria da solda, tem desenvolvido bons resultados sobre a resistência admissível de um cordão de solda. O número de referência de um eletrodo revestido apresenta a letra *E* seguida de 4 ou 5 algarismos, sendo que os primeiros 2 ou 3 definem o limite de ruptura em kpsi e os algarismos restantes indicam a posição em que pode ser usado e o tipo de revestimento. Geralmente usamos a notação *Exx* como a resistência do eletrodo. Por exemplo, um eletrodo revestido E70 tem uma resistência mínima à tração de S_{ut} = 70 kpsi e E110 tem um valor mínimo de resistência à tração de S_{ut} = 110 kpsi.* Observe que um eletrodo pode ter uma resistência superior ao valor indicado.

Recomenda-se que a resistência do eletrodo selecionado seja aproximadamente igual à do material-base, e, para as juntas JPC carregadas em tração, isso é uma exigência. Em algumas situações, pode-se **subestimar** a resistência do

* O limite de escoamento para um eletrodo pode ser tomado como 75% de S_{ut}.

material de adição (*material de adição menos resistente que o material-base*). Para soldas de filete é mais comum **subestimar** a resistência do material de adição. Por outro lado, **superestimar** (*o material de adição é mais resistente que o material-base*) geralmente é pouco recomendado.

Tensões residuais em soldas

As soldas sempre apresentarão altos valores de tensão residual. Isto ocorre por que o material de adição dilata-se seis vezes mais, na direção do comprimento, quando fundido. Ao resfriar, ele se contrai na mesma quantidade. Nenhum metal em estado sólido tem um alongamento de 600%. Isto significa que o cordão irá escoar por tração à medida que resfria, e o material-base, adjacente ao cordão, impede qualquer movimentação. Aparecerá, então, durante o resfriamento uma tensão compressiva de balanceamento formada na região adjacente à solda, como mostra a Figura 16-10. Com a utilização de um material de adição com resistência inferior à do material-base as tensões residuais podem ser reduzidas, devido ao menor limite de escoamento. Não é recomendado que um material de adição mais resistente possa ser usado em qualquer caso, pois isso poderá resultar em um projeto não conservador.

(*a*) Solda de topo JPC

(*b*) Tensão residual transversal

(*c*) Tensão residual longitudinal

FIGURA 16-10

Tensões residuais em soldas.

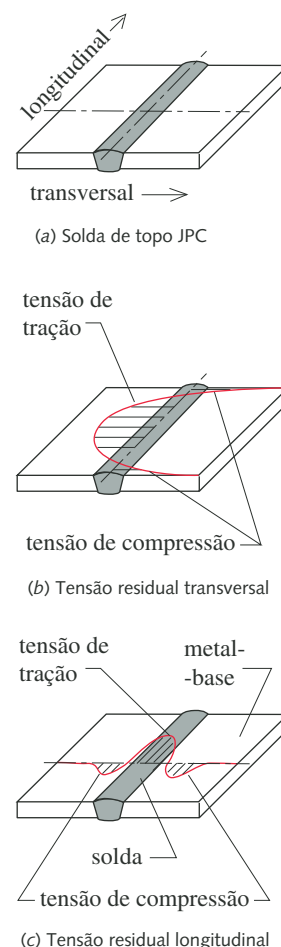
Direção do carregamento

A direção do carregamento *versus* a direção do eixo do cordão tem um efeito significante na resistência do cordão de solda. Testes mostram que cordões carregados ortogonalmente (transversalmente) ao eixo do comprimento têm resistência 50% maior que a mesma solda carregada no sentido longitudinal ao eixo do cordão (veja a Figura 16-10*a*). Isso se deve, em parte, à garganta efetiva do cordão transversal entre duas partes ortogonais, sendo a 67,5° *versus* 45°, quando carregadas longitudinalmente. O plano de 67,5° tem 30% mais área em cisalhamento. No entanto, a norma AWS D1.1 especifica que a área efetiva da garganta, definida como a distância mais curta entre a raiz até a face da solda, seja usada para cargas aplicadas em qualquer direção.[9] Contudo, soldas longitudinais têm a vantagem de permitir mais deformação antes do escoamento que soldas transversais.[9] Entretanto, soldas são projetadas contra falha por ruptura, em vez de escoamento, e embora dúctil, o volume da solda é muito pequeno comparado ao material-base, e a magnitude da deformação de solda entre o escoamento e a fratura é muito pequena para fornecer qualquer aviso de falha eminente.

Tensão de cisalhamento admissível para cordões e juntas JPP

Para o carregamento estático, a AWS[3] recomenda que as tensões cisalhantes nos cordões ou em juntas JPP sejam limitadas a 30% da resistência à tração do eletrodo, *Exx*.

$$\tau_{adm} = 0{,}30Exx \tag{16.1}$$

Este valor tem um fator de segurança mínimo embutido de 2,21 a 4,06 para muitos carregamentos de solda, usando eletrodos revestidos de E60xx até E110xx em ensaios exaustivos.* A Tabela 16-1 apresenta mais detalhadamente esses fatores de segurança. Os fatores de segurança e a Equação 16.1 são baseados em exaustivos ensaios feitos com conjuntos soldados realizados pela AISC[6] e assumem que a resistência do material do cordão é próxima da resistência do material-base para cada caso.† A Equação 16.1 provém da norma AWS D1.1 Structural Welding Code.[3] **O fator de segurança para a Equação 16.1 é normalmente tomado como 2,5 e está dentro dos intervalos de fatores de segurança para cordões longitudinais (Tabela 16-1).**

* Observe que os eletrodos revestidos E60xx são considerados obsoletos, sendo comum, atualmente, o eletrodo E70xx.

† A Equação 16.1 tem sido exaustivamente verificada por análise dos elementos finitos (FEA) e mostra boa correlação com essa estimativa.[8]

Tabela 16-1 Fatores de segurança contra falha estática quando usando a Equação 16.1[6]

Como relatado pela Testing Engineers, Inc., 1968

Metal-base	Classe de eletrodo	Fator de segurança usando tensão na área da garganta igual à resistência à tração do eletrodo de 0,3			
		Soldas longitudinais		Soldas transversais	
		Média	Mínimo	Média	Mínimo
A36	E60xx	2,88	2,67	—	—
A441	E70xx	2,95	2,67	4,62	4,06
A514	E110xx	2,41	2,21	3,48	3,30

Tabela 16-2
Tamanho mínimo para cordões de solda*

Espessura do metal-base (T)	Tamanho mínimo da solda
dimensões em polegadas	
T ≤ 1/4	1/8
1/4 < T ≤ 1/2	3/16
1/2 < T ≤ 3/4	1/4
3/4 < T	5/16
dimensões em mm	
T ≤ 6	3
6 < T ≤ 12	5
12 < T ≤ 20	6
20 < T	8

* Fonte: AWS D1.1 Tabela 5.8

Tabela 16-3
Resistências mínimas para alguns aços estruturais ASTM

Número ASTM	S_y kpsi (MPa)	S_{ut} kpsi (MPa)
A36	36 (250)	58-80 (400-500)
A572 Gr42	42 (290)	60 (415)
A572 Gr50	50 (345)	65 (450)
A514	100 (690)	120 (828)

A Equação 16.1 é um pouco incomum, pois ela compara as tensões de cisalhamento à tensão de ruptura como um valor de referência. Isso também parece fornecer um fator de segurança de 3,33 (o recíproco de 0,30) em vez do valor estabelecido de 2,5. Essa anomalia é explicada pela "mistura" entre a tensão de cisalhamento e a tensão axial na equação. A Equação 2.5*b* apresenta um quociente aproximado, entre 0,75 e 0,8, entre a tensão de cisalhamento e a resistência à tração para os materiais dúcteis. Multiplicando-se 0,75 por 3,33, temos 2,5 como fator de segurança com relação à ruptura por cisalhamento. Porém, é mais conveniente usar o valor de resistência mínima do eletrodo revestido e ajustar o fator na equação entre 1/2,5 a 1/3,33 = 0,30.

A norma AWS D1.1 Structural Welding Code define o tamanho mínimo para soldas baseadas na espessura do material soldado. Alguns desses dados são apresentados na Tabela 16-2. O tamanho mínimo de solda deve assegurar que calor aplicado seja suficiente para atingir-se uma boa fusão.

EXEMPLO 16-1

Projeto de um cordão de solda estaticamente carregado

Problema **Uma seção Tê de 0,5 in de espessura por 4 in de largura, de aço ASTM A36 laminado a quente em ambas as pernas, como mostrado na Figura 16-11, será soldada em ambos os lados. Determine a dimensão da garganta, *t*, necessária.**

Dados **O Tê é estaticamente carregado em tração no centro da alma com *P* = 16.800 lb atuando no furo de diâmetro 1 in. A resistência do aço ASTM A36 é dada na Tabela 16-3.**

Hipóteses **Usar a resistência do material do eletrodo revestido com valor similar ao do material-base com cordão no comprimento total da solda. O cordão é carregado diretamente e falhará em cisalhamento ao longo do plano a 45° em sua garganta.**

Solução

1 A Tabela 16-3 fornece a resistência do material das chapas como 58-80 kpsi. Selecione um eletrodo com aproximadamente a mesma resistência, ou seja, um valor médio. Os eletrodos revestidos são fornecidos com incrementos de 10 kpsi e o mais próximo disponível é um E70 com 70 kpsi de resistência à tração. (Os eletrodos E60xx são considerados atualmente obsoletos.)

2 Determine a resistência admissível baseado em 30% do valor do eletrodo *Exx* para este eletrodo usando a Equação 16.1.

$$\tau_{adm} = 0{,}30Exx = 0{,}30(70) = 21 \text{ kpsi} \qquad (a)$$

3 Determine a área em cisalhamento na garganta necessária para limitar a tensão com esse valor.

$$\tau_{xy} = \tau_{adm} = 21 \text{ kpsi} = \frac{P}{A_{cis}} = \frac{16.800}{A_{cis}}$$

$$A_{cis} = \frac{16.800}{21.000} = 0{,}8 \text{ in}^2 \qquad (b)$$

4 Determine a dimensão da garganta dos dois cordões inteiros de solda (um para cada lado da união).

$$A_{cis} = 2Lt = 2(4)t = 0{,}8 \text{ in}^2$$

$$t = 0{,}1 \text{ in} \qquad (c)$$

5 Converta a dimensão da garganta, t, para a dimensão da perna, w, assumindo um cordão com pernas iguais em uma união em ângulo (Tê) a 90°.

$$w = \frac{t}{\cos(45°)} = \frac{0{,}1}{0{,}707} = 0{,}141 \text{ in} \qquad (d)$$

6 Verifique a recomendação mínima do tamanho do cordão. A Tabela 16-2 indica que uma peça com espessura de 0,5 polegada necessita ao menos de um cordão com perna de 3/16” de largura, assim aumente a dimensão da perna para 0,187 polegada.

7 Agora verifique se haverá falha na área de fusão. Existem duas áreas de interesse, as áreas entre o cordão e a base, marcadas com ‘A’, que estão em tração, e as áreas entre o cordão e a alma, marcadas com ‘B’, que estão em cisalhamento. Uma vez que ambas têm a mesma área total e a resistência ao cisalhamento é aproximadamente a metade da resistência à tração, nós precisamos apenas verificar o cisalhamento nas áreas ‘B’ contra a falha. A resistência mínima ao escoamento do material da chapa determinada a partir da Tabela 16-3 é 36 kpsi.

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{fusão}} = \frac{P}{2Lw} = \frac{16.800}{2(4)(0{,}187)} = 11.230 \text{ psi}$$

$$N_{esc} = \frac{S_{s_y}}{\tau_{xy}} = \frac{36.000(0{,}577)}{11.230} = \frac{20.772}{11.230} = 1{,}85 \qquad (e)$$

Este valor é aceitável, especialmente porque a resistência ao escoamento tem um valor mínimo assegurado.

8 Verifique a resistência da alma, na região do furo de 1 polegada, contra a falha por tração.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{16.800}{3(0{,}5)} = 11.200 \text{ psi}$$

$$N_{esc} = \frac{S_y}{\sigma_x} = \frac{36.000}{11.200} = 3{,}2 \qquad (f)$$

A alma está segura contra falha por escoamento em tração no furo e contra a falha no cordão de solda. Para completar o projeto, é necessário verificar o esmagamento e o cisalhamento no furo. Tal tarefa é deixada para o leitor.

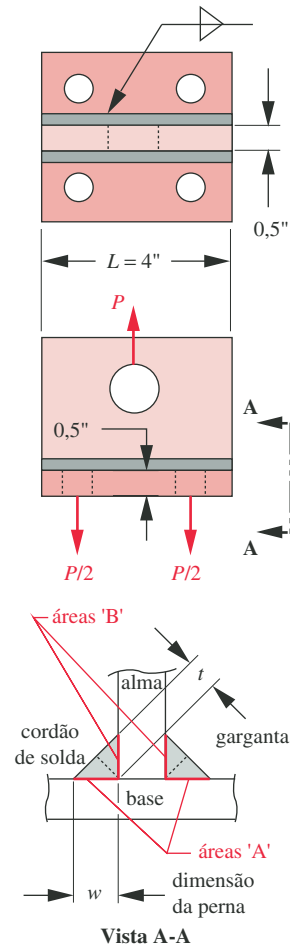



FIGURA 16-11

Exemplos 16-1 e 16-2.

16.6 CARREGAMENTO DINÂMICO DE SOLDAS

Como descrito no Capítulo 6, componentes carregados dinamicamente falham em níveis de tensão muito abaixo daqueles em componentes sujeitos a cargas estáticas. Naquele capítulo aprendemos sobre tensões completamente reversas, repetidas e flutuantes. Aprendemos também que a presença da componente de tensão média em adição à componente de tensão alternada torna a situação pior e requer uma análise utilizando os critérios de Goodman, Gerber ou Soderberg. (Figuras 6-42, 6-43 e 6-44.) As componentes de tensão média e alternada σ_m e σ_a, o intervalo de tensão $\Delta\sigma$, a razão de tensão R, a razão de amplitude A, são definidos pelas Equações 6.1*a*-6.1*d* repetidas abaixo.

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \tag{6.1a}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{6.1b}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{6.1c}$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{6.1d}$$

Efeito da tensão média na resistência à fadiga de uma solda

Soldas carregadas dinamicamente comportam-se de forma surpreendentemente diferente de peças não soldadas, o que torna a tensão média irrelevante para a sua potencial falha por fadiga.* A Figura 16-12 mostra os dados de ensaios de fadiga para corpos de provas soldados e não soldados. Os corpos de provas não soldados são de seção retangular, laminados a quente e carregados axialmente em tração/compressão. Os corpos de prova soldados foram retirados da mesma barra, soldados de topo com penetração completa e deixados iguais aos corpos de prova não soldados com geometria, material e acabamento similares. As amostras foram testadas com carregamento axial com razões de tensão R de 1/4 (flutuante), 0 (repetida) e –1 (completamente reversa). As duas primeiras têm tensão média diferente de zero e a última tem tensão média nula. Observe que a tensão média diferente de zero reduz a resistência das amostras não soldadas, como pode ser visto na Figura 16-16. Mas, os dados das amostras com solda não mostram diferença significativa alguma entre os dados para completamente reverso e para tensão média presente. O intervalo de tensão (Equação 6.1*a*) é o único fator determinante na falha dinâmica de soldas dinamicamente carregadas. Isso torna os cálculos para componentes soldados mais simples que aqueles para componentes de máquinas não soldados. A análise pelo critério de Goodman não é útil aqui. Em vez disso, o **intervalo de tensão** que uma solda experimenta em um ciclo é comparada a uma variação de tensão para a resistência à fadiga, S_{fr}, obtida a partir de ensaios.†

Os fatores de correção são necessários para o cálculo da resistência à fadiga?

Lembre-se, do Capítulo 6, de que, para o aço, o limite de resistência à fadiga, S_f, não é mais do que 50% da sua resistência à tração, S_{ut}, costumando ser ainda muito menor devido aos numerosos fatores que envolvem o acabamento da superfície, tamanho, tipo de carregamento e outros fatores (Equação 6.6). Os dados que definem o limite de vida em fadiga não corrigido $S_{e'} = 0{,}5\ S_{ut}$ são provenientes de ensaios com corpos de prova de pequeno diâmetro, em flexão rotativa com superfícies polidas, e são avaliados como valores médios. Assim, o valor não corrigido $S_{e'}$ deve ser reduzido por fatores observados para explicar a diferença entre o tamanho,

* A especificação AISC 2005[2] estabelece (p. 16.1-400):

Extensos programas de ensaios com corpos de prova em tamanho natural, substanciados pelo cálculo teórico das tensões, confirmaram as seguintes conclusões gerais:

1) A variação da tensão e a severidade dos entalhes são variáveis dominantes para detalhes soldados e vigas.

2) Outras variáveis, como tensão mínima, tensão média e tensão máxima, não são significantes para propósitos de projeto.

3) Aços estruturais com escoamento entre 30 e 100 kpsi (250 a 690 Mpa) não apresentam diferença significativa no limite de resistência à fadiga para detalhes soldados fabricados da mesma maneira.

† A propagação de trincas de fadiga e a vida em fadiga da maior parte das soldagens é proporcional à terceira potência da variação de tensão.[10]

FIGURA 16-12

Dados para a resistência à fadiga de componentes soldados e não soldados com diferentes valores para a variação da tensão (*Adaptado de* [4].)

acabamento da superfície, etc., entre o corpo de prova e o seu componente e, ainda, por fator estatístico de confiabilidade para obter um valor corrigido para o limite de resistência à fadiga, S_e.

Dados de fadiga e resistência à fadiga para soldagens não são obtidos de amostras de laboratório polidas, mas de conjuntos realísticos soldados em uma variedade de configurações. Essas amostras são grandes (pense em componentes de edifícios e pontes) e são feitas de aço laminado a quente com superfícies rugosas, tensões residuais do processo de laminação e soldas verdadeiras contendo concentrações de tensão e tensões residuais. **Assim, nós não precisamos aplicar os fatores de correção para tamanho, acabamento da superfície, etc., em nossos componentes, pois eles são similares aos corpos de provas que forneceram esses dados.**

Efeito da configuração da solda na resistência à fadiga

A resistência de uma soldagem à fadiga também irá variar de acordo com a presença ou ausência de interrupções na geometria do conjunto e dos cordões, os quais criam concentrações de tensão.* Assim, as amostras para ensaio foram deliberadamente produzidas com concentrações de tensão na forma de cordões intermitentes, adição de reforços e uma grande variedade de soldas e juntas como listado anteriormente. A AISC definiu e testou muitas configurações diferentes de solda e, baseado na resistência à fadiga do material-base, agrupou-as em oito categorias identificadas como **A**, **B**, **B′**, **C**, **D**, **E**, **E′** e **F** em ordem decrescente de resistência ao carregamento dinâmico. A categoria **A** é a mais resistente e a **E′** a menos resistente à fadiga. Observe que **F** é a resistência ao cisalhamento do cordão de solda e os outros são para resistência à tração da área de fusão entre a solda e o material-base. Croquis dessas configurações bem como as letras associadas às categorias e resistência à fadiga para vários números de ciclos para cada categoria estão todas publicadas na referência [2]. O esquema é muito grande para ser publicado aqui em sua totalidade, mas alguns exemplos selecionados são mostrados na Figura 16-13.

* De acordo com Barsom e Rolfe,[10]

Um dos mais sensíveis detalhes de solda é a terminação do cordão orientada perpendicularmente (transversalmente) ao campo de tensão cíclico aplicado. Nesse caso, trincas de fadiga iniciam-se a partir da margem do cordão de solda e propagam-se através do material-base adjacente. De fato, a maioria das falhas de fadiga relacionadas com soldas inicia-se na superfície, geralmente na margem.

Observe que muitos exemplos neste capítulo têm cordões de solda dessa forma.

A Figura 16-13*a* mostra um componente da categoria **A**. Note que ele não tem soldas. É a categoria mais resistente e, com efeito, uma referência contra a qual as outras categorias podem ser comparadas. A relativa baixa resistência à fadiga dessa amostra (24 kpsi), comparada ao corpo de prova rotativo em flexão do mesmo material (aproximadamente 30 kpsi) deve-se ao tamanho muito maior, rugosidade da superfície, tensões residuais do processo de laminação a quente e às bordas cortadas por maçarico. A Figura 16-13*b* tem um cordão de solda contínuo em todo o comprimento do componente e pertence à categoria **B**. A Figura 16-13*c* é similar a 16-13*b*, porém contém reforços. Na direção da tensão, os reforços são curtos (apenas a espessura do membro), mas alguma tensão fluirá do membro principal para o reforço, criando uma concentração de tensão, e a categoria de resistência será, portanto, rebaixada para **C**. A Figura 16-13*d* pode ser qualquer uma das três categorias dependendo do material-base, mesmo se o

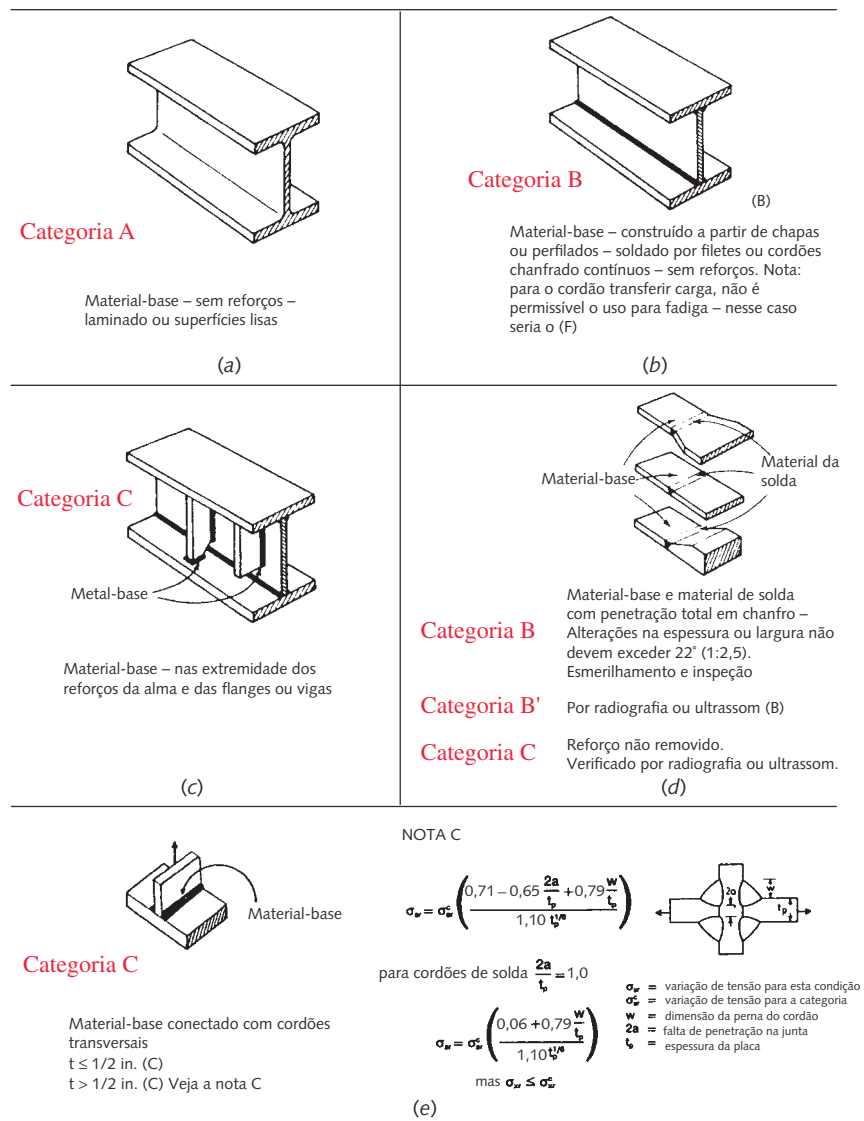



FIGURA 16-13

Categorias de resistência AISC para componentes soldados sujeitos a carregamento de fadiga. (*Extraído de* [2])

reforço for removido por esmerilhamento. A Figura 16-13*e* tem uma geometria muito diferente da Figura 16-13*c*, mas também é da categoria **C** com uma **observação C** anexa que se aplica se a espessura da alma for maior que 0,5 polegada. A **observação C** é mostrada na Figura 16-13*e*. Observe o nível de detalhes desse ensaio – existem muito mais nas especificações AISC.* O material da solda é, quase sempre, da categoria **F**, exceto nos casos de solda transversal de JPC, a qual pode ser da categoria **B** ou **C**, dependendo da remoção do reforço.

Extensos ensaios de soldagens em cada uma das categorias foram realizados pelo Highway Research Board nos anos de 1960.[11] Ensaios de 374 vigas de 10 pés de extensão por 5 polegadas de largura e vários detalhes soldados foram realizados por dois laboratórios de universidades distintas. Os dados de ambos apresentaram uma correlação estatística bem próxima. A Figura 16-14*a* mostra os dados do ensaio para as vigas da categoria **A** e a Figura 16-14*b* mostra os dados para as vigas da categoria **E**. Os três conjuntos de dados foram obtidos para diferentes valores de tensão mínima, mas com a mesma variação de tensão. O agrupamento dos dados mostra que o único parâmetro de tensão com algum efeito é a variação de tensão. As tensões máxima, média e mínima não são fatores para a falha.

Os dados foram ajustados por regressão para o gráfico log-log. As equações são mostradas nos gráficos. Uma delas tem inclinação de 3,372 e a outra de 2,877. As linhas acima e abaixo da linha média representam desvio padrão de ±2, que inclui 95% da população. A linha da banda inferior é tomada como a linha do limite de resistência à fadiga. Relações exponenciais para a resistência à fadiga como uma função do número de ciclos foram desenvolvidas a partir dos dados e são apresentadas a seguir. A inclinação média de todos os dados para as categorias **A** até **E'** foi arredondada para 1/3 para a equação de projeto 16.2*a*.

A Figura 16-14*c* mostra os diagramas *S-N* para cada uma das categorias de solda da AISC baseados nesses dados. **Estes diagramas são diferentes daqueles apresentados no Capítulo 6, nos quais as ordenadas mostram as tensões alternadas** σ_a (representadas com limite de fadiga S_f) **em vez de mostrar a variação de tensão** $\Delta\sigma$ (identificadas como *variação do limite de fadiga* S_{fr}). **Eles também diferem por não apresentarem valores médios de resistência à fadiga, mas valores que são dois desvios-padrão abaixo da média.** Embora não sejam valores verdadeiramente mínimos, eles estão próximos do mínimo, pois 95% da população está dentro dos mais ou menos dois desvios-padrão da média, implicando que apenas 2,5% ficam abaixo desses valores. **Assim, não é necessário aplicar o fator de confiabilidade para reduzir o limite de resistência, a menos que se deseje uma confiabilidade superior a 95%**; neste caso, faça uso da Tabela 16-4.

Todas as categorias, com exceção da **F**, têm a mesma inclinação de 1/3 e as suas interceptações decrescem com o aumento do nível de categoria. A categoria **F**, que se aplica ao metal de solda e não ao metal-base, tem uma inclinação de 1/6 mais suave e com a interceptação também mais baixa. Observe que os joelhos, que definem o início da vida infinita, também variam com a categoria de 2E6 até mais de 1E7 ciclos. Essas curvas são lineares acima do joelho em um gráfico log-log, permitindo que os dados sejam ajustados por equações exponenciais. Para todas as categorias, com exceção da **F**, a faixa de tensão de fadiga permissível S_{fr} é

$$S_{fr} = C_{conf}\left(\frac{C_f}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \geq S_{er} \qquad (16.2a)$$

onde *N* é o número de ciclos. C_F *e* S_{er} (*variação do limite de tensão da vida em fadiga*) são dados nas Tabelas 16-5a e 16-5b para unidades do sistema inglês e SI, respectivamente. Os valores são para aços laminados a quente com limite de escoamento de 36 a 110 kpsi.

Tabela 16-4
Fator de confiabilidade para $S_d = 0{,}08\ \mu$ (95%)

Confiabilidade %	C_{conf}
50	1,152
90	1,033
95	1,000
99	0,938
99,9	0,868
99,99	0,809
99,999	0,759

Tabela 16-5a[2]
Coeficiente C_f e S_{er} para a Equação 16.2 em unidades do sistema inglês

Categoria AISC	C_f ips	S_{er} kpsi
A	250 E08	24,0
B	120 E08	16,0
B'	61 E08	12,0
C	44 E08	10,0
D	22 E08	10,0
E	11 E08	4,5
E'	3,9 E08	2,6
F	150 E10	8,0

Tabela 16-5b[2]
Coeficiente C_f e S_{er} para a Equação 16.2 em unidades SI

Categoria AISC	C_f SI	S_{er} MPa
A	170 E10	165
B	83 E09	110
B'	42 E09	82
C	30 E09	69
D	15 E09	48
E	7,6 E09	31
E'	2,7 E09	18
F	10 E12	55

* As especificações da AISC para construções estruturais em aço podem ser livremente baixadas em www.aisc.org.

Para a categoria **F**, que se aplica para as tensões de cisalhamento no material de solda, torna-se:

$$S_{frs} = C_{conf}\left(\frac{C_f}{N}\right)^{\frac{1}{6}} \geq S_{ers} \qquad (16.2b)$$

e C_F e S_{ers} para categoria **F** também são mostrados nas Tabela 16-5a e 16-5b. C_{conf} é dado na Tabela 16-4.*

Os valores na Tabela 16-5 podem ser reduzidos por um fator de três para o uso de alumínio. Para usar esses dados de resistência calcule a variação à tensão

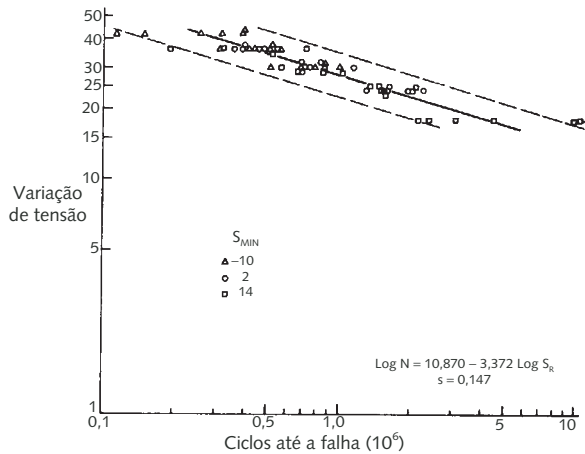
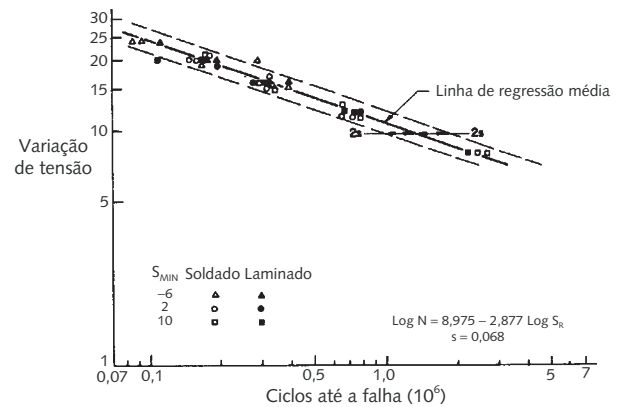
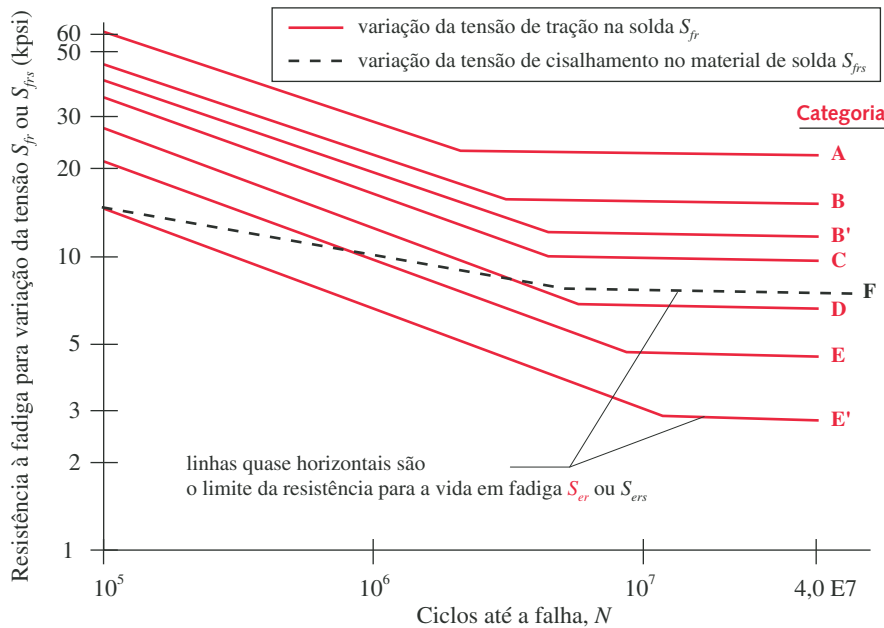
* O Welding Research Council[12] recomenda que o expoente da Equação 16.2b seja 1/5 em vez de 1/6.

(*a*) Dados experimentais para a Categoria A [11]

(*b*) Dados experimentais para a Categoria E [11]

(*c*) Linhas de regressão ajustadas para dados experimentais de resistência à fadiga para todas as categorias

FIGURA 16-14

Dados experimentais para o limite de resistência em fadiga de peças soldadas[11] nas categorias da AISC[2] para o material de solda.[3]

aplicada $\Delta\sigma$ ou $\Delta\tau$ e determine o fator de segurança para a tração na área de fusão ou o cisalhamento no material de solda, respectivamente, como

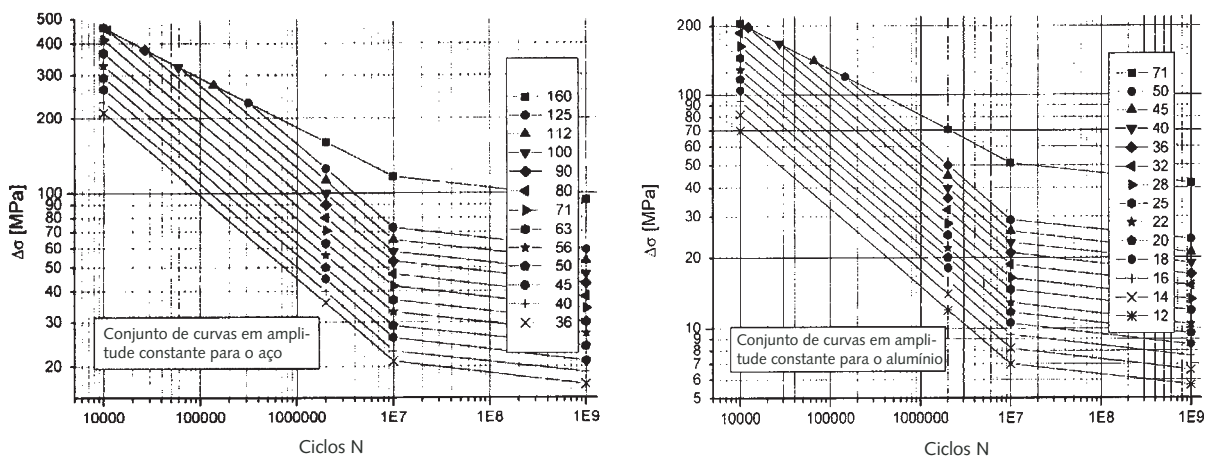
$$N_{fr} = \frac{S_{fr}}{\Delta\sigma} \quad \text{ou} \quad N_{frs} = \frac{S_{frs}}{\Delta\tau} \tag{16.3}$$

Existe um limite de resistência à fadiga para soldagens?

Até recentemente foi assumido que, uma vez que o joelho da curva da Figura 16-14*c* foi alcançado, a curva permanece horizontal até o número de ciclos infinito para aços e alguns poucos materiais, como o titânio. Isso permite usar aquele valor como um limite para a vida infinita, como foi feito no Capítulo 6 para componentes sem solda. Pesquisas mais recentes[12] indicam que o limite de resistência à fadiga para a solda continua o decaimento além do joelho.

A Figura 16-5 mostra exemplos de curvas de fadiga para a variação da tensão para aço e alumínio tendo como fonte a referência 12. Os dados foram compilados após muitos ensaios realizados pelo Welding Research Council (WRC) na soldagem de conjuntos de várias geometrias. O WRC definiu categorias similares àquelas da AISC mostradas na Figura 16-13, exceto que a WRC tem mais categorias representadas por números em vez de por letras. Veja a referência 12 para as definições. Os números atribuídos aos símbolos da Figura 16-15 referem-se à resistência da categoria WRC tomada a 2 milhões de ciclos. O joelho para o aço e alumínio em tração é obtido a 1E7 ciclos, mas os dados de fadiga em cisalhamento (não mostrados) têm o joelho a 1E8 ciclos. As figuras mostram a resistência à fadiga para a variação da tensão de tração declinando com o número de ciclos além do joelho, porém com uma inclinação mais suave. O expoente da equação da curva é definido como 1/22 após o joelho.[12] A Figura 16-14 reflete também esse fato, mostrando as linhas com uma inclinação negativa após o joelho. Deve-se evitar chamar este valor de limite de resistência à fadiga, referindo-se a ele, então, como uma resistência à fadiga S_{ers}.

Falha por fadiga em carregamentos de compressão?

Outra diferença entre peças sem soldas e peças soldadas em carregamento de fadiga é a tensão residual nas soldas. Lembre-se que no Capítulo 6 estabeleceu-

(*a*) Curvas de variação da tensão para componentes soldados de aço

(*b*) Curvas de variação da tensão para componentes soldados de alumínio

FIGURA 16-15

Dados experimentais de resistência à fadiga (variação da tensão) para componentes soldados em várias categorias do Welding Research Council.[12]

-se que as falhas por fadiga são devidas apenas a tensões trativas alternadas. As oscilações das tensões compressivas podem ser ignoradas seguramente. Na verdade, vimos no Capítulo 15 como usar as tensões residuais compressivas na zona de aperto de parafusos pré-carregados para "esconder" parcialmente as tensões trativas oscilantes do parafuso carregado em tração. Consideramos que as tensões compressivas são bem-vindas em carregamentos dinâmicos de componentes **sem solda**. Quando soldas são introduzidas em um componente, isto não é mais verdadeiro. **Tensões compressivas oscilantes também podem causar trincas de fadiga**. Como isso acontece?

A resposta é **tensão residual de tração**. Como descrito anteriormente e mostrado na Figura 16-10, *uma solda sempre terá tensão residual de tração no valor da tensão de escoamento do material*. Considere dois diferentes casos de carregamento em um componente soldado cuja tensão de escoamento é de 50 kpsi. No primeiro caso, uma tensão de tração cíclica que varia entre zero e 10 kpsi é aplicada na região da solda. No primeiro ciclo, a tensão na área da solda ficará acima da tensão de escoamento. O material irá escoar localmente relaxando parte da tensão residual, aproximadamente 10 kpsi. Quando o ciclo volta a zero, a tensão no componente tem apenas 40 kpsi de tensão residual. Os próximos e sucessivos ciclos de carregamento farão a tensão oscilar entre 40 a 50 com uma variação de tensão de 10 kpsi.

No segundo caso, o componente tem os mesmos 50 kpsi de tensão residual, mas a carga aplicada de compressão varia entre 0 a −10 kspi. A tensão local no cordão vai oscilar entre 50 e 40 kpsi em cada ciclo. Uma vez que o sentido da variação da tensão não é importante, tem-se o mesmo valor para a variação de tensão em ambos os casos. Carregamentos compressivos podem desenvolver trincas em uma solda caso ocorra variação de tensão em tração. Essas trincas crescem apenas na zona onde há tensão residual e não se propagam para o material-base, mas, ainda assim, enfraquecem a solda e podem causar a falha do cordão. O Capítulo 6 faz advertências sobre tensões residuais de tração em peças carregadas dinamicamente, mas, infelizmente, a natureza da solda garante a presença de tensões residuais com valores elevados. As tensões residuais podem ser reduzidas com o jateamento com granalha de aço (*shot peening*), mas isso é pouco eficaz em soldas.

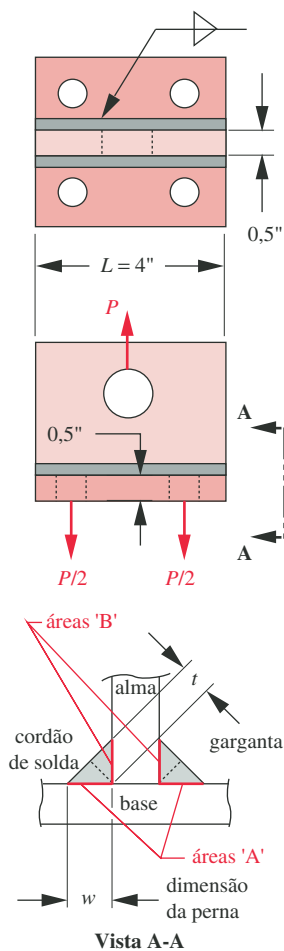



FIGURA 16-11 (Repetida)

Exemplos 16-1 e 16-2.

EXEMPLO 16-2

Projeto de um cordão de solda dinamicamente carregado

Problema **A seção Tê da Figura 16-11 será carregada dinamicamente com tensões cíclicas variando de 0 a um valor máximo. Determine o maior valor possível de carga em tração que a solda pode suportar com segurança para uma vida infinita e fator de segurança $N_{frs} = 1{,}5$.**

Dados **O Tê tem espessura de 0,5 in com aba de 4 in em aço ASTM A36 laminado a quente em ambas as placas e filete de solda com perna de 3/16" em todo o comprimento em ambos os lados. Isso está de acordo com o tamanho mínimo especificado pela Tabela 16-2.**

Hipóteses **Foi suposto que a resistência do eletrodo está de acordo com a resistência da chapa. A tensão de cisalhamento na garganta da solda governa o projeto (veja Exemplo 16-1). A carga é uniformemente distribuída ao longo do comprimento da solda.**

1 A tensão irá variar entre 0 e um valor máximo em cada ciclo. Adaptando a Equação 6.1*a*, a variação da tensão de cisalhamento, $\Delta\tau$, é

$$\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} = \tau_{max} \qquad (a)$$

2 A geometria da solda é similar à da Figura 16-13*e*. A **observação C** na Figura 16-13*e* indica que o componente pertence à categoria **C**, baseado em sua espessura, porém essa configuração tem as soldas recebendo a carga diretamente. Nesse caso deve-se usar a resistência à fadiga para a categoria **F**, apenas o metal da solda, na área da garganta da solda. Da Tabela 16-5, a variação da tensão para a resistência à fadiga, S_{ers}, para a categoria **F** e vida infinita é 8.000 psi.

3 Calcule uma variação de tensão de cisalhamento permissível baseado na S_{ers} e o fator de segurança desejado.

$$\tau_{adm} = \frac{S_{ers}}{N_{frs}} = \frac{8000}{1{,}5} = 5333 \text{ psi} \qquad (b)$$

4 A peça, da maneira como foi projetada, tem dois filetes com perna de 3/16" e 4 polegadas de comprimento. Precisamos da área da garganta para o cálculo, a qual é 0,707 da perna vezes o comprimento. A carga, dada pela Equação 4.9, para criar a tensão admissível de cisalhamento:

$$P_{\max} = \tau_{adm} A_{cis} = 5333(2)(4)(0{,}187)(0{,}707) = 5641 \text{ lb} \qquad (c)$$

5 Verifique se a área de fusão da solda está segura. Os pontos mais frequentes de falhas são as margens. Use a área da perna da solda no lugar da área da garganta.

$$\sigma_{margem} = \frac{P_{\max}}{A_{fusão}} = \frac{5.641}{2(4)(0{,}187)} = 3.770 \text{ psi} \qquad (d)$$

Uma solda de categoria **C** tem S_{er} = 10 kpsi, segundo a Tabela 16-5a, dando um fator de segurança de 10.000/3770 = 2,65. A solda é limitada pela garganta, como acontece com as soldas de filete.

6 Deseja-se verificar ainda se a carga cíclica não causará falha estática ou em fadiga em lugares mais afastados da solda. Por exemplo, a análise pelo critério de Goodman (Capítulo 6) deve ser feita para este carregamento repetitivo para a pequena seção transversal na região do furo de 1 polegada e para o rasgamento neste mesmo furo. Quaisquer parafusos utilizados para a fixação dessa base deverão ser verificados para a fadiga sob a pré-carga aplicada (Capítulo 15). Essas tarefas são deixadas para o leitor.

16.7 TRATANDO A SOLDA COMO UMA LINHA

O projetista procura sempre determinar o tamanho da solda (área da seção e comprimento) necessário para suportar as cargas aplicadas. Uma abordagem é estipular um tamanho para a solda, calcular o coeficiente de segurança e, se inadequado, alterar o tamanho e recalcular até encontrar um resultado que satisfaça as exigências iniciais. Um método mais simples e direto, como definido por Blodgett,[1] é tratar a solda como uma linha. Em vez de tensões, esse método de cálculo tem um número que representa a carga por unidade de comprimento (lbf/in ou N/m), o qual é facilmente convertido para a seção da solda necessária usando os valores de tensões permissíveis para solda a partir das Equações 16.1, para carregamento estático, e 16.2, para carregamento dinâmico. A área da solda e a carga são normalizadas para uma unidade de comprimento da garganta. Fatores de unidade de carga admissíveis, relativos à resistência do eletrodo revestido para cargas estáticas, e a perna do cordão de solda *w* são mostrados na Tabela 16-6. Esses valores são calculados como 0,707(0,30)*Exx*[5] e são para cantos à 90°.

Os carregamentos em uma dada posição de soldagem são geralmente um ou uma combinação de carregamentos de tração direta, cisalhamento direto, flexão e torção. Essas tensões, associadas com cada um desses carregamentos, foram

Tabela 16-6[5]
Força estática unitária permissível em um cordão de solda como uma função do comprimento da perna, *w*

Número do eletrodo	Foça unitária admissível lb/in
E60	12 730 *w*
E70	14 850 *w*
E80	16 970 *w*
E90	19 090 *w*
E100	21 210 *w*
E110	23 330 *w*
E120	25 450 *w*

definidas nos capítulos iniciais deste livro. As equações para as tensões podem ser convertidas em f_x = *carga* por *comprimento* da garganta, t, como segue:

$$\begin{aligned} &\text{Tração direta ou compressão} && f_n = \frac{P}{A_w} \\ &\text{cisalhamento direto} && f_s = \frac{V}{A_w} \\ &\text{flexão} && f_b = \frac{M}{S_w} \\ &\text{torção} && f_t = \frac{Tc}{J_w} \end{aligned} \tag{16.4}$$

As unidades de A_w são *área/comprimento* = comprimento. S_w é o **módulo da seção** *Z /comprimento* = comprimento[2] e J_w é o **momento de inércia** *J/comprimento = comprimento*[3]. Isso torna f_x = *carga por comprimento* de garganta para todos os casos.

A Figura 16-16 mostra nove configurações de soldagem e as equações para calcular os fatores A_w, S_w e J_w. A aplicação disso será vista no próximo exemplo.

EXEMPLO 16-3

Projeto de um conjunto soldado estaticamente carregado

Problema **O conjunto soldado na Figura 16-17 tem cordões de solda entre todo o perímetro do tubo e as chapas. Determine o tamanho do cordão necessário para suportar um carregamento de P = 2700 lbf.**

Dados **O material das chapas é aço estrutural ASTM A36 e será utilizado o eletrodo revestido E70xx. O tubo é Schedule 40 com 4,5 in de diâmetro externo por 0,24 in de espessura de parede. Dimensão a = 15 in e r = 10 in.**

Hipóteses **O cordão suporta a carga diretamente. As tensões no cordão limitarão o projeto, visto que as áreas de fusão por cordão são maiores que suas áreas de garganta. Despreze os pesos do braço e do tubo.**

Solução **Veja a Figura 16-17 (na página seguinte).**

1 A carga em balanço coloca o tubo e a solda com carregamento combinado de flexão, torção e cisalhamento direto no engaste, local onde o momento e torque experimentam um valor máximo. A torção e o cisalhamento direto são uniformemente distribuídos ao longo do cordão. A posição da tensão máxima será na parte superior do tubo, na margem da solda marcada com o ponto *A,* onde a tensão de flexão é máxima em tração. Inicialmente devem-se calcular as cargas unitárias na solda devido aos modos de carregamento e, após, encontrar o vetor soma.

2 Esse é o Caso 9 na Figura 16-16, que mostra o fator de cisalhamento direto $A_w = \pi d$. Use-o para encontrar a carga unitária f_s no ponto A devido ao cisalhamento direto.

$$f_s = \frac{P}{A_w} = \frac{P}{\pi d} = \frac{2700}{4{,}5\pi} = 191{,}0 \text{ lb/in} \tag{a}$$

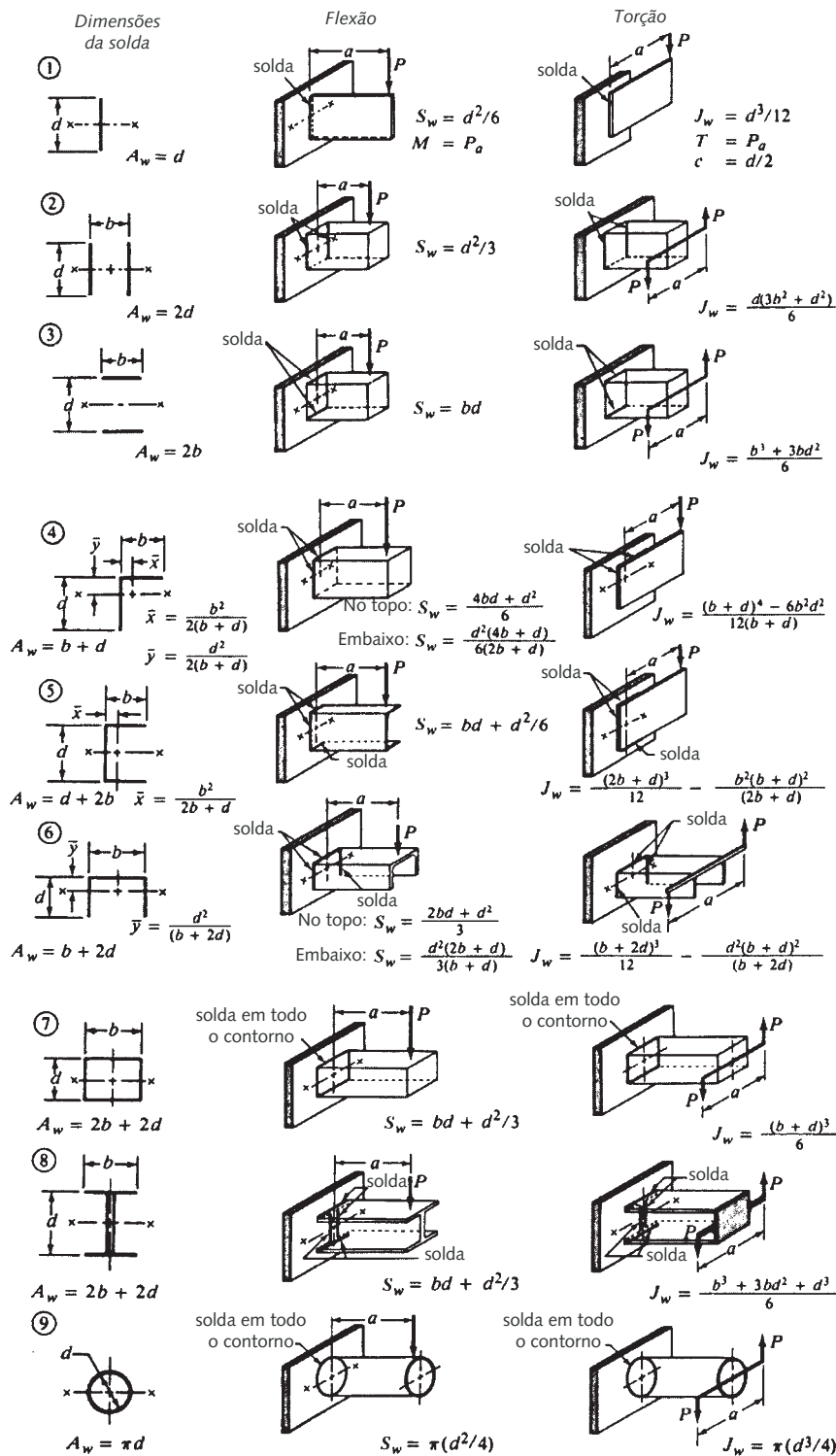



FIGURA 16-16

Fatores geométricos para analisar uma solda como uma linha (reimpresso a partir de [7]).

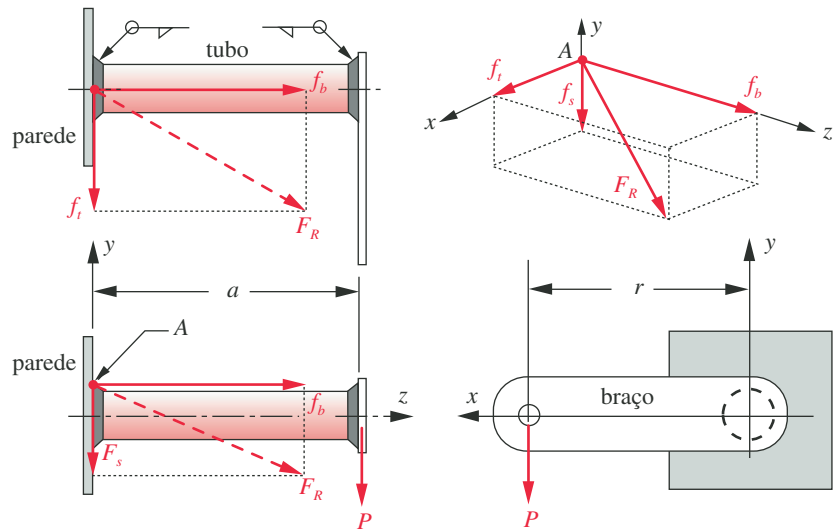



FIGURA 16-17

Exemplos 16-3 e 16-4.

3 Encontre a carga unitária f_b no ponto A devido ao momento fletor utilizando S_w do Caso 9.

$$f_b = \frac{M}{S_w} = \frac{Pa}{\pi d^2/4} = \frac{2700(15)}{\pi\left(4{,}5^2/4\right)} = 2546{,}5 \text{ lb/in} \qquad (b)$$

4 Encontre a carga unitária f_t no ponto A devido ao momento torcional utilizando J_w do Caso 9.

$$f_t = \frac{Tc}{J_w} = \frac{Prd/2}{\pi d^3/4} = \frac{2700(10)(4{,}5/2)}{\pi\left(4{,}5^2/4\right)} = 848{,}8 \text{ lb/in} \qquad (c)$$

5 Encontre a magnitude da força resultante no ponto A (o carregamento máximo na solda).

$$|F_R| = \sqrt{f_s^2 + f_b^2 + f_t^2} = 2691 \text{ lb/in} \qquad (d)$$

6 Isso é a carga por unidade de comprimento da solda. A área da garganta de uma polegada linear de solda é igual à dimensão da garganta. Assim, tomando a tensão na garganta igual ao valor admissível da Equação 16.1, use essa carga unitária e determine a área necessária para alcançar o valor de tensão admissível. Da Equação 16.1, um eletrodo revestido E70 tem uma tensão admissível de 0,30(70.000) = 21.000 psi.

$$t = \frac{|F_R|}{\tau_{adm}} = \frac{2691 \text{ lb/in}}{21.000 \text{ lb/in}^2} = 0{,}128 \text{ in}^2\text{/in} \qquad (e)$$

7 Essa é a dimensão da garganta, mas cordões de solda são especificados pela dimensão da perna. Assumindo um filete com pernas iguais, em uma junta à 90°, a dimensão da perna será:

$$w = 1{,}414t = 1{,}414(0{,}128) = 0{,}181 \text{ in} \qquad (f)$$

8 Especifique um cordão com perna de 3/16”. Isso está de acordo com o tamanho mínimo de solda especificado na Tabela16-2 e tem um fator de segurança de aproximadamente 2,5 baseado na Equação 16.1.

9 A solda entre o tubo e o braço tem um menor nível de tensão que a solda no ponto A porque o momento fletor é zero no início da viga em balanço. Este

ponto apresenta apenas cisalhamento direto e torção, o que representa 32% da tensão em A. Utilize um cordão de 3/16", que é o valor mínimo para a parede deste tubo, para manter a consistência na fabricação.

EXEMPLO 16-4

Projeto de um conjunto soldado dinamicamente carregado

Problema **O conjunto soldado da Figura 16-17 tem cordões de solda entre o tubo e as placas nas extremidades. Determine o tamanho da solda necessário para suportar uma carga dinâmica que varia entre $F_{min} = -80$ lb e $F_{max} = 600$ lb para vida infinita e um fator de segurança $N_{fr} = 1{,}5$.**

Dados **O material das chapas é aço estrutural ASTM A36 e será utilizado o eletrodo revestido E70xx. O tubo é Schedule 80 com 4,5 in de diâmetro externo por 0,337 in de espessura de parede (diâmetro interno de 3,83 in). Dimensão $a = 15$ in e $r = 10$ in.**

Hipóteses **A soldagem é de categoria C, mas a solda pode ser limitada pela categoria F.**

Solução **Veja a Figura 16-17.**

1 Já foi visto que as falhas devidas a carregamentos dinâmicos dependem apenas da variação da tensão ou da oscilação entre os valores máximos e mínimos de tensão durante o ciclo.[2] A variação da força é dada por $F_{max} - F_{min} = 600 - (-80) = 680$ lb.

2 Esse é o Caso 9 na Figura 16-16, que mostra o fator de cisalhamento direto $A_w = \pi d$. Use-o para encontrar a carga unitária f_s no ponto A devido ao cisalhamento direto.

$$f_s = \frac{P}{A_w} = \frac{P}{\pi d} = \frac{680}{4{,}5\pi} = 48{,}1 \text{ lb/in} \qquad (a)$$

3 Encontre a carga unitária f_b no ponto A devido ao momento fletor utilizando S_w do Caso 9.

$$f_b = \frac{M}{S_w} = \frac{Pa}{\pi d^2/4} = \frac{680(15)}{\pi\left(4{,}5^2/4\right)} = 641{,}3 \text{ lb/in} \qquad (b)$$

4 Encontre a carga unitária f_t no ponto A devido ao momento torcional utilizando J_w do Caso 9.

$$f_t = \frac{Tc}{J_w} = \frac{Pr\,d/2}{\pi d^3/4} = \frac{680(10)(4{,}5/2)}{\pi\left(4{,}5^3/4\right)} = 213{,}8 \text{ lb/in} \qquad (c)$$

5 Encontre a magnitude da força resultante no ponto A (carregamento máximo na solda).

$$|F_R| = \sqrt{f_s^2 + f_b^2 + f_t^2} = 678 \text{ lb/in} \qquad (d)$$

Isso é a carga por unidade de comprimento da solda.

6 Da Tabela 16-5a, uma união da categoria **F** tem uma resistência à fadiga em cisalhamento (variação) $S_{ers} = 8000$ psi. Aplicando o fator de segurança a essa resistência, tem-se a tensão admissível.

$$\tau_{adm} = \frac{S_{ers}}{N_{fr}} = \frac{8000}{1{,}5} = 5333 \text{ psi} \qquad (e)$$

7 A área da garganta de uma polegada linear de solda é igual à dimensão da garganta. Assim, tomando a tensão na garganta igual ao valor admissível da equação (*e*), use essa carga unitária e determine a área unitária necessária para alcançar o valor de tensão admissível.

$$t = \frac{|F_R|}{\tau_{adm}} = \frac{678 \text{ lb/in}}{5{,}333 \text{ lb/in}^2} = 0{,}127 \text{ in}^2\text{/in} \qquad (f)$$

8 Essa é a dimensão da garganta, mas cordões de solda são especificados pela dimensão da perna. Considerando um filete a 45°, a dimensão da perna será:

$$w = 1{,}414t = 1{,}414(0{,}127) = 0{,}180 \text{ in} \qquad (g)$$

9 Especifique um cordão com perna de 3/16" (0,187") para obter um coeficiente de segurança de 1,5. Isso está de acordo com o tamanho mínimo de solda especificado na Tabela 16-2.

10 A solda entre o tubo e o braço tem um menor nível de tensão que a solda no ponto *A* porque o momento fletor é zero no início da viga em balanço. Essa solda apresenta apenas cisalhamento direto e torção, o que representa 32% da tensão em *A*. A Tabela 16-2 especifica uma solda mínima de 3/16" para essa parede de tubo – o mesmo valor do ponto A, o que simplifica a fabricação.

11 Também é necessário verificar se as tensões na área de fusão entre o tubo e a solda não falharão. Lembre-se que a variação de tensão afeta apenas a solda, devido à oscilação da carga, neste caso 680 lbf, do passo 1. Encontre a variação das tensões normais de flexão e de cisalhamento para o ponto *A* usando a Equação 4.11b e Equação 4.23*b*, respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Pa)c}{I} = \frac{680(15)(2.25)}{\pi\left(4{,}5^4 - 3{,}83^4\right)/64} = 2{,}388 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Pr)c}{J} = \frac{680(10)(2{,}25)}{\pi\left(4{,}5^4 - 3{,}83^4\right)/32} = 796 \text{ psi} \qquad (i)$$

12 Encontre a máxima tensão de cisalhamento, tensões principais e a tensão equivalente de von Mises que resulta dessa combinação de tensões utilizando a Equação 4.6 e 5.7*c*.

$$\begin{aligned}
\tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{2388 - 0}{2}\right)^2 + 796^2} = 1435 \text{ psi} \\
\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{max} = \frac{2388}{2} + 1435 = 2629 \text{ psi} \\
\sigma_2 &= 0 \\
\sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{max} = \frac{2388}{2} - 1435 = -241 \text{ psi}
\end{aligned} \qquad (j)$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{2629^2 - 2629(-24) + (-24)^2} = 2757 \text{ psi} \qquad (k)$$

13 Suponha que este conjunto se enquadra na categoria **C** da AISC. A Tabela 16-5a estabelece que o limite de resistência à fadiga para vida infinita é 10.000 psi. Assim, o fator de segurança é, então

$$N_f = \frac{S_f}{\sigma'} = \frac{10000}{2757} = 3{,}62 \qquad (l)$$

A solda é o limitante desse projeto.

16.8 SOLDAS COM CARREGAMENTO EXCÊNTRICO

Soldagens são comumente utilizadas para suportar cargas deslocadas ou excêntricas, como nos Exemplos 16-3 e 16-4. Existem muitas outras configurações, como mostra a Figura 16-16. Algumas delas, como a mostrada na Figura 16-18, requerem que o centroide desse arranjo de solda seja calculado. Esse é o mesmo procedimento descrito na Seção 15-10 e no Exemplo 15-6, onde um padrão com parafusos ou pinos foi utilizado para suportar uma carga excêntrica, e o cálculo do seu centroide foi necessário. O arranjo da Figura 16-18 é definido na Figura 16-16, item 5. Uma equação para a localização do centroide é definida na Figura 16-16, assim como as expressões para o cálculo das cargas unitárias devido ao cisalhamento direto ou ainda flexão ou torção, dependendo se a localização da força aplicada está ou não no plano. Essa aplicação será vista no exemplo a seguir.

EXEMPLO 16-5

Projeto de uma solda com carregamento excêntrico

Problema **O conjunto soldado da Figura 16-18 tem cordões de solda em seus três lados da união. Determine o tamanho necessário da solda para suportar uma carga estática de $P = 4000$ lbf. Verifique também o escoamento na viga.**

Dados **O material é aço estrutural ASTM A36 e o eletrodo revestido é E70xx. As placas tem 1/2″ de espessura. Dimensão $a = 12''$, $b = 3''$ e $d = 6''$.**

Hipóteses **Considere a solda como uma linha. O padrão da solda corresponde ao item 5 da Figura 16-16, e a solda será o limitante para esse projeto de categoria F.**

Solução **Veja a Figura 16-18.**

1 Calcule o centroide do arranjo da solda com a equação dada na Figura 16-16.

$$\bar{x} = \frac{b^2}{2b+d} = \frac{3^2}{2(3)+6} = \frac{9}{12} = 0{,}75 \text{ in} \qquad (a)$$

2 Encontre a distância entre a carga aplicada e o centroide.

$$r = a + b - \bar{x} = 12 + 3 - 0{,}75 = 14{,}25 \text{ in} \qquad (b)$$

3 A união soldada está carregada em cisalhamento direto e também tem um momento torcional com referência ao seu centroide.

$$f_s = \frac{P}{A_w} = \frac{P}{2b+d} = \frac{4000}{6+2(3)} = 333{,}3 \text{ lb/in} \qquad (c)$$

4 O momento torcional é aplicado no centroide, que está a uma distância r da carga aplicada P.

$$T = Pr = 4000(14{,}25) = 57.000 \text{ lb - in} \qquad (d)$$

5 O fator geométrico torcional para essa solda em relação ao centroide (Figura 16-16) é

$$J_w = \frac{(2b+d)^3}{12} - \frac{b^2\,(b+d)^2}{2b+d} = \frac{(12)^3}{12} - \frac{9(9)^2}{12} = 83{,}25 \text{ in}^2 \qquad (e)$$

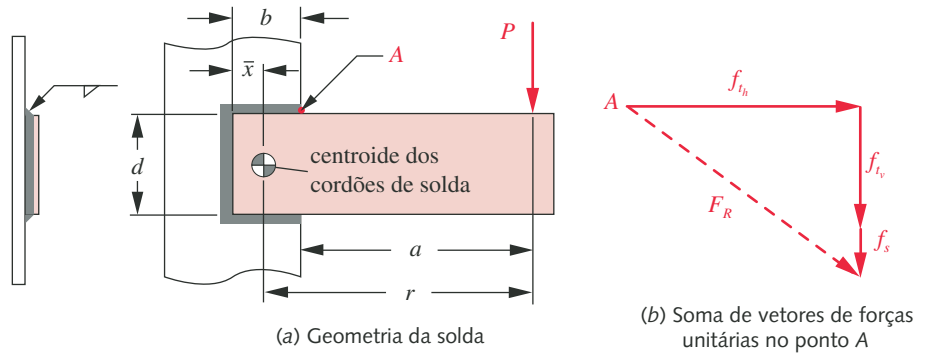



FIGURA 16-18

Exemplo 16-5.

6 O maior valor para tensão devida ao torque se localizará no ponto mais afastado do centroide, marcado com a letra *A* na Figura 16-18. Será mais simples se as componentes horizontal e vertical, no ponto *A,* forem calculadas, adicionando à componente vertical o cisalhamento direto e, então, calculando a força resultante unitária. Para a componente horizontal, o braço é *d / 2*. Para a componente vertical, o braço é dado por *r – a*.

$$f_{t_h} = \frac{T\,d/2}{J_w} = \frac{57{,}000\,(6/2)}{83{,}25} = 2054{,}1 \text{ lb/in}$$

$$f_{t_v} = \frac{T(r-a)}{J_w} = \frac{57{,}000\,(14{,}25-12)}{83{,}25} = 1540{,}5 \text{ lb/in} \qquad (f)$$

$$F_R = \sqrt{f_{t_h}^2 + \left(f_{t_v} + f_s\right)^2} = \sqrt{2054{,}1^2 + (1540{,}5 + 333{,}3)^2} = 2780 \text{ lb/in}$$

7 A área unitária da garganta será, então

$$t = \frac{|F_R|}{\tau_{adm}} = \frac{2780 \text{ lb/in}}{0{,}30(70.000) \text{ lb/in}^2} = 0{,}132 \text{ in}^2\text{/in} \qquad (g)$$

utilizando a S_{ut} para o eletrodo E70 e a Equação 16.1 para a τ_{adm}. O comprimento da perna é

$$w = 1{,}414t = 1{,}414(0{,}132) = 0{,}187 \text{ in} \qquad (h)$$

8 O tamanho mínimo recomendado para placas com espessura de 1/2” é 3/16”, aproximadamente o mesmo valor encontrado. Utilize um cordão com 3/16”.

16.9 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROJETO DE SOLDAS EM MÁQUINAS

A soldagem pode ser uma escolha prática para a montagem de subconjuntos de formas complexas que receberão outros componentes de máquinas. Mas isto pode se revelar uma escolha economicamente inadequada se não for projetada adequadamente. Uma significativa parcela dos custos envolvidos está nas fixações (gabaritos) e no preparo das peças, para mantê-las no lugar enquanto são soldadas. Em alguns casos, pode ser mais barato usinar uma estrutura complexa a partir de um bloco de material bruto fazendo o uso de modernos centros de usinagem CNC (controle numérico computadorizado). Essas máquinas podem usinar formas complexas definidas por sistemas de modelamento sólido (CAD) muito rapidamente e com custo baixo, e, por serem programáveis, trabalham sem

a assistência de um operador. O percurso da ferramenta é gerado a partir do CAD e pode ser enviado eletronicamente à máquina, podendo a peça ser produzida com poucas preparações e muito menos interação com o operador. Conjuntos soldados, por outro lado, demandam intensa mão de obra. Pode ser mais vantajoso fazer cotações de preço para usinagens dessas peças que foram inicialmente projetadas como conjuntos soldados.

Dito isso, o que pode ser feito durante o projeto para se reduzir os custos de uma soldagem? Pode-se projetar o conjunto soldado para ser completamente ou parcialmente "autoencaixável". O grau com que peças individuais são projetadas, para se encaixar facilmente na posição correta e o seu alinhamento para a soldagem, em oposição à necessidade de fixações externas a serem feitas para segurá-los, reduzirão o custo do conjunto soldado. Obviamente, minimizar a quantidade e o tamanho das soldas também reduzirá o custo.

Seja cuidadoso ao usar soldas em peças sujeitas a carregamento dinâmico. Procure localizá-las em posições com baixo nível de tensão, se possível. As tensões residuais, presentes em todas as soldas, são um perigo quando tensões alternadas são aplicadas àquelas regiões. Se isso não puder ser evitado, reforços e cobre-juntas devem ser removidos e os cordões esmerilhados para reduzir as concentrações de tensão nas margens e na superfície da solda. O jateamento da solda com granalha de aço irá reduzir as tensões residuais de tração e aumentar a resistência à fadiga, apesar de aumentar o custo. Nesses casos, componentes usinados a partir de blocos brutos geralmente são mais econômicos que uma soldagem e são uma alternativa a ser investigada. Se as quantidades permitirem, o forjamento produz peças com melhor resistência à fadiga, mas o alto custo do ferramental torna proibitiva esta opção se o tamanho dos lotes for muito pequeno, favorecendo as peças usinadas.

Se o conjunto soldado tiver de ser usinado após a soldagem, ele muito provavelmente terá de passar por um tratamento térmico para alívio de tensões antes da usinagem. Isso aliviará globalmente as tensões residuais aumentando a vida do componente. Por outro lado, o componente irá sofrer distorções (empenamentos) durante a usinagem, pois a remoção de material alivia localmente as tensões residuais.

16.10 RESUMO

Essa breve introdução ao projeto de componentes soldados provavelmente levantará muito mais perguntas do que trará respostas aos projetistas. A soldagem é um assunto complexo, baseado em um amplo campo de pesquisa e dados experimentais. A soldagem experimentou um grande desenvolvimento desde a sua aplicação na construção de navios, na Segunda Guerra Mundial, e alguns dos problemas encontrados na sua construção foram comentados nos Capítulos 5 e 6. Se o leitor precisa projetar soldagens, recomenda-se fortemente o aprofundamento no assunto que foi visto aqui. Veja as referências indicadas.

Um dos resultados mais interessantes dos ensaios de fadiga é a insensibilidade da falha à presença de tensões médias, as quais têm grande importância na falha de peças sem soldas. Isso simplifica a tarefa do projetista de solda, uma vez que análise não faz uso do critério de Goodman. Tratar a solda como uma linha também simplifica a tarefa de determinar os tamanhos apropriados das soldas para vários tipos de carregamentos.

A existência de normas e códigos simplifica e complica, ao mesmo tempo, o trabalho do projetista. Simplifica, estabelecendo regras e diretrizes para o trabalho do projetista, mas também complica a situação porque essas regras estão longe de serem simples e requerem muito esforço para serem compreendidas e usadas corretamente. A AISC fornece guias gerais para projeto e dados sobre tensões de falha baseados em muitos experimentos que devem ser usados no projeto de soldas. As especificações e normas da AISC e da AWS devem ser estudadas pelo projetista comprometido.

As soldas são mais fáceis quando feitas em aços laminados a quente, de baixo carbono, e estaticamente carregadas, comum na fabricação de estruturas para máquinas. Por sua vez, componentes com altos carregamentos de tensão ou carregados dinamicamente podem não ser um bom candidato à soldagem. Virabrequins e bielas, por exemplo, não são feitos com soldas, mas são forjados a quente, devido ao carregamento dinâmico.

Equações importantes utilizadas nesse Capítulo

Tensão admissível de cisalhamento em soldas com carregamentos estáticos (Seção 16.5):

$$\tau_{adm} = 0{,}30 Exx \tag{16.1}$$

Limite de resistência à fadiga (variação da tensão normal – Categorias A – E (Seção 16.6):

$$S_{fr} = C_{conf} \frac{C_f}{N}^{\frac{1}{3}} \ge S_{er} \tag{16.2a}$$

Limite de resistência à fadiga (variação da tensão cisalhante – Categoria F (Seção 16.6):

$$S_{frs} = C_{conf} \left(\frac{C_f}{N} \right)^{\frac{1}{6}} \ge S_{ers} \tag{16.2b}$$

Veja a Tabela 16-5 para os valores de C_f e S_{er}, S_{ers}.

Fatores de segurança para a fadiga em soldas:

$$N_{fr} = \frac{S_{fr}}{\Delta\sigma} \quad \text{ou} \quad N_{frs} = \frac{S_{frs}}{\Delta\tau} \tag{16.3}$$

16.11 REFERÊNCIAS

1 **O. Blodgett**, *Design of weldments*, J. F. Lincoln Foundation, Cleveland, OH, 1963.

2 **ANSI/AISC 360-05**, *Specification for Structural Steel Buildings***,** p. 16-1–400, American Institute of Steel Construction, March 9, 2005.

3 **American Welding Society**, Miami, FL.

4 **SAE Fatigue Design Handbook AE-22** 3ed, p. 95, Society of Automotive Engineers, Warrandale. PA, 1997.

5 **O.Blodgett**, "Stress Allowables Affect Welding Design," J. F. Lincoln Foundation, Cleveland, OH, 1998.

6 **T. R. Higgins and F. R. Preece**, "Proposed Working Stresses for Fillet Welds in Building Construction," *AISC Engineering Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 16-20, 1969.

7 **R. L. Mott,** *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ed., p. 786, Prentice-Hall, Upper Saddle Brook, NJ, 2004.

8 **M. A. Weaver**, "Determination of Weld Loads and Throat Requirements Using Finite Element Analysis with Shell Element Models – A Comparison with Classical Analysis," *Welding Research Supplement*, pp. 1s-11s, 1999.

9 **D. K. Miller**, "Consider Direction of Loading When Sizing Fillet Welds," *Welding Innovation*, Vol. XV. No. 2, 1998.

Tabela P16-0[†]
Matriz de problemas/tópicos

16.5 Força estática de soldas 16-1, 16-2, *16-3*
16.6 Força dinâmica das soldas *16-5*, *16-7*, *16-9*
16.7 Solda como uma linha *16-6*, *16-7*, *16-8*, *16-9*
16.8 Padrões de solda excentricamente carregados *16-4*, *16-5*

10 **J. M. Barsom and S. T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 3ed., pp. 238, 269, Prentice-Hall, Upper Saddle Brook, NJ, 1999.

11 **J. W. Fisher et al.**, *Effect of Weldments on the Fatigue Strength of Steel beams*, National Cooperative Highway Research Program Report 102, Highway Research Board, National Research Council, 1970.

12 *Recommendations for Fatigue Design of Welded Joints and Components*, WRC Bulletin 520, The Welding Research Council Inc., 2009.

16.12 PROBLEMAS

*16-1 Uma solda de topo em arco submerso com uma junta de penetração completa (JPC) foi feita em duas seções de uma chapa de aço ASTM A36 laminado a quente. A chapa tem 10 in de largura por 1/2 in de espessura e um eletrodo E70 foi utilizado. Qual é a carga de tração que a solda pode suportar sem que o metal-base ou o cordão escoem?

16-2 A chapa do problema 16-1 tem uma junta de penetração parcial aplicada de cada lado. A garganta de cada cordão tem 1/4 in. Qual é a máxima tensão que essa solda suporta?

*† *16-3* Um suporte em Tê, similar ao da Figura 16-11, tem uma chapa de 1/2 in de espessura de aço A572 Grau 42 soldada com um filete de 3/16 in em ambos os lados internos do suporte usando um eletrodo E70. Esse suporte está sujeito a uma carga de tração de 20 kip na alma do Tê. Determine o comprimento mínimo *L* do suporte supondo cordões contínuos.

16-4 A Figura P16-1 mostra uma barra soldada a uma base, com filetes de 3/16 in em seus três lados, utilizando um eletrodo E70. O material é um aço A572 grau 50 laminado a quente. Qual é a recomendação de carga estática *P* que pode seguramente ser aplicada à barra?

*16-5 A Figura P16-1 mostra uma barra soldada a uma base, com filetes de 3/16 in em seus três lados, utilizando um eletrodo E70. O material é um aço A572 grau 50 laminado a quente. Qual é a sua recomendação para a máxima carga repetida aplicada, de zero a P_{max}, que pode ser aplicada por 10E8 ciclos com um fator de segurança de 1,6?

*† *16-6* A Figura P16-2 mostra um suporte soldado a uma parede com um cordão usando um eletrodo E70. Para as linhas da Tabela P16-1, determine o tamanho do cordão de solda necessário para um carregamento estático *F*. As dimensões são $h = 1{,}2OD$, $a = 2OD$ e $l = 2{,}5OD$. O material do tubo e da parede é aço A36.

*† *16-7* A Figura P16-2 mostra um suporte soldado à parede com um cordão usando um eletrodo E70. Para as linhas da Tabela P16-1, determine o tamanho do cordão de solda necessário para um carregamento dinâmico que varia de $-0{,}1F$ a $+0{,}2F$. O tubo e o material da parede são feitos de aço A36, $h = 1{,}2OD$ $a = 2OD$ e $l = 2{,}5OD$. Utilize o fator de segurança de 1,5.

FIGURA P16-1

Problemas 16-4 e 16-5.

FIGURA P16-2

Problemas 16-6 e 16-7.

Tabela P16-1

Dados para os problemas 16-6 e 16-7. Comprimentos em polegadas, forças em kip

Row	*F*	*OD*	*ID*	*b*
a	2,5	3,500	3,068	1/2
b	3,8	4,500	4,026	1/2
c	4,8	5,563	5,047	1/2
d	8,0	6,625	6,065	1/2
e	9,0	8,625	7,981	3/4
f	11,0	10,750	10,020	3/4

* Respostas para esses problemas são mostradas no Apêndice D.

† Problemas com a numeração em *itálico* são problemas de projeto.

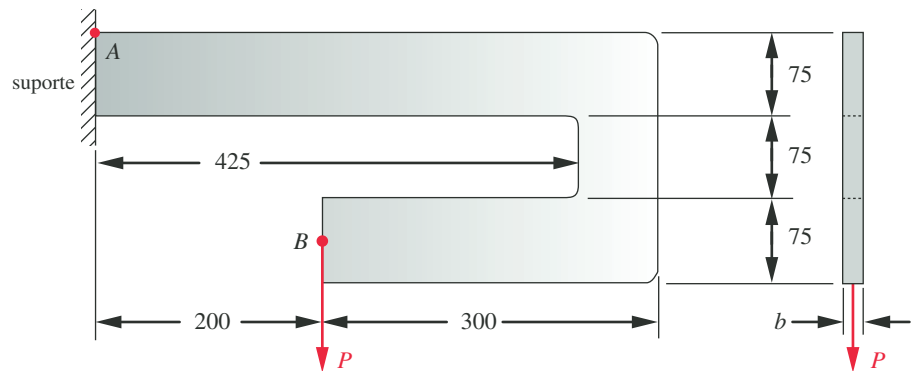



FIGURA P16-3

Problemas 16-8 e 16-9.

†*16-8* A Figura P16-3 mostra um gancho usinado a partir de um aço A572 grau 50 laminado a quente, com espessura de 12 mm. Ele é soldado a um suporte com um cordão em todo o perímetro, utilizando um eletrodo E80. Determine o tamanho do cordão de solda necessário para uma carga estática de $P = 12$ kN.

*†*16-9* A Figura P16-3 mostra um gancho usinado a partir de um aço A572 grau 50 laminado a quente, com espessura de 12 mm. Ele é soldado a um suporte com um cordão em todo o perímetro, utilizando um eletrodo E90. Determine o tamanho do cordão de solda necessário para uma carga dinâmica que varia entre 0 e +3 kN usando um fator de segurança de 1,8.

16-10 Duas tiras de aço A572 grau 42, com dimensões 50 mm por 8 mm de espessura, são soldadas juntas em uma união sobreposta usando um eletrodo E70. A carga de tração é de 45 kN e está aplicada ortogonalmente aos cordões. Qual é a recomendação para o tamanho do cordão para essas duas soldas com largura total?

16-11 Duas tiras de aço A572 grau 42, com dimensões 50 mm por 8 mm de espessura, são soldadas juntas em uma união sobreposta usando um eletrodo E70. Determine o tamanho necessário do cordão de solda para um carregamento dinâmico que varia entre 0 a +12 kN, utilizando um fator de segurança de 1,5 e vida infinita para esses dois cordões de largura total.

16-12 Duas tiras de alumínio são soldadas juntas em uma união sobreposta utilizando um eletrodo de alumínio. Determine o tamanho necessário do cordão de solda para um carregamento dinâmico que varia entre 0 a +5 kN, utilizando um fator de segurança de 2,0 e vida infinita para esses dois cordões de largura total.

---

* Respostas para esses problemas são mostradas no Apêndice D.

† Problemas com a numeração em *itálico* são problemas de projeto.

17

EMBREAGENS E FREIOS

Um livro grande é um grande aborrecimento.
CALLIMACHAS, *260 A.C.*

17.0 INTRODUÇÃO

Embreagens e freios são essencialmente o mesmo dispositivo. Cada um deles provê uma conexão de atrito magnética, hidráulica ou mecânica entre dois elementos. Se os elementos conectados podem rodar, então é chamada de embreagem. Se um dos elementos roda, enquanto o outro é fixo, é chamada de freio. Uma embreagem fornece então uma conexão que se pode interromper entre dois eixos que rodam, como, por exemplo, o eixo de manivelas de um motor de automóvel e o eixo de entrada de sua transmissão. Um freio fornece uma conexão não permanente entre um elemento que roda e um plano de chão que não roda, como, por exemplo, a roda de um automóvel e seu chassi. O mesmo dispositivo pode ser utilizado tanto como embreagem quanto como freio, fixando o seu elemento de saída a um eixo que pode rodar ou fixando-o ao chão.

Freios e embreagens são utilizados extensivamente em máquinas de produção de todos os tipos, não apenas em aplicações envolvendo veículos nos quais são necessários para parar o movimento e permitir que o motor de combustão interna possa continuar rodando (marcha lenta) quando o veículo está parado. Embreagens também permitem que uma carga de alta inércia seja movimentada com um motor elétrico menor que o que seria necessário se esta fosse diretamente conectada. As embreagens são utilizadas muitas vezes para manter um torque constante em um eixo de tensionamento de abas ou filamentos. Uma embreagem pode ser utilizada como um dispositivo de desconexão em casos de emergência, pois separa o eixo do motor em casos de emperramento de uma máquina. Em tais casos, um freio também será adequado para levar o eixo (e a máquina) a uma parada rápida em emergências. Para minimizar lesões, muitos fabricantes nos Estados Unidos requerem que suas máquinas de produção parem dentro de uma revolução ou menos do eixo principal se um trabalhador atingir a "barra de pânico" que geralmente se estende por comprimento total igual ao da máquina. Essa especificação pode ser de difícil atendimento em máquinas grandes (10 a 100 pés de comprimento) movidas por motores elétricos com vários cavalos de potência. Os fabricantes fornecem combinações de embreagens e freios em um único pacote para tais aplicações. A aplicação de potência desacopla o freio e acopla a embreagem, tornando-o seguro contra falhas. Freios antifalha trabalham acoplados (geralmente por meio de molas internas), a menos que seja aplicada potência

Tabela 17-0 Variáveis usadas neste capítulo

Símbolo	Variável	Unidades ips	Unidades SI	Ver
a	comprimento	in	m	Seção 17.6
b	comprimento	in	m	Seção 17.6
c	comprimento	in	m	Seção 17.6
d	diâmetro	in	m	várias
F	força	lb	N	várias
F_a	força aplicada	lb	N	Seção 17.6
F_f	força de atrito	lb	N	Seção 17.6
F_n	força normal	lb	N	Seção 17.6
R_x	força reativa	lb	N	Seção 17.6
R_y	força reativa	lb	N	Seção 17.6
K	constante arbitrária	nenhuma	nenhuma	várias
l	comprimento	in	m	várias
M	momento	lb-in	N-m	várias
N	número de superfícies de atrito	nenhuma	nenhuma	Eq. 17.2
P	potência	hp	Watts	Ex. 17-1
p	pressão	psi	N/m^2	Seção 17.4
p_{max}	pressão máxima	psi	N/m^2	Seção 17.4
r	raio	in	m	várias
r_i	raio interno do disco de forração	in	m	várias
r_o	raio externo do disco de forração	in	m	várias
T	torque	lb-in	N-m	várias
V	velocidade linear	in/s	m/s	Eq. 17.4
W	taxa de desgaste	psi-in/s	Pa-m/s	Eq. 17.4
w	largura	in	m	várias
θ	posição angular	rad (deg)	rad (deg)	Seção 17.6
μ	coeficiente de atrito	nenhuma	nenhuma	Eq. 17.2
ω	velocidade angular	rad/s	rad/s	Ex. 17-1

para desacoplá-los. Portanto, eles "falham de forma segura" e param a carga se a energia falhar. Freios de ar de caminhões de autoestrada ou de carros de trens são desse tipo. A pressão do ar libera o freio, que trabalha normalmente acoplado. Se o vagão de trem ou o reboque de um caminhão se separar e cortar a sua mangueira de conexão ao motor ou trator, o freio é automaticamente acoplado.

Este capítulo irá descrever alguns dos tipos de embreagens disponíveis comercialmente, bem como freios e suas aplicações, e discutir a teoria e o dimensionamento de dois tipos particulares de embreagens/freios de atrito. A Tabela 17-0 lista as variáveis usadas neste capítulo e indica a equação ou seção na qual elas podem ser encontradas.

17.1 TIPOS DE FREIOS E EMBREAGENS

Freios e embreagens podem ser classificados de várias maneiras, por meio da *forma de atuação*, pela *maneira como transferem energia entre elementos* e pelo *caráter do acoplamento*. A Figura 17-1 mostra um diagrama de fluxo salientando essas características. As formas de atuação podem ser **mecânica**, como ocorre quando se aperta o pedal de embreagem em um automóvel, **pneumática** ou **hidráulica**, na qual a pressão exercida por um fluido move um pistão para fazer mecanicamente o acoplamento ou desacoplamento, como ocorre em freios de

A fotografia na página capitular é cortesia de Logan Clutch Corporation, Cleveland, Ohio.

veículos, **elétrica**, que é tipicamente utilizada para excitar uma espira magnética, ou **automática**, como no caso do freio contra derrapagem que se acopla pelo movimento relativo entre elementos.

Embreagens de contato positivo As formas de transferência de energia podem ser por meio de um **contato mecânico positivo**, como no caso de uma embreagem de dentes ou em forma de serra, que se acopla por interferência mecânica, como mostrado na Figura 17-2. O engajamento se caracteriza pela interferência mecânica obtida por meio de agarras quadradas ou em forma de dentes de serra, ou com dentes de várias formas. Esses dispositivos não são tão úteis para freios (exceto como dispositivos de suporte), porque eles não podem dissipar grandes quantidades de energia, como um freio de atrito, e, como embreagens, eles só podem ser engajados a velocidades relativamente baixas (cerca de 60 rpm máx. para embreagens de mandíbula e 300 rpm máx. para embreagens de dentes). Suas vantagens residem no acoplamento positivo e, uma vez acoplados, podem transmitir grandes torques sem escorregamento. Elas são combinadas algumas vezes com embreagens de atrito, que levam os dois elementos aproximadamente à mesma velocidade antes que as mandíbulas e os dentes se engajem. Este é o princípio das **embreagens sincronizadas** em transmissão automotiva manual.*

Embreagens e freios de atrito são os tipos mais comumente utilizados. Duas ou mais superfícies são pressionadas entre si por meio de uma força normal para

* Transmissões automotivas utilizam em geral engrenagens helicoidais, por razões de silêncio em operação, como foi mencionado no Capítulo 13. Engrenagens helicoidais não podem ser engajadas e desengajadas de forma fácil em transmissões manuais por causa do seu ângulo de hélice. Portanto, elas são todas mantidas sempre acopladas e embreadas/desembreadas do eixo de transmissão para mudar de uma a outra relação de transmissão. Cada engrenagem possui uma embreagem de malha síncrona conectando-a ao seu eixo. Essa embreagem, na verdade, consiste em superfícies cônicas de atrito para arrastar os dois elementos (eixo e engrenagem) à condição de velocidade relativa quase zero antes que os dentes da sua embreagem companheira, de contato positivo, acople. A alavanca de mudanças de marcha movida pelo condutor muda essas embreagens entre posições de engajamento e desengajamento em vez de mudar de engrenagens na transmissão.

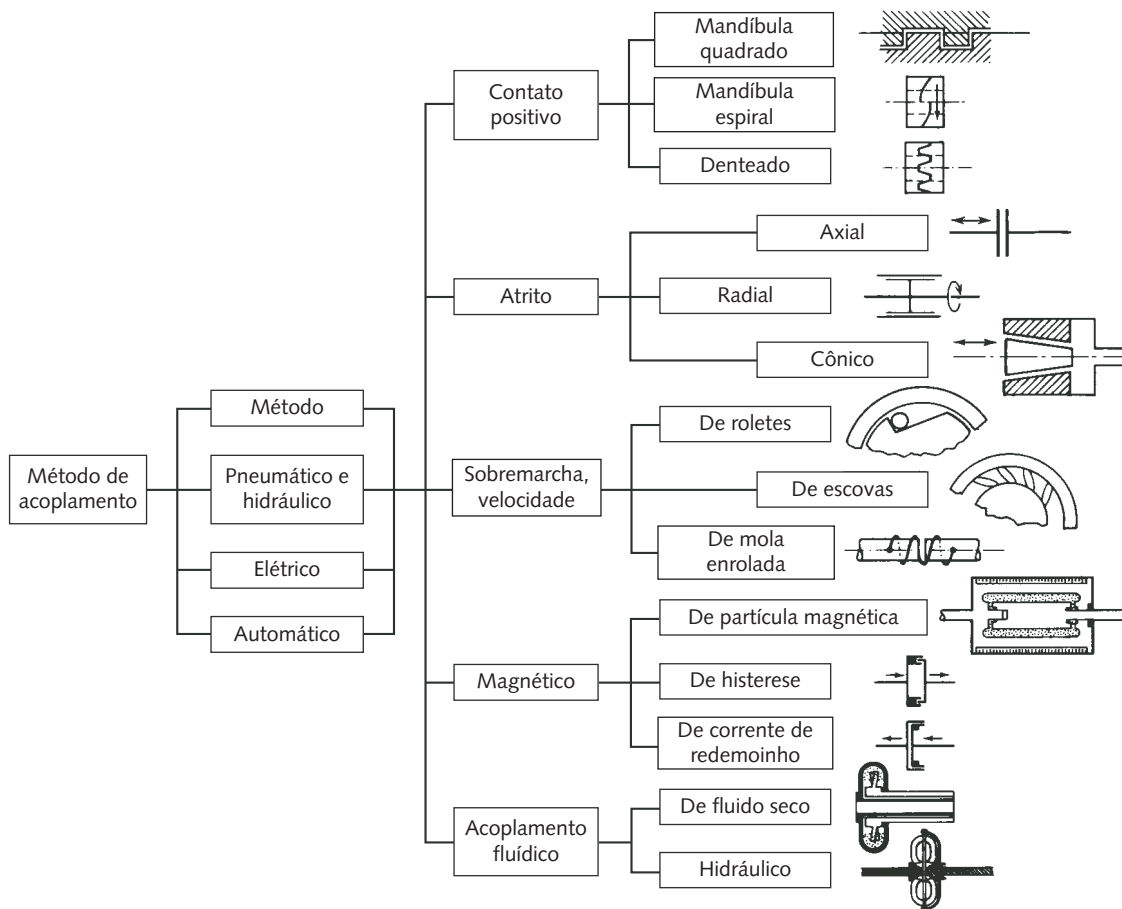



FIGURA 17-1

Classificação de embreagens e freios. (Fonte: Z. Hinhede, *Machine Design Fundamentals*, Prentice-Hall, 1983, com permissão.)

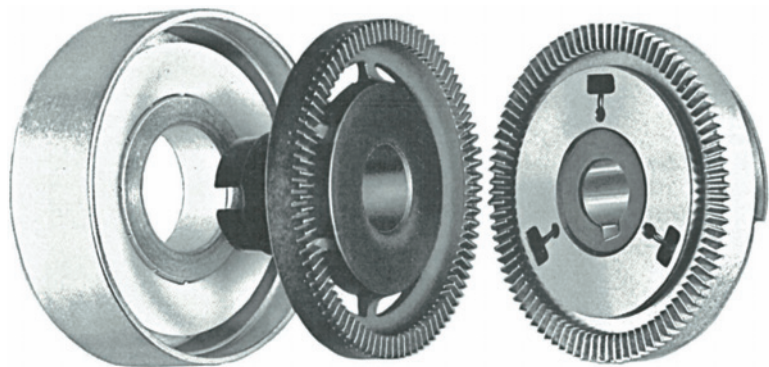



FIGURA 17-2

Embreagem de contato positivo. (Cortesia da American Precision Industries, Deltran Division, Amherst, N. Y., 14228.)

criar um torque de atrito. As superfícies de atrito podem ser planas e perpendiculares ao eixo de rotação, caso em que a força normal é axial (freio ou embreagem de disco), como mostrado na Figura 17-3, ou podem ser cilíndricas com a força normal na direção radial (freio ou embreagem de tambor), como mostrado nas Figuras 17-8 a 17-9, ou cônicas (freio ou embreagem cônica). Embreagens cônicas podem tender a agarrar, emperrar e não se separar, não sendo, portanto, muito utilizadas hoje em dia nos Estados Unidos, ainda que populares na Europa.[1]

Pelo menos uma das superfícies de atrito é geralmente metálica (ferro fundido ou aço), e a outra é normalmente feita de um material com alto atrito, conhecido como material de forro. Se existirem apenas dois elementos, haverá uma ou duas superfícies de atrito para transmitir torque. Um arranjo cilíndrico (freio de tambor ou embreagem) possui uma superfície de atrito apenas, e um arranjo axial (disco de freio ou embreagem) possui uma ou duas superfícies dependendo de o disco ser colocado em forma de sanduíche entre as duas superfícies do outro elemento ou não. Para maior capacidade de torque, embreagem de disco e freios são construídos frequentemente com discos múltiplos para aumentar o número de superfícies de atrito (ver a Figura 17-3). A habilidade que uma embreagem ou freio tem de transmitir o calor gerado pelo atrito pode ser o fator limitante de sua capacidade. Embreagens

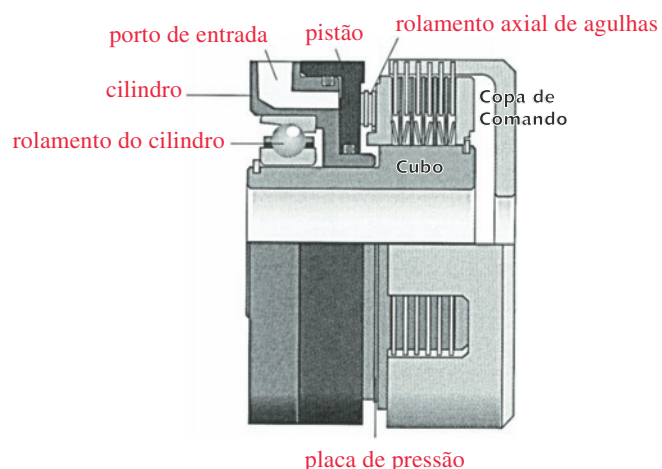



FIGURA 17-3

Uma embreagem de disco de placas múltiplas atuada por pressão de fluido. (Cortesia de Logan Clutch Corporation, Cleveland, Ohio.)

de discos múltiplos são de resfriamento mais difícil e, portanto, indicadas para aplicações envolvendo altas cargas e baixas velocidades. Para cargas dinâmicas de alta velocidade, um número menor de superfícies de atrito é melhor.[1]

Embreagens de atrito podem ser operadas secas ou molhadas, estas últimas trabalhando em um banho de óleo. Ainda que o óleo diminua sensivelmente o coeficiente de atrito, ele aumenta muito a transferência de calor. Coeficientes de atrito para combinações de materiais de embreagens/freios giram normalmente entre 0,05 para óleo e 0,60 para condições de atrito seco. Embreagens molhadas normalmente utilizam discos múltiplos para compensar o baixo coeficiente de atrito. Transmissões automáticas para automóveis e caminhões contêm várias embreagens molhadas e freios operando em óleo, que é circulado para fora da transmissão com o intuito de ser resfriado. Transmissões manuais de veículos rústicos para fora de estrada, como motocicletas, utilizam embreagens molhadas, cheias de óleo, em reservatórios selados, com discos múltiplos para proteger as superfícies de poeira, água e sujeira. Transmissões manuais de automóveis e caminhões utilizam normalmente embreagens de um único disco, secas.

Embreagens de sobrevelocidade (também conhecidas como embreagens de sentido único) operam automaticamente com base na velocidade relativa de dois elementos. Elas atuam na circunferência e permitem rotação relativa em uma só direção. Se a rotação tende a se inverter, a geometria interna do mecanismo da embreagem agarra o eixo e trava. Essas *embreagens de travamento* em reverso podem ser utilizadas em guinchos para evitar que a carga caia se a energia que move o eixo for interrompida, por exemplo. Essas embreagens também são utilizadas como mecanismos de indexamento. O eixo de entrada pode oscilar para trás e para a frente, porém o de saída roda intermitentemente em apenas uma direção. Uma outra aplicação comum de embreagens de sobrevelocidade ocorre no cubo traseiro de uma bicicleta que permite que a roda rode livre quando a velocidade desta excede aquela da roda dentada de transmissão.

Vários outros mecanismos são utilizados em embreagens de sentido único. A Figura 17-4*a* mostra uma **embreagem de escovas** que possui uma pista interna e outra externa, como um rolamento de esferas. Mas, em vez das esferas, o espaço entre as pistas é preenchido com *escovas* de estranhas formas, que permitem o movimento em uma direção, mas que emperram e travam as pistas uma à outra, transmitindo um torque unidirecional, na outra direção. Um resultado semelhante é obtido com esferas e roletes prisioneiros em câmaras com forma de cunha entre as pistas, no que é então conhecido como **embreagem de roletes**. A Figura 17-4*b* mostra um outro tipo de embreagem de um só sentido de rotação, ou embreagem de sobrevelocidade, chamada de **embreagem de mola**, que utiliza uma mola enrolada de forma apertada ao redor do eixo. A rotação em uma direção enrola a mola de forma a apertá-la mais contra o eixo, transmitindo torque. A rotação em sentido contrário abre a mola ligeiramente, fazendo com que escorregue.

Embreagens centrífugas acoplam automaticamente quando a velocidade do eixo excede certo valor. Elementos de atrito são forçados radialmente para fora contra um tambor cilíndrico para que a embreagem acople. As embreagens centrífugas são utilizadas algumas vezes para acoplar motores de combustão interna ao trem de transmissão. O motor pode ficar em ponto morto desacoplado das rodas e, quando o injetor de combustível se abre, aumentando a velocidade do motor, a embreagem acopla automaticamente. Essas embreagens são comuns em *karts.* Utilizadas em serras de corrente pela mesma razão, elas também servem para alívio em situações de sobrecarga, já que escorregam, permitindo que o motor continue girando quando a serra emperra na madeira.

Embreagens magnéticas e freios são construídos de diversas formas. As **embreagens de atrito** são operadas eletromagneticamente, como mostrado na Fi-

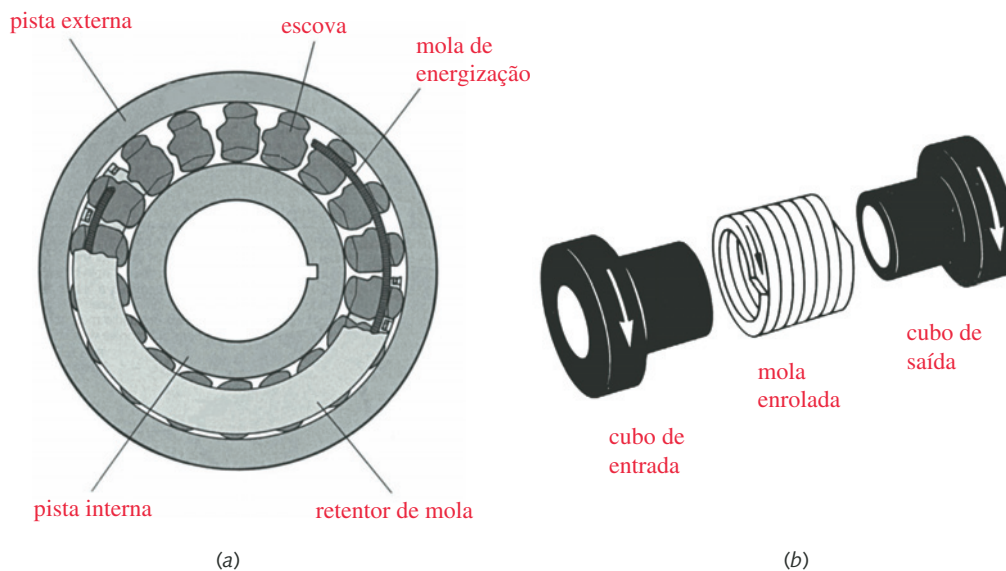



FIGURA 17-4

Embreagens de sobremarcha: (*a*) embreagem de escovas; (*b*) embreagem de mola enrolada. (Cortesia de Warner Electric, South Beloit, Ill. 61080.)

gura 17-5*a*. Elas possuem várias vantagens, como tempos de resposta rápidos, facilidade de controle, partida e parada suaves, e podem funcionar acopladas ou desacopladas (segurança contra falhas). Existem ambas as versões de embreagem e freio disponíveis, assim como módulos combinados de embreagem-freio.

Embreagens e freios de partícula magnética (não mostradas) não possuem contato direto envolvendo atrito entre o disco de embreagem e a carcaça e, portanto, nenhum material para consumir por desgaste. A folga entre as superfícies é preenchida por um pó ferroso fino. Quando a espira é energizada, as partículas de pó formam correntes ao longo das linhas de fluxo magnético e acoplam assim o disco à carcaça sem escorregamento. O torque pode ser controlado variando a corrente na espira, e o dispositivo irá escorregar quando o torque aplicado exceder o valor determinado pela corrente na espira, proporcionando uma tensão constante.

Embreagens e freios de histerese magnética (Figura 17-5*b*) não possuem qualquer contato mecânico entre os elementos rotativos e, portanto, têm atrito zero quando desacopladas. O rotor, também chamado de copo de arraste, é arrastado conjuntamente (ou freado) pelo campo magnético estabelecido pelo campo de espira (ou imã permanente). Esses dispositivos são utilizados para o controle de torque de eixos em aplicações como máquinas de enrolar, onde uma força constante deve ser aplicada à aba ou ao filamento de material à medida que este é enrolado. O torque em uma embreagem de histerese é controlável independentemente da velocidade. Esses dispositivos são extremamente suaves e quietos, possuindo vida longa uma vez que não existe contato mecânico dentro da embreagem à exceção dos seus mancais.

Embreagens de corrente de redemoinho (não mostradas) são similares em construção aos dispositivos de histerese magnética na medida em que não apresentam contato mecânico entre rotor e pólos. A espira estabelece contracorrentes que magneticamente acoplam a embreagem. Existirá sempre algum escorregamento neste tipo de embreagem, uma vez que precisa existir movimento relativo entre o rotor e o pólo para gerar as correntes que criam a força de acoplamento;

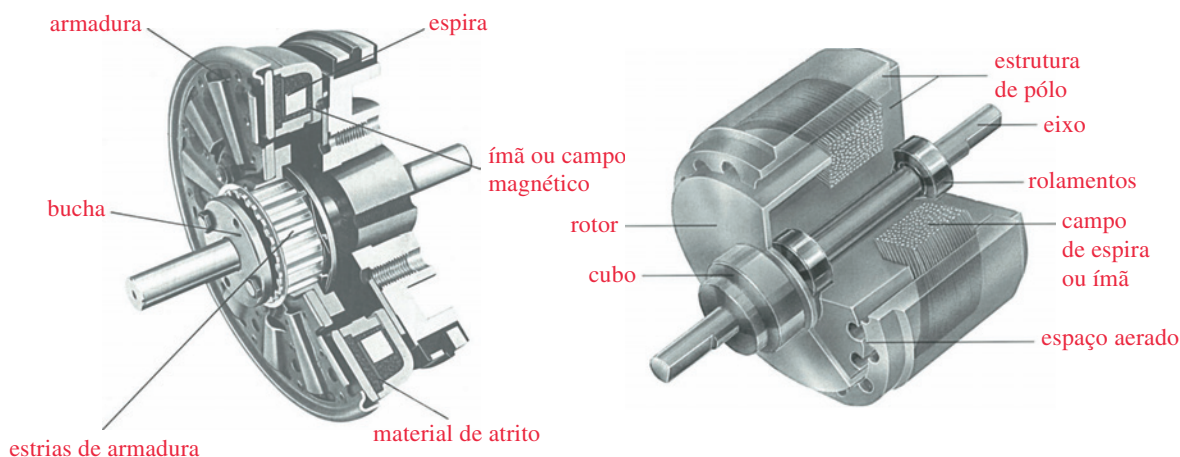



FIGURA 17-5

Embreagens magnéticas: (*a*) embreagem de atrito operada magneticamente, (*b*) embreagem de histerese. (Fonte: (a) Cortesia de Warner Electric, South Beloit, Ill., 61080, (b) Cortesia de Magtrol, Buffalo, N. Y., 14224.)

portanto, um freio de correntes parasitas não pode suportar uma carga estacionária, apenas diminuir a sua velocidade. Essas embreagens possuem vantagens similares aos dispositivos de histerese e são utilizadas em aplicações similares como enroladores de espira ou filamento, etc.

Acoplamentos fluídicos transmitem torque por meio de um fluido, geralmente um óleo. Um impulsor que possui um conjunto de pás é girado por meio de um eixo de entrada e produz momento angular ao óleo que o circunda. Uma turbina com pás similares é fixada ao eixo de saída e gira por causa do movimento do óleo que a impacta. O princípio de operação é similar à colocação de dois ventiladores elétricos face a face com apenas um deles posto a rodar. O fluxo de ar proveniente das pás do ventilador acionado faz com que as pás sem acionamento que estão à frente rodem, havendo portanto transmissão de energia sem contato mecânico. Utilizar óleo incompressível em um volume confinado é muito mais eficiente do que dois ventiladores em ambiente aberto, especialmente quando as pás do propulsor e turbina são otimizadas para bombear óleo. Um acoplamento fluídico fornece partidas bastante suaves e absorve choques, uma vez que o fluido simplesmente cisalha quando existe um diferencial de velocidade, acelerando (ou desacelerando) a turbina de saída de forma gradual de modo a igualar dentro do possível a velocidade do impulsor. Haverá sempre algum escorregamento, significando que a turbina não poderá nunca alcançar 100% da velocidade do impulsor (0% escorregamento), mas pode operar com 100% de escorregamento quando a turbina estanca. Toda a energia inserida será convertida em calor durante o cisalhar do óleo. A transmissão de calor é um fator importante quando se dimensiona um acoplamento fluídico. A caixa de saída é frequentemente aletada para melhorar a transmissão de calor. Um acoplamento fluídico transmite o torque de entrada ao eixo de saída a qualquer velocidade, inclusive na de estancamento, de maneira que não pode ser totalmente desacoplado como uma embreagem de atrito. A saída deve ser freada para mantê-la estacionária quando o eixo de entrada está girando.* O intervalo de potência de acoplamentos fluídicos varia com o seu diâmetro à potência cinco. Um aumento de 15% no diâmetro dobra sua capacidade. Se utilizado como um freio, um acoplamento fluídico pode apenas fornecer um arraste para diminuir a velocidade de um dispositivo, como em um dinamômetro, mas não pode suportar uma carga estacionária.

* Esta é a razão pela qual você deve manter o seu pé no freio quando parado em um semáforo a bordo de um automóvel com transmissão automática se o motor estiver rodando e a transmissão estiver em "andar". O acoplamento fluídico entre o motor e a transmissão está transmitindo torque continuamente, e o carro irá avançar de forma lenta nessas condições, a menos que os freios sejam aplicados.

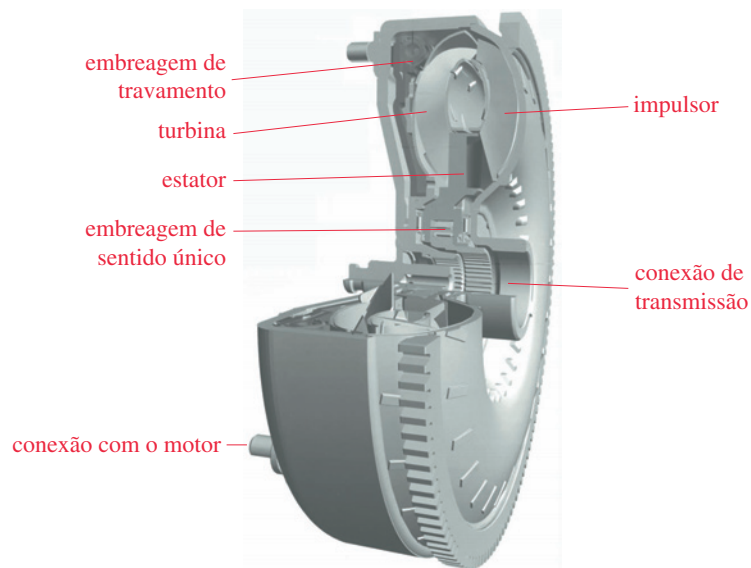



FIGURA 17-6

Conversor de torque. (Cortesia de Mannesmann Sachs AG, Schweinfurt, Alemanha.)

Se um terceiro elemento estacionário, com um conjunto de pás curvas, chamado de **reator** ou **estator**, for colocado entre o impulsor e a turbina, um momento angular adicional é transmitido ao fluido, e o dispositivo é, então, conhecido como **conversor de torque**. Conversores de torque são utilizados em veículos para acoplar o motor a uma transmissão automática. O motor pode ficar em marcha lenta com o veículo parado (turbina estancada – 100% de escorregamento). Em condições de estancamento, o impulsor e as pás do reator criam uma multiplicação de torque próxima a 2:1, que fica disponibilizada para acelerar o veículo quando os freios são liberados e a velocidade do motor é aumentada. Assim que a velocidade do veículo (e, portanto, da turbina) aumenta, a velocidade da turbina se aproximará àquela do impulsor e a multiplicação de torque decairá essencialmente para zero com um escorregamento de uns poucos porcento. Se um torque adicional é necessário momentaneamente (como nas ultrapassagens), o escorregamento entre o impulsor e a turbina irá automaticamente aumentar quando a velocidade do motor é aumentada para proporcionar mais torque e potência para acelerar o veículo.

17.2 SELEÇÃO E ESPECIFICAÇÃO DE EMBREAGENS/FREIOS

Fabricantes de embreagens e freios especializados como aqueles descritos anteriormente fornecem uma quantidade extensa de informação com relação à capacidade em termos de torque e potência dos diferentes modelos apresentados em catálogos, muitos dos quais tão informativos quanto um livro-texto sobre o assunto. Eles também definem procedimentos de especificação e seleção, em geral baseados no torque e na potência antecipados para a aplicação em pauta e nos fatores de serviço sugeridos, que tratam de compensar as diferentes condições de carga, instalação ou fatores de meio ambiente com relação aos que foram utilizados nos testes dos produtos. Por exemplo, a potência-padrão divulgada por um fabricante para um modelo de embreagem pode basear-se em um acionador suave, como um motor elétrico. Se, contudo, a aplicação em particular requer o uso de um motor de combustão interna da mesma potência, haverá cargas impulsivas, e uma embreagem ou freio de maior capacidade que a estabelecida pela potência média terá

que ser selecionado. Isso é conhecido como *pós-capacitação* de uma embreagem (ou freio), significando que a capacidade real nas condições antecipadas de uso é considerada menor que aquela capacidade anunciada para o dispositivo escolhido.

Fatores de serviço De acordo com muitos fabricantes de embreagens, uma causa comum de problemas em embreagens redunda da aplicação incorreta, por parte do projetista, de fatores de serviço que levam em conta condições particulares da aplicação.[1] Isso pode, em parte, ser resultado da confusão causada pela falta de padronização das definições relativas a fatores de serviço. Um fabricante pode recomendar um fator de serviço de 1,5 para uma condição particular, enquanto outro pode recomendar 3,0 para a mesma condição. Ambos estarão corretos relativamente aos seus projetos de embreagem porque, em um caso, o fabricante pode já ter um coeficiente de segurança embutido, enquanto o outro requer a aplicação de um fator de serviço. O projetista sensato irá seguir cuidadosamente as recomendações do fabricante quanto à seleção de seus produtos, reconhecendo que estas se baseiam normalmente em programas extensivos (e caros) de teste, assim como em experiências de campo com o produto em questão.

Uma embreagem ligeiramente pequena para determinada aplicação de carga irá escorregar e superaquecer. Uma embreagem muito grande para a carga também é inadequada, já que adiciona inércia desnecessária e pode sobrecarregar o motor que deve acelerá-la. A maior parte dos fabricantes de componentes para máquinas são generosos no fornecimento de ajuda técnica no que concerne à engenharia necessária para dimensionar de maneira adequada e especificar seus produtos para qualquer aplicação. A preocupação principal do projetista de máquinas deve ser a de definir cuidadosamente a carga e as condições ambientais que o dispositivo deve enfrentar. Isso pode requerer cálculos bastante extensos e cansativos de coisas como momentos de inércia para todos os elementos no trem de transmissão de uma embreagem ou freio. Os métodos de análise de carga do Capítulo 3 são aplicáveis em tal tarefa.

Localização da embreagem Quando uma máquina possui eixos com velocidades alta e baixa (como terá sempre que um redutor de velocidade for utilizado, como ocorre nos Estudos de Caso 7 e 8) e requer-se o uso de uma embreagem no sistema, imediatamente surge a questão de se a embreagem deve ser localizada no lado de baixa ou alta velocidade do redutor. Algumas vezes, a resposta é ditada pela função. Por exemplo, fará pouco sentido pôr uma embreagem automotiva no eixo de saída de uma transmissão em vez de colocá-la do lado de entrada, uma vez que, neste caso, o propósito principal da embreagem é o de interromper a conexão entre o motor e a transmissão, *portanto,* deve ir no lado de alta velocidade. Em outros casos, a função não dita o posicionamento da embreagem, como por exemplo, no Estudo de Caso 8, no qual o acoplamento em qualquer dos eixos poderia ser trocado por uma embreagem se fosse desejável desacoplar o compressor do motor. (Ver Figura 9-1.) A escolha é menos clara nessas situações, havendo duas escolas de pensamento com argumentos opostos.

O torque (e qualquer carga de choque) é maior no eixo de baixa velocidade do que no eixo de alta, de acordo com a razão de transmissão. A potência é essencialmente a mesma em ambas as localizações (desconsiderando perdas no trem de engrenagens), mas a energia cinética no eixo de alta velocidade é maior, variando com o quadrado da razão de transmissão. Uma embreagem no lado de baixas velocidades deve ser maior (e portanto mais custosa) para poder trabalhar com um torque maior. Contudo, uma embreagem menor e mais barata no lado de alta velocidade deve dissipar a maior energia cinética presente naquela posição e, portanto, pode superaquecer mais facilmente. Alguns fabricantes recomendam que se utilize sempre o lado de alta velocidade como localização para a embreagem cuja função o permita, optando pela economia inicial maior. Outros fabri-

cantes de embreagens sugerem que o custo inicial da embreagem maior, de baixa velocidade, será compensado pelo seu menor custo de manutenção ao longo da vida útil. A opinião dos especialistas parece pender em direção à localização de baixa velocidade com menção do ponto de que cada situação deve ser avaliada individualmente com base nos seus próprios méritos.[1]

17.3 MATERIAIS PARA EMBREAGENS E FREIOS

Os materiais para partes estruturais de embreagens e freios, como os discos e tambores, são geralmente feitos de ferro fundido cinzento ou aço. As superfícies de atrito são geralmente forradas com um material que possua um bom coeficiente de atrito e com resistência à compressão e à temperatura suficientes para a aplicação. A fibra de asbesto foi durante algum tempo o ingrediente mais comum em forrações de freios ou embreagens, mas não é mais usada em muitas aplicações por causa do risco causado pelo fato de ser cancerígena. Forrações ou guarnições podem ser moldadas, tecidas, sinterizadas ou de material sólido. As forrações moldadas usam, geralmente, resinas a base de polímeros para juntar uma variedade de materiais de preenchimento ou materiais fibrosos. Latão ou fragmentos de zinco são algumas vezes adicionados para melhorar a condução de calor e a resistência ao desgaste, além de reduzir o ranhuramento de tambores e discos. Materiais tecidos são constituídos de longas fibras de asbesto. Os metais sinterizados fornecem maiores resistências às temperaturas e à compressão que os materiais moldados ou tecidos. Materiais como cortiça, madeira e ferro fundido também são utilizados, como guarnição. A Tabela 17-1 mostra algumas propriedades friccionais, térmicas e mecânicas de materiais utilizados como forração.

17.4 EMBREAGENS DE DISCO

A embreagem de disco mais simples consiste em dois discos, um com material de forração de alto atrito, pressionado axialmente com uma força normal que gera a força de atrito necessária para transmitir torque, como mostrado na Figura 17-7. A força normal pode ser fornecida mecânica, pneumática, hidráulica ou eletromagneticamente e costuma ser muito alta. A pressão entre as superfícies da embreagem pode ser aproximada por meio de uma distribuição uniforme sobre a superfície se os discos forem rígidos o bastante. Em tais casos, o desgaste será maior no diâmetro externo, porque o desgaste é proporcional à pressão multiplicada pela velocidade (pV) e a velocidade aumenta linearmente com o raio. Contudo, como os discos se desgastam preferencialmente em direção à parte externa, a perda de material irá mudar a distribuição de pressão para não uniforme

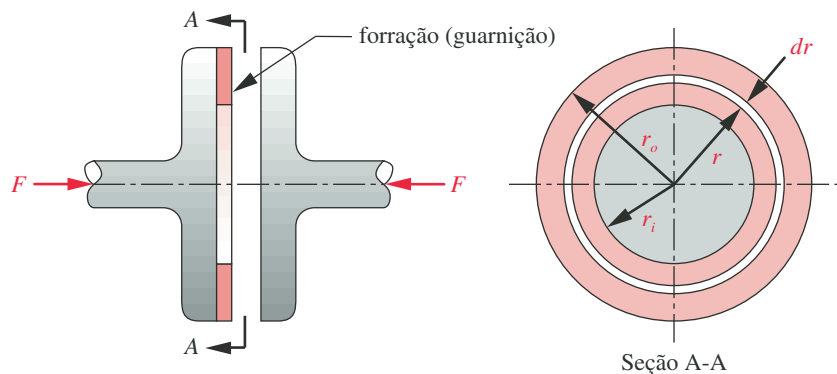



FIGURA 17-7

Disco de embreagem axial de superfície única.

Tabela 17-1 Propriedades de materiais comuns de forração para embreagens/freios

Material de atrito contra aço ou CI	Coeficiente de atrito dinâmico		Pressão máxima		Temperatura máxima	
	Seco	Em óleo	psi	kPa	°F	°C
Moldado	0,25–0,45	0,06–0,09	150–300	1030–2070	400–500	204–260
Tecido	0,25–0,45	0,08–0,10	50–100	345–690	400–500	204–260
Metal sinterizado	0,15–0,45	0,05–0,08	150–300	1030–2070	450–1250	232–677
Ferro fundido ou aço endurecido	0,15–0,25	0,03–0,06	100–250	690–720	500	260

e a embreagem irá aproximar a condição de desgaste uniforme com pV = constante. Assim, os dois extremos são a condição de **pressão uniforme** e **desgaste uniforme**. Uma embreagem flexível pode estar próxima à condição de pressão uniforme quando nova, mas tenderá à condição de desgaste uniforme quando em uso. Uma embreagem rígida irá aproximar mais rapidamente a condição de desgaste uniforme com o uso. Os cálculos relativos a cada condição são diferentes e a hipótese de desgaste uniforme produz uma classificação mais conservativa da embreagem, sendo preferida, por isso, por muitos projetistas.

Pressão uniforme

Considere um anel de área elementar na superfície da embreagem com largura dr, como mostrado na Figura 17-7. A força diferencial agente neste anel é

$$dF = p\theta r\,dr \tag{17.1a}$$

onde r é o raio θ é o ângulo do anel em radianos e p é a pressão uniforme na face da embreagem. Em uma embreagem de circunferência completa como a da Figura 17-7, θ será de 2π. A força axial total F na embreagem é determinada por integração dessa expressão entre os limites r_i e r_o.

$$F = \int_{r_i}^{r_o} p\theta r\,dr = \frac{p\theta}{2}\left(r_o^2 - r_i^2\right) \tag{17.1b}$$

O torque de atrito no elemento de anel diferencial é

$$dT = p\theta\mu r^2 dr \tag{17.2a}$$

sendo μ o coeficiente de atrito. O torque total para um disco de embreagem é

$$T = \int_{r_i}^{r_o} p\theta\mu r^2\,dr = \frac{p\theta\mu}{3}\left(r_o^3 - r_i^3\right) \tag{17.2b}$$

Para uma embreagem de discos múltiplos com N faces de atrito:

$$T = \frac{p\theta\mu}{3}\left(r_o^3 - r_i^3\right)N \tag{17.2c}$$

As Equações 17.1b e 17.2c podem ser combinadas para produzir uma expressão do torque como uma função da força axial.

$$T = N\mu F\,\frac{2}{3}\,\frac{\left(r_o^3 - r_i^3\right)}{\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{17.3}$$

Desgaste uniforme

A razão de desgaste, W, constante, é suposta proporcional ao produto da pressão, p, e velocidade, V.

$$W = pV = \text{constante} \tag{17.4a}$$

E a velocidade em qualquer ponto da face da embreagem é

$$V = r\omega \tag{17.4b}$$

Combinando essas equações e assumindo uma velocidade angular constante, ω:

$$pr = \text{constante} = K \tag{17.4c}$$

A máxima pressão, p_{max}, deve, então, ocorrer no raio mínimo, r_i.

$$K = p_{max} r_i \tag{17.4d}$$

A combinação das Equações 17.4*c* e 17.4*d* produz uma expressão para a pressão como função do raio r:

$$p = p_{max} \frac{r_i}{r} \tag{17.4e}$$

onde o valor máximo permitido de pressão, p_{max}, variará com o material de forração utilizado. A Tabela 17-1 mostra os valores recomendados de p_{max} e o coeficiente de atrito para vários materiais de forração de embreagens/freios.

A força axial, F, é encontrada por meio da integração da Equação 17.1*a* para a força diferencial no elemento de anel da Figura 17-7, com p proveniente da substituição da Equação 17.4*e*.

$$F = \int_{r_i}^{r_o} p\theta\mu r\, dr = \int_{r_i}^{r_o} \theta\left(p_{max} \frac{r_i}{r}\right) r\, dr = r_i \theta p_{max} \left(r_o - r_i\right) \tag{17.5a}$$

O torque é calculado por integração da Equação 17.2*a* com a mesma substituição:

$$T = \int_{r_i}^{r_o} p\theta\mu r^2\, dr = \frac{\theta}{2} \mu r_i p_{max} \left(r_o^2 - r_i^2\right) \tag{17.5b}$$

A combinação das Equações 17.5*a* e *b* produz uma expressão relacionando torque à força axial no caso de desgaste uniforme:

$$T = N\mu F \frac{\left(r_o + r_i\right)}{2} \tag{17.6}$$

onde N é o número de superfícies de atrito na embreagem.

A partir das Equações 17.5*a* e 17.5*b*, pode ser mostrado que o máximo torque para qualquer valor de raio externo r_o será obtido quando o raio interno for:

$$r_i = \sqrt{1/3}\, r_o = 0{,}577 r_o \tag{17.7}$$

Observe que a hipótese de desgaste uniforme produz uma capacidade de torque menor que aquela obtida com a hipótese de pressão uniforme. O desgaste inicial alto nos raios maiores muda o centro de pressão radialmente para dentro, produzindo um braço de momento menor para a força resultante de atrito. As embreagens são calculadas geralmente com base na condição de desgaste uniforme. Elas possuirão uma capacidade maior quando novas, porém irão terminar próximo da capacidade estimada em projeto uma vez que se desgastem.

EXEMPLO 17-1

Dimensionamento de uma embreagem de disco

Problema **Determine tamanho adequado e força requerida para uma embreagem de disco axial.**

Dados **A embreagem deve transferir 7,5 hp a 1725 rpm com um fator de serviço igual a 2.**

Hipóteses **Use um modelo de atrito uniforme. Pressuponha um disco único a seco com forração moldada.**

Solução

1 O fator de serviço igual a 2 requer que se reclassifique a embreagem desse fator, de maneira que projetaremos para uma potência de 15 hp em vez de 7,5. Determine o torque requerido para essa potência na rpm de projeto.

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{15 \text{ hp}\left(6600 \ \dfrac{\text{in-lb/s}}{\text{hp}}\right)}{1725 \text{ rpm}\left(\dfrac{2\pi}{60} \ \dfrac{\text{rad/s}}{\text{rpm}}\right)} = 548{,}05 \text{ lb-in} \qquad (a)$$

2 Determine o coeficiente de atrito e a máxima pressão recomendada para o material seco moldado da Tabela 17-1. Utilize os valores médios do intervalo de valores mostrado: $p_{max} = 225$ psi e $\mu = 0{,}35$.

3 Substitua a Equação 17.7 relacionando r_i a r_o para o torque máximo na Equação 17.5*b* para obter

$$T = \pi\mu r_i p_{max}\left(r_o^2 - r_i^2\right) = \pi\mu\left(0{,}577 r_o\right) p_{max}\left(r_o^2 - \frac{1}{3} r_o^2\right) = 0{,}3849 r_o^3 \pi\mu p_{max}$$

$$r_o = \left(\frac{T}{0{,}3849\pi\mu p_{max}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{548{,}05}{0{,}3849\pi\left(0{,}35\right)\left(225\right)}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}79 \text{ in} \qquad (b)$$

4 Da Equação 17.7:

$$r_i = 0{,}577 r_o = 0{,}577\left(1{,}79\right) = 1{,}03 \text{ in} \qquad (c)$$

5 A força axial necessária (a partir da Equação 17.5*a*) é:

$$F = 2\pi r_i p_{max}\left(r_o - r_i\right) = 2\pi\left(1{,}034\right)\left(225\right)\left(1{,}792 - 1{,}034\right) = 1108 \text{ lb} \qquad (d)$$

6 A especificação da embreagem é, portanto, um disco único de 3,6 in de diâmetro externo e 2,0 in de diâmetro interno, com forrração moldada de $\mu_{seco} \geq 0{,}35$ e força agente ≥ 1108 lbf.

7 Os arquivos EX17-01 estão incluídos no CD-ROM.

17.5 FREIOS DE DISCO

As equações para embreagens de disco também se aplicam a freios de disco. Contudo, estes são raramente fabricados com forração cobrindo a circunferência completa de face, porque eles iriam superaquecer. Use o valor adequado de θ para o ângulo incluído de pastilhas de freio nas Equações 17-1 a 17-5 para calcular a força e o torque no disco do freio. Observe que N será pelo menos 2 para um disco de freio, pois este tem pastilhas em posição oposta, como mostra a Figura 17-8. Enquanto as embreagens são utilizadas com ciclos leves de carga

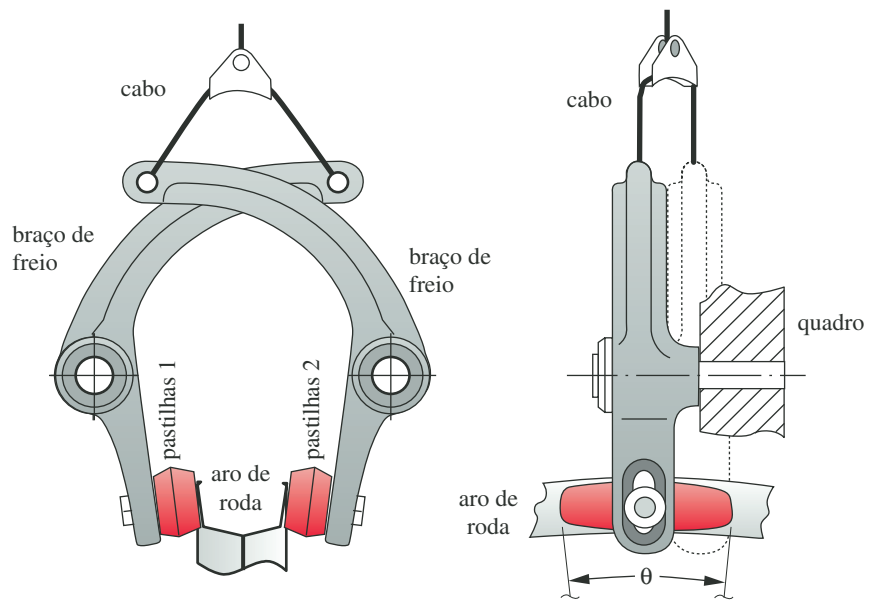



FIGURA 17-8

Freio de disco usado em bicicletas.

(sendo o tempo de acoplamento uma pequena fração do tempo total), os freios frequentemente têm que absorver grandes quantidades de energia em aplicações repetidas. Freios de disco com pinça, como aqueles utilizados em automóveis, usam pastilhas de atrito aplicadas contra uma pequena parte da circunferência de disco, deixando o restante exposto ao esfriamento. Algumas vezes, o disco é ventilado com passagens internas de ar que proporcionam esfriamento. A pinça normalmente envolve o disco e contém duas pastilhas, cada uma das quais atritando um lado do disco. Isso cancela a força axial e reduz as cargas axiais nos mancais. O freio comum de pinça utilizado em bicicletas, como mostrado na Figura 17-8, é um outro exemplo em que o aro do pneu é o disco e os garfos atuam sobre apenas uma pequena parte da circunferência. Freios de disco são hoje em dia normalmente utilizados em automóveis, especialmente nas rodas dianteiras, que proporcionam mais que metade da força de frenagem. Algumas vantagens de discos sobre tambores resultam da boa controlabilidade e linearidade (torque de frenagem diretamente proporcional à força axial aplicada) dos primeiros.

17.6 FREIOS DE TAMBOR

Freios (ou embreagens) de tambor forçam o material de atrito sobre a circunferência de um cilindro, seja externamente, internamente ou em ambas as faces. Esses dispositivos são mais frequentemente utilizados como freios do que como embreagens. A parte à qual o material de atrito é rebitado ou colado com adesivo é chamada de sapata de freio, e a parte contra a qual atrita, tambor de freio. A sapata é forçada contra o tambor para criar um torque de atrito. A configuração mais simples de um freio de tambor é o **freio de banda**, no qual uma sapata flexível é enrolada ao redor da maior parte da circunferência do tambor e apertada contra ele. Alternativamente, uma sapata (ou sapatas) relativamente rígida, com guarnição, pode ser pivotada contra a circunferência externa ou interna (ou ambas) do tambor. Se a sapata contata apenas uma pequena porção

angular do tambor, o arranjo é conhecido como um **freio de sapata curto**, caso contrário, é um **freio de sapata longo**. A geometria de contato no caso curto *versus* longo requer que um tratamento analítico diferente seja aplicado a cada caso. Iremos examinar os casos dos freios de tambor com sapata externa curta e longa para ilustrar suas diferenças e características, especialmente no que tange a freios de disco. Os princípos são os mesmos para freios de sapatas internas.

Freios de tambor com sapatas externas curtas

A Figura 17-9*a* mostra de forma esquemática um freio de tambor com sapatas externas curtas. Se o ângulo θ subtendido pelo arco de contato entre a sapata e o tambor for pequeno (< que cerca de 45°), então podemos considerar a força distribuída entre a sapata e o tambor como uniforme, podendo ser substituída por uma força concentrada, F_n, no centro da área de contato, como mostrado na Figura 17-9*b*. Para qualquer valor de máxima pressão permissível na forração, p_{max} (Tabela 17-1), a força Fn pode ser estimada como

$$F_n = p_{max} r \theta w \tag{17.8}$$

onde w é a largura da sapata de freio na direção z e θ, o ângulo subtendido, em radianos. A força de atrito, F_f, é

$$F_f = \mu F_n \tag{17.9}$$

sendo μ o coeficiente de atrito do material de forração utilizado no freio (Tabela 17-1).

O torque no disco de tambor é, então,

$$T = F_f r = \mu F_n r \tag{17.10}$$

Somando os momentos com relação ao ponto O no diagrama de corpo livre da Figura 17-9*b* e substituindo a Equação 17.9, resulta

$$\sum M = 0 = aF_a - bF_n + cF_f \tag{17.11a}$$

$$F_a = \frac{bF_n - cF_f}{a} = \frac{bF_n - \mu c F_n}{a} = F_n \frac{b - \mu c}{a} \tag{17.11b}$$

(*a*) Conjunto de frenagem

(*b*) Diagrama de corpo livre

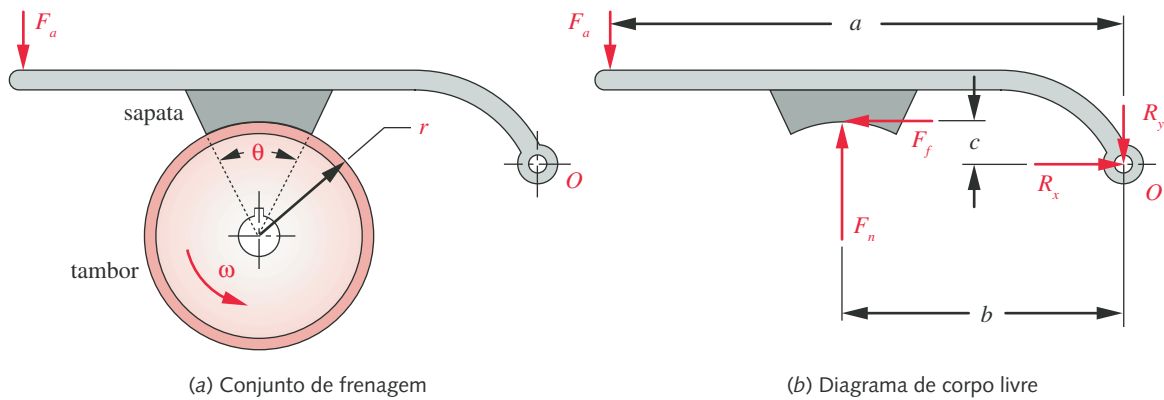



FIGURA 17-9

Geometria e forças para um freio de tambor com sapata externa curta.

As forças de reação no pivô são determinadas a partir da soma de forças.

$$R_x = -F_f$$
$$R_y = F_a - F_n \qquad (17.12)$$

Autoenergização Observe na Figura 17-9*b* que, com a direção de rotação do tambor mostrada, o momento de atrito cF_f é aditivo ao momento atuante cF_a. Isso é conhecido como **autoenergização**. Uma vez que é aplicada qualquer força F_a, o atrito gerado na sapata atua de maneira a aumentar o torque de frenagem. Contudo, se a rotação do tambor de freio for invertida com relação àquela mostrada na Figura 17-9*a*, o sinal do termo de momento de atrito, cF_f, da Equação 17.11*a* se torna negativo e o freio é, então, **autodesenergizante**.

Essa característica de autoenergização dos freios de tambor é uma vantagem potencial na medida em que reduz a força requerida comparada à força necessária por um freio de disco de mesma capacidade. Os freios de sapata possuem em geral duas sapatas, uma das quais pode tornar-se autoenergizante em cada direção, ou ambas em uma mesma direção. Este último arranjo é comumente utilizado em freios de automóveis para ajudar na frenagem do movimento para a frente às expensas da frenagem do movimento de ré, que ocorre normalmente a menores velocidades.

Autotravamento Observe na Equação 17.11 que se o freio é autoenergizante e o produto $\mu\, c \geq b$, a força F_a requerida para ativar o freio se torna nula ou negativa. Diz-se então que o freio é **autotravante**. Se a sapata tocar o tambor, irá agarrá-lo e travá-lo. Esta é uma condição não desejada, com exceção das chamadas aplicações de *travamento de retorno*, como descrito quando discutimos embreagens de sobremarcha anteriormente. De fato, um freio com autotravamento pode funcionar como uma embreagem que trava o retorno da carga e evita que se vá quando a energia falta. Esses freios são utilizados algumas vezes em guinchos precisamente com esse propósito.

EXEMPLO 17-2

Projeto de um freio de tambor com sapata curta

Problema **Para o arranjo de freio de tambor mostrado na Figura 17-9, determine a razão c / r que irá produzir uma relação de autoenergização F_n / F_a de 2. Encontre também a razão c / r que irá causar o autotravamento.**

Dados **As dimensões são $a = b = 6$, $r = 5$.**

Hipóteses **Coeficiente de atrito $\mu = 0{,}35$.**

Solução* **Ver a Figura 17-9.**

1 Rearranje a Equação 17.11 para formar a razão desejada.

$$\frac{F_n}{F_a} = \frac{a}{b - \mu c} \qquad (a)$$

2 Substitua a razão desejada de autoenergização e as dimensões dadas e resolva para c.

$$\frac{F_n}{F_a} = 2 = \frac{6}{6 - 0{,}35c}$$

$$c = \frac{-3}{-0{,}35} = 8{,}571 \qquad (b)$$

* Os arquivos EX17-02 estão incluídos no CD-ROM.

3 Forme a razão c / r para uma razão de autoenergização de 2 com a geometria dada para o freio.

$$\frac{c}{r} = \frac{8,571}{5} = 1,71 \qquad (c)$$

4 Para que o autotravamento ocorra, F_a se torna zero, fazendo $F_n / F_a = \infty$ e $F_a / F_n = 0$. A segunda dessas razões terá que ser utilizada para evitar a divisão por zero. Rearranje a Equação 17.11 para formar a razão desejada e resolva para c.

$$\frac{F_a}{F_n} = \frac{b - \mu c}{a} = \frac{6 - 0,35c}{6} = 0$$

$$c = 17,143 \qquad (d)$$

5 Forme a razão c / r para autotravamento com a geometria de freio dada.

$$\frac{c}{r} = \frac{17,143}{5} = 3,43 \qquad (e)$$

6 Observe que essas razões são específicas para as dimensões do freio. O comprimento a foi colocado igual a b neste exemplo a fim de eliminar o efeito da razão de braço de balanço a / b, que reduz ainda mais a força F_a requerida para qualquer força normal F_n.

Freios de tambor com sapatas externas longas

Se o ângulo de contato θ entre a sapata e o tambor na Figura 17-9 exceder cerca de 45°, então a hipótese de distribuição uniforme de pressão sobre a superfície da sapata será incorreta. A maior parte dos freios de sapata possui um ângulo de contato de 90° ou mais, de maneira que deve ser feita uma análise mais precisa que a empregada para sapatas curtas. Uma vez que nenhuma sapata de freio é infinitamente rígida, sua deflexão irá afetar a distribuição de pressão. Uma análise que leve em conta efeitos de deflexão é muito complicada e não é realmente assegurada aqui. À medida que a sapata se desgasta, irá pivotar-se com relação ao ponto O na Figura 17-10, e o ponto B irá viajar mais que o ponto A por causa da sua maior distância do ponto O. A pressão em qualquer ponto da sapata também irá variar em proporção à sua distância de O. Pressuponha que o tambor rode à velocidade constante e que o desgaste seja proporcional ao trabalho de atrito fei-

(a) Conjunto de frenagem

(b) Diagrama de corpo livre e dimensões

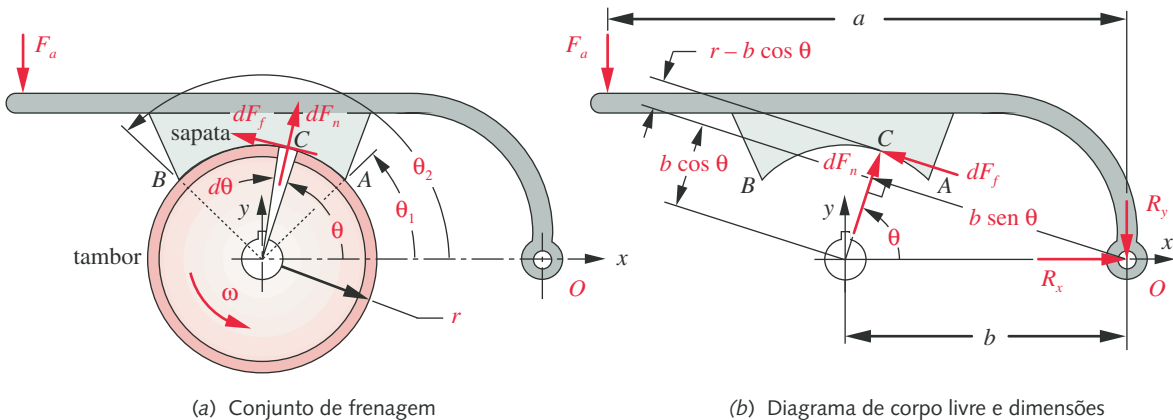



FIGURA 17-10

Geometria e forças para um freio de tambor de sapata externa longa.

to, isto é, o produto pV. Assim, em qualquer ponto na sapata, como C na Figura 17-10, a pressão normal p será proporcional a sua distância do ponto O.

$$p \propto b \operatorname{sen}\theta \propto \operatorname{sen}\theta \tag{17.13a}$$

Uma vez que a distância b é constante, a pressão normal em qualquer ponto é proporcional a sen θ. Chamemos a constante de proporcionalidade K.

$$p = K \operatorname{sen}\theta \tag{17.13b}$$

Se a máxima pressão permissível no material de forração for p_{max} (Tabela 17-1), então a constante K pode ser definida como

$$K = \frac{p}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \tag{17.13c}$$

onde θ_{max} é o mínimo entre θ_2 e 90°. Então,

$$p = \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta \tag{17.13d}$$

A Equação 17.13*d* define a pressão normal em qualquer ponto na sapata e varia com sen θ, uma vez que p_{max} e θ_2 são constantes para cada freio em particular. Assim, a força de atrito é pequena para pequenos valores de θ, é ótima quando θ = 90° e diminui para ângulos menores que 90°. Pouco se ganha utilizando $\theta_1 <$ 10° ou $\theta_2 >$ 120°.

Para obter a força total na sapata, a função de pressão deve ser integrada sobre o intervalo angular da mesma. Considere o elemento diferencial $d\theta$ mostrado na Figura 17-9. Duas forças diferenciais agem neste elemento, dF_n e dF_f. Elas possuem braços de momento com relação ao ponto O de b sen θ e $r - b$ cos θ, como mostrado na Figura 17-10*b*. Ao integrar para obter os momentos referentes a toda a superfície com relação a O, temos, para o momento devido à força normal:

$$M_{F_n} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} pwr\,d\theta\, b \operatorname{sen}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} wrb\,p \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} wrb \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$M_{F_n} = wrb \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1) \right] \tag{17.14a}$$

onde w é a largura do tambor na direção z e as outras variáveis são definidas na Figura 17-10. Para o momento devido à força de atrito:

$$M_{F_f} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu pwr\,d\theta (r - b\cos\theta)$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu wr \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta (r - b\cos\theta)\, d\theta$$

$$M_{F_f} = \mu wr \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left[-r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - \frac{b}{2}(\operatorname{sen}^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_1) \right] \tag{17.14b}$$

A soma dos momentos com relação ao ponto *O* produz

$$F_a = \frac{M_{F_n} \mp M_{F_f}}{a} \tag{17.14c}$$

onde o sinal superior é para um freio autoenergizante e o inferior, para um freio autodesenergizante. Pode ocorrer autotravamento apenas se o freio for autoenergizante e $M_{Ff} > M_{Fn}$.

O torque de frenagem é encontrado integrando a expressão para o produto da força de atrito F_f e o raio r do tambor.

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu p w r \, d\theta \, r$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu w r^2 \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$T = \mu w r^2 \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \tag{17.15}$$

As forças reativas R_x e R_y são encontradas a partir da soma das forças nas direções *x* e *y* (ver a Figura 17-10*b*):

$$R_x = \int \cos\theta \, dF_n + \int \operatorname{sen}\theta \, dF_f$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} w r p \cos\theta \, d\theta + \mu \int_{\theta_1}^{\theta_2} w r p \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta + \mu \int_{\theta_1}^{\theta_2} w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$R_x = w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left\{ \begin{array}{l} -\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2} \right) \\ +\mu \left[\dfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 2\theta_2 - \operatorname{sen} 2\theta_1\right) \right] \end{array} \right\} \tag{17.16a}$$

$$R_y = \int \cos\theta \, dF_f + \int \operatorname{sen}\theta \, dF_n - F_a$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta - F_a$$

$$R_y = w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left\{ \begin{array}{l} -\mu \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2} \right) \\ +\left[\dfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 2\theta_2 - \operatorname{sen} 2\theta_1\right) \right] \end{array} \right\} - F_a \tag{17.16b}$$

EXEMPLO 17-3

Dimensionamento de um freio de tambor com sapata longa

Problema **Para o arranjo de freio de tambor mostrado na Figura 17-10, determine o torque *T*, a força aplicada F_a e as forças reativas R_x, R_y.**

Dados **As dimensões são a = 180 mm, b = 90 mm, r = 100 mm, w = 30 mm, $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 120°$, $\theta_{max} = 90°$.**

Hipóteses **Coeficiente de atrito μ = 0,35, máxima pressão admissível na forração p_{max} = 1,5 MPa e condição de autoenergização do freio.**

Solução **Ver a Figura 17-10.**

1 Converta os ângulos θ_1 e θ_2 a radianos, $\theta_1 = 0{,}524$ rad, $\theta_2 = 2{,}094$ rad.

2 Calcule o momento M_{Fn} com relação a *O* devido à força normal utilizando a Equação 17.14*a*.

$$M_{F_n} = wrb\frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}}\left[\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\theta_2-\operatorname{sen}2\theta_1)\right]$$

$$= 30(100)(90)\frac{1{,}5}{\operatorname{sen}(1{,}57)}\left[\frac{1}{2}(2{,}094-0{,}524) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\{2(2{,}094)\}-\operatorname{sen}\{2(0{,}524)\}\right)\right] \quad (a)$$

$$= 493 \text{ N.m}$$

3 Calcule o momento M_{Ff} com relação a *O* devido à força de atrito utilizando a Equação 17.14*b*.

$$M_{F_f} = \mu wr\frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}}\left[-r(\cos\theta_2-\cos\theta_1)-\frac{b}{2}(\operatorname{sen}^2\theta_2-\operatorname{sen}^2\theta_1)\right]$$

$$= 0{,}35(30)(100)\frac{1{,}5}{\operatorname{sen}(1{,}57)}\left[-100(\cos\{2{,}094\}-\cos\{0{,}524\}) - \frac{90}{2}\left(\operatorname{sen}^2\{2{,}094\}-\operatorname{sen}^2\{0{,}524\}\right)\right] \quad (b)$$

$$= 180 \text{ N.m}$$

4 Determine a força a ser aplicada a partir da Equação 17.14*c*.

$$F_a = \frac{M_{F_n} \mp M_{F_f}}{a} = \frac{497-181}{0{,}180} = 1743 \text{ N} \quad (c)$$

5 Determine o torque de atrito a partir da Equação 17.15.

$$T_f = \mu wr^2\frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$= 0{,}35(30)(100)^2\frac{1{,}5}{\operatorname{sen}(1{,}57)}(\cos\{2{,}094\}-\cos\{0{,}524\})$$

$$= 215 \text{ N.m} \quad (d)$$

6 As forças reativas são determinadas a partir das Equações 17.16.

$$R_x = wr\frac{p_{max}}{\text{sen}\,\theta_{max}}\left\{\begin{array}{l} -\left(\dfrac{\text{sen}^2\theta_2}{2}-\dfrac{\text{sen}^2\theta_1}{2}\right) \\ +\mu\left[\dfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\dfrac{1}{4}(\text{sen}\,2\theta_2-\text{sen}\,2\theta_1)\right]\end{array}\right\}$$

$$= 30(100)\frac{1{,}5}{\text{sen}(1{,}57)}\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\text{sen}^2\{2{,}094\}}{2}-\dfrac{\text{sen}^2\{0{,}524\}}{2}\right) \\ -0{,}35\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}(2{,}094-0{,}524) \\ -\dfrac{1}{4}(\text{sen}\{2(2{,}094)\}-\text{sen}\{2(0{,}524)\})\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$= 794\text{ N} \tag{e}$$

$$R_y = -F_a + wr\frac{p_{max}}{\text{sen}\,\theta_{max}}\left\{\begin{array}{l} -\mu\left(\dfrac{\text{sen}^2\theta_2}{2}-\dfrac{\text{sen}^2\theta_1}{2}\right) \\ +\left[\dfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\dfrac{1}{4}(\text{sen}\,2\theta_2-\text{sen}\,2\theta_1)\right]\end{array}\right\}$$

$$= -2013 + 30(100)\frac{1{,}5}{\text{sen}(1{,}57)}\left\{\begin{array}{l}-0{,}35\left(\dfrac{\text{sen}^2\{2{,}094\}}{2}-\dfrac{\text{sen}^2\{0{,}524\}}{2}\right) \\ +\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}(2{,}094-0{,}524) \\ -\dfrac{1}{4}(\text{sen}\{2(2{,}094)\}-\text{sen}\{2(0{,}524)\})\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$R_y = 4134\text{ N} \tag{f}$$

7 Os arquivos EX17-03 estão incluídos no CD-ROM.

Freios de tambor com sapatas internas longas

A maior parte dos freios de tambor (e praticamente todos os de uso automotivo) utiliza sapatas internas que se expandem contra a face interna do tambor. Normalmente, são usadas duas sapatas, pivotadas nas extremidades de um parafuso ajustável e forçadas contra o tambor por meio de um cilindro hidraúlico de terminação dupla. Molas leves mantêm as sapatas contra os pistões do cilindro de roda e puxam as sapatas de modo a afastá-las do tambor quando desativadas. Geralmente, uma das sapatas é autoenergizante na direção de movimento para a frente e a outra é autoenergizante na direção reversa à rotação do tambor. A roda do automóvel é fixada diretamente ao tambor do freio. A análise do freio de sapata interna é a mesma que aquela do freio de sapata externa.

17.7 RESUMO

Embreagens e freios são usados de forma corriqueira em todos tipos de maquinaria. Todos os veículos necessitam de freios para parar o movimento, da mesma forma que máquinas estacionárias. As embreagens são necessárias para interromper o fluxo de potência entre o movimentador primário (motor, motor

de combustão interna, etc.) e a carga, de maneira que a carga possa ser parada (pelo freio) e o movimentador primário possa continuar em movimento. Uma embreagem e um freio são essencialmente o mesmo dispositivo, com a principal diferença de que ambos os lados da embreagem (entrada e saída) são capazes de rodar, enquanto o lado de saída do freio é fixo a algum "plano de chão" que não roda, mas que pode ter algum outro tipo de movimento, como é o caso de um chassi de automóvel.

Vários estilos diferentes de embreagens/freios são construídos, porém os estilos mais comuns utilizam contato de atrito entre duas ou mais superfícies para acoplar os lados de entrada e saída. As superfícies de atrito podem ser movimentadas para a condição de engajamento ou afastadas dessa condição por meio de vários dispositivos, incluindo mecânicos, eletromagnéticos, pneumáticos, hidráulicos ou uma combinação destes. Outros estilos incluem magnetismo direto (partícula magnética, histerese e contracorrente), alguns dos quais não contêm contato mecânico (e portanto zero arraste) quando desacoplados, além de acoplamentos fluídicos, os quais são comumentemente usados para acoplar motores de veículos à transmissão automática.

Exceto para os casos envolvendo grandes volumes em aplicações específicas, como no projeto de veículos, um projetista de máquinas raramente projeta uma embreagem a partir do zero. Para aplicações relacionadas com o projeto de máquinas, geralmente se seleciona uma embreagem ou freio a partir do que é oferecido pelos fabricantes comercialmente. O problema passa a ser então, definir o torque, velocidade e requerimentos de potência e o caráter da carga, seja ela suave ou de choque, contínua ou intermitente, etc. A inércia dos elementos rotativos a serem acelerados pela embreagem ou desacelerados por um freio pode ter um efeito significativo no tamanho requerido daquele dispositivo e deve ser calculada com precisão. Qualquer razão de transmissão utilizada no sistema fará com que a inércia refletida ou efetiva varie com o quadrado dessa razão de transmissão e este efeito deve ser cuidadosamente incluído quando se calcula a inércia. (Ver o Capítulo 3 ou qualquer texto sobre dinâmica de máquinas.)

Os catálogos dos fabricantes de embreagens/freios contêm grande quantidade de dados técnicos que listam cada dispositivo de acordo com seu torque e capacidade em termos de potência, além de sugerir fatores empíricos de pós-classificação para os casos envolvendo cargas de choque, ciclos de alta carga, etc. Uma vez que a carga estiver bem definida, um dispositivo adequado pode ser especificado utilizando os dados de classificação dos fabricantes, modificado pelos valores sugeridos de fator de serviço. A tarefa (não trivial) do projetista passa a ser, então, definir a carga apropriada para a aplicação, seguida do uso adequado dos dados de classificação do fabricante. Normalmente, o fabricante disponibiliza assistência técnica para a última tarefa, porém o resultado será tão útil aos requerimentos de projeto quanto a precisão da análise de carga o permitir. A configuração mecânica de diversos projetos de embreagens é brevemente descrita dentro deste capítulo. Catálogos de fabricantes e engenheiros de projetos podem fornecer informação mais detalhada a respeito da capacidade e das limitações de vários tipos de embreagens/freios.

Embreagens de atrito e freio encontrados no comércio são geralmente construídos em configurações com um único disco ou com discos múltiplos. Freios de veículos são geralmente construídos em configurações de disco ou tambor. As configurações de disco fornecem um torque de atrito que é linearmente proporcional à carga aplicada atuante, e isso pode ser vantajoso do ponto de vista do controle. Configurações de tambor podem ser projetadas para ser autoenergizantes, significando que uma vez que o freio ou embreagem é inicialmente acoplado, a força de atrito tende a aumentar a força normal, aumentando de forma não linear, portanto, o torque de atrito, obtendo-se assim retroalimentação positiva. Isso pode ser vanta-

joso quando se tem que frear grandes cargas, já que diminui a força requerida, ao mesmo tempo em que torna mais difícil controlar o torque de frenagem. A análise de discos de atrito ou tambores de atrito é desenvolvida neste capítulo.

Embreagens e freios são essencialmente dispositivos de transferência de energia ou dispositivos de dissipação e, portanto, geram uma grande quantidade de calor durante sua operação. Assim, eles devem ser projetados para absorver e transferir esse calor sem causar danos a si mesmos ou a seu entorno. Frequentemente, é a habilidade de transferir calor de um dispositivo que limita sua capacidade, e não sua habilidade em transmitir torque mecânico. O projeto térmico de embreagens e freios é uma consideração muito importante, porém está além do escopo deste livro, e o espaço também não permite seu tratamento aqui. No entanto, o projetista deve ficar ciente da transferência de calor nos projetos de embreagens/freios e levá-la em consideração. Veja qualquer texto sobre transferência de calor para obter o conhecimento teórico e veja as referências mencionadas na bibliografia deste capítulo, assim como catálogos de outros fabricantes, para informações mais específicas.

Embreagens de atrito podem ser operadas a seco ou molhadas (tipicamente em óleo). O atrito seco é obviamente mais efetivo, uma vez que o coeficiente de atrito é reduzido de maneira drástica com a lubrificação. Contudo, rodar em óleo pode melhorar significativamente a situação de transferência de calor, especialmente quando o óleo é circulado e/ou esfriado. Mais superfícies de atrito (por exemplo, discos múltiplos) são requeridas na situação molhada para atingirmos a mesma capacidade, refletida pelo torque de frenagem, que pode ser obtida com um único disco na situação a seco, porém o balanço pode ser positivo por causa da melhoria do esfriamento. Transmissões automáticas de veículos modernos utilizam várias embreagens internas e freios para interconectar ou parar vários membros dos seus trens de engrenagens (planetários) epicíclicos durante as mudanças de marcha. Esses componentes são embreagens de discos múltiplos ou freios de banda e operam imersas no óleo de transmissão que é continuamente circulado através de um trocador de calor no radiador do veículo para que se resfrie.

Equações importantes utilizadas neste capítulo

Torque em uma embreagem de disco com pressão uniforme (Seção 17.4):

$$T = N\mu F \frac{2}{3}\frac{\left(r_o^3 - r_i^3\right)}{\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{17.3}$$

Torque em uma embreagem de disco com desgaste uniforme (Seção 17.4):

$$T = N\mu F \frac{\left(r_o + r_i\right)}{2} \tag{17.6}$$

Forças e torque em um freio de tambor com sapata curta (Seção 17.6):

$$F_n = p_{max} r \theta w \tag{17.8}$$

$$F_a = \frac{bF_n - cF_f}{a} = \frac{bF_n - \mu c F_n}{a} = F_n \frac{b - \mu c}{a} \tag{17.11b}$$

$$T = F_f r = \mu F_n r \tag{17.10}$$

Forças e torque em freio de tambor com sapata longa (Seção 17.6):

$$M_{F_n} = wrb \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}}\left[\frac{1}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1\right)\right] \tag{17.14a}$$

$$M_{F_f} = \mu w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left[-r\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) - \frac{b}{2}\left(\operatorname{sen}^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_1\right) \right] \quad (17.14b)$$

$$F_a = \frac{M_{F_n} \mp M_{F_f}}{a} \quad (17.14c)$$

$$T = \mu w r^2 \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \quad (17.15)$$

$$R_x = w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left\{ \begin{array}{l} -\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2} \right) \\ +\mu\left[\dfrac{1}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 2\theta_2 - \operatorname{sen} 2\theta_1\right) \right] \end{array} \right\} \quad (17.16a)$$

$$R_y = w r \frac{p_{max}}{\operatorname{sen}\theta_{max}} \left\{ \begin{array}{l} -\mu\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2} \right) \\ +\left[\dfrac{1}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 2\theta_2 - \operatorname{sen} 2\theta_1\right) \right] \end{array} \right\} - F_a \quad (17.16b)$$

17.8 REFERÊNCIAS

1 **J. Proctor**, "Selecting Clutches for Mechanical Drives," *Product Engineering,* pp. 43-58, June 19, 1961.

17.9 BIBLIOGRAFIA

Mechanical Drives Reference Issue. Penton Publishing: Cleveland, Ohio,

Deltran, *Electromagnetic Clutches and Brakes.* American Precision Industries: Buffalo, N. Y., 716-631-9800.

Logan, *Multiple Disk Clutches and Brakes.* Logan Clutch Co.: Cleveland, Ohio, 216-431-4040.

Magtrol, *Hysteresis Brakes and Clutches.* Magtrol: Buffalo, N. Y., 800-828-7844.

MCC, *Catalog 18e.* Machine Components Corporation: Plainview, N. Y., 516-694-7222.

MTL, *Eddy Current Clutch Design.* Magnetic Technologies Ltd.: Oxford, Mass., 508-987-3303.

W. C. Orthwein, *Clutches and Brakes: Design and Selection.* Marcel Dekker: New York, 1986.

Placid, *Magnetic Particle Clutches and Brakes.* Placid Industries Inc.: Lake Placid, N. Y., 518-523-2422.

Warner, *Clutches, Brakes, and Controls: Master Catalog.* Warner Electric: South Beloit, Ill., 815-389-2582.

17.10 PROBLEMAS

*17-1 Determine o torque que uma embreagem de disco seco com superfície dupla pode transmitir se os diâmetros das forrações externa e interna forem de 120 mm e 70 mm, respectivamente, e se a força axial valer 10 kN. Pressuponha condições de desgaste uniforme com $\mu = 0{,}4$. A pressão na forração é aceitável? Que materiais de forração seriam adequados?

17-2 Repita o Problema 17-1 supondo pressão uniforme.

**17-3* Dimensione uma embreagem de disco de superfície única para transmitir 100 N-m de torque a 750 rpm usando forração moldada com uma pressão máxima de 1 MPa e $\mu = 0{,}25$. Pressuponha condições de desgaste uniforme. Determine os diâmetros externo e interno requeridos se $r_i = 0{,}577\ r_o$. Qual é a potência transmitida?

†*17-4* Repita o problema 17-3 supondo pressão uniforme.

*17-5 Quantas superfícies são necessárias para uma embreagem de disco molhado transmitir 120 N-m de torque a 1000 rpm utilizando forração sinterizada com uma máxima pressão de 1,8 MPa e $\mu = 0{,}06$? Pressuponha desgaste uniforme. Encontre os diâmetros externo e interno requeridos se $r_i = 0{,}577\ r_o$. Quantos discos são necessários? Qual é a potência requerida?

17-6 Repita o problema 17-5 supondo pressão uniforme.

*17-7 A Figura P17-1 mostra um disco de tambor de sapata curta única. Determine a capacidade de torque e a força requerida para $a = 100$, $b = 70$, $e = 20$, $r = 30$, $w = 50$ mm e $\theta = 35°$. Qual valor de c irá tornar o freio autotravante? Pressuponha $p_{max} = 1{,}3$ MPa e $\mu = 0{,}3$.

17-8 Repita o Problema 17-7 com o tambor rodando no sentido anti-horário.

17-9 A Figura P17-1 mostra um freio de tambor de sapata curta única. Determine a sua capacidade de torque e força requerida para $a = 8$, $b = 6$, $e = 4$, $r = 5$, $w = 1{,}5$ in e $\theta = 30°$. Qual valor de c tornará este freio autotravante? Pressuponha $p_{max} = 250$ psi e $\mu. = 0{,}35$.

17-10 Repita o Problema 17-9 com o tambor rodando no sentido horário.

*17-11 A Figura P17-2 mostra um freio de tambor de sapata curta dupla. Determine a capacidade de torque e a força atuante para $a = 90$, $b = 80$, $e = 30$, $r = 40$, $w = 60$ mm e $\theta = 25°$. Que valor de c tornará o freio autotravante? Pressuponha $p_{max} = 1{,}5$ MPa e $\mu = 0{,}25$. Dica: Calcule os efeitos de cada uma das sapatas separadamente e depois superponha-os.

17-12 A Figura P17-2 mostra um freio de tambor com sapata curta dupla. Encontre a sua capacidade de torque e a força atuante requerida para $a = 12$, $b = 8$, $e = 3$, $r = 6$ in e $\theta = 25°$. Que valor de c o tornará autotravante? Pressuponha $p_{max} = 200$

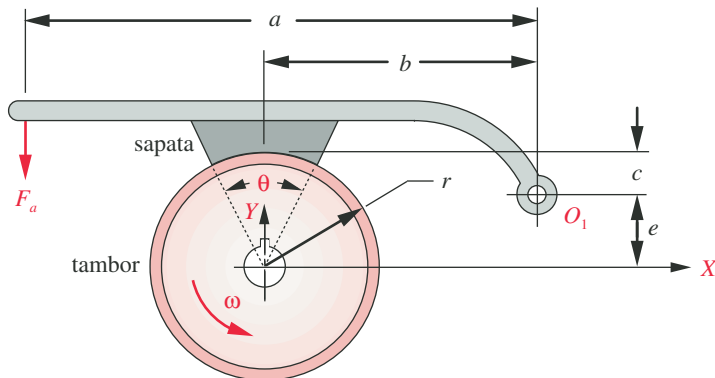



FIGURA P17-1

Geometria para um freio de tambor com sapata externa curta.

Tabela P17-0†
Matriz de problemas/tópicos

17.4 Embreagens de disco
17-1, 17-2, *17-3*, *17-4*, 17-5, 17-6, *17-27*, *17-28*

17.5 Freios de disco
17-29, 17-30, *17-31*, *17-32*, *17-33*, *17-34*

17.6 Freios de tambor
Sapata curta
17-7, 17-8, 17-9, 17-10, 17-11, 17-12, 17-21, 17-22

Sapata longa
17-13, 17-14, 17-15, 17-16, 17-17, 17-18, 17-19, 17-20, 17-23, 17-24, 17-25, 17-26

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

† Problemas com números em *itálico* são problemas de projeto.

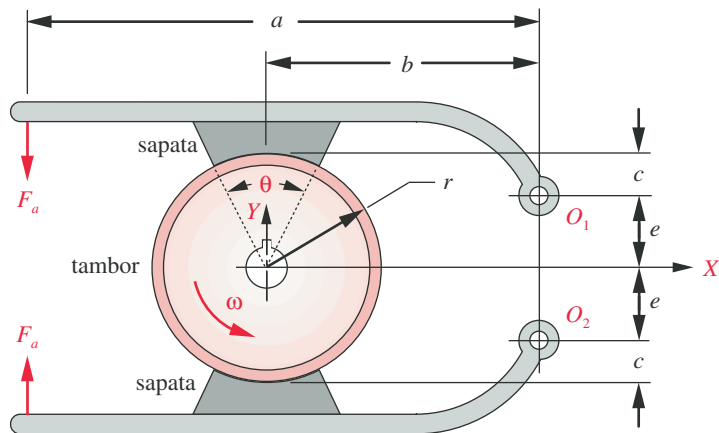



FIGURA P17-2

Geometria para um freio de tambor de sapata externa curta dupla.

psi, largura = 2 in e $\mu = 0{,}28$. Dica: Calcule os efeitos de cada sapata separadamente e depois superponha-os.

*17-13 A Figura P17-3 mostra um freio de tambor com sapata única longa. Determine a sua capacidade de torque e força requerida para $ax = 100$, $b_x = 70$, $r = 30$, $w = 50$ mm e $\theta_1 = 25°$, $\theta_2 = 125°$. Pressuponha $p_{max} = 1{,}3$ MPa e $\mu = 0{,}3$.

17-14 A Figura P17-3 mostra um freio de tambor com uma sapata única longa. Determine a sua capacidade de torque e força requerida para $a_x = 8$, $b_x = 6$, $b_y = 4$, $r = 5$, $w = 1{,}5$ in e $\theta_1 = 35°$, $\theta_2 = 155°$. Pressupo*nha* $p_{max} = 250$ psi e $\mu = 0{,}35$.

*17-15 A Figura P17-4 mostra um freio de tambor com sapata dupla longa. Determine sua capacidade de torque e o valor requerido de força atuante para $a_x = 90$, $b_x = 80$, $b_y = 30$, $r = 40$, $w = 30$ mm e $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 160°$. Pressuponha $p_{max} = 1{,}5$ MPa e $\mu = 0{,}25$. Dica: Calcule os efeitos de cada sapata separadamente e depois superponha-os.

17-16 A Figura P17-4 mostra um freio de tambor de sapata longa dupla. Encontre a sua capacidade de torque bem como a força atuante requerida para $a_x = 12$, $b_x = 8$, $b_y = 3$, $r = 6$, $w = 2$ in e $\theta_1 = 25°$, $\theta_2 = 145°$. Pressuponha $p_{max} = 200$ psi e $\mu = 0{,}28$. Dica: Calcule os efeitos de cada sapata separadamente e depois superponha-os.

*17-17 A aproximação de sapata curta é considerada válida para freios de sapata com um ângulo incluído de até cerca de 45°. Para o freio mostrado na Figura P17-3,

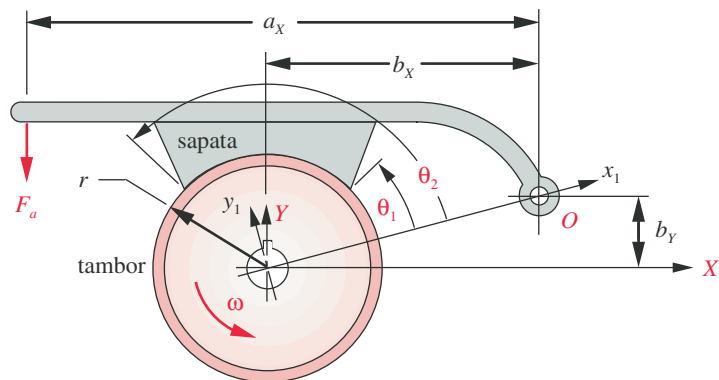



FIGURA P17-3

Geometria para um freio de tambor de sapata externa longa.

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

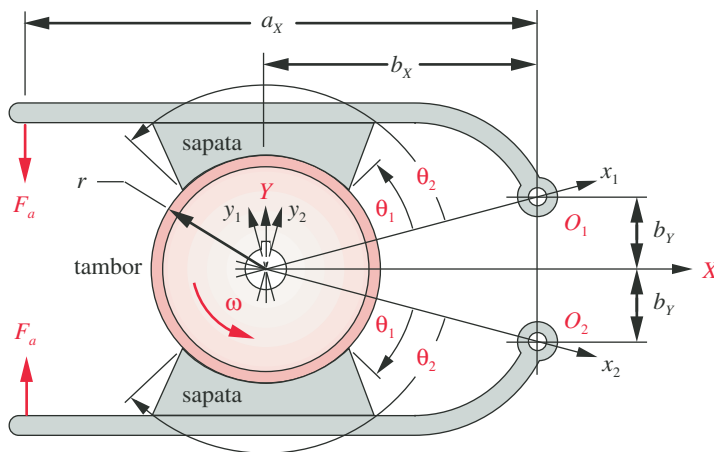



FIGURA P17-4

Geometria para um freio de tambor com sapata externa longa dupla.

calcule sua capacidade de torque e força requerida por ambos, o método da sapata curta e o da sapata longa, e compare os resultados para os seguintes dados: $a_x = 90$, $b_x = 80$, $b_y = 30$, $r = 40$, $w = 30$ mm. Pressuponha $p_{max} = 1{,}5$ MPa e $\mu, = 0{,}25$. Observe que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ para a aproximação de sapata curta.

(a) $\theta_1 = 75°$, $\theta_2 = 105°$
(b) $\theta_1 = 70°$, $\theta_2 = 110°$
(c) θ 1 = 65°, $\theta_2 = 115°$

*17-18 Repita o Problema 17-17 para o projeto de freio mostrado na Figura P17-4.

17-19 A aproximação de sapata curta é considerada válida para freios de sapata com um ângulo incluído de até aproximadamente 45°. Para o freio mostrado na Figura P17-3, calcule sua capacidade de torque bem como a força requerida por ambos, o método da sapata curta e da sapata longa, e compare os resultados utilizando os seguintes dados: $a_x = 8$, $b_x = 6$, $b_y = 4$, $r = 5$, $w = 2$ *in*. Pressuponha $p_{max} = 250$ psi e $\mu = 0{,}35$. Observe que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ para a aproximação de sapata curta.

(a) $\theta_1 = 75°$, $\theta_2 = 105°$
(b) $\theta_1 = 70°$, $\theta_2 = 110°$
(c) $\theta_1 = 65°$, $\theta_2 = 115°$

17-20 Repita o Problema 17-19 para o projeto de freio mostrado na Figura P17-4.

*17-21 Determine as forças reativas no pivô de braço do freio do Problema 17-11 usando o sistema global *XY*.

17-22 Determine as forças reativas no pivô de braço do freio do Problema 17-12 usando o sistema global *XY*.

*17-23 Determine as forças reativas no pivô de braço do freio do Problema 17-13 usando o sistema global *XY*.

17-24 Determine as forças reativas no pivô de braço do freio do Problema 17-14 usando o sistema global *XY*.

*17-25 Determine as forças reativas no pivô de braço do freio do Problema 17-15 usando o sistema global *XY*.

17-26 Determine as forças reativas no pivô de braço do freio do Problema 17-16 usando o sistema global *XY*.

**17-27* Uma embreagem é necessária para uso em um motor elétrico que transmite 20 kW a 1100 rpm. A embreagem deve conectar-se diretamente à placa de carcaça do motor e deve ter o mesmo diâmetro que o motor, que é 125 mm. A folga radial mínima entre o diâmetro externo da carcaça e o diâmetro externo do disco

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D.

de embreagem é 5 mm. O eixo de saída da embreagem terá o mesmo diâmetro que o eixo do motor, que é 15 mm. Dimensione uma embreagem de discos múltiplos para esta aplicação. Estabeleça todas as hipóteses e escolhas de projeto. Especifique o material da embreagem, o raio externo de disco, o raio interno de disco e a força de atuação requerida.

17-28 Uma embreagem deve ser utilizada com um motor elétrico que transmite 25 hp a 800 rpm. A embreagem deve conectar-se diretamente à placa de face do motor e deve ter o mesmo diâmetro que o motor, que é 5,5 in. A folga radial mínima entre o diâmetro externo e o diâmetro externo do disco de embreagem é 0,25 in. O eixo de saída da embreagem deve ter o mesmo diâmetro que o eixo do motor, que é 0,625 in. Dimensione uma embreagem de discos múltiplos para esta aplicação. Esclareça todas as hipóteses e escolhas de projeto. Especifique o material da embreagem, o raio externo do disco, o raio interno de disco e a força de atuação requerida.

*17-29 Encontre o torque que um freio de disco com pinça de duas pastilhas, com um ângulo de pastilha de 60 graus, pode transmitir se os diâmetros externos e internos são de 160 mm e 90 mm, respectivamente, e a força axial aplicada é de 3 kN. Suponha que haja desgaste uniforme e $\mu = 0{,}35$. A pressão na forração é aceitável? Quais materiais de forração seriam adequados?

17-30 Repita o Problema 17-29 supondo pressão uniforme.

**17-31* Projete um freio de disco com pinça de duas pastilhas que forneça uma força de frenagem de 240 N na porção periférica de uma roda de 75 mm de diâmetro que está rodando a 670 rpm. Utilize uma razão de raio interno para raio externo de 0,577. Suponha que haja desgaste uniforme. Declare todos os pressupostos e projete as escolhas. Especifique o material do freio, os raios externo e interno das pastilhas, o ângulo das pastilhas e a força de atuação solicitada.

17-32 Repita o Problema 17-31 supondo pressão uniforme.

17-33 Um carro de corrida ultraleve, movido a energia solar, pesa 500 lb com o motorista. Conta com duas rodas de bicicleta de 20 in de diâmetro com freios de disco com pinça de duas pastilhas em cada roda. Os freios devem ser capazes de fazer com que o carro pare em uma distância de 150 pés a uma velocidade de 45 mph. Desprezando as forças aerodinâmicas e de resistência ao rolamento, projete freios de disco com pinça de duas pastilhas para o carro. Utilize uma razão de raio interno para raio externo de 0,577. Suponha que haja desgaste uniforme. Declare todos os pressupostos e projete as escolhas. Especifique o material do freio, os raios externo e interno das pastilhas, o ângulo das pastilhas e a força de atuação solicitada.

17-34 Repita o Problema 17-33 supondo pressão uniforme.

* As respostas desses problemas estão no Apêndice D. Problemas com números em *itálico* são problemas de projeto.

APÊNDICE A

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

As tabelas a seguir contêm valores aproximados para as resistências e outras especificações de uma variedade de materiais de engenharia compilados de várias fontes. Em alguns casos, os dados são valores mínimos recomendados e, em outros casos, eles são obtidos de um único corpo de ensaio. Esses dados são apropriados para uso em exercícios de engenharia contidos neste texto, mas não devem ser considerados como representações estatisticamente válidas de especificações para qualquer liga ou material. O projetista deve consultar os fabricantes de materiais para informações mais precisas e atualizadas da resistência de materiais usadas em aplicações de engenharia, ou conduzir testes independentes dos materiais selecionados para determinar a conveniência definitiva deles para qualquer uso.

Mais informações sobre propriedades de materiais estão disponíveis na web. Alguns sites úteis são:

http://www.matweb.com
http://metals.about.com

Tabela	Descrição
A-1	Propriedades mecânicas de alguns materiais de engenharia
A-2	Propriedades mecânicas de algumas ligas de alumínio forjado
A-3	Propriedades mecânicas de algumas ligas de alumínio fundido
A-4	Propriedades mecânicas de algumas ligas de cobre forjadas e fundidas
A-5	Propriedades mecânicas de algumas ligas de titânio
A-6	Propriedades mecânicas de algumas ligas de magnésio
A-7	Propriedades mecânicas de algumas ligas de ferro fundido
A-8	Propriedades mecânicas de algumas ligas de aço inoxidável
A-9	Propriedades mecânicas de alguns aços-carbono
A-10	Propriedades mecânicas de algumas ligas e aços ferramenta
A-11	Propriedades mecânicas de alguns plásticos de engenharia

Tabela A-1 Propriedades físicas de alguns materiais de engenharia

Dados de várias fontes.* Estas propriedades são essencialmente similares para todas as ligas do material analisado

Material	Módulo de elasticidade E		Módulo de rigidez G		Coeficiente de Poisson ν	Densidade em peso γ	Densidade em massa ρ	Gravidade específica
	Mpsi	GPa	Mpsi	GPa		lb/in^3	Mg/m^3	
Ligas de alumínio	10,4	71,7	3,9	26,8	0,34	0,10	2,8	2,8
Cobre berílio	18,5	127,6	7,2	49,4	0,29	0,30	8,3	8,3
Latão, bronze	16,0	110,3	6,0	41,5	0,33	0,31	8,6	8,6
Cobre	17,5	120,7	6,5	44,7	0,35	0,32	8,9	8,6
Ferro, fundido, cinza	15,0	103,4	5,9	40,4	0,28	0,26	7,2	7,2
Ferro, fundido, dúctil	24,5	168,9	9,4	65,0	0,30	0,25	6,9	6,9
Ferro, fundido, maleável	25,0	172,4	9,6	66,3	0,30	0,26	7,3	7,3
Ligas de magnésio	6,5	44,8	2,4	16,8	0,33	0,07	1,8	1,8
Ligas de níquel	30,0	206,8	11,5	79,6	0,30	0,30	8,3	8,3
Aço, carbono	30,0	206,8	11,7	80,8	0,28	0,28	7,8	7,8
Aço, ligas	30,0	206,8	11,7	80,8	0,28	0,28	7,8	7,8
Aço, inoxidável	27,5	189,6	10,7	74,1	0,28	0,28	7,8	7,8
Ligas de titânio	16,5	113,8	6,2	42,4	0,34	0,16	4,4	4,4
Ligas de zinco	12,0	82,7	4,5	31,1	0,33	0,24	6,6	6,6

*_Properties of Some Metals and Alloys_, International Nickel Co., Inc., N. Y.; _Metals Handbook_, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabela A-2 Propriedades mecânicas de algumas ligas de alumínio forjado

Dados de várias fontes.* Valores aproximados. Consulte fabricantes de materiais para informações mais precisas

Liga alumínio forjado	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% deformação)		Resistência máxima em tração		Resistência de fadiga a 5E8 ciclos		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	-HB
1100	chapa recozida	5	34	13	90			35	23
	laminada a frio	22	152	24	165			5	44
2024	chapa recozida	11	76	26	179			20	–
	tratada termicamente	42	290	64	441	20	138	19	–
3003	chapa recozida	6	41	16	110			30	28
	laminada a quente	27	186	29	200			4	55
5052	chapa recozida	13	90	28	193			25	47
	laminada a quente	37	255	42	290			7	77
6061	chapa recozida	8	55	18	124			25	30
	tratada termicamente	40	276	45	310	14	97	12	95
7075	barra recozida	15	103	33	228			16	60
	tratada termicamente	73	503	83	572	14	97	11	150

*_Properties of Some Metal and Alloys_, International Nickel Co., Inc., N. Y.; _Metals Handbook_, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabela A-3 Propriedades mecânicas de algumas ligas de alumínio fundido

Dados da INCO.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais precisas.

Liga de alumínio fundido	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	-HB
43	material fundido – fundição em molde permanente	9	62	23	159	10	45
195	material fundido – fundição em areia	24	165	36	248	5	–
220	fundição em areia – tratada termicamente em solução	26	179	48	331	16	75
380	material fundido – fundição em molde metálico	24	165	48	331	3	–
A132	fundição em molde permanente – tratada termicamente + 340°F	43	296	47	324	0,5	125
A142	fundição em areia – tratada termicamente + 650°F	30	207	32	221	0,5	85

**Properties of Some Metal and Alloys*, International Nickel Co., Inc., New York.

Tabela A-4 Propriedades mecânicas de algumas ligas de cobre forjadas e fundidas

Dados da INCO.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais acuradas

Liga de cobre	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell ou Rockwell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	
CA110 Cobre puro	tira recozida	10	69	32	221	45	40HRF
	mola revenida	50	345	55	379	4	60HRB
CA170 Berílio cobre	tira recozida e envelhecida	145	1 000	165	1 138	7	35HRC
	endurecida e envelhecida	170	1 172	190	1 310	3	40HRC
CA220 Bronze comercial	tira recozida	10	69	37	255	45	53HRF
	mola revenida	62	427	72	496	3	78HRB
CA230 Latão vermelho	tira recozida	15	103	40	276	50	50HB
	revenido de endurecimento	60	414	75	517	7	135HB
CA260 Cartucho latão	tira recozida	11	76	44	303	66	54HRF
	mola revenida	65	448	94	648	3	91HRB
CA270 Latão amarelo	tira recozida	14	97	46	317	65	58HRF
	mola revenida	62	427	91	627	30	90HRB
CA510 Fósforo bronze	recozido	19	131	47	324	64	73HRF
	mola revenida	80	552	100	689	4	73HRF
CA614 Alumínio bronze	mole	45	310	82	565	40	84HRB
	duro	60	414	89	614	32	87HRB
CA655 Alto silício com bronze	recozida	21	145	56	386	63	76HRF
	mola revenida	62	427	110	758	4	97HRB
CA675 Manganês bronze	mole	30	207	65	448	33	65HRB
	meio-duro	60	414	84	579	19	90HRB
Estanho com chumbo bronze	fundida	19	131	34	234	18	60HB
Níquel-estanho bronze	fundida	20	138	50	345	40	85HB
	fundida e tratada termicamente	55	379	85	586	10	180HB

**Properties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., New York.

Tabela A-5 Propriedades mecânicas de algumas ligas de titânio

Dados da INCO.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais precisas

Liga de titânio	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell ou Rockwell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	(%)	
Ti-35A	chapa recozida	30	207	40	276	30	135HB
Ti-50A	chapa recozida	45	310	55	379	25	215HB
Ti-75A	chapa recozida	75	517	85	586	18	245HB
Liga Ti-0,2Pd	chapa recozida	45	310	55	379	25	215HB
Liga Ti-5 Al-2,5 Sn	recozida	125	862	135	931	13	39HRC
Liga Ti-8 Al-1 Mo-1 V	chapa recozida	130	896	140	965	13	39HRC
Liga Ti-8 Al-2 Sn-4 Zr-2 Mo	barrra recozida	130	896	140	965	15	39HRC
Liga Ti-8 Al-6 V-2 Sn	chapa recozida	155	1 069	165	1 138	12	41HRC
Liga Ti-6 Al-4 V	chapa recozida	130	896	140	13	2,5	39HRC
Liga Ti-6 Al-4 V	tratada termicamente	165	1 138	175	1 207	12	–
Liga T1-13 V-11 Cr-3 Al	chapa recozida	130	896	135	931	13	37HRC
Liga T1-13 V-11 Cr-3 Al	tratada termicamente	170	1 172	180	1 241	6	–

**Properties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., New York.

Tabela A-6 Propriedades mecânicas de algumas ligas de magnésio

Dados da INCO.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais precisas

Liga de magnésio	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell ou Rockwell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	(%)	
AZ 31B	chapa recozida	22	152	37	255	21	56HB
	chapa endurecida	32	221	42	290	15	73HB
AZ 80A	forjada	33	228	48	331	11	69HB
	forjada e envelhecida	36	248	50	345	6	72HB
AZ91A & AZ91B	fundição em molde metálico	22	152	33	228	3	63HB
AZ91C	fundida	14	97	24	165	2,5	60HB
	fundida, tratada em solução e envelhecida	19	131	40	276	5	70HB
AZ92A	fundida	14	97	25	172	2	65HB
	fundida, tratada em solução	14	97	40	276	10	63HB
	fundida, tratada em solução e envelhecida	22	152	40	276	3	81HB
EZ33A	fundida e envelhecida	16	110	23	159	3	50HB
HK31A	endurecida por deformação	29	200	37	255	8	68HB
	fundida e tratada termicamente	15	103	32	221	8	66HRB
HZ32A	fundida – tratada em solução e envelhecida	13	90	27	186	4	55HB
ZK60A	por extrusão	38	262	49	338	14	75HB
	por extrusão e envelhecida	44	303	53	365	11	82HB

**Properties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., New York.

Tabela A-7 Propriedade mecânicas de algumas ligas de ferro fundido

Dados da INCO.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais precisas

Liga de ferro fundido	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Tensão de compressão		Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	-HB
Ferro fundido cinzento – Classe 20	fundida	–	–	22	152	83	572	156
Ferro fundido cinzento – Classe 30	fundida	–	–	32	221	109	752	210
Ferro fundido cinzento – Classe 40	fundida	–	–	42	290	140	965	235
Ferro fundido cinzento – Classe 50	fundida	–	–	52	359	164	1 131	262
Ferro fundido cinzento – Classe 60	fundida	–	–	62	427	187	1 289	302
Ferro dúctil 60-40-18	recozida	47	324	65	448	52	359	160
Ferro dúctil 65-45-12	recozida	48	331	67	462	53	365	174
Ferro dúctil 80-55-06	recozida	53	365	82	565	56	386	228
Ferro dúctil 120-90-02	temperada e revenida	120	827	140	965	134	924	325

**Properties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., N. Y.; Metals Handbook, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.135

Tabela A-8 Propriedades mecânicas de algumas ligas de aço inoxidável

Dados da INCO.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais precisas

Liga de aço inoxidável	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell ou Rockwell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	(%)	
Tipo 301	tira recozida	40	276	110	758	60	85HRB
	laminada a frio	165	1 138	200	1 379	8	41HRC
Tipo 302	chapa recozida	40	276	90	621	50	85HRB
	laminada a frio	165	1 138	190	1 310	5	40HRC
Tipo 304	chapa recozida	35	241	85	586	50	80HRB
	laminada a frio	160	1 103	185	1 276	4	40HRC
Tipo 314	barra recozida	50	345	100	689	45	180HB
Tipo 316	chapa recozida	40	276	90	621	50	85HRB
Tipo 330	laminada a quente	55	379	100	689	35	200HB
	recozida	35	241	80	552	50	150HB
Tipo 410	chapa recozida	45	310	70	483	25	80HRB
	tratada termicamente	140	965	180	1 241	15	39HRC
Tipo 420	barra recozida	50	345	95	655	25	92HRB
	tratada termicamente	195	1 344	230	1 586	8	500HB
Tipo 431	barra recozida	95	655	125	862	25	260HB
	tratada termicamente	150	1 034	195	1 344	15	400HB
Tipo 440C	barra recozida	65	448	110	758	14	230HB
	temperada e revenida a 600°F	275	1 896	285	1 965	2	57HRC
17-4 PH (AISI 630)	endurecida	185	1 276	200	1 379	14	44HRC
17-7 PH (AISI 631)	endurecida	220	1 517	235	1 620	6	48HRC

**Properties of Some Metals and Alloys*, Internacional Nickel Co., Inc., New York.

Tabela A-9 Propriedades mecânicas de alguns aços-carbono

Dados de várias fontes.* Valores aproximados. Consulte os fabricantes de materiais para informações mais precisas

Número SAE /AISI	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação do corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	(%)	-HB
1010	laminado a quente	26	179	47	324	28	95
	laminado a frio	44	303	53	365	20	105
1020	laminado a quente	30	207	55	379	25	111
	laminado a frio	57	393	68	469	15	131
1030	laminado a quente	38	259	68	469	20	137
	normalizado a 1650°F	50	345	75	517	32	149
	laminado a frio	64	441	76	524	12	149
	temperado e revenido a 1000°F	75	517	97	669	28	255
	temperado e revenido a 800°F	84	579	106	731	23	302
	temperado e revenido a 400°F	94	648	123	848	17	495
1035	laminado a quente	40	276	72	496	18	143
	laminado a frio	67	462	80	552	12	163
1040	laminado a quente	42	290	76	524	18	149
	normalizado a 1650°F	54	372	86	593	28	170
	laminado a frio	71	490	85	586	12	170
	temperado e revenido a 1200°F	63	434	92	634	29	192
	emperado e revenido a 800°F	80	552	110	758	21	241
	temperado e revenido a 400°F	86	593	113	779	19	262
1045	laminado a quente	45	310	82	565	16	163
	laminado a frio	77	531	91	627	12	179
1050	laminado a quente	50	345	90	621	15	179
	normalizado a 1650°F	62	427	108	745	20	217
	laminado a frio	84	579	100	689	10	197
	temperado e revenido a 1200°F	78	538	104	717	28	235
	temperado e revenido a 800°F	115	793	158	1 089	13	444
	temperado e revenido a 400°F	117	807	163	1 124	9	514
1060	laminado a quente	54	372	98	676	12	200
	normalizado a 1650°F	61	421	112	772	18	229
	temperado e revenido a 1200°F	76	524	116	800	23	229
	temperado e revenido a 800°F	97	669	140	965	17	277
	temperado e revenido a 400°F	111	765	156	1 076	14	311
1095	laminado a quente	66	455	120	827	10	248
	normalizado a 1650°F	72	496	147	1 014	9	13
	temperado e revenido a 1200°F	80	552	130	896	21	269
	temperado e revenido a 800°F	112	772	176	1 213	12	363
	temperado e revenido a 400°F	118	814	183	1 262	10	375

*_SAE Handbook, Society of Automotive Engineers_, Warrendale Pa.; Metals Handbook, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabela A-10 Propriedades mecânicas de algumas ligas e aços ferramenta

Dados de várias fontes.* Valores aproximados. Consulte o fabricante de materiais para informações mais precisas

Número SAE /AISI	Condição	Resistência de escoamento em tração (0,2% de deformação)		Resistência máxima em tração		Elongação do corpo de ensaio de 2 in	Dureza Brinell ou Rockwell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	(%)	
1340	recozida	63	434	102	703	25	204HB
	temperada e revenida	109	752	125	862	21	250HB
4027	recozida	47	324	75	517	30	150HB
	temperada e revenida	113	779	132	910	12	264HB
4130	recozida a 1450°F	52	359	81	558	28	156HB
	normalizada a 1650°F	63	434	97	669	25	197HB
	temperada e revenida a 1200°F	102	703	118	814	22	245HB
	temperada e revenida a 800°F	173	1 193	186	1 282	13	380HB
	temperada e revenida a 400°F	212	1 462	236	1 627	10	41HB
4140	recozida a 1450°F	61	421	95	655	26	197HB
	normalizada a 1650°F	95	655	148	1 020	18	302HB
	temperada e revenida a 1200°F	95	655	110	758	22	230HB
	temperada e revenida a 800°F	165	1 138	181	1 248	13	370HB
	temperada e revenida a 400°F	238	1 641	257	1 772	8	510HB
4340	temperada e revenida a 1200°F	124	855	140	965	19	280HB
	temperada e revenida a 1000°F	156	1 076	170	1 172	13	360HB
	temperada e revenida a 800°F	198	1 365	213	1 469	10	430HB
	temperada e revenida a 600°F	230	1 586	250	1 724	10	486HB
6150	recozida	59	407	96	662	23	192HB
	temperada e revenida	148	1 020	157	1 082	16	314HB
8740	recozida	60	414	95	655	25	190HB
	temperada e revenida	133	917	144	993	18	288HB
H-11	recozida a 1600°F	53	365	100	689	25	96HRB
	temperada e revenida a 1000°F	250	1 724	295	2 034	9	55HRC
L-2	recozida a 1425°F	74	510	103	710	25	96HRB
	temperada e revenida a 400°F	260	1 793	290	1 999	5	54HRC
L-6	recozida a 1425°F	55	379	95	655	25	93HRB
	temperada e revenida a 600°F	260	1 793	290	1 999	4	54HRC
P-20	recozida a 1425°F	75	517	100	689	17	97HRB
	temperada e revenida a 400°F	205	1 413	270	1 862	10	52HRC
S-1	recozida a 1475°F	60	414	100	689	24	96HRB
	temperada e revenida a 400°F	275	1 896	300	2 068	4	57HRC
S-5	recozida a 1450°F	64	441	105	724	25	96HRB
	temperada e revenida a 400°F	280	1 931	340	2 344	5	59HRC
S-7	recozida a 1525°F	55	379	93	641	25	95HRB
	temperada e revenida a 400°F	210	1 448	315	2 172	7	58HRC
A-8	recozida a 1550°F	65	448	103	710	24	97HRB
	temperada e revenida a 1050°F	225	1 551	265	1 827	9	52HRC

*_Machine Design Materials Reference Issue_, Penton Publishing, Cleveland Ohio; _Metals Handbook_, ASM, Materials Park, Ohio.

Tabela A-11 Propriedades de alguns plásticos de engenharia

Dados de várias fontes.* Valores aproximados. Consulte o fabricante de materiais para informações mais precisas

Material	Módulo de elasticidade aproximado E		Resistência máxima em tração		Resistência máxima em compressão		Elongação no corpo de ensaio de 2 in	Temperatura máxima	Gravidade específica
	Mpsi	GPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	(%)	°F	
ABS	0,3	2,1	6,0	41,4	10,0	68,9	5 a 25	160–200	1,05
20–40% de enchimento vítreo	0,6	4,1	10,0	68,9	12,0	82,7	3	200–230	1,30
Acetal	0,5	3,4	8,8	60,7	18,0	124,1	60	220	1,41
20–30% de enchimento vítreo	1,0	6,9	10,0	68,9	18,0	124,1	7	185–220	1,56
Acrílico	0,4	2,8	10,0	68,9	15,0	103,4	5	140–190	1,18
Fluoroplástico (PTFE)	0,2	1,4	5,0	34,5	6,0	41,4	100	352–330	2,10
Náilon 6/6	0,2	1,4	10,0	68,9	10,0	68,9	60	180–300	1,14
Náilon 11	0,2	1,3	8,0	55,2	8,0	55,2	300	180–300	1,04
20–30% de enchimento vítreo	0,4	2,5	12,8	88, 3	12,8	88,3	4	250–340	1,26
Policarbonato	0,4	2,4	9,0	62,1	12,0	82,7	100	350	1,20
10–40% de enchimento vítreo	1,0	6,9	17,0	117,2	17,0	117,2	2	275	1,35
HMW Polietileno	0,1	0,7	2,5	17,2	–	–	525	–	0,94
Óxido polifenileno	0,4	2,4	9,6	66,2	16,4	113,1	20	212	1,06
20–30% de enchimento vítreo	1,1	7,8	15,5	106,9	17,5	120,7	5	260	1,23
Polipropileno	0,2	1,4	5,0	34,5	7,0	48,3	500	250–320	0,90
20–30% de enchimento vítreo	0,7	4,8	7,5	51,7	6,2	42,7	2	300–320	1,10
Poliestireno de impacto	0,3	2,1	4,0	27,6	6,0	41,4	2 a 80	140–175	1,07
20–30% de enchimento vítreo	0,1	0,7	12,0	82,7	16,0	110,3	1	180–200	1,25
Polissulfone	0,4	2,5	10,2	70,3	13,9	95,8	50	300–345	1,24

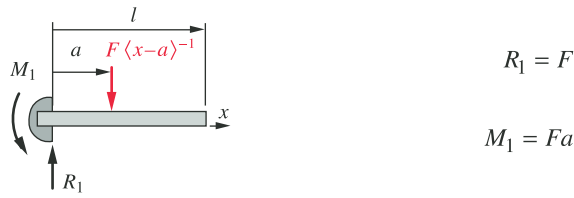
**Modern Plastics Encyclopedia*, McCraw-Hill, New York.; *Machine Design Materials Reference Issue*, Penton Publishing, Cleveland, Ohio.

APÊNDICE B

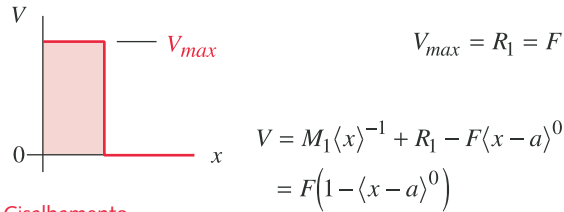
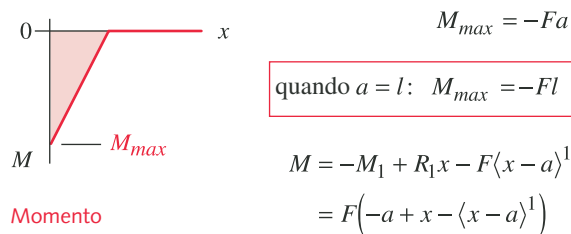
TABELAS DE VIGAS

Funções de carregamento, cisalhamento, momento, inclinação e deflexão para uma coleção de configurações comuns de vigas e carregamentos são apresentadas nestas tabelas. São definidas as vigas **biapoiadas**, **em balanço** e **vigas com sobrebalanço**, quer com uma **carga concentrada** em qualquer ponto ou uma **carga uniformemente distribuída** ao longo de qualquer porção do vão. Um conjunto geral de equações é derivado para cada viga. Casos especiais, como aqueles com a carga no centro do vão, são acomodados pela escolha apropriada das dimensões nas fórmulas gerais. Em todos os casos, funções de singularidades são usadas para escrever as equações de viga, o que nos dá, para cada função, uma única expressão para o vão completo. Ver a Seção 3.9 para uma discussão acerca das funções de singularidade. As equações para os casos de viga neste apêndice foram codificadas em arquivos, que estão disponíveis no CD que vem com este livro. Em alguns casos, os arquivos permitem que múltiplas cargas sejam aplicadas a diferentes posições na viga, mas as derivações neste apêndice correspondem a apenas um carregamento por viga. *Use superposição para combinar diversos casos de vigas quando mais de um tipo de carga estiver presente em uma viga*. Para uma coleção mais completa de fórmulas de vigas, veja Roark e Young, *Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1989. A seguir, apresentamos uma chave para as figuras neste apêndice e para os arquivos relativos.

Figura	Caso	Arquivo
B-1*a*	Viga em balanço com carregamento concentrado	CANTCONC
B-1*b*	Viga em balanço com carregamento uniformemente distribuído	CANTUNIF
B-2*a*	Viga biapoiada com carregamento concentrado	SIMPCONC
B-2*b*	Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído	SIMPUNIF
B-3*a*	Viga com sobrebalanço com carregamento concentrado	OVHGCONC
B-3*b*	Viga com sobrebalanço com carregamento uniformemente distribuído	OVHGUNIF

(a) Viga em balanço com carregamento concentrado

$$R_1 = F$$

$$M_1 = Fa$$

Carregamento $q = M_1\langle x\rangle^{-2} + R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1}$

$$V_{max} = R_1 = F$$

$$V = M_1\langle x\rangle^{-1} + R_1 - F\langle x-a\rangle^{0}$$
$$= F\left(1-\langle x-a\rangle^{0}\right)$$

Cisalhamento

$$M_{max} = -Fa$$

quando $a = l$: $M_{max} = -Fl$

$$M = -M_1 + R_1 x - F\langle x-a\rangle^{1}$$
$$= F\left(-a + x - \langle x-a\rangle^{1}\right)$$

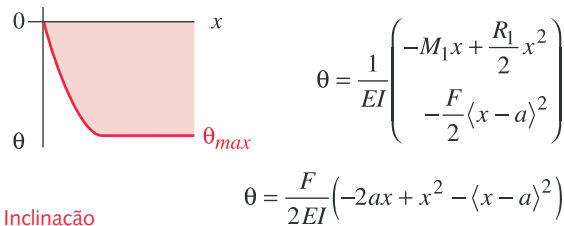
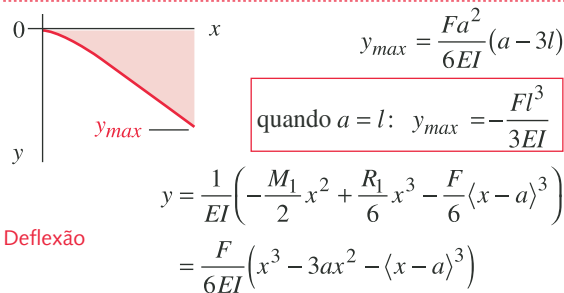
Momento

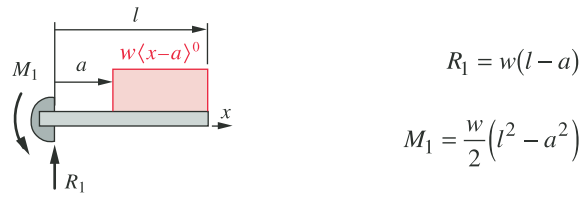
$$\theta = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} -M_1 x + \dfrac{R_1}{2}x^2 \\ -\dfrac{F}{2}\langle x-a\rangle^2 \end{pmatrix}$$

Inclinação
$$\theta = \frac{F}{2EI}\left(-2ax + x^2 - \langle x-a\rangle^2\right)$$

$$y_{max} = \frac{Fa^2}{6EI}(a-3l)$$

quando $a = l$: $y_{max} = -\dfrac{Fl^3}{3EI}$

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_1}{2}x^2 + \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{F}{6}\langle x-a\rangle^3\right)$$

Deflexão
$$= \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right)$$

(b) Viga em balanço com carregamento uniformemente distribuído

$$R_1 = w(l-a)$$

$$M_1 = \frac{w}{2}\left(l^2 - a^2\right)$$

Carregamento $q = M_1\langle x\rangle^{-2} + R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0}$

$$V_{max} = R_1 = w(l-a)$$

$$V = M_1\langle x\rangle^{-1} + R_1 - w\langle x-a\rangle^{1}$$
$$= w\left[(l-a) - \langle x-a\rangle^{1}\right]$$

Cisalhamento

$$M_{max} = M_1 = \frac{w}{2}\left(l^2 - a^2\right)$$

quando $a = 0$: $M_{max} = \dfrac{wl^2}{2}$

$$M = -M_1 + R_1 x - w\langle x-a\rangle^2$$

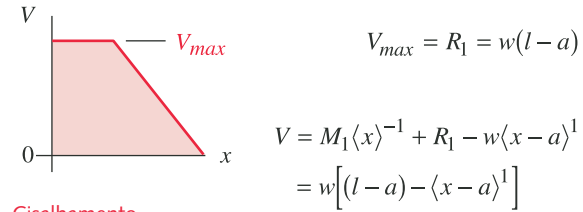
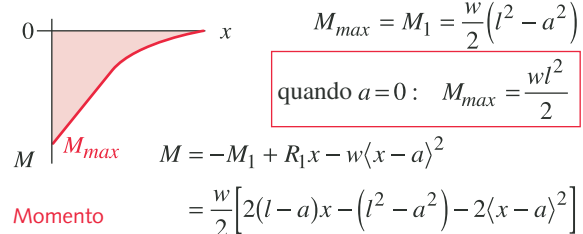
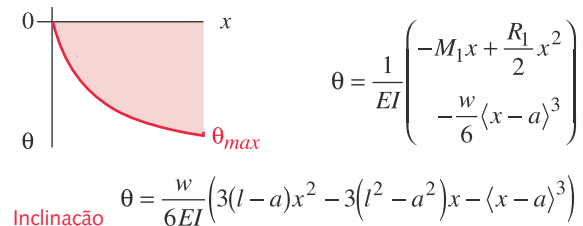
Momento
$$= \frac{w}{2}\left[2(l-a)x - \left(l^2 - a^2\right) - 2\langle x-a\rangle^2\right]$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} -M_1 x + \dfrac{R_1}{2}x^2 \\ -\dfrac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 \end{pmatrix}$$

Inclinação
$$\theta = \frac{w}{6EI}\left(3(l-a)x^2 - 3\left(l^2 - a^2\right)x - \langle x-a\rangle^3\right)$$

$$y_{max} = \frac{w}{24EI}\left(-3l^4 + 4a^3 l - a^4\right)$$

quando $a = 0$: $y_{max} = -\dfrac{wl^4}{8EI}$

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_1}{2}x^2 + \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4\right)$$

Deflexão
$$= \frac{w}{24EI}\left(4(l-a)x^3 - 6\left(l^2 - a^2\right)x^2 - \langle x-a\rangle^4\right)$$

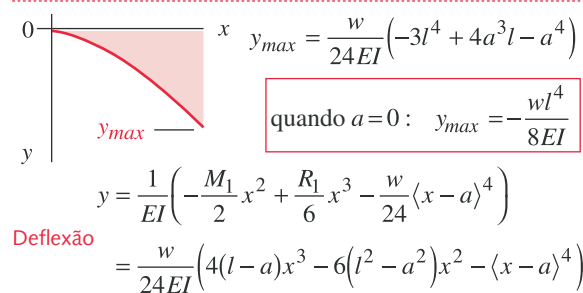
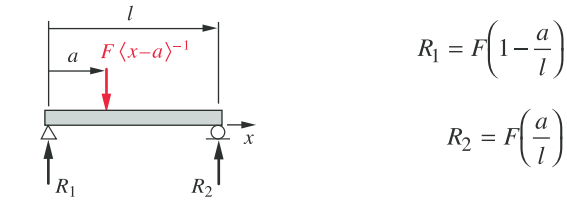



FIGURA B-1

Vigas em balanço com carregamento concentrado ou distribuído. Obs.: < > denota uma função de singularidade.

(*a*) Viga biapoiada com carregamento concentrado

$$R_1 = F\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

$$R_2 = F\left(\frac{a}{l}\right)$$

Carregamento $q = R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1}$

Cisalhamento

$$V_{max} = \mathrm{MAX}(R_1, R_2)$$

$$V = R_1 - F\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{0} = F\left(1 - \frac{a}{l} - \langle x-a\rangle^{0}\right)$$

Momento

$$M_{max} = Fa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

quando $a = \frac{l}{2}$: $M_{max} = \frac{Fl}{4}$

$$M = R_1 x - F\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{1} = F\left[\left(1 - \frac{a}{l}\right)x - \langle x-a\rangle^{1}\right]$$

Inclinação

$$\theta = \frac{F}{2EI}\left\{\left(1 - \frac{a}{l}\right)x^2 - \langle x-a\rangle^{2} + \frac{a}{3l}\left(-a^2 + 3al - 2l^2\right)\right\}$$

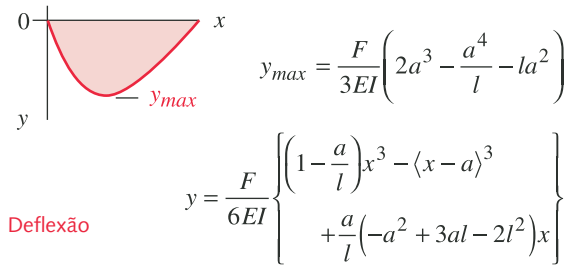
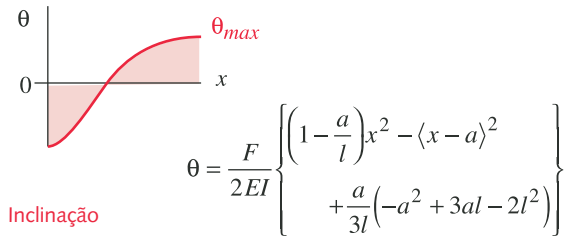
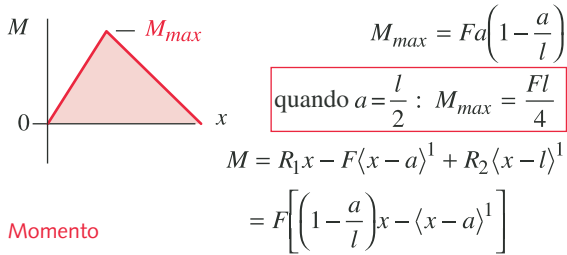
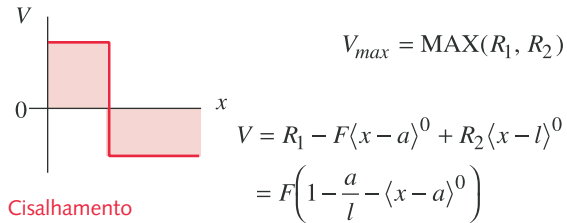
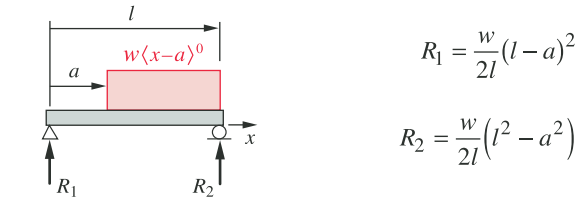
Deflexão

$$y_{max} = \frac{F}{3EI}\left(2a^3 - \frac{a^4}{l} - la^2\right)$$

$$y = \frac{F}{6EI}\left\{\left(1 - \frac{a}{l}\right)x^3 - \langle x-a\rangle^{3} + \frac{a}{l}\left(-a^2 + 3al - 2l^2\right)x\right\}$$

(*b*) Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído

$$R_1 = \frac{w}{2l}(l-a)^2$$

$$R_2 = \frac{w}{2l}\left(l^2 - a^2\right)$$

Carregamento $q = R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{-1}$

Cisalhamento

$$V_{max} = \mathrm{MAX}(R_1, R_2)$$

$$V = R_1 - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{0} = w\left[\frac{1}{2l}(l-a)^2 - \langle x-a\rangle^{1}\right]$$

Momento

quando $a = 0$: $M = \frac{wx}{2}(l-x)$

$$M = R_1 x - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-l\rangle^{1} = \frac{w}{2}\left[\frac{x}{l}(l-a)^2 - \langle x-a\rangle^{2}\right]$$

Inclinação

$$\theta = \frac{w}{24EI}\left\{\frac{6x^2}{l}(l-a)^2 - 4\langle x-a\rangle^{3} + \frac{1}{l}\left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]\right\}$$

Deflexão

quando $a = 0$:

$$y = \frac{wx}{24EI}\left(2lx^2 - x^3 - l^3\right)$$

$$y = \frac{w}{24EI}\left\{\frac{2x^3}{l}(l-a)^2 - \langle x-a\rangle^{4} + \frac{x}{l}\left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]\right\}$$

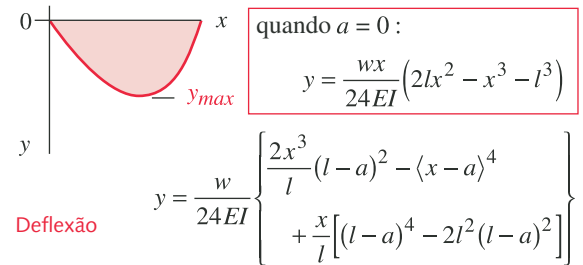
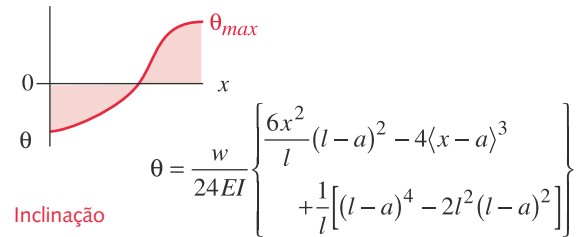
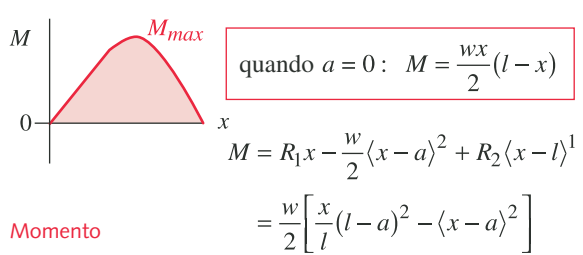
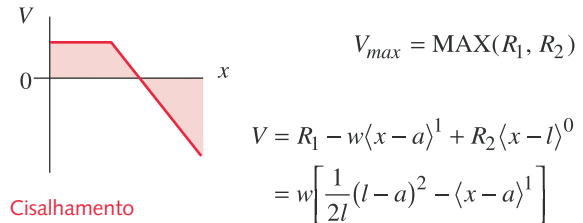
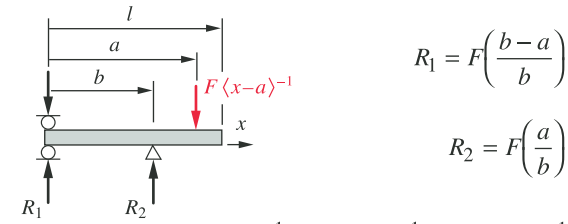
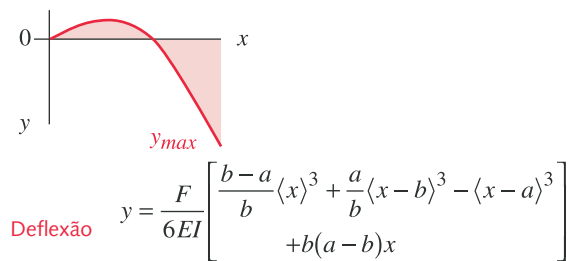
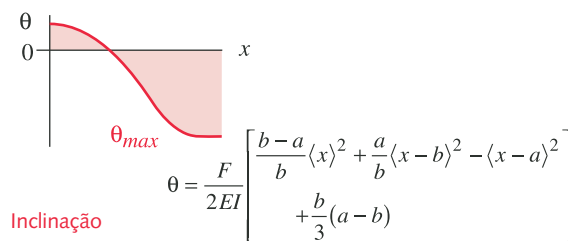
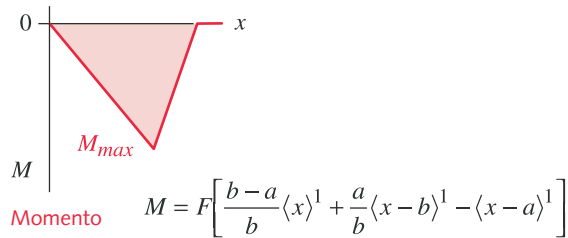
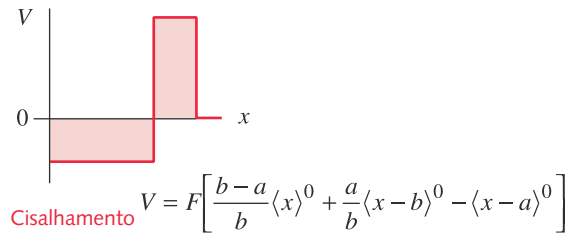



FIGURA B-2

Vigas biapoiadas com carregamento concentrado ou distribuído. Obs.: < > denota uma função de singularidade.

(*a*) Viga com sobrebalanço com carregamento concentrado

$$R_1 = F\left(\frac{b-a}{b}\right)$$

$$R_2 = F\left(\frac{a}{b}\right)$$

Carregamento $q = R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-b\rangle^{-1}$

Cisalhamento $V = F\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{0} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{0} - \langle x-a\rangle^{0}\right]$

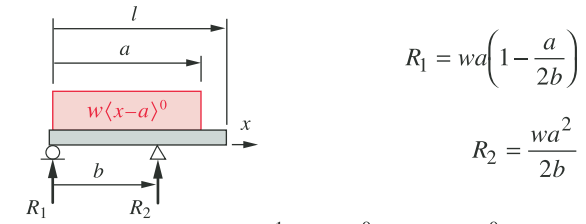
Momento $M = F\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{1} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{1} - \langle x-a\rangle^{1}\right]$

Inclinação $\theta = \frac{F}{2EI}\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{2} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{2} - \langle x-a\rangle^{2} + \frac{b}{3}(a-b)\right]$

Deflexão $y = \frac{F}{6EI}\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{3} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{3} - \langle x-a\rangle^{3} + b(a-b)x\right]$

(*b*) Viga com sobrebalanço com carregamento uniformemente distribuído

$$R_1 = wa\left(1-\frac{a}{2b}\right)$$

$$R_2 = \frac{wa^2}{2b}$$

Carregamento $q = R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x\rangle^{0} + w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-b\rangle^{-1}$

Cisalhamento $V = w\left[a - x + \langle x-a\rangle^{1} + \frac{a^2}{2b}\left(\langle x-b\rangle^{0} - 1\right)\right]$

Momento $M = \frac{w}{2}\left[\left(2a - \frac{a^2}{b}\right)x - x^2 + \langle x-a\rangle^{2} + \frac{a^2}{b}\langle x-b\rangle^{1}\right]$

Inclinação $\theta = \frac{w}{EI}\left[\frac{1}{24}\left(2a^2b - 4ab^2 + b^3 - \frac{1}{b}\langle b-a\rangle^{4}\right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b}\right)x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{a^2}{4b}\langle x-b\rangle^{2} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3}\right]$

Deflexão $y = \frac{w}{24EI}\left[\left(2a^2b - 4ab^2 + b^3 - \frac{1}{b}\langle b-a\rangle^{4}\right)x + \left(4a - \frac{2a^2}{b}\right)x^3 - x^4 + \langle x-a\rangle^{4} + \frac{2a^2}{b}\langle x-b\rangle^{3}\right]$

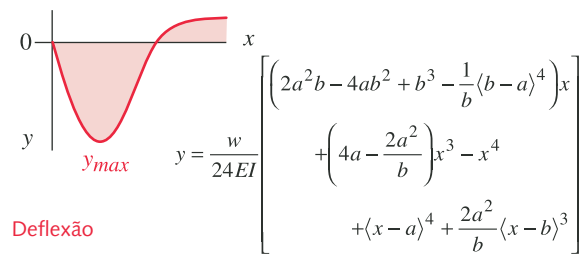
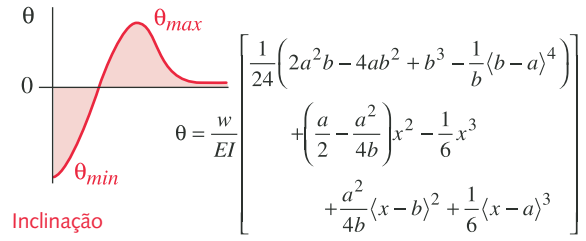
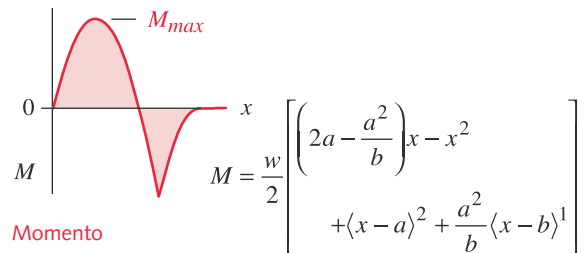
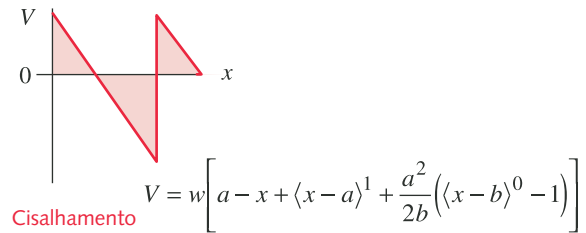



FIGURA B-3

Vigas com sobrebalanço com carregamento concentrado ou distribuído. Obs.: < > denota uma função de singularidade.

APÊNDICE C

FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

Fatores de concentração de tensão para 14 casos comuns são apresentados neste apêndice como listado abaixo. Todos os diagramas foram retirados de R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration, Parts 1 to 5", *Machine Design*, February-July, 1951, Penton Publishing, Cleveland, Ohio, com autorização. Equações aproximadas para esses diagramas foram inseridas e definidas em cada figura. Estas equações foram codificadas como funções (indicadas abaixo), que podem ser incorporadas em outros modelos para permitir geração automática de fatores de concentração de tensão aproximados durante os cálculos. Lembre-se de que o sistema decimal americano utiliza ponto em vez de vírgula.

Figura	Caso	Nome do arquivo
C-1	Eixo com rebaixo arredondado em tensão axial	APP_C-01
C-2	Eixo com rebaixo arredondado em flexão	APP_C-02
C-3	Eixo com rebaixo arredondado em torção	APP_C-03
C-4	Eixo com sulco em tensão axial	APP_C-04
C-5	Eixo com sulco em flexão	APP_C-05
C-6	Eixo com sulco em torção	APP_C-06
C-7	Eixo com orifício transversal em flexão	APP_C-07
C-8	Eixo com orifício transversal em torção	APP_C-08
C-9	Barra plana com rebaixo arredondado em tensão axial	APP_C-09
C-10	Barra plana com rebaixo arredondado em flexão	APP_C-10
C-11	Barra plana com entalhe em tensão axial	APP_C-11
C-12	Barra plana com entalhe em flexão	APP_C-12
C-13	Barra plana com orifício transversal em tensão axial	APP_C-13
C-14	Barra plana com orifício transversal em flexão	APP_C-14

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
2,00	1,01470	–0,30035
1,50	0,99957	–0,28221
1,30	0,99682	–0,25751
1,20	0,96272	–0,25527
1,15	0,98084	–0,22485
1,10	0,98450	–0,20818
1,07	0,98498	–0,19548
1,05	1,00480	–0,17076
1,02	1,01220	–0,12474
1,01	0,98413	–0,10474

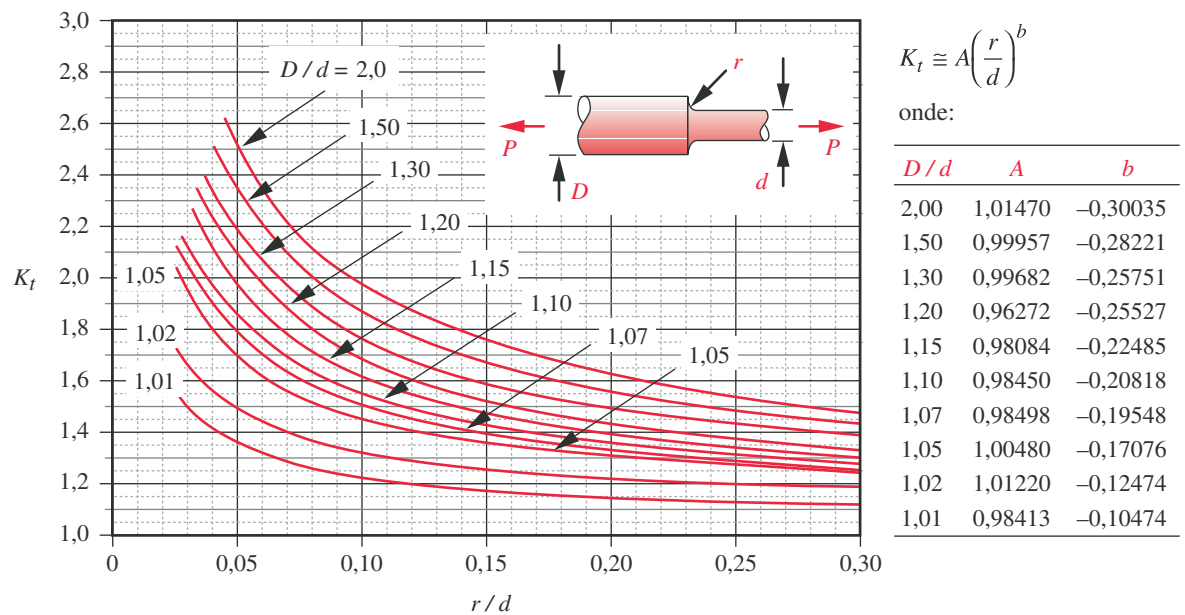



FIGURA C-1

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com um rebaixo arredondado em tração axial.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
6,00	0,87868	–0,33243
3,00	0,89334	–0,30860
2,00	0,90879	–0,28598
1,50	0,93836	–0,25759
1,20	0,97098	–0,21796
1,10	0,95120	–0,23757
1,07	0,97527	–0,20958
1,05	0,98137	–0,19653
1,03	0,98061	–0,18381
1,02	0,96048	–0,17711
1,01	0,91938	–0,17032

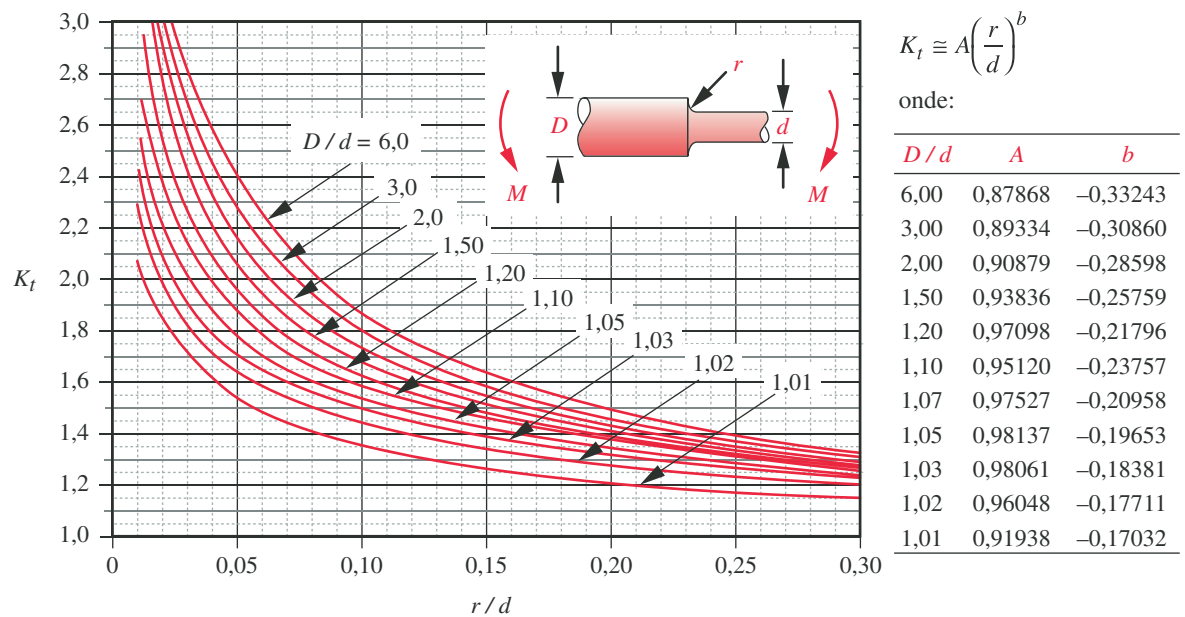
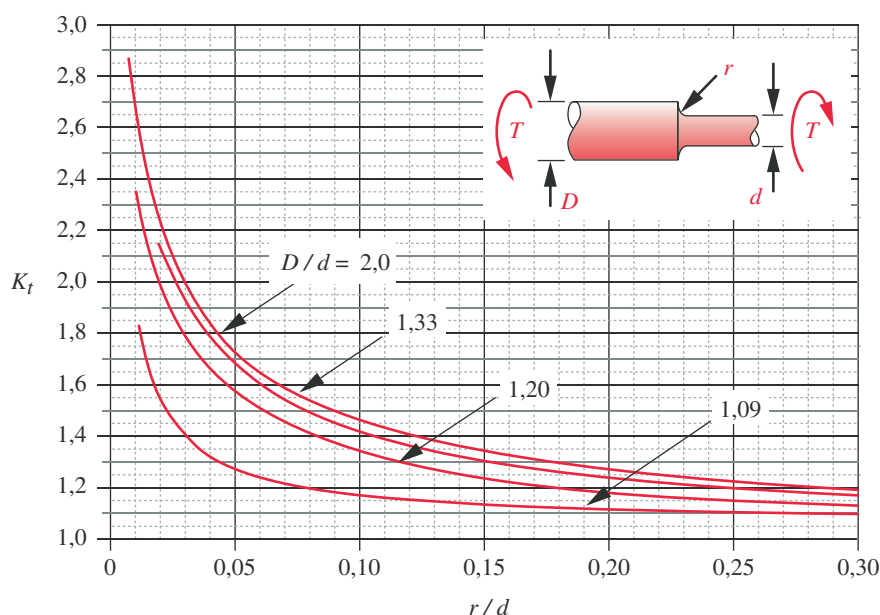



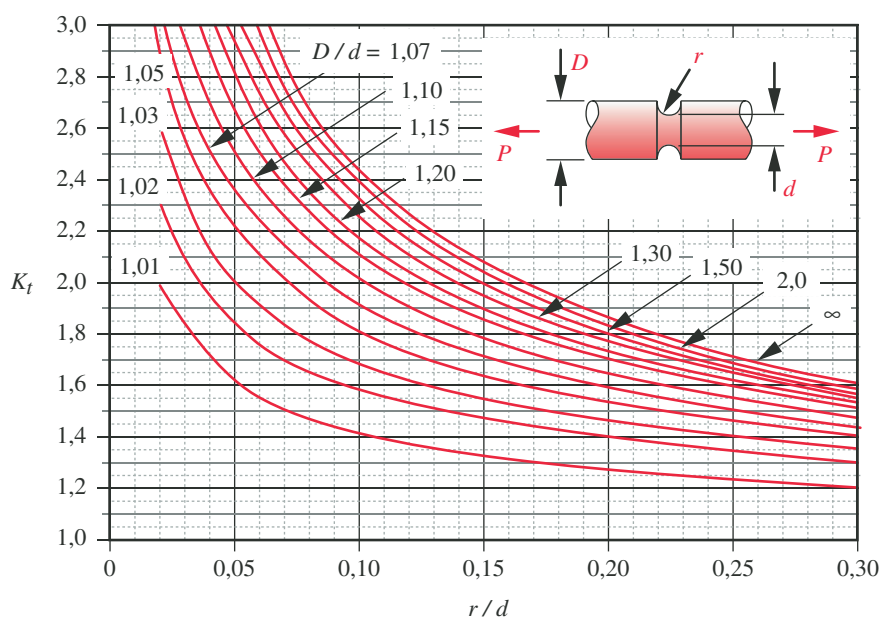
FIGURA C-2

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com um rebaixo arredondado em flexão.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
2,00	0,86331	–0,23865
1,33	0,84897	–0,23161
1,20	0,83425	–0,21649
1,09	0,90337	–0,12692

FIGURA C-3

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com um rebaixo arredondado em torção.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
∞	0,99372	–0,39352
2,00	0,99383	–0,38231
1,50	0,99808	–0,36955
1,30	1,00490	–0,35545
1,20	1,01070	–0,33765
1,15	1,02630	–0,31673
1,10	1,02720	–0,29484
1,07	1,02380	–0,27618
1,05	1,02720	–0,25256
1,03	1,03670	–0,21603
1,02	1,03790	–0,18755
1,01	1,00030	–0,15609

FIGURA C-4

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com sulco em tração axial.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
∞	0,94801	–0,33302
2,00	0,93619	–0,33066
1,50	0,93894	–0,32380
1,30	0,94299	–0,31504
1,20	0,94681	–0,30582
1,15	0,95311	–0,29739
1,12	0,95573	–0,28886
1,10	0,95454	–0,28268
1,07	0,96774	–0,26452
1,05	0,98755	–0,24134
1,03	0,99033	–0,21517
1,02	0,97753	–0,19793
1,01	0,99393	–0,15238

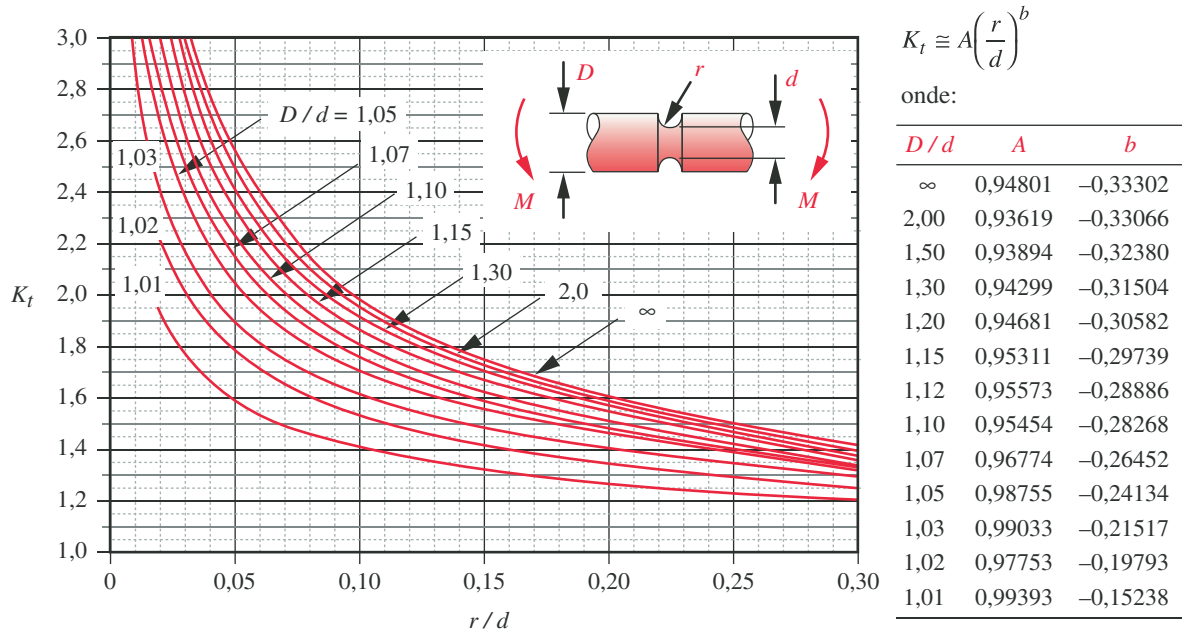



FIGURA C-5

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com sulco em flexão.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
∞	0,88126	–0,25204
2,00	0,89035	–0,24075
1,30	0,89460	–0,23267
1,20	0,90182	–0,22334
1,10	0,92311	–0,19740
1,05	0,93853	–0,16941
1,02	0,96877	–0,12605
1,01	0,97245	–0,10162

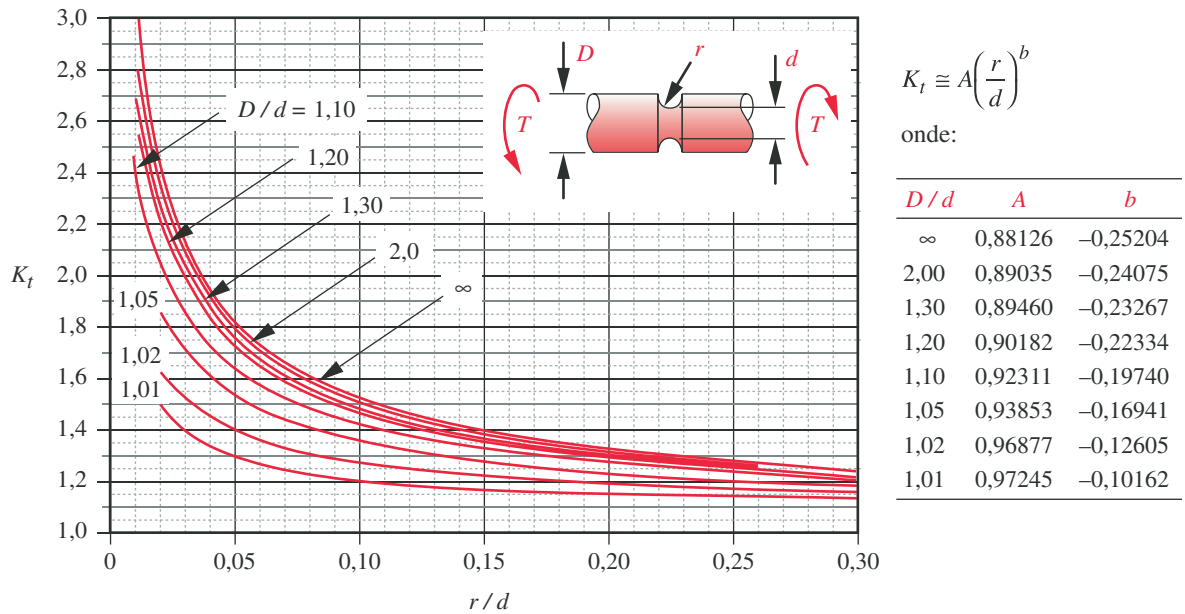



FIGURA C-6

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com sulco em torção.

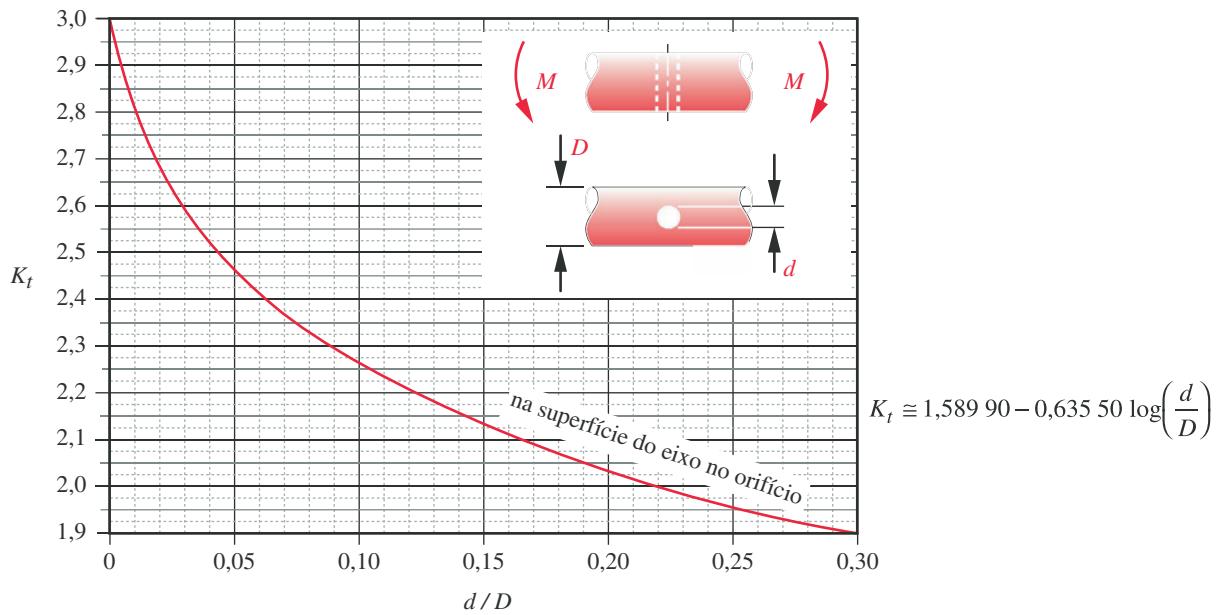



FIGURA C-7

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com um orifício transversal em flexão.

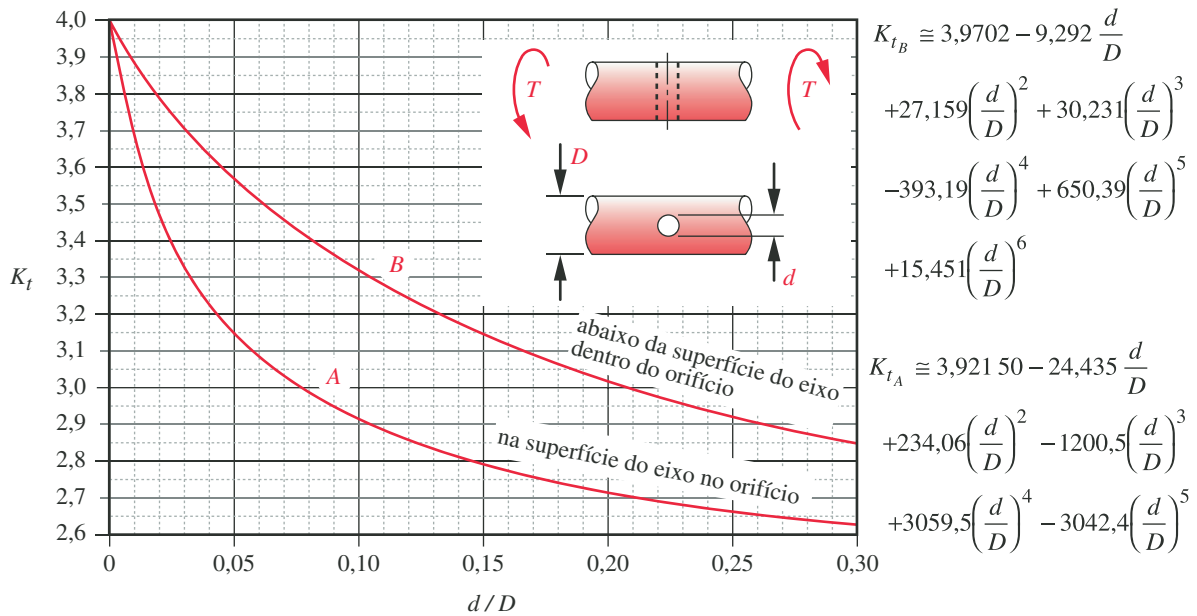



FIGURA C-8

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para um eixo com um orifício transversal em torção.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
2,00	1,09960	–0,32077
1,50	1,07690	–0,29558
1,30	1,05440	–0,27021
1,20	1,03510	–0,25084
1,15	1,01420	–0,23935
1,10	1,01300	–0,21535
1,07	1,01450	–0,19366
1,05	0,98797	–0,13848
1,02	1,02590	–0,16978
1,01	0,97662	–0,10656

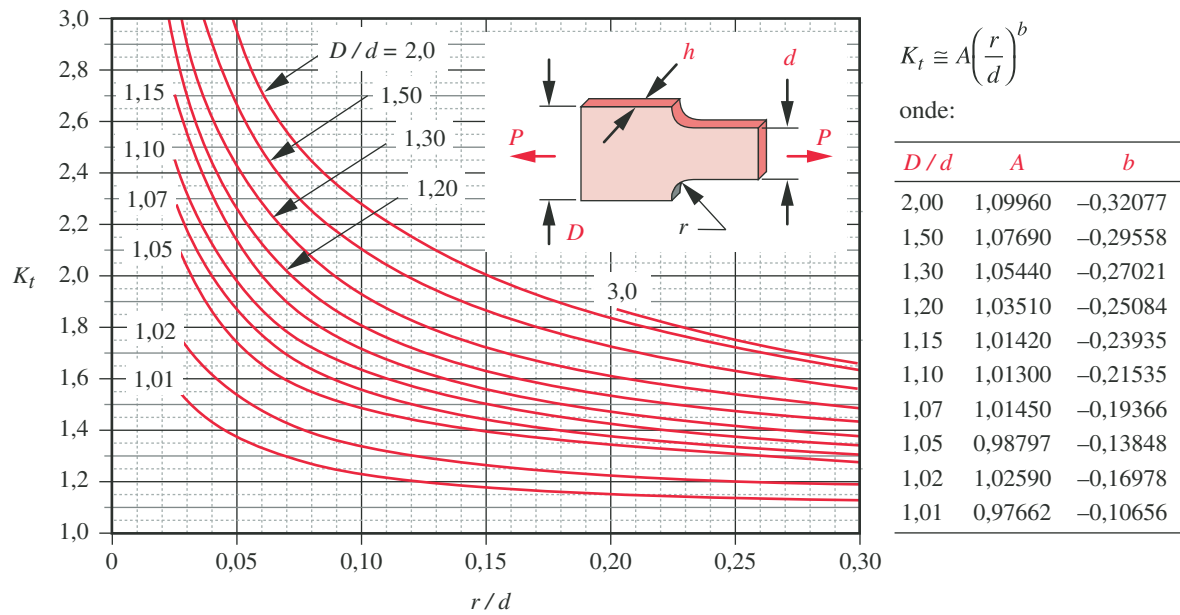



FIGURA C-9

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para uma barra plana com rebaixo arredondado em tração axial.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
6,00	0,89579	–0,35847
3,00	0,90720	–0,33333
2,00	0,93232	–0,30304
1,30	0,95880	–0,27269
1,20	0,99590	–0,23829
1,10	1,01650	–0,21548
1,07	1,01990	–0,20333
1,05	1,02260	–0,19156
1,03	1,01660	–0,17802
1,02	0,99528	–0,17013
1,01	0,96689	–0,15417

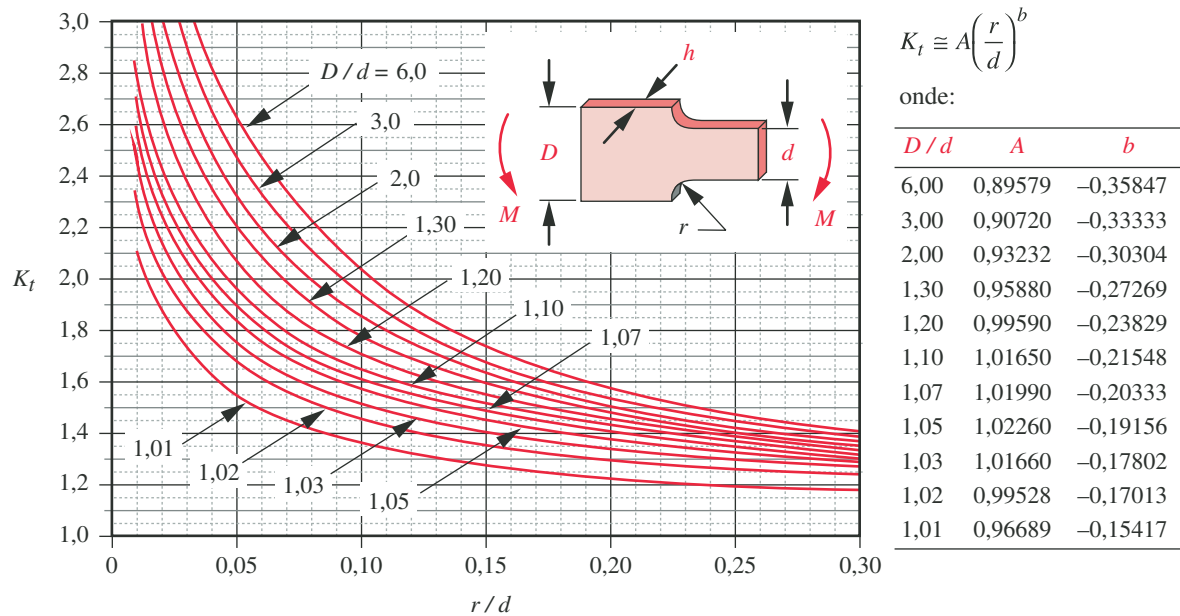



FIGURA C-10

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para uma barra plana com rebaixo arredondado em flexão.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
∞	1,10950	–0,41712
3,00	1,11390	–0,40923
2,00	1,13390	–0,38586
1,50	1,13260	–0,36592
1,30	1,15860	–0,33260
1,20	1,14750	–0,31507
1,15	1,09520	–0,32517
1,10	1,08510	–0,29997
1,07	1,09120	–0,26857
1,05	1,09060	–0,24163
1,03	1,05180	–0,22216
1,02	1,05400	–0,18879
1,01	1,04260	–0,14145

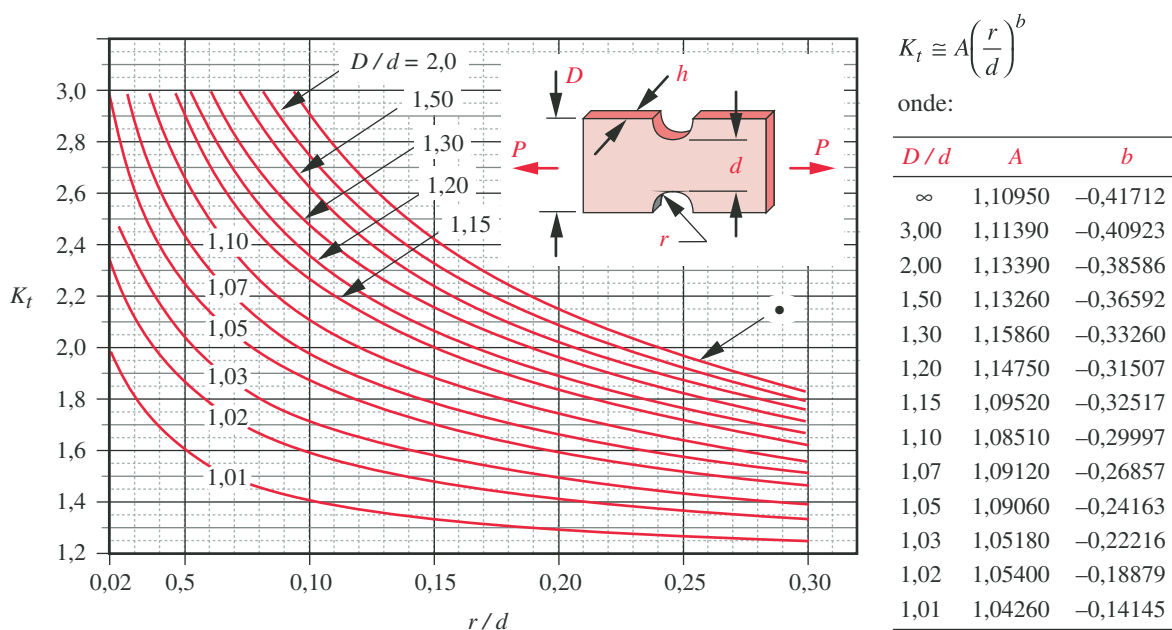



FIGURA C-11

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para uma barra plana entalhada em tração axial.

$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

onde:

D/d	A	b
∞	0,97079	–0,35672
3,00	0,97194	–0,35047
2,00	0,96801	–0,34915
1,50	0,98315	–0,33395
1,30	0,98288	–0,32606
1,20	0,99055	–0,31319
1,15	0,99304	–0,30263
1,10	1,00710	–0,28379
1,07	1,01470	–0,26145
1,05	1,02500	–0,24008
1,03	1,02940	–0,21161
1,02	1,03740	–0,18428
1,01	1,06050	–0,13369

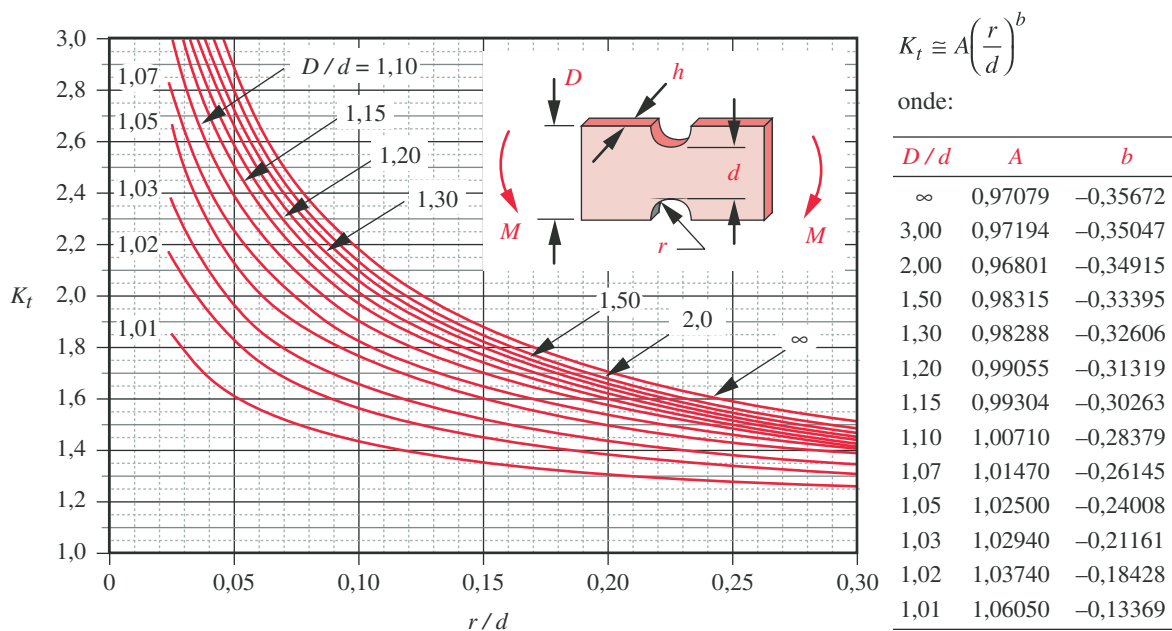
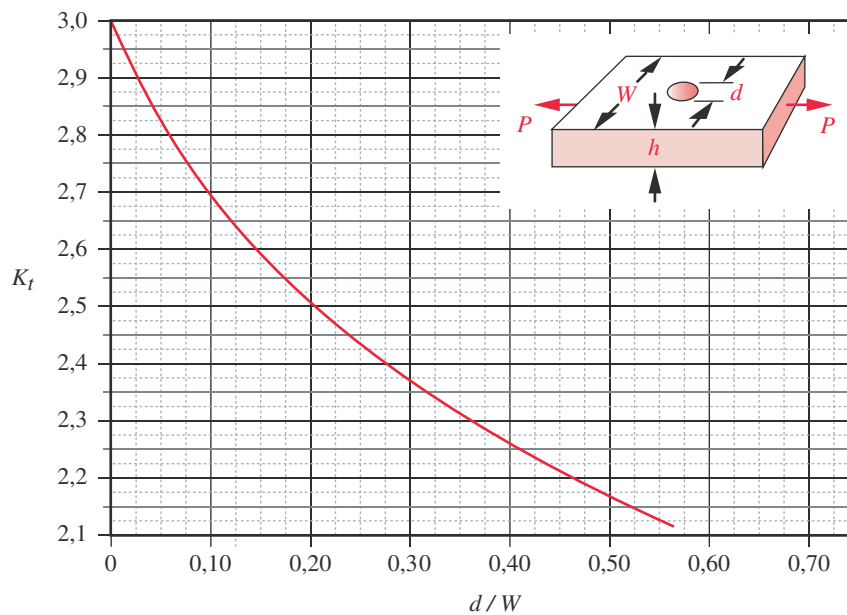
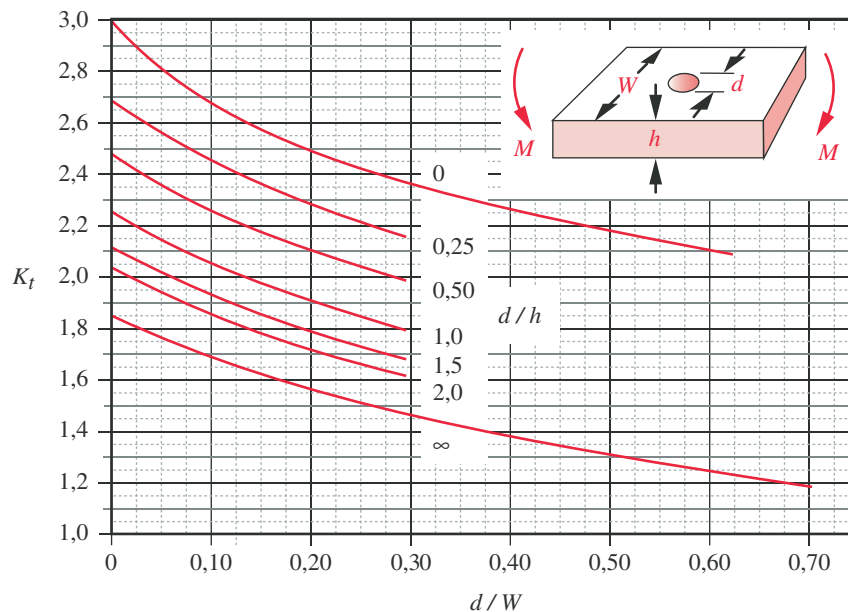



FIGURA C-12

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para uma barra plana entalhada em flexão.

para $\frac{d}{W} \leq 0{,}65$

$$K_t \cong 3{,}0039 - 3{,}753\frac{d}{W} + 7{,}9735\left(\frac{d}{W}\right)^2 - 9{,}2659\left(\frac{d}{W}\right)^3 + 1{,}8145\left(\frac{d}{W}\right)^4 + 2{,}9684\left(\frac{d}{W}\right)^5$$

FIGURA C-13

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para uma barra plana com orifício transversal em tração axial.

para $\frac{d}{h} \Rightarrow 0$ e $\frac{d}{W} \leq 0{,}65$:

$$K_t \cong 2{,}9947 - 3{,}4833\frac{d}{W} + 5{,}8268\left(\frac{d}{W}\right)^2 - 4{,}1986\left(\frac{d}{W}\right)^3$$

para $\frac{d}{h} \geq 0{,}25$: $K_t \cong A e^{[b(d/W)]}$

onde:

d/h	A	b
0,25	2,68750	–0,75128
0,50	2,46620	–0,77215
1,00	2,24000	–0,78739
1,50	2,02430	–0,80821
2,00	2,10560	–0,79878
∞	1,80820	–0,66702

FIGURA C-14

Fator geométrico de concentração de tensão K_t para uma barra plana com orifício transversal em flexão.

APÊNDICE D

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS SELECIONADOS

O manual de soluções em PDF e um conjunto completo dos arquivos do *Mathcad* para solução dos problemas estão disponíveis para professores que adotarem esta obra cadastrados no site da Bookman Editora (www.bookman.com.br).

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO AO PROJETO

1-4 1 000 lb_f, 31,081 slug, 2,59 blob, 453,592 kg, 4 448,2 N.

1-5 25,9 lb_f.

1-6 220,5 lb_f, 220.5 lb_m, 6,85 slug, 0,571 blob, 980,7 N.

CAPÍTULO 2 MATERIAIS E PROCESSOS

2-6 $E = 207$ GPa, $U = 2{,}7$ N-m, aço.

2-8 $E = 207$ GPa, $U = 1{,}3$ N-m, magnésio.

2-9 $E = 16{,}7$ Mpsi, $U_{el} = 300$ psi, titânio.

2-12 $U_T = 82{,}7$ MPa, $U_R = 0{,}41$ MPa.

2-14 $S_{ut} = 170$ kpsi, 359HV, 36,5HRC.

2-16 Ferro e carbono, 0,95% carbono, podem ser endurecidos completamente ou superficialmente sem carbonização.

2-27 $S_y = 88{,}1$ kpsi, $S_y = 607$ MPa.

2-34 O metal mais comumente usado é o zinco. O processo é chamado “galvanização” e é feito por eletrorrecobrimento ou imersão a quente.

CAPÍTULO 3 DETERMINAÇÃO DE CARGAS

3-3 T = 255 N-m na roda dentada, T = 90 N-m no braço, M = 255 N-m no braço.

3-6 55.114 N.

3-7 12.258 N.

3-8 ω_n = 31,6 rad/s, ω_d = 30,1 rad/s.

3-10 $R_1 = V$ = −1.821 N @ 0 a 0,7 m, R_1 = 2.802 N, M = −1.275 N-m @ 0,7 m.

3-11 Força dinâmica de 3.056 N e 408 mm de deflexão. V = −5.677 N @ 0 a 0,7 m, M = −3.973 N-m @ 0,7 m, R_1 = 5.676 N, R_2 = 8.733 N.

3-15 μ = 0,025.

3-18 Tombamento começa a 18,7 mph; carga escorrega de 14,8 a 18,3 mph.

3-22 (a) 897 N, (b) 3 592 N.

3-23 (a) R_1 = 264 N, R_2 = 316 N, V = −316 N, M = 126 N-m.

3-24 (a) R_1 = 620 N, M_1 = 584 N-m, V = 620 N, M = −584 N-m.

3-25 (a) R_1 = −353 N, R_2 = 973 N, V = 580 N, M = −216 N-m.

3-27 (a) R_1 = 53.895 N, V = 53 895 N, M = −87.040 N-m.

3-34 Fila (a) V_{max} = 1000 lb a x = 16 para 18 in, M_{max} = 2000 lb a x = 16 in.

3-48 ω_n = 10,1 Hz.

CAPÍTULO 4 TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DEFLEXÃO

4-1 σ_1 = 1 207 psi, σ_2 = 0, σ_3 = −207 psi, τ_{max} = 707 psi.

4-4 (a) σ_1 = 114 MPa, σ_2 = 0, σ_3 = 0 MPa, τ_{max} = 57 MPa.

(b) 9,93 MPa.

(c) 4,41 MPa.

(d) σ = 53,6 MPa, τ = 1,73 MPa.

(e) σ_1 = 72,8 MPa, σ_2 = 0, σ_3 = 0, τ_{max} = 36,4 MPa.

4-6 (a) σ_1 = 1 277,8 MPa, σ_2 = 0, σ_3 = 0, τ_{max} = 639 MPa.

(b) 111,6 MPa.

(c) 49,6 MPa.

(d) σ = 540 MPa, τ = 1,7 MPa.

(e) σ_1 = 636 MPa, σ_2 = 0, σ_3 = 0, τ_{max} = 318 MPa.

4-7 Diâmetro externo = 0,375 in, diâmetro interno = 0,230 in.

4-8 199 mm.

4-10 Tensão principal de 24,5-MPa, deflexão de −128 mm.

4-11 Tensão de 76 MPa, deflexão de −400 mm.

4-15 Diâmetro do pino de 4,5 mm.

4-18 Força em cada barra 13254 lb; força total 132536 lb; deflexão 0,36 in.

4-19 Diâmetro do pino 2,125 in; raio externo 2,375 in.

4-22 (a) 5,72 MPa. (b) 22,87 MPa.

4-23 Fila (a) $R_1 = 264$ N, $R_2 = 316$ N, $V = -316$ N no intervalo $b \le x \le l$, $M = 126$ N-m @ $x = b$, $\theta = 0,33$ grau, $y = -1,82$ mm, $\sigma_{max} = 88,7$ MPa.

4-24 Fila (a) $R_1 = 620$ N, $M_1 = 584$ N-m, $V = 620$ N @ $x = 0$, $M = -584$ N-m @ $x = 0$, $\theta = -2,73$ grau, $y = -32,2$ mm, $\sigma_{max} = 410$ MPa.

4-25 Fila (a) $R_1 = -353$ N, $R_2 = 973$ N, $V = 578$ N @ $x = b$, $M = -216$ N-m @ $x = b$, $\theta = -0,82$ grau, $y = -4,81$ mm, $\sigma_{max} = 152$ MPa.

4-26 Fila (a) $R_1 = 112$ N, $R_2 = 559$ N, $R_3 = -52$ N, $V = -428$ N @ $x = b$, $M = 45$ N-m @ $x = a$, $\theta = 0,06$ grau, $y = -0,02$ mm, $\sigma_{max} = 31,5$ MPa.

4-29 Fila (a) 307,2 N/mm.

4-30 Fila (a) 17,7 N/mm.

4-31 Fila (a) 110,6 N/mm.

4-32 Fila (a) 2 844 N/mm.

4-33 Fila (a) $\sigma_1 = 21,5$ MPa @ A, $\sigma_1 = 16,1$ MPa @ B.

4-34 Fila (a) $y = -1,62$ mm.

4-35 Fila (a) $k = 31$ N/mm.

4-37 $e = 0,84$ mm, $\sigma_i = 410$ MPa, $\sigma_o = -273$ MPa.

4-41 (a) 38,8 MPa, (b) 11,7 MPa.

4-49 Fila (a) Johnson – parte: (a) 1,73 kN, (b) 1,86 kN, (c) 1,94 kN, (d) Euler 676 N.

4-50 Fila (a) Euler – parte: (a) 5,42 kN, (b) 8,47 kN, (c) 12,8 kN, (d) 1,23 kN.

4-51 Fila (a) Johnson – parte: (a) 57,4 kN, (b) 58,3 kN, (c) 58,9 kN, (d) 48,3 kN.

4-52 Fila (a) parte: (a) 18,6 kN, (b) 18,7 kN, (c) 18,8 kN, (d) 17,9 kN.

4-69 $\sigma_i = 132$ MPa, $\sigma_o = -204$ MPa.

4-75 Fila (a) $\sigma_{nom} = 40$ Mpa, $K_t = 1,838$, $\sigma_{max} = 73,5$ Mpa.

CAPÍTULO 5 TEORIAS DE FALHA ESTÁTICA

5-1 Fila (a) $\sigma_1 = 1\,207$ psi, $\sigma_2 = 0$ psi, $\sigma_3 = -207$ psi, $\tau_{13} = 707$ psi, $\sigma' = 1\,323$ psi.

Fila (h) $\sigma_1 = 1\,140$ psi, $\sigma_2 = 250$ psi, $\sigma_3 = 110$ psi, $\tau_{13} = 515$ psi, $\sigma' = 968$ psi.

5-4 (a) $N = 2,6$, (b) $N = 30,2$, (c) $N = 39,3$, (d) $N = 5,6$, (e) $N = 4,1$.

5-6 (a) $N = 0,23$, (b) $N = 2,7$, (c) $N = 3,5$, (d) $N = 0,56$, (e) $N = 0,47$.

5-7 Para $N = 3,5$, diâmetro externo = 0,375 in, diâmetro interno = 0,281 in.

5-8 Diâmetro interno = 198 mm.

5-10 $N = 5,3$.

5-11 $N = 1,7$.

5-15 $N = 1,0$ por definição, se tensão = resistência.

5-17 $N = 3,5$.

5-19 Pino com 2,250 in de diâmetro, 2,250 in de raio externo.

5-22 (a) $N = 40,4$ (b) $N = 10,1$.

5-23 Fila (a) – parte: (a) $N = 3,4$, (b) $N = 1,7$.

5-24 Fila (a) – parte: (a) $N = 0,73$, (b) $N = 0,37$.

5-25 Fila (a) – parte: (a) $N = 2$, (b) $N = 1$.

5-26 Fila (a) – parte: (a) $N = 9,5$, (b) $N = 4,8$.

5-27 (a) $a = 166$ mm, $b = 94$ mm, $N = 1,5$, (b) $a = 208$ mm, $b = 70$ mm, $N = 1,5$.

5-32 Mohr modificado, $N = 1,6$.

5-33 Fila (a) $\sigma' = 30,2$ MPa no ponto A, $\sigma' = 27,9$ MPa no ponto B.

5-34 Fila (a) teoria da energia de distorção: $N = 13,2$ no ponto A, $N = 14,3$ no ponto B, teoria do cisalhamento máximo: $N = 11,6$ no ponto A, $N = 12,4$ no ponto B, teoria da tensão normal máxima: $N = 18,6$ no ponto A, $N = 24,8$ no ponto B.

5-35 Fila (a) teoria de Coulomb-Mohr: $N = 13,4$ no ponto A, $N = 16,1$ no ponto B, teoria de Mohr modificada: $N = 16,3$ no ponto A, $N = 21,7$ no ponto B.

5-37 (a) $N = 1,7$ na fibra mais interna, $N = 2,6$ na fibra mais externa; (b) $N = 1,0$ na fibra mais interna, $N = 4,4$ na fibra mais externa.

5-38 $N = 1,5$.

5-39 Semilargura da trinca = 0,216 in.

5-41 (a) $N = 9,4$, (b) $N = 24,5$.

5-65 (a) $N_a = 1,8$, (b) $N_b = 2,6$.

5-68 $d = 1,500$ in.

CAPÍTULO 6 TEORIAS DE FALHA POR FADIGA

6-1 Fila (a) $\Delta\sigma = 1.000$, $\sigma_a = 500$, $\sigma_m = 500$, $R = 0$, $A = 1,0$.
Fila (c) $\Delta\sigma = 1.000$, $\sigma_a = 500$, $\sigma_m = 1.000$, $R = 0,33$, $A = 0,50$.
Fila (e) $\Delta\sigma = 1.500$, $\sigma_a = 750$, $\sigma_m = -250$, $R = -2,0$, $A = -3,0$.

6-3 $N_f = 0,31$.

6-6 (a) 0,14, (b) 1,17, (c) 1,6, (d) 0,24, (e) 0,25.

6-7 Para $N_f = 1,5$, diâmetro externo = 0,375 in, diâmetro interno = 0,299 in. Arredondar para diâm. interno = 0,281 in caso $N_f = 1,8$.

6-8 Diâmetro interno = 190 mm supondo usinada, 99,9% de confiabilidade e temperatura ambiente.

6-10 $N_f = 2,4$.

6-11 $N_f = 0,79$.

6-15 Fila (a) $a = 0,062$ $in^{0,5}$, $q = 0,89$, $K_f = 3,05$.

6-17 $N_f = 2,7$ supondo forjada, 99,99% de confiabilidade e temperatura ambiente.

6-19 Pino de diâmetro 2,750 in e raio externo 2.625 in outside radius (usinada, 90% confiabilidade e 37°C).

6-22 (a) $N_f = 21,3$, (b) $N_f = 5,3$ supondo usinada, 99,999% de confiabilidade e 37°C.

6-23 Fila (a) Use um material com $S_{ut} = 468$ MPa (supondo $C_{temp} = C_{superf} = C_{conf} = 1$).

6-24 Fila (a) Use um material com $S_{ut} = 676$ MPa (supondo $C_{temp} = C_{superf} = C_{conf} = 1$).

6-25 Fila (a) Use um material com $S_{ut} = 550$ MPa (supondo $C_{temp} = C_{superf} = C_{conf} = 1$).

6-26 Fila (a) Use um material com $S_{ut} = 447$ MPa ($C_{temp} = C_{conf} = 1$, $C_{superf} = 0{,}895$).

6-27 (a) $a = 190$ mm, $b = 100$ mm, $N = 2{,}1$, (b) $a = 252$ mm, $b = 100$ mm, $N = 2$ (ambos assumindo usinada, 90% de confiabilidade e 40°C).

6-29 $N_f = 2{,}6$ assumindo usinada, 99,999% de confiabilidade e 37°C.

6-31 $N_f = 1{,}8$ assumindo usinada, 99,999% de confiabilidade e 37°C.

6-33 Fila (a) use um material com $S_{ut} = 362$ MPa (usinada, 50% de confiabilidade e 37°C).

6-34 Fila (a) use um material com $S_{ut} = 291$ para $N_f = 1{,}5$ MPa (usinada, 50% de confiabilidade e 37°C).

6-37 (a) $N_f = 1{,}8$, (b) $N_f = 0{,}92$ supondo usinada, 90% de confiabilidade e 37°C.

6-39 $N_f = 1{,}9$ usando o método SEQA e supondo eixo retificado, 50% de confiabilidade e 37°C.

6-41 (a) $N_f = 3{,}3$, (b) $N_f = 8{,}6$ supondo usinada, 99,999% de confiabilidade e 37°C.

6-47 $N_f = 1{,}5$ supondo usinada, 90%de confiabilidade e 60°C.

6-52 $t_{min} = 3{,}2$ mm.

6-64 Fila (a) $\sigma_m = 0{,}0$ MPa, $\sigma_a = 251{,}9$ MPa.

CAPÍTULO 7 FALHA DE SUPERFÍCIE

7-1 $A_r = 0{,}333$ mm^2.

7-2 $\mu = 0{,}4$.

7-3 $N = 4{,}6E6$.

7-4 $\sigma_1 = -61$ kpsi, $\sigma_2 = -61$ kpsi, $\sigma_3 = -78$ kpsi.

7-8 Largura total 64,4 mm.

7-10 Largura total 0,15 mm.

7-13 (a) seco 19,6 min, (b) molhado 9,8 min.

7-16 Área de contato 1 mm diâmetro, $\sigma_{zbola} = -1.900$ MPa, $\sigma_{zplaca} = -1.900$ MPa.

7-18 Largura total de contato 0,166, $\sigma_{zcilindro} = \sigma_{xcilindro} = -123$ MPa, $\sigma_{zplaca} = \sigma_{xplaca} = -123$ MPa.

7-20 Semidimensões da área de contato: $0{,}933 \times 0{,}713$ mm, $\sigma_1 = -5{,}39$ GPa, $\sigma_2 = -5{,}81$ GPa, $\sigma_3 = -7{,}18$ GPa.

7-22 (a) $\sigma_1 = -66{,}9$ MPa, $\sigma_2 = -75{,}2$ MPa, $\sigma_3 = -79{,}0$ MPa, (b) $\sigma_1 = -106$ MPa, $\sigma_2 = -119$ MPa, $\sigma_3 = -125$ MPa.

7-23 $\sigma_1 = -24.503$ psi, $\sigma_2 = -30.043$ psi, $\sigma_3 = -57.470$ psi.

7-39 $t = 4{,}7$ min.

7-42 As principais tensões são máximas na superfície. São elas: $\sigma_1 = -276{,}7$ MPa, $\sigma_2 = -393{,}3$ MPa, $\sigma_3 = -649{,}0$ MPa. A tensão máxima de cisalhamento é $\tau_{13} = 186{,}1$ MPa.

CAPÍTULO 10 EIXOS, CHAVETAS E ACOPLAMENTOS

10-1 Fila (a) $d = 1{,}188$ in, suposto usinado, 99% de confiabilidade e 37°C.

10-2 Fila (a) $d = 48{,}6$ mm, suposto usinado, 99% de confiabilidade e 30°C.

10-4 Fila (a) $y = 0{,}003\,6$ in, $\theta = 0{,}216$ grau.

10-5 Fila (a) $y = -5{,}7$ µm, $\theta = 1{,}267$ grau.

10-6 Fila (a) 3/8 in chaveta quadrada, 0,500 in em comprimento, $N_f = 2{,}1$, $N_{mancal} = 2{,}1$.

10-8 Eixo diâmetro interno = 191 mm, suposto usinado, 99,9% confiabilidade e 30°C.

10-9 Fila (a) $d = 1{,}188$ in, supondo um raio de ranhura de 0,015 in, usinado, 99% de confiabilidade e 37°C.

10-11 Fila (a) 0,0007 a 0,0021 in de interferência sobre intervalo de tolerância.

10-13 Fila (a) 2.102 rad/s ou 20.075 rpm, ou 334,5 Hz.

10-15 Fila (a) mín = 0, média = 11,9 hp, máx = 23,8 hp.

10-16 Fila (a) mín = 0, média = 5,2 kW, máx = 10,5 kW.

10-17 Fila (a) $N = 0{,}61$ na chaveta da extremidade direita do rolo, $\theta = 0{,}20$ grau, $f_n = 1$ 928 Hz.

10-18 Fila (a) $y = -30{,}0$ µm a 22,9 µm.

10-19 Fila (a) $d = 1{,}337$ in, $N_A = 2{,}0$, $N_B = 3{,}1$.

10-37 $\delta_{min} = 0{,}06$ mm, $\delta_{max} = 0{,}12$ mm.

10-38 $r_i = 1{,}00$ in, $r_o = 14{,}66$ in, $t = 0{,}800$ in.

CAPÍTULO 11 MANCAIS E LUBRIFICAÇÃO

11-1 Fila (a)—parte (a) $d = 1{,}188$ in, $l = 1{,}485$ in, $C_d = 1{,}8E{-}3$ in, $R_L = 125$ lb, $R_R = 1125$ lb, $\eta_L = 0{,}204$ µreyn, $\eta_R = 1{,}84$ µreyn, $p_{médL} = 71$ psi, $p_{médR} = 638$ psi, $T_{r_L} = 0{,}15$ lb-in, $T_{r_R} = 1{,}38$ lb-in, $\Phi_L = 0{,}004$ hp, $\Phi_R = 0{,}033$ hp.

Parte (b) #6300 na extremidade esquerda da 1,4E9 ciclos L_{10} de vida no mancal da esquerda e mancal #6306 na extremidade esquerda da 8,8E7 ciclos L_{10} de vida no mancal direito.

11-3 267 cP.

11-5 0,355 in-lb.

11-6 10,125 µm.

11-7 $T_r = 3{,}74$ N-m, $T_0 = 2{,}17$ N-m, $T_s = 2{,}59$ N-m, $\Phi = 979$ W.

11-8 $d = 220$ mm, $l = 165$ mm, $C_d = 0{,}44$ mm, $R_L = R_R = 26{,}95$ kN, $\eta = 181$ cP, $p_{méd} = 743$ kPa, $T_r = 12{,}9$ N-m, $\Phi = 67{,}7$ W.

11-10 $h_{min} = 4{,}94$ µm.

11-14 $\eta = 13$ cP, $T_s = 519$ N-mm, $T_0 = 325$ N-mm, $T_r = 699$ N-mm, $\Phi = 183$ W, P = 19,222 kN.

11-17 Fila (a)—parte (a) $d = 40$ mm, $l = 30$mm, $C_d = 0{,}04$ mm, $R_L = 6.275$ N, $R_R = 7$ 525 N, $\eta_L = 20{,}7$ cP, $\eta_R = 24{,}8$ cP, $p_{méd_L} = 5.229$ kPa, $p_{médR} = 6.271$ kPa, $T_{r_L} = 468$ N-m, $T_{r_R} = 561$ N-m, $\Phi_L = 88{,}2$ W, $\Phi_R = 106$ W.

Parte (b) mancal #6308 na extremidade esquerda da 1,41 E8 ciclos L_{10} de vida no mancal esquerdo e mancal #6309 na extremidade esquerda da 1,58 E8 ciclos L_{10} de vida no mancal direito.

11-20 Espessura específica de filme = 0,53 – lubrificação limite ou de borda.

11-33 Fila (a) esquerda, #6300; direita, #6314.

11-36 Fila (a) esquerda, #6300; direita, #6320.

CAPÍTULO 12 ENGRENAGENS CILÍNDRICAS RETAS

12-1 d_p = 5,4 in, adendo = 0,2 in, dedendo = 0,25 in, OD = 5,8 in, p_c = 0,628 in.

12-3 1,491.

12-5 30,33 graus.

12-7 7,159 : 1.

12-9 96:14 e 96:14 composta da 47.02:1.

12-11 N_{anel} = 75 t, razão entre braço e engrenagem sol = 1 : 3,273.

12-14 7.878 in-lb no eixo do pinhão, 19.524 in-lb no eixo da engrenagem.

12-16 $p_d = 3$ e F = 4,25 in resulta em $N_{pinhão}$ = 5,4 e $N_{engrenagem}$ = 2,0.

12-18 $p_d = 4$ e F = 4,125 in resulta em $N_{pinhão}$ = 3,5 e $N_{engrenagem}$ = 2,0.

12-20 202 N-m (1.786 in-lb) no eixo da engrenagem sol, 660 N-m (5.846 in-lb) no eixo do braço.

12-23 $p_d = 3$ e F = 3,500 in resulta em $N_{pinhão}$ = 7,7 e $N_{engrenagem}$ = 2,8.

12-25 $p_d = 4$ e F = 4,000 in resulta em $N_{pinhão}$ = 4,8 e $N_{engrenagem}$ = 1,8.

12-27 T_1 = 1.008 N-m, T_2 = 9.184 N-m, T_3 = 73.471 N-m, T_4 = 661.236 N-m.

12-28 $p_d = 3$, F = 4,500 in.

12-29 p_d = 1,5, F = 9,375 in.

12-30 p_d = 0,75, F = 17 in.

12-31 104:12 e 144:16 composta dá exatamente 78:1.

12-52 T_1 = 40,9 N-m, T_2 = 295 N-m, T_3 = 2172 N-m.

12-53 F = 1,250 in, $p_d = 8$.

CAPÍTULO 13 ENGRENAGENS HELICOIDAIS, CÔNICAS E SEM-FINS

13-1 d_p = 5.4 in, adendo = 0,200 in, dedendo = 0,250 in, diâmetro externo = 5,8 in, p_t = 0,628 in, p_n = 0,544 in, p_a = 1,088 in.

13-3 m_p = 1,491, m_F = 0,561.

13-5 α_g = 83,66°, α_p = 6,34°, d_g = 21 in, d_p = 2,33 in, $W_{ag} = W_{rp}$ = 25 lb, $W_{rg} = W_{ap}$ = 2,8 lb.

13-7 α_g = 78,69°, α_p = 11,31°, d_g = 11,429 in, d_p = 2,286 in, W_{ag} = 60,5 lb, W_{ap} = –169,64 lb, W_{rp} = 136,28 lb, W_{rg} = 209,01 lb.

13-9 l = 20 mm, λ = 7,26°, λ por dente = 3,63°, d_g = 140 mm, c = 95 mm, autobloqueante.

13-11 l = 5 mm, λ = 2,28°, λ por dente = 2,28°, d_g = 130,5 mm, c = 85,3 mm, autobloqueante.

13-12 T_w = 22,4 N-m, T_g = 492 N-m nominal, W_t = 7.028 N, atrito = 215 N, potência de saída disponível = 2,34 kW, potência de entrada nominal = 2,91 kW.

13-14 7.878 in-lb no pinhão, 19.524 in-lb na engrenagem.

13-16 $p_d = 3$ e $F = 3{,}25$ in resulta em $N_{pinhão} = 5{,}6$ e $N_{engrenagem} = 2{,}0$.

13-18 $p_d = 4$ e $F = 2{,}75$ in resulta em $N_{pinhão} = 2{,}8$ e $N_{engrenagem} = 1{,}6$.

13-20 $p_d = 18$ e $F = 1$ in resulta em $N_{pinhão} = 2{,}0$ – flexão, com $N_{engrenagem} = 13{,}6$ – flexão.

13-23 $p_d = 16$ e $F = 1$ in resulta em $N_{pinhão} = 1{,}4$ – falha superficial que limita o projeto.

13-27 Potência nominal de entrada = 2,11 hp, potência disponível de saída = 1,69 hp, torque nominal de saída = 1 290 lb-in.

13-49 $F = 1{,}375$ in, $p_d = 10$.

CAPÍTULO 14 PROJETO DE MOLAS

14-1 $k = 1{,}6$ N/mm.

14-3 $S_{ys} = 110\,931$ psi, $S_{us} = 148.648$ psi.

14-4 $S_{fs'} = 85{,}6$ kpsi.

14-6 $C = 10$, $k = 1{,}01$ N/mm.

14-7 $f_n = 363{,}4$ Hz.

14-10 $k = 7.614$ N/m, $f_n = 1{,}39$ Hz.

14-11 $d = 0{,}125$ in, $D = 0{,}94$ in, $L_f = 3{,}16$ in, $k = 36$ lb/in, 13,75 espiras RH, fio de música, extremidades esquadrejadas e esmerilhadas, sem jateamento, ajustada.

14-13 $N_a = 19{,}75$, D = 1,37 in, $L_f = 7{,}84$ in, $L_{fechada} = 6{,}79$ in, $k = 266{,}6$ lb/in, $y_{inicial} =$ 0,19 in, orifício = 1,75 in.

14-17 $d = 3{,}5$ mm, $D = 28$ mm, $L_f = 93{,}63$ mm, $k = 5876$ N/m, 12,75 espiras, fio de música, ganchos padronizados. $N_y = 2{,}2$ fadiga de torção no gancho, $N_f = 1{,}7$ fadiga de flexão no gancho, $N_{ressonância} = 5{,}5$.

14-19 $d = 6{,}5$ mm, $D_o = 65$ mm, $L_f = 171$ mm, $N_{tot} = 10{,}75$ espiras, $N_y = 1{,}6$ fechado, $N_f = 1{,}3$, $N_{ressonância} = 9{,}3$.

14-21 $d = 5$ mm, $D = 40$ mm, $L_f = 116{,}75$ mm, $k = 8967$ N/m, 13 espiras RH, fio de música, extremidades esquadrejadas e esmerilhadas, sem jateamento, ajustada.

14-22 $d = 16$ mm, $D = 176$ mm, $k = 1.600$ N-m/rev, 4,5 voltas RH, 40 mm extremidades retas, fio temperado em óleo A229, sem jateamento, sem carga.

14-24 $d = 15$ mm, $D = 124{,}5$ mm, $k = 248$ N-m/rev, 31 voltas RH, 40 mm extremidades retas, fio temperado em óleo A229, sem jateamento, sem carga.

14-26 $d_o = 39{,}55$ mm, $d_i = 19{,}77$ mm, $t = 0{,}76$ mm, $h = 1{,}075$ mm, $h/t = 1{,}414$, 1 mm deflexão em uso, $S_{ut} = 1\,700$ MPa, $N_s = 1{,}11$.

14-42 $D_o = 3{,}000$ in, $D_i = 1{,}500$ in, $t = 0{,}125$ in, $h = 0{,}050$ in.

14-44 Fio A228, $d = 0{,}125$ in, $D_o = 1{,}000$ in, $N_t = 15$, $L_f = 3{,}600$ in.

CAPÍTULO 15 PARAFUSOS E FIXADORES

15-2 Torque de subida = 42,68 lb-in, torque de descida = 18,25 lb-in, eficiência de elevação = 27,95%, eficiência de descida = 65,36%, parafuso de autotravamento.

15-4 Dois parafusos M12 × 1,75 bolts, classe ISO 8,8, $F_{pré\text{-}carga} = 59\%$ da resistência de prova, $N_y = 1{,}7$. $N_{sep} = 2{,}5$.

15-6 Dois parafusos M24 × 3, classe ISO 12,9, $F_{pré\text{-}carga}$ = 55% da resistência de prova, $N_y = 1{,}7$, $N_{sep} = 1{,}6$.

15-7 $N_y = 1{,}4$, $N_{sep} = 13{,}7$.

15-9 $N_f = 1{,}3$, $N_y = 1{,}5$, $N_{sep} = 8{,}9$.

15-11 1.252 in-lb.

15-13 718 in-lb.

15-17 (a) $K_{ef} = 5{,}04\,E9$ N-m, alumínio domina.

(b) $K_{ef} = 9{,}52\,E9$ N-m, aço domina.

(c) $K_{ef} = 2{,}73\,E8$ N-m, borracha domina.

(d) $K_{ef} = 2{,}66\,E8$ N-m, borracha domina.

(e) $K_{ef} = 9{,}04\,E9$ N-m, nenhum material domina.

15-18 (a) $K_{ef} = 2{,}74\,E7$ N-m, alumínio domina.

(b) $K_{ef} = 5{,}18\,E7$ N-m, aço domina.

(c) $K_{ef} = 3{,}73\,E5$ N-m, borracha domina.

(d) $K_{ef} = 3{,}70\,E5$ N-m, borracha domina.

(e) $K_{ef} = 4{,}92\,E7$ N-m, nenhum material domina.

15-20 Use 10 M12 × 1,75, classe ISO 8,8 parafusos de cabeça, torque a 90% da resistência de prova em um círculo de parafusos de 107,5 mm de diâmetro. $N_f = 1{,}3$, $N_{sep} = 34$, $N_y = 1{,}2$ dinâmica e 1,2 estática.

15-23 Fila (a) – Quatro parafusos de cabeça M5 × 0,8 × 20 mm de comprimento, classe 4,6, $F_{pré\text{-}carga}$ =1,72 kN, (54% da prova), carga no parafuso de topo: 1,73 kN, $N_{sep} = 58$, $N_y = 2{,}0$.

15-24 Fila (a) – Quatro parafusos de cabeça M4 × 0,7 × 20 mm de comprimento, classe 4,8, $F_{pré\text{-}carga}$ = 2,04 kN, (75% da prova), carga nos parafusos de topo quando a força é máxima e nos parafusos de baixo quando a força é mínima: 2,05 kN, carga nos parafusos de topo quando a força é mínima e nos parafusos de baixo quando a força é máxima: 2,05 kN, $N_y = 1{,}5$, $N_{sep} = 69$, $N_f = 10$.

15-25 Fila (a) – Quatro parafusos cabeça M4 × 0,7 × 20 mm de comprimento, classe 4,8, $F_{pré\text{-}carga}$ = 2,04 kN, (75% da prova), carga nos parafusos de topo quando a força é máxima e nos parafusos de baixo quando a força é mínima: 2,05 kN, carga nos parafusos de topo quando a força é mínima e nos parafusos de baixo quando a força é máxima: 2,05 kN, $N_y = 1{,}5$, $N_{sep} = 69$, $N_f = 10$.

15-39 $d = 8$ mm: número de roscas = 4,6.

15-41 Classe 4,6: $F_{ut} = 98$ kN.

CAPÍTULO 16 SOLDAGEM

16-1 O topo da JPC de uma solda em tensão desenvolve a resistência completa da seção: P_{max} = 180.000 lb.

16-3 Comprimento do suporte (solda) = 3,592 in.

16-5 Carga dinâmica máxima = 525 lb.

16-6a Tamanho da solda necessário = 3/16 in.

16-7a Tamanho da solda necessário = 1/4 in.

16-9 Tamanho da solda necessário = 10 mm.

CAPÍTULO 17 EMBREAGENS E FREIOS

17-1 $T = 380$ N-m, $p_{max} = 1{,}819$ MPa, metal de forro moldado ou sinterizado servira.

17-3 $d_o = 140$ mm, $d_i = 80$ mm, $\Phi = 7{,}85$ kW.

17-5 $N = 7$, $d_o = 104$ mm, $d_i = 60$ mm, $\Phi = 12{,}6$ kW.

17-7 (a) $T = 10{,}7$ N-m, $F_a = 798$ N,

(b) Haverá autotravamento quando $c = 233$ mm.

17-11 (a) $T = 30{,}5$ N-m (15,7 na sapata de cima, 14,8 na sapata de baixo), $F_a = 1353$ N.

(b) Haverá autotravamento quando $c = 320$ mm.

17-13 $T = 26$ N-m, $F_a = 1\ 689$ N.

17-15 $T = 56{,}5$ N-m (32,5 na sapata de cima, 24 na sapata de baixo), $F_a = 2\ 194$ N.

17-17	(a)	sapata curta:	$T = 11{,}3$ N-m,	$F_a = 806$ N,
		sapata longa:	$T = 11{,}2$ N-m,	$F_a = 750$ N.
	(b)	sapata curta:	$T = 15{,}1$ N-m,	$F_a = 1.075$ N,
		sapata longa:	$T = 14{,}8$ N-m,	$F_a = 982$ N.
	(c)	sapata curta:	$T = 18{,}8$ N-m,	$F_a = 1.344$ N,
		sapata longa:	$T = 18{,}3$ N-m,	$F_a = 1.197$ N.
17-18	(a)	sapata curta:	$T = 21{,}8$ N-m,	$F_a = 806$ N,
		sapata longa:	$T = 19{,}6$ N-m,	$F_a = 750$ N.
	(b)	sapata curta:	$T = 29{,}1$ N-m,	$F_a = 1.075$ N,
		sapata longa:	$T = 25{,}8$ N-m,	$F_a = 982$ N.
	(c)	sapata curta:	$T = 36{,}3$ N-m,	$F_a = 1.344$ N,
		sapata longa:	$T = 31{,}9$ N-m,	$F_a = 1.197$ N.

17-21 Pivô de topo: $R_x = -392{,}7$ N, $R_y = -218{,}2$ N,

pivô de baixo: $R_x = -368{,}9$ N, $R_y = -123{,}0$ N.

17-23 $R_x = 1.005$ N, $R_y = -808$ N.

17-25 Pivô de topo: $R_x = 1\ 694$ N, $R_y = -45{,}3$ N,

Pivô de baixo: $R_x = 325$ N, $R_y = -147{,}7$ N.

17-29 $T = 131$ N-m.

17-31 Metal sinterizado, m = 0,30, $r_i = 40$ mm, $r_o = 70$ mm, $q = 90$ graus, $F = 2{,}83$ kN.

ÍNDICE

F

G

H

I

J

L

M

S

U

V

W

Z

PROPRIEDADES DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS

A = área

C = localização do centroide

I_x = segundo momento de área em relação ao eixo x

I_y = segundo momento de área em relação ao eixo y

k_x = raio de giração em relação ao eixo x

k_y = raio de giração em relação ao eixo y

J_z = segundo momento polar de área em relação ao eixo z passando por C

$$A = bh \qquad J_z = I_x + I_y$$

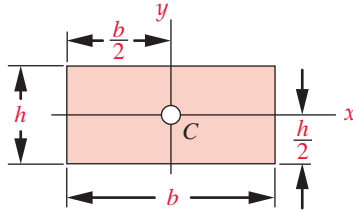
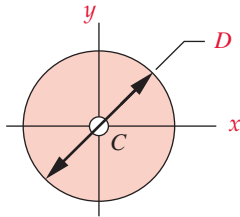
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(*a*) Retângulo

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \qquad J_z = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64} \qquad I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

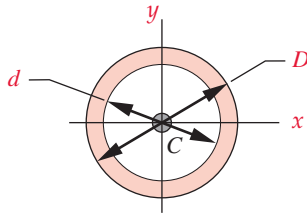
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(*b*) Círculo

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) \qquad J_z = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$I_x = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) \qquad I_y = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(*c*) Círculo vazado

$$A = \frac{\pi D^2}{8} \qquad J_z = I_x + I_y$$

$$I_x = 0{,}109\,8\,R^4 \qquad I_y = \frac{\pi}{8} R^4$$

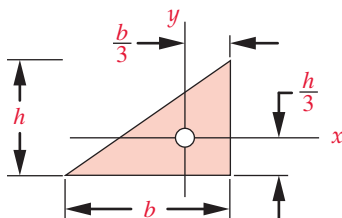
$$a = 0{,}424\,4\,R \qquad b = 0{,}5756\,R$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(*d*) Semicírculo sólido

$$A = \frac{bh}{2} \qquad J_z = I_x + I_y$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{b^3 h}{36}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(*e*) Triângulo retângulo

PROPRIEDADES DE MASSA DE FORMAS BÁSICAS

V = volume

m = massa

C_g = localização do centro de massa

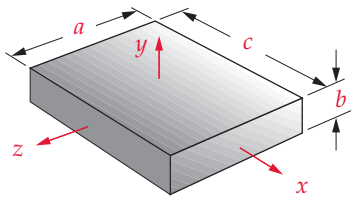
I_x = segundo momento de massa em relação ao eixo x

I_y = segundo momento de massa em relação ao eixo y

I_z = segundo momento de massa em relação ao eixo z

k_x = raio de giração em relação ao eixo x

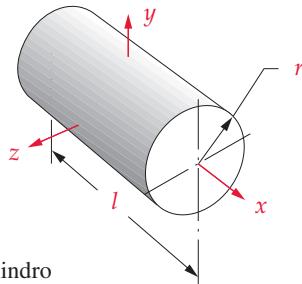
k_y = raio de giração em relação ao eixo y

k_z = raio de giração em relação ao eixo z

(*a*) Prisma retangular

$V = abc$ $\quad$ $m = V \cdot$ densidade de massa

$x_{Cg} @ \dfrac{c}{2}$ $\quad$ $y_{Cg} @ \dfrac{b}{2}$ $\quad$ $z_{Cg} @ \dfrac{a}{2}$

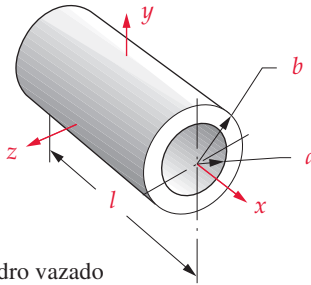
$$I_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{12} \qquad I_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12} \qquad I_z = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$

(*b*) Cilindro

$V = \pi r^2 l$ $\quad$ $m = V \cdot$ densidade de massa

$x_{Cg} @ \dfrac{l}{2}$ $\quad$ y_{Cg} no eixo $\quad$ z_{Cg} no eixo

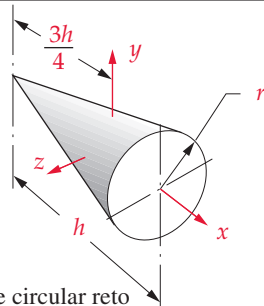
$$I_x = \frac{mr^2}{2} \qquad I_y = I_z = \frac{m(3r^2 + l^2)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

(*c*) Cilindro vazado

$V = \pi(b^2 - a^2)l$ $\quad$ $m = V \cdot$ densidade de massa

$x_{Cg} @ \dfrac{l}{2}$ $\quad$ y_{Cg} no eixo $\quad$ z_{Cg} no eixo

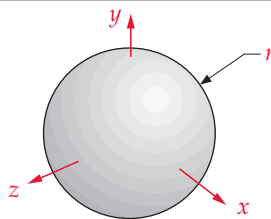
$$I_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{2} \qquad I_y = I_z = \frac{m(3a^2 + 3b^2 + l^2)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

(*d*) Cone circular reto

$V = \pi \dfrac{r^2 h}{3}$ $\quad$ $m = V \cdot$ densidade de massa

$x_{Cg} @ \dfrac{3h}{4}$ $\quad$ y_{Cg} no eixo $\quad$ z_{Cg} no eixo

$$I_x = \frac{3}{10}mr^2 \qquad I_y = I_z = \frac{m(12r^2 + 3h^2)}{80}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

(*e*) Esfera

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ $m = V \cdot$ densidade de massa

x_{Cg} no centro $\quad$ y_{Cg} no centro $\quad$ z_{Cg} no centro

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$$

$$k_x = k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$